

W Y Ż S Z A S Z K O Ł A I N Ż Y N I E R S K A
im. JANA JĘDRZEJA ŚNIADECKICH
w B y d g o s z c z y



ZESZYTY NAUKOWE

Nr 2

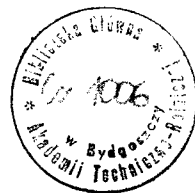
MECHANIKA-KONSTRUKCJE

ZESZYT 1

BYDGOSZCZ 1971



W Y Ż S Z A S Z K O Ł A I N Ż Y N I E R S K A
im. JANA JĘDRZEJA ŚNIADECKICH
w B y d g o s z c z y



ZESZYTY NAUKOWE

Nr 2

MECHANIKA-KONSTRUKCJE

ZESZYT 1

BYDGOSZCZ 1971

Redaktor naukowy: dr inż. Krzysztof Wernerowski

**Wydano za zgodą Rektora J. M. Wyższej Szkoły
Inżynierskiej w Bydgoszczy**

Opracowanie techniczne: mgr inż. Tadeusz Wysocki

S P I S T R E Ś C I

Przedmowa	4
Tadeusz B o g u m i ł : Przeszynek do syntezy silnie nieliniowych mechanicznych układów dyskretnych	5
Łudwik J a n i o k i, Tadeusz B o g u m i ł : Próba analizy wpływu niektórych parametrów konstrukcyjnych i technologicznych na pracę dyfuzora Dds	37
Andrzej J a z d o n, Józef S z a l a : Badania niezawodności i trwałości rowerów i motorowerów cz. 1	47
Zofia K a s p r o w i e z, Jerzy S t e i n b o r n, Wojciech W e i n e r : Analiza porównawcza metod obliczania ślasy śrubowych ciernych o prostokątnych powierzchniach styku	67
Zofia K a s p r o w i e z, Jerzy S t e i n b o r n, Wojciech W e i n e r : Analityczne wyznaczanie biegunowego momentu statycznego prostokątnych pól styku	81
Bronisław S i o ł k o w s k i : Wpływ sił poprzecznych, obrotów przekrojów poprzecznych i zjawiska żyroskopowego na częstość drgań własnych wirujących wałów	93
Wojciech W e i n e r : Regresja modułu sprężystości E_g przy sginaniu w zależności od naprężeń w epoksydowym tworzywie zbrojonym włóknem szklanym	113
Krzysztof W e r n e r o w s k i : Nośność łożyska powietrznego wzdłużnego na podstawie równania Naviera - Stokesa	127
Krzysztof W e r n e r o w s k i : Wybrane zagadnienia akustycznego tłumienia drgań łożysk powietrznych wzdłużnych	137

C O N T E N T S

Preface	4
Tadeusz B o g u m i ł : INFORMATION TO THE SYNTHESIS OF THE NON-LINEAR MECHANICAL DISCRETE SYSTEMS	5
Ludwik J a n i c k i, Tadeusz B o g u m i ł : A TRY OF AN ANALYSIS FOR THE INFLUENCE OF CERTAIN CONSTRUCTIVE AND TECHNOLOGICAL DIMENSIONS ON THE DdS DIFFUSER	37
Andrzej J a z d o n, Józef S z a l a : A STUDY ON RELIABILITY AND DURABILITY OF MOTOR-BICYCLES AND BICYCLES - Part I	47
Zofia K a s p r o w i c z, Jerzy S t e i n b o r n, Wojciech W e i n e r : THE ANALYSE OF THE CALCULATION METHODS OF SCREW JOINTS WITHIN THE PLANE OF RECTANGLE FIELD OF THE CONTACT	67
Zofia K a s p r o w i c z, Jerzy S t e i n b o r n, Wojciech W e i n e r : THE ANALYTIC EVALUATE OF THE STATIC POLAR MOMENT OF INERTIA FOR THE RECTANGLE FIELDS....	81
Bronisław S i o ł k o w s k i : INFLUENCE OF TRANSVERSE ENERGIES, TURNS OF TRANSVERSE SELECTIONS AND GYROSCOPIC PHENOMENON OVER FREQUENCY OF THEIR OWN VIBRATIONS OF ROTATING SHAFTS	93
Wojciech W e i n e r : THE DECREASE OF THE MODULS OF ELASTICITY AT FLEXURING DEPENDING ON THE STRESS IN THE GLASS REINFORCED APOXY RESINS	113
Krzysztof W e r n e r o w s k i : ARIAL BEARINGS CAPACITY ON THE GROUNDS OF NAVIER AND STOKES EQUATION	127
Krzysztof W e r n e r o w s k i : SELECTED PROBLEMS OF ACOUSTIC ABSORPTION OF AERIAL THRUST BEARING VIBRATION	137

Предисловие

1. Тадеуш Богумил : Вопросы синтеза механических дискретных систем с большой степенью нелинейности.
2. Людвик Яницки, Тадеуш Богумил : Анализ влияния некоторых конструктивных и технологических параметров на работу диффузора д.д.с.
3. Анджей Ядонь, Юзеф Шаля : Исследования безотказности действия и прочности мотовелосипедов и велосипедов. Часть I.
4. София Каспрович, Ежи Штейнборн, Войцех Вейнер : Сравнительный анализ метода расчёта винтовых фрикционных соединений с прямоугольными полями стыка.
5. София Каспрович, Ежи Штейнборн, Войцех Вейнер : Аналитическое расщепление полярного статического момента прямоугольных полей соединения.
6. Бронислав Сиолковски : Влияние поперечных сил, вращения, сечения и гироскопических моментов на собственную частоту вращающихся валов.
7. Войцех Вейнер : Спад модуля упругости E_0 при изгибе в зависимости от напряжений эпоксидной смолы армированной стекловолокном.
8. Кшиштоф Вернеровски : Грузоподъёмность воздушного подшипника на основании уравнения **Navier - Stokes**.
9. Кшиштоф Вернеровски : Отдельные проблемы акустической амортизации колебаний воздушных упорных подшипников.

PRZEDMOWA

Zespoły technicznych nauk podstawowych Wydziału Mechanicznego Wyższej Szkoły Inżynierskiej im. J. i J. Śniadeckich w Bydgoszczy rozwijają coraz szerszą działalność naukową.

W artykułach przedstawiono wyniki zasadniczych kierunków prac naukowych doświadczalnych i teoretycznych prowadzonych w Zespołach: Mechaniki Technicznej, Termodynamiki i Energetyki Ciepłej oraz Podstaw Konstrukcji. Metodyka badań i obliczeń uwzględnia najnowsze tendencje rozwojowe nauki. Prace są prowadzone w szerokim zakresie, z którego można wyodrębnić następujące główne zagadnienia:

- łożyska powietrzne, które stanowią nowoczesny etap rozwoju techniki użytkowania umożliwiający pracę w warunkach przekraczających możliwości najdoskonalszych rozwiązań tocznych,
- drgania mechaniczne głównie nieliniowe; zdecydowana większość charakterystyk sprężystych oraz szereg rozwiązań konstrukcyjnych daje również cechy nieliniowe, wobec tego ważne są rozwiązania dotyczące nieliniowości lub dokładnie zlinearyzowane,
- niezawodność i trwałość wyrobów będąca nową ważną dziedziną nauk stosowanych.

Wszystkim osobom, które przyczyniły się do wydania zeszytu naukowego, a w szczególności Prof. dr E. Karaśkie - wieczowi, Prof. dr W. Boguszowi, Doc. dr J. Czarneckiemu, Doc. dr K. Wieczorowskiemu składam serdeczne podziękowanie za udzieloną pomoc.

dr inż. K. Wernerowski

PRZYCZYNEK DO SYNTESY SILNIE NIELINIOWYCH

MECHANICZNYCH UKŁADÓW DYSKRETYCH

W oparciu o analizę istniejących metod badania mecha-
nicznych dyskretnych silnie nieliniowych układów drgających,
podano propozycję jakościowego ujęcia problemu w aspekcie syn-
tezy tych układów. Stosując kolejno postępowanie analityczne
i syntetyczne, uwypuklono zalety metody delta dla określenia
granicznych wartości na trajektorii fazowej. Przewidywane
dalsze badania ilościowe uzasadnią przydatność proponowanej me-
tody z projektowo-konstrukcyjnego punktu widzenia.

I. Wstęp

Badając konkretne drgające konstrukcje układów mecha-
nicznych spotykamy się coraz częściej z koniecznością uwzględ-
nienia występującej w nich nieliniowości parametrów określa-
jących ruch. Z problemem tym szczególnie często spotykamy się
w przypadku dyskretnych układów mechanicznych, to znaczy ukła-
dów o skończonej liczbie stopni swobody.

Można zaryzykować stwierdzenie, że z nieliniowością
w konstrukcjach technicznych spotykamy się prawie wszędzie. Nie
dziwnego, że zagadnieniem tym zajęło się wielu badaczy. Na
nieliniowość występującą np. w badaniu drgań samolotu zwrócono
uwagę między innymi w pracach: [15], [42], [26]; drgań okrętów

^x dr inż. Tadeusz Bogumił, b. pracownik Zespołu Termodynamiki

1 Energetyki Ciepłej WSI Bydgoszcz

w pracach: [7], [24]; drgań lin żurawi w pracach: [19], [18], [39] drgań lin nośnych transportu linowego w pracach: [4], [5].

Podane przykłady nie wyczerpują zagadnienia nawet w tak wąskim wycinku tematycznym jak transport. Podobnie przedstawia się sytuacja w każdym innym zakresie tematycznym związanym z poszczególnymi działami techniki w zastosowaniach przemysłowych. Wynika stąd celowość zajęcia się problemem nieliniowości mechanicznych układów drgających.

Linearyzacja względnie sprowadzenie układu nieliniowego do liniowego w wielu przypadkach jest niemożliwa, ponieważ prowadzi do zasadniczych różnic między wynikami uzyskanymi na drodze rozważań teoretycznych i badań doświadczalnych. Zagadnienie nieliniowości jest istotne zarówno w przypadku występowania tzw. słabej lub silnej nieliniowości. Określenie nieliniowości jest możliwe po przeprowadzeniu badań wstępnych, które sprowadzają się do określenia parametrów rozpatrywanego układu. Parametry te tzw. charakterystyki statyczne układu, odgrywają podstawową rolę w badaniach ruchu drgającego.

Warto podkreślić, że w wielu przypadkach nieliniowość charakterystyk konstrukcji jest nie tylko wynikiem danego rozwiązania konstrukcyjnego, ale może być celowo wprowadzona, aby uzyskać określony z góry efekt /amortyzatory, resory progresywne, sprężyny o z góry założonych charakterystykach sprężystych, charakterystyki lin w układach drgających itd/.

Badanie istniejącej nieliniowości, względnie jej celowe wprowadzanie może dotyczyć zarówno charakterystyki sprężystej jak i charakterystyki tłumienia. Nieliniowość występująca w charakterystyce sprężystej jest najczęściej typu geo -

metrycznego. ze względu na układ konstrukcji /przy założeniu, że odkształcenia pozostają w granicach stosowalności prawa Hooke'a/ oraz typu fizykalnego, ze względu na fizykalne własności materiałów konstrukcyjnych. W wielu przypadkach nieliniowości te mogą występować razem [5], [14].

Charakterystyki sprężyste dają obraz zależności między siłami działającymi na układ a wzajemną konfiguracją elementów. Charakterystyki tłumienia natomiast, przedstawiające dysypację energii układu - dają obraz zależności między prędkościami poszczególnych elementów względem siebie. Zagadnienie tłumienia jest tym istotniejsze, że może decydować o naprężeniach ruchu drgającego, co jest technicznie bardzo ważnym problemem [27], [37].

Opracowane są metody badań analitycznych dla układów, które wykazują tzw. słabą nieliniowość - metoda małego parametru /Poincare, Kryłow, Lapunow, Chajkin, Małkin i in./ .Również znane są badania jakościowe drgań, oparte o podstawowe pojęcia i metody określania ruchu na płaszczyźnie fazowej, wprowadzone po raz pierwszy przez Poincarę, a rozwijane i kontynuowane między innymi przez Lienarda [16], Andronowa [1], Lamoëna [12], Brauna [2], Jacobsena [10], Bulanda [3]. Wyjątkowo przydatną jest metoda delta podana przez Jacobsena. Jej adaptację do mechanicznych układów drgających i to zarówno w ujęciu badań jakościowych jak i ilościowych podali Ziemia i Skowroński [4], [28], [29], [30], [31], [32].

Stosunkowo mało jest prac dotyczących procesu syntezy silnie nieliniowych mechanicznych układów dyskretnych. Zagadnienie syntezy jest znacznie szerzej opracowane w elektronice

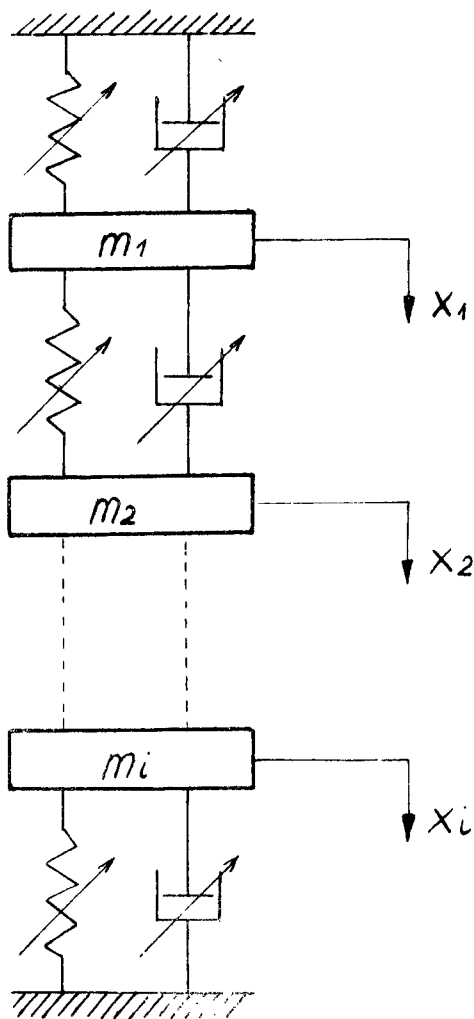
i automatyce [6], [23], [22]. Niestety metod tam stosowanych nie można bezpośrednio adaptować do układów mechanicznych. Różnią się one w zasadniczy sposób i to zarówno co do meritum sprawy jak i co do metod postępowania przy rozwiązywaniu. Do prac, które w pewnym sensie ujmują zagadnienie syntezy w odniesieniu do układów mechanicznych można zaliczyć [6], [23], [22], [31], [32] itp. Problem ten jest również postawiony w formie ogólnej w pracach [33], [34], [35] oraz rozpatrzony w ujęciu ilościowym w [36].

Mając na uwadze celowość zajęcia się problemem nieliniowości w mechanicznych układach dyskretnych, a w szczególności procesem syntezy /stosunkowo najmniej rozpracowanym/, w pracy podjęto próbę nowego ujęcia tego zagadnienia. Konkretnie zajęto się problemem doboru takiej postaci charakterystyk uogólnionych, aby układ realizował żądany typ ruchu. Proponowana metoda doboru charakterystyk /syntezy/; jej ujęcie za równo w sensie jakościowym jak i ilościowym, będzie rozpatrzona tak w odniesieniu do układów o jednym stopniu jak i o wielu stopniach swobody.

II. Równanie ruchu

Prawie każdy mechaniczny układ dyskretny można spróbować do uogólnionego układu dynamicznego. Pozwala to na wprowadzenie do opisu tego ruchu równań Lagrange'a, to jest równań różniczkowych wyrażających bezpośrednio zależność uogólnionych współrzędnych układu materialnego od uogólnionych sił, przy określonych warunkach początkowych.

Przyjęty model dyskretnego układu konstrukcyjnego, po-



Rys. 1.

kazany na rys. 1, traktujemy jako zbiór m punktów materialnych. Punkty te zawarte są w euklidesowej rzeczywistości przestrzeni trójwymiarowej i powiązanie wzajemnie tłumikami i sprężynami o silnie nieliniowych charakterystykach.

Równania ruchu tak przyjętego układu są zawarte w wyrażeniu zasady d'Alemberta przy pomocy zasady prac przygotowanych. Przyjmując istnienie tylko więzów holonomicznych, skleronomicznych oraz pomijając pracę sił wewnętrznych /praca sił wewnętrznych równa się zero/, możemy zasadę d'Alemberta przedstawić w zapisie analitycznym jako: [13]

$$\sum \left[\left(x_1 - m_1 \frac{d^2 x_1}{dt^2} \right) \delta x_1 + \left(y_1 - m_1 \frac{d^2 y_1}{dt^2} \right) \delta y_1 + \left(z_1 + m_i \frac{d^2 z_1}{dt^2} \right) \delta z_1 \right] = 0 \quad \text{/II.04/} \quad \int \quad \text{gdzie:}$$

$$x_1 = x_1 / x_1, \dots, z_n, \dot{x}_1, \dots, \dot{z}_n, /$$

$$Y_1 = Y_1 / X_1, \dots, Z_n, \dot{X}_1, \dots, \dot{Z}_n /$$

$$Z_1 = Z_1 / X_1, \dots, Z_n, X_1, \dots, Z_n /$$

Do dalszych rozważań, równanie /II.01/ po uwzględnieniu dodatkowych założeń i przekształceń /które są podane np. w pracy [9], przyjęto w postaci

$$\frac{d}{dt} \left(\frac{\partial E}{\partial \dot{q}_j} \right) = \frac{\partial E}{\partial q_j} = Q_j \quad (\text{II.02})$$

$$/ j = 1, 2, \dots, n /$$

przedstawiającej równanie Lagrange'a dla układów o więzach holonomicznych a szarzem skleronomicznych /więzy stacjonarne/ [9], w których praca sił wewnętrznych jest równa zero.

Wprowadzając pojęcie potencjału konematycznego/Helmholtz/ czyli funkcję $H = E - V$; gdzie V - energia potencjalna; możemy napisać równanie Langrange'a w postaci lapidarnej

$$\frac{d}{dt} \left(\frac{\partial E}{\partial \dot{q}_1} \right) = \frac{\partial H}{\partial q_1} = \quad (\text{II.03})$$

W dalszych rozważaniach związanych z rozpatrywaniem ruchu drgającego jako ruchu klasycznego dynamicznego układu przyjmujemy następujące założenia [32], [41]:

1. Rozpatrujemy ruch układów dyskretnych, opisanych równaniami różniczkowymi w dowolnym, dostatecznie dużym, otwartym, ograniczonym otoczeniu położenia równowagi statecznej.
2. Rozwiązania układu równań są wzajemnie jednoznaczna analityczną transformacją $2n$ wymiarowej auklidesowej rzeczywistej przestrzeni fazowej, \mathcal{E}^{2n} odpowiadającej temu układowi na siebie $T: \mathcal{E}^{2n} \rightarrow \mathcal{E}^{2n}$

3. Charakterystyki układu spełniają konieczne i wystarczające warunki do istnienia i jednoznaczności rozwiązań odpowiedniego układu równań wzdłuż całej półkosi czasu: $t \in [t_0, +\infty]$

Założenia te będą dotyczyły zarówno układów o jednym jak i o n stopniach swobody.

W pierwszej kolejności zajmujemy się z ogólnym przypadkiem tj. równaniami ruchu drgającego odnoszącego się do układu o n stopniach swobody.

Punktem wyjścia przy wyprowadzeniu tych równań są równania Lagrange'a /II.02/, które w wyniku wprowadzenia dodatkowych oznaczeń oraz po wykonaniu związków z tym przekształceń [30], [20], można przedstawić w postaci najogólniejszego układu równań ruchu

$$F_1 / q, \dot{q}, \ddot{q}, / = 0 \quad (\text{II.04})$$

$$i = 1, \dots, n$$

Jest to ruch klasycznego układu dynamicznego opisanego w n wymiarowej rzeczywistej euklidesowej przestrzeni konfiguracyjnej ξ^n we współrzędnych uogólnionych q_1, \dots, q_n . W równaniu tym przyjęto za stałe masy poszczególnych układów częściowych a tym samym i masy uogólnione. Równanie /II.02/ będące punktem wyjścia przy wyprowadzeniu układu równań /II.03/ dotyczyło układów o więzach holonomicznych a zarazem skleronomicznych. Wpływa stąd wniosek, że zarówno siły działające na układ w ogólnym przypadku, jak i siły uogólnione są funkcjami położenia, prędkości i czasu. Ponadto siły uogólnione nie zawierają drugich współrzędnych uogólnionych. Wobec faktu, że w lewych stronach równań Lagrange'a /II.02/

drugie pochodne współrzędnych uogólnionych występują liniowo [28], to sprzężenie bezwładnościowe da się wyrugować i sprowadzić do sprzężenia mieszanego tłumieniowo-przemieszczeniowego.

Jako następne zostanie omówione równanie ruchu drga - jącego dla układu o jednym stopniu swobody. Specjalne zajęcie się tym równaniem jest podyktowane jego wykorzystaniem w pierwszej kolejności przy omawianiu proponowanej metody syntezy. Pozwala to na przejrzystość w przedstawieniu tej metody. Punktem wyjścia do wprowadzenia równania ruchu i w tym przypadku jest równanie Lagrange'a /II.02/. Po wprowadzeniu dodatkowych założeń i wykonania niezbędnych przekształceń [30], [20] równanie ruchu dla układu o jednym stopniu swobody przyjmie postać

$$\ddot{q} + f(q, \dot{q}) = 0 \quad (\text{II.05})$$

lub ogólnej

$$f(q, \dot{q}, \ddot{q}) = 0 \quad (\text{II.06})$$

Mając ustalony schemat rozpatrywanego dyskretnego układu mechanicznego, rozważania dotyczące syntezy będą prowadzone od strony doboru charakterystyk układu.

III. Próba syntezy - badania jakościowe

Proces postępowania przy proponowanej metodzie syntezy będzie polegał na stosowaniu naprzemian postępowania analizy i syntezy. Koniecznym jest więc jednoznaczne określenie tych pojęć. W dalszych rozważaniach przez proces analizy i syntezy będziemy uważali:

- proces analizy ruchu układu jest to poszukiwanie skończonej postaci ruchu układu konstrukcyjnego, przy danych charakterystykach tego układu,

- proces syntezy ruchu układu jest to dobranie takich postaci uogólnionych charakterystyk układu, który chcemy zbudować, aby układ ten realizował określony, śądany typ ruchu w postaci skróconej.

W pierwszej kolejności zajmiemy się tymi zagadnieniami związanymi z analizą, które będą niezbędne przy omawianiu proponowanej metody procesu syntezy. Wybrane zagadnienia analizy ruchu zostaną podane zarówno w przypadku układów o jednym jak i n stopniach swobody. Niektóre z nich jak: istnienie i jednoznaczność rozwiązań, przekształcalność, jedyność, stabilność, asymptotyczna stabilność, kryteria naprzemienności ruchu itd. dotyczą wszystkich dyskretnych układów mechanicznych i tak będą przedstawione.

Do rozważań przyjęto układy równań ruchu /II.04/ i /II.05/, które zawierają silnie nieliniowe charakterystyki. W pierwszej kolejności rozpatrzono przypadek ogólny /II.04/, dotyczący układów dyskretnych mechanicznych o n stopniach swobody opisanych równaniami /II.04/, gdzie występują dowolne sprzężenia oraz silnie nieliniowe charakterystyki. Do badania tych drgań można zastosować metodę delta [29].

Układ równań /II.04/ przyjmiemy w następującej postaci:

$$\ddot{q}_i + F_i (q_1, \dots, q_n, \dot{q}_1, \dots, \dot{q}_n) = 0$$

$$(i = 1, \dots, n) \quad \text{/III.01/}$$

przy warunkach początkowych

$$q_1(t_0) = q_1^{(0)}, \dots, q_n(t_0) = q_n^{(0)}$$

$$\dot{q}_1(t_0) = \dot{q}_1^{(0)}, \dots, \dot{q}_n(t_0) = \dot{q}_n^{(0)}$$

$$\sum_1^n [q_1^{(d)}]^2 + \sum [q_1^{(0)}]^2 > 0 \quad \text{/III.02/}$$

W rozpatrywanym układzie funkcje $F_i (q_1, \dots, q_n; \dot{q}_1, \dots, \dot{q}_n)$ określają charakter ruchu i dlatego noszą nazwę cha-

rakterystyk ruchu układu. Przedstawiają one zależność warunków fizycznych i konstrukcyjnych badanego układu. Rozkładając siły działające w układzie na: siły sprężyste - potencjalne i siły tłumieniowe funkcje charakterystyk ruchu układu można przedstawić jako:

$$F_1 = \Phi_1(q_1, \dots, q_n, \dot{q}_1, \dots, \dot{q}_n) + \Psi_1(q_1, \dots, q_n) / III.03/$$

gdzie:

Φ - uogólnione charakterystyki tłumienia

Ψ - uogólnione charakterystyki sprężyste

Zakładam, że funkcje F_1 /tym samym Φ_1 i Ψ_1 / spełniają następujące warunki [32]:

- są określone w obszarze Δ_1 odpowiedniej $2n$ - wymiarowej przestrzeni fazowej układu $\Delta_1 \subset \mathbb{E}^{2n}$

$$\Delta_1 : -\infty < q_1 < \infty, \quad -\infty < \dot{q}_1 < \infty$$

$$\text{dla } t \in [t_0, \infty)$$

- dla $t \in [t_0, \infty)$, spełniają warunki konieczne i dostateczne co do istnienia i jednoznaczności /Cauchy,

Lipschitz, Hölder, Wintner/ rozwiązań układu [26] w tym obszarze,

- dla $t \in [t_0, \infty)$ w przypadku ogólnym są określone, ciągłe i klasy C w Δ_1 ,

- dla $t \in [T_0, \infty)$ w rozpatrywanym obszarze są analityczne względem swych argumentów w Δ_1

- $F_1(0, \dots, 0) = 0$, t.z. punkt $0(0, \dots, 0)$ jest punktem osobliwym izolowanym i wewnętrznym obszaru Δ_1 .

$$- F_1 (0, \dots, 0, \dot{q}_1, \dots, \dot{q}_n) \neq 0$$

dla

$$\sum_{i=1}^n q_i^2 \neq 0$$

- przy dodatniej dysypacji energii, wiskotycznym tłu - mieniu i dośrodkowym charakterze sił sprężystych /zachowawczych/, wynika

$$q_1 F_1 (q_1, \dots, q_n, 0, \dots, 0) \geq 0 \quad \text{/III.04/}$$

$$\dot{q}_1 F_1 (0, \dots, 0, \dot{q}_1, \dots, \dot{q}_n) \geq 0 \quad \text{/III.05/}$$

W pewnym ograniczonym lub nieograniczonym przedziale

$(-Q_1, +Q_1)$ zmiennych $q_1, \dots, q_n, \dot{q}_1, \dots, \dot{q}_n$,

gdzie

Q_1 - pewna stała dodatnia.

- F_1 są funkcjami całkowitymi oraz wymiernymi, t.z. mogą się składać z szeregu elementów analitycznych o środkach w Δ_1 zależnie np. od ilości przepisów funkcyjnych, jakimi trzeba aproksymować ustaloną fizykalnie charakterystykę układu. W tym przypadku elementami w sensie Weierstrassa będą szeregi potęgowe wielokrotne o środkach należących do obszaru objętego przepisem oraz nieskończonych dodatnich sprężonych promieniach zmieźności.

Energię całkowitą układu /względnie odpowiadający jej Hamiltonian/ określimy jako $H = H (q_1, \dots, q_n, \dot{q}_1, \dots, \dot{q}_n)$ funkcję jednostajnie dodatnio określoną co do znaku, o następujących właściwościach [17]

- $H = H (q_1, \dots, q_n, \dot{q}_1, \dots, \dot{q}_n)$ jest ciągła wraz z pier-

wszymi pochodnymi cząstkowymi, w obszarze $\Delta C \Delta_1 C \in \mathcal{E}^{2n}$ zawierającym początek układu,

$$- H = H(0, \dots, 0, 0, \dots, 0) = 0$$

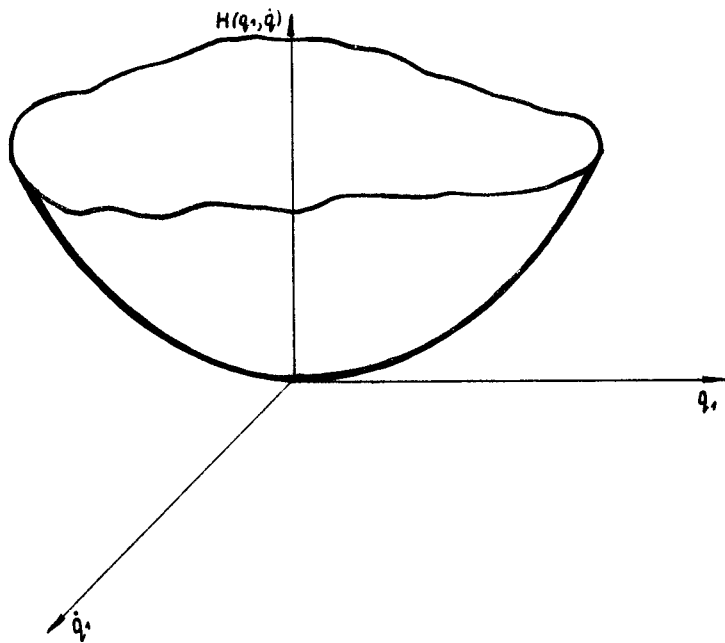
- Poza początkiem układu H jest dodatnia /w obszarze czyli funkcja ta jest nieujemna i przybiera wartość zero tylko w początku układu, który jest izolowany minimum funkcji H .

- $\frac{dH}{dt} \leq 0$ w obszarze $\Delta C \Delta_1 C \in \mathcal{E}^{2n}$ t.z. trajektorie fazowe mają tylko punkty wejścia lub wewnętrznego poślizgu [45].

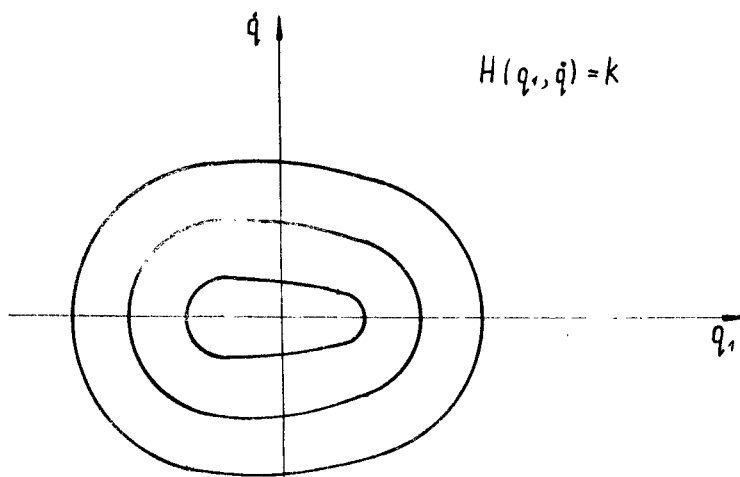
Funkcja $H = H(q_1, \dots, q_n, \dot{q}_1, \dots, \dot{q}_n)$ dodatnio określana spełniająca w/w warunki nazywa się funkcją Lapunowa i jest pewnym uogólnieniem pojęcia energii rozpatrywanego układu /III.01/. Interpretację geometryczną tej funkcji przedstawiono dla $n = 1$ na rys. 2.

Uzyskana powierzchnia ma kształt zwierciadła parabolicznego. Często powstały kształt powierzchni określany jest jako "kubek" energetyczny. Dla przestrzeni $n > 1$ obraz jest identyczny.

Bardzo praktyczna w użyciu jest interpretacja geometryczna omawianej funkcji we współrzędnych kartezjańskich. W tym celu z przestrzeni $\mathcal{E}^n(p_1, \dots, \dot{q}_1, \dots, \dot{q}_n)$ wybieramy n i n dwuwymiarowych podprzestrzeni - rzutni w taki sposób, aby trajektorie fazową ruchu dało się na te płaszczyzny jednoznacznie ortogonalnie rzutować. Na rys. 3 pokazano rzutnię, której ortogonalne współrzędne uzyskano z pary (q_i, \dot{q}_j) gdzie $i, j = 1, \dots, n$, a w naszym przypadku $n = 1$.



Rys. 2



Rys. 3

Przed omówieniem krzywych $H(\dot{q}_1, q_1) = k$ wprowadzimy dodatkowo określenia Papusa [26]:

- zbiór neutralny - zbiór punktów $\in \Delta$ o własnościach $\frac{dH}{dt} = 0$
- obszar malenia funkcji H - zbiór punktów $\in \Delta$ o własnościach $\frac{dH}{dt} < 0$

Prowadzi to do wniosku, że przy założeniach o funkcji F_1 /podanych wyżej/, w Δ możliwe są tylko zbiory neutralne oraz obszary malenia energii, gdzie zbiór neutralny odpowiada miejscom geometrycznym trajektorii ruchu zachowawczego, a obszar malenia energii - trajektorii ruchu tłumionego dodatnio, który jest zasadniczym tematem rozważań.

Interpretacja krzywych $H(q_1, \dot{q}_1) = k$ /rys. 3/ jest więc oczywista. Funkcja H rozpatrywana w układzie kartezjańskim w przypadku $n > 1$ będzie miała identyczny obraz.

Określenie energii całkowitej układu $H = H(q_1, \dots, q_n, \dot{q}_1, \dots, \dot{q}_n)$ jako funkcji Lapunowa daje możliwości stosunkowo łatwego określenia stabilności i asymptotycznej stabilności układu /III.01/. Metody Lapunowa, uwzględniając własności funkcji dodatnio określonych H , umożliwiają badanie stabilności układu /III.01/ nie bezpośrednio, posługując się rozwiązaniami tego układu, ale pośrednio, operując samym układem /III.01/.

Praktyczność wynikającą ze stosowania twierdzeń Lapunowa najwygodniej jest wykazać w oparciu o interpretację geometryczną. W tym celu podobnie jak w przypadku funkcji dodatnio określonej, przyjęto do badań podprzestrzeń /rzutnię/ z ortogonalnym rzutem trajektorii fazowej rozpatrywanego ruchu tłumionego. Poincarowskie hiperpowierzchnie topograficzne $H = \text{const}$ /inaczej zbiór neutralny punktów,/ będą po-

wierzchniami zamkniętymi nie przecinającymi się, ale kolejno zwartymi w sobie: homeomorficznymi z \mathcal{E}^{2n} , ułożonymi wokół punktu osobliwego $O(0, \dots, 0)$.

Interpretację twierdzeń Lapunowa o stabilności układów t.z. [17]

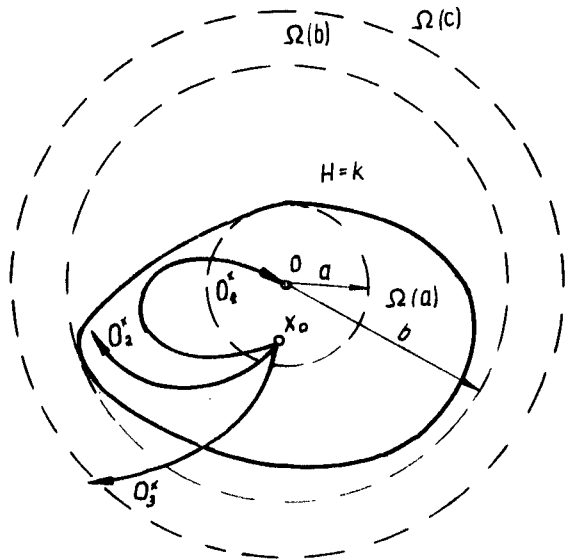
- twierdzenie o stabilności I - mówiące o tym, że jeżeli w jakimś otoczeniu Ω początku układu istnieje funkcja Lapunowa $H = H(q_1, \dots, q_n, \dot{q}_1, \dots, \dot{q}_n)$, to początek układu jest stabilny,

oraz

- twierdzenie o stabilności asymptotycznej - stwierdzającym że jeżeli $-\frac{dH}{dt}$ jest także dodatnio określone w otoczeniu Ω to stabilność jest asymptotyczna;

przedstawiono na rys. 4

Linia okrągłą oznaczono krzywą $H = k$, a linią przerywaną sfery $\Omega / b /$, $\Omega / a /$, $\Omega / c /$. Przez O^+ oznaczono część trajektorii O zakreślonej przez punkt $q = q/t$, gdy $t \geq 0$. Krzywa O_1^+ przedstawia trajektorię układu asymptotycznie stabilnego; O_2^+ - trajektorię układu stabilnego; i O_3^+ - trajektorię układu niestabilnego.



Rys. 4

Bardziej szczegółowe dowody twierdzeń Lapunowa podano między innymi w pracy [13].

Do dalszych rozważań związanych z rozwiązaniem układu równań /III.01/ metodą delta, niezbędnym jest przejście z przestrzeni konfiguracyjnej do fazowej. Wówczas równanie /III.01/ ujęte jako równanie trajektorii można napisać w postaci

$$\frac{dq_1}{\dot{q}_1} = \dots = \frac{dq_n}{\dot{q}_n} = \frac{dq_1}{F_1} = \dots = \frac{dq_n}{F_n} \quad /III.06/$$

Zależność /III.06/ określa pochylenie rzutni trajektorii na jednej z wybranych w powyższy sposób rzutni. Droga dalszych dość żmudnych przekształceń [32] z zależności /III.06/ można otrzymać:

$$\frac{dq_1}{dq_1} = \frac{F_1 / q_1, \dots, q_n, \dot{q}_1, \dots, \dot{q}_n}{q_1}, \quad /III.07/$$

które przedstawia równanie rzutu trajektorii na i-tą rzutnię. Równanie to określa również pochylenie rzutu trajektorii na tej rzutni.

Dalsze badania trajektorii związanych z rozpatrywanym układem będą polegały na zastosowaniu metody, w której do charakterystyki uogólnionej F , dodamy i odejmiemy odpowiednią zmienną q_1 ; oznaczamy

$$\int_1^{\cdot} (q_n, \dots, q_n, q_1, \dots, \dot{q}_n) = F_1 (q_1, \dots, q_n, \dot{p}_1, \dots, q_n) - q_1 \quad /III.08/$$

Po przekształceniu /III.08/

$$F_1 = \int_1 + q_1 \quad /III.09/$$

Środki okręgów uzyskanych z równania /III.14/ leżą po ujemnej stronie współrzędnej q_1 . Dla małych wartości kąta $\Delta\theta = \frac{2\pi}{m}$ /gdzie m - liczba naturalna, dostatecznie duża, ze względu na dokładność procesu iteracji, $m \rightarrow \infty$ / oraz czasu $\Delta t = \frac{\Delta\theta}{\omega} = \frac{1}{n} \frac{2\pi}{\omega}$ możemy przyjąć, że odpowiadający tym wielkościom odcinek trajektorii fazowej przedstawiają sobą łuki koła o środku w p. Q_1^0 . Rysowanie trajektorii rozpoczynamy od punktu P^0 określonego warunkami /III.02/. Wartość $d_1^{/0/} = d_1(q_n^0, \dot{q}_1^0, \dots, \dot{p}_n^0)$ odkładamy na współrzędne q_1 i w p. Q_1^0 . Z tego punktu zakreślamy łuk o promieniu $\overline{P_1^0 Q_1^0}$ i o wartości kąta $\Delta\theta$. Znając prędkość fazową punktu P_1 daną z równań ruchu możemy określić kierunek trajektorii fazowej w tym punkcie.

Po odłożeniu w określonym kierunku wartości kąta $\Delta\theta$ uzyskujemy na łuku następny punkt trajektorii P_1^1 $q_1^{/1/}$, $\dot{q}_1^{/1/}$. Wielkości q_1^1 i \dot{q}_1^1 podstawiamy do /III.08/ otrzymując d_1^1 i punkt Q_1^1 . Z punktu Q_1^1 promieniem $\overline{Q_1^1 P_1^1}$ zakreślamy kolejny łuk, otrzymując punkt P_1^2 $q_1^{/2/}$, $\dot{q}_1^{/2/}$. Czynności te powtarzamy potrzebna ilość razy.

Z otrzymanej tym sposobem trajektorii na płaszczyźnie fazowej możemy znaleźć krzywą przebiegu przejściowego $q=f/t$ jedną z metod podanych w pracy [5].

Kolejnym bardzo ważnym zagadnieniem przy rozpatrywaniu mechanicznych układów drgających, w naszym przypadku układu równań /III.01/, są twierdzenia określające kryteria naprzemiannosci ruchu, zależne od dysypacji energii w dowolnym otwartym, ograniczonym otoczeniu położenia równowagi.

Kryteria naprzemiannosci ruchu w dowolnie dużym, ale ograniczonym obszarze Δ jako otoczeniu podstawowego poziomu

energetycznego, podano między innymi w pracach [45] i [25] dla układów o jednym stopniu swobody, [8], [32] /dla układów o dwóch stopniach swobody/. Dla układów rozpatrywanych w niniejszej pracy przyjęto podobne twierdzenie [32], powiązane z określeniem kryteriów naprzemienności w obszarze Δ , zarówno w sensie analitycznym jak i syntetycznym w oparciu o wyprowadzenie pewnej metody analizy jakościowej. Twierdzenie to mówiące o tym, że ruch układu drgającego swobodnego, przy dodatniej dysypacji energii był w całym obszarze Δ naprzemienny wystarczy założyć, aby:

$$\lim |d'_1(\varepsilon)| \neq \infty$$

ε - dostatecznie małe,

oraz $\lim |d'_1| \leq |d'_{1\text{ekstr.}}|$

$$d'_{1\text{ekstr.}} = d'_1(q_1 = v, 0 < |q_1| < \infty)$$

będzie stanowiło podstawę do określania naprzemienności rozpatrywanego ruchu.

Przy omawianiu drugiego z równań /II.06/ opisującego układ o jednym stopniu swobody, mamy ułatwioną sytuację, ponieważ wszystkie poprzednio podane uwagi dotyczące układu ogólnego /II.04/ dla n stopni swobody będą również obowiązywały i w tym przypadku. Równanie /II.06/ zawiera wszystkie możliwe kombinacje występowania członów liniowych z nieliniowymi, względnie tylko nieliniowych.

W pracy zajęto się tylko układem o nieliniowej charakterystyce sprężystej przy liniowym czysto wiskotycznym tłumieniu. Przy tym założeniu równanie /II.06/ przyjmie postać:

$$\ddot{q} + l\dot{q} + \Psi(q) = 0 \quad \text{/III.12/}$$

gdzie:

$\psi(q)$ jest ciągła oraz

$$\psi(0) = 0$$

/III.13/

$$q \psi(q) > 0 \text{ dla } q \neq 0$$

Po wprowadzeniu oznaczeń:

$$\frac{1}{m} = 2h \quad \frac{1}{m} \psi(q) = f(q)$$

/III.14/

równanie /III.12/ będzie

$$\ddot{q} + 2h\dot{q} + f(q) = 0$$

/III.15/

Rozwijając $f(q)$ w szereg Maclaurina

$$f(q) = f(0) + f'(0)q + \sum_{i=2}^{\infty} \frac{f^{(i)}(0)}{i!} \omega^2 q^i + G(q)$$

/III.16/

gdzie

$$\omega^2 = f''(0), \quad G(q) = f(q) - \omega^2 q^2$$

/III.17/

i po uwzględnieniu /III.9/ w /II.15/ otrzymamy

$$\ddot{q} + 2h\dot{q} + \omega^2 q + G(q) = 0$$

/III.18/

czyli

$$\ddot{q} + \omega^2 (q + \delta) = 0$$

/III.19/

gdzie

$$\delta = \delta_1 + \delta_2$$

/III.20/

$$\delta_1 = \frac{2h}{\omega^2} \dot{q}$$

/III.21/

$$\delta_2 = \frac{1}{\omega^2} G(q)$$

/III.22/

Wartość /III.22/ oznacza odchylenie charakterystyki sprężystej od liniowości. Odchylenie to uzależnione jest od rodzaju charakterystyk, które mogą być: miękkie i sztywne.

W przypadku charakterystyki miękkiej mamy:

$$\frac{d^2 f(q)}{dq^2} = 0 \text{ dla } q = 0$$

$$\frac{d^2 f(q)}{dq^2} > 0 \text{ dla } q < 0 \quad /III.23/$$

$$\frac{d^2 f(q)}{dq^2} < 0 \text{ dla } q > 0$$

$$F(q) = f(q) - \omega^2 q < 0 \text{ dla } q > 0$$

$$F(q) = f(q) - \omega^2 q > 0 \text{ dla } q < 0 \quad /III.24/$$

a dla charakterystyki sztywnej

$$\frac{d^2 f(q)}{dq^2} = 0 \quad \text{dla } q = 0$$

$$\frac{d^2 f(q)}{dq^2} > 0 \quad \text{dla } q > 0 \quad /III.25/$$

$$\frac{d^2 f(q)}{dq^2} < 0 \quad \text{dla } q < 0$$

$$F(q) = f(q) - \omega^2 q > 0 \quad \text{dla } q > 0$$

$$F(q) = f(q) - \omega^2 q < 0 \quad \text{dla } q < 0$$

Na płaszczyźnie fazowej równanie /III.15/ można przedstawić jako układ równań w postaci normalnej

$$\frac{1}{\omega} \dot{q} = v, \quad \dot{v} = -\frac{q + \delta}{v} \quad /III.26/$$

i wówczas na płaszczyźnie fazowej /q, v/ równanie różniczkowe trajektorii fazowych układu /III.26/ możemy zapisać w postaci

$$\frac{dv}{dq} = -\frac{q + \delta}{v} \quad /III.27/$$

Określenie kierunku stycznej do trajektorii danej tym równaniem jest stosunkowo łatwe. Geometryczną interpretacją podano w pracy [29]. Również w wielu innych pracach [20], [38], [44] itd. podana rozważania dotyczące uzyskiwania trajektorii

na pł. fazowej. Krzywą przebiegu przejściowego $q = f(t)$ możemy uzyskać również stosując np. jedną z metod podanych w pracy [5].

Podane uwagi dotyczące poszukiwania skończonej postaci ruchu układu konstrukcyjnego $q_i = q_i(t)$, $i = 1, \dots, n$, przy danych charakterystykach tego układu t.zw. procesu analizy, będą wykorzystane w proponowanej metodzie systemu t.zw. doboru /w przypadkach jakościowych/ względnie wyznaczania /w przypadkach ilościowych/ uogólnianych charakterystyk $F_i(q_1, \dots, q_n, \dot{q}_1, \dots, \dot{q}_n)$ lub odpowiedni $\phi_1(q_n, \dots, q_n, \dot{q}_1, \dots, \dot{q}_n)$ i $\phi(q_1, \dots, q_n)$. W omawianym procesie syntezy metody te będą stosowane naprzemiennie.

Wychodząc z krańcowych przypadków postaci krzywych typu O^+ na płaszczyźnie fazowej, należy podać takie kryteria, które umożliwiają drogą kolejnych przybliżeń, dobrać odpowiednie graniczne wartości charakterystyk, układu. Należy podkreślić że swobodny dobór charakterystyk układu będzie dotyczył tylko jednej ze składowych. Decyzja o tym, którą z nich chcemy określić będzie podyktowana postawionym problemem syntezy, uzależnionym od postępowania związanego z procesem teorii konstrukcji.

Wyjaśnienie istoty proponowanej metody procesu syntezy celowo przeprowadzono w pierwszej kolejności na układzie o jednym stopniu swobody, a nie na przypadku ogólnym o n stopniach /co miało miejsce w dotychczasowych rozważaniach/, celem uzyskania bardziej przejrzystego obrazu.

Do rozważań przyjęto układ opisany równaniem /III.12/ z uwzględnieniem wszystkich omawianych założeń. Przyjmujemy, że w równaniu tym, a właściwie w jego przekształconej formie

/III.18/, funkcję $F(q)$ po rozwinięciu otrzymamy

$$F(q) = \alpha q + \beta q^3 \quad /III.28/$$

W przyjętym schemacie układu drgającego postawmy problem syntezy następująco:

- określić przy jakiej charakterystyce tłumienia rozważamy układ po czasie

$$T > t_0$$

będzie

$$q(T) \rightarrow \infty$$

gdzie

ϵ - dostatecznie małe,

oraz będzie wykazywał drgania o charakterze naprzemiennym, jeżeli charakterystyka sprężysta układu ma postać /III.28/. Celem uzyskania odpowiedzi na postawiony problem w pierwszej kolejności zastosujemy omawiane wyżej postępowanie analityczne. W tym celu po uwzględnieniu założeń o charakterystykach uogólnionych oraz energii całkowitej układu, na podstawie zależności /III.20/ możemy napisać

$$\mathcal{J} = \frac{2h}{\omega^2} + \alpha q + \beta q^3 \quad /III.29/$$

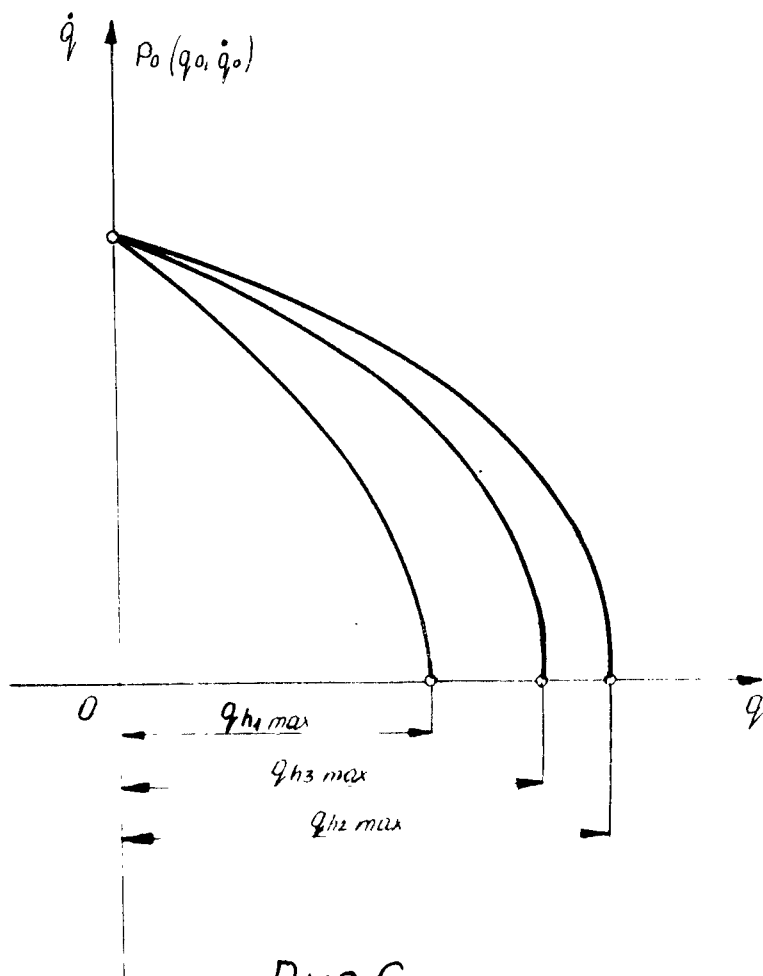
W zależności /III.29/ przyjmujemy dowolną, jednak technicznie realną wartość

$$h = h_1 \quad /III.30/$$

Po podstawieniu założonego $h = h_1$ oraz znanego rozwinięcia

/III.23/ do /III.29/ wykreślamy trajektorię do wartości $q_{h_1 \max}$

Dla tej wartości przemieszczenia określamy wartość czasu t_1 /np. stosując jedną z metod podanych w pracach [38], [32].



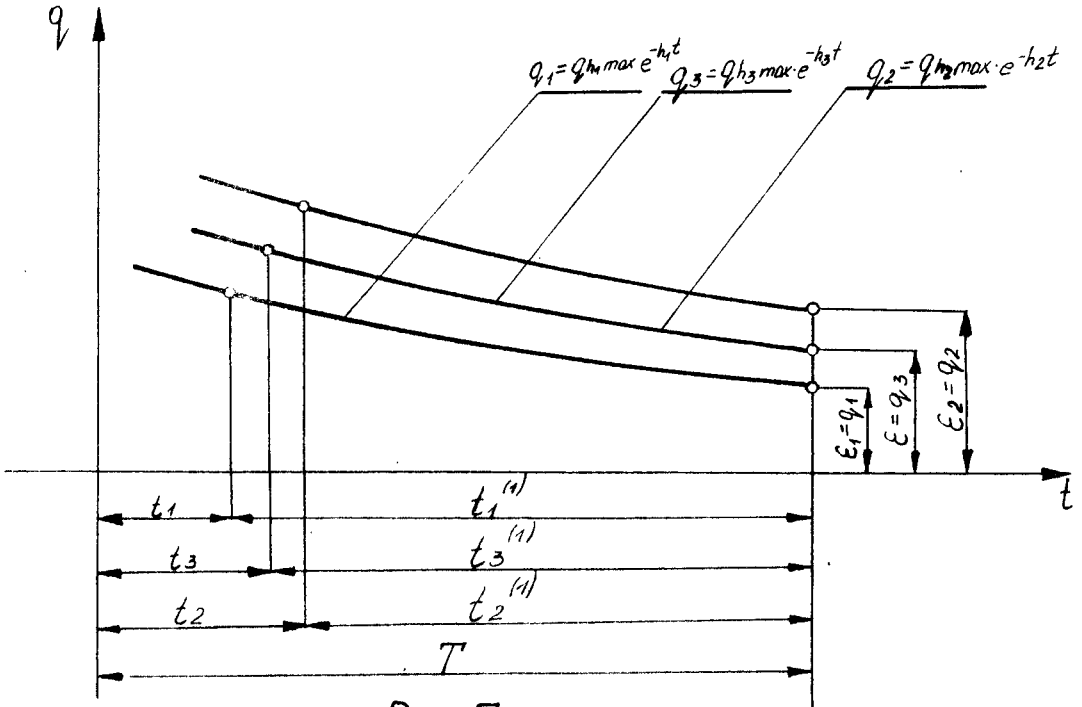
Rys. 6.

Uzyskane wielkości $q_{h1 \max}$ i t_1 nanosimy na wykres $q = f(t)$ /rys. 7/ a następnie rysujemy krzywą wykładniczą $q = q_{h1 \max} e^{-ht}$.

Po określeniu wartości czasu $t_1^{1/} = T_1 - t_1$ sprawdzamy czy wartość $q_1 = q_{h1 \max} \cdot e^{-ht_1} = \epsilon$

Jeżeli znajdzie przypadek taki jak na rys. 7 to znaczy $q_1 = \epsilon_1 < \epsilon$ należy przyjąć inną wartość $h = h_2$ gdzie $h_2 > h_1$

i wszystkie czynności kolejno powtórzyć.



Rys. 7

Po stwierdzeniu, że i tym razem $q \neq \epsilon$ i jak pokazano na rys. 7 wartość $q_2 = \epsilon_2 > \epsilon$, należy przyjąć kolejną wartość $h = h_3$ tak aby $h_1 < h_3 < h_2$.

W praktycznym zastosowaniu stwierdzono, że proponowana metoda doboru charakterystyk tłumienia, zazwyczaj daje zadowalające wyniki już po trzech próbach, przeprowadzonych wg wyżej podanej kolejności.

Określoną wielkość h , która spełnia wymagania stawiane przez problem syntezy t.z. po czasie $T > t_0$, wartość $q(T) \rightarrow \epsilon$, wstawiamy do /III.29/ i kontynuujemy rozpoczęte

obliczenia /przy próbach tylko w pierwszej ćwiartce rys. 6/ i wykreślanie trajektorii do czasu T . Porównanie uzyskanego wyniku z oczekiwanym daje sprawdzian poprawności stosowanej metody.

Obliczenia i wykreślanie trajektorii dla szukanej charakterystyki wykonujemy tylko jeden raz, po wcześniejszym określeniu jej granicznej wartości. Pozostałe trajektorie wykonujemy tylko częściowo-pierwszą ćwiartkę /rys. 6/. Daje to znaczne oszczędności czasowe.

Przy posługiwaniu się proponowaną metodą syntezy w celu określenia trajektorii granicznych metodą kolejnych przybliżeń, stosując najczęściej kolejno naprzemian postępowanie analityczne i syntetyczne, w pełni uwidaczniają się zalety tzw. metody delta. Pozwala to na pogładowe pokazanie obu rodzajów postępowania oraz umożliwia znaczne przyśpieszenie procesu przybliżeń. Ocena jakościowa zjawiska, która przyporządkowuje danemu typowi trajektorii daną postać charakterystyki i odwrotnie oraz równoczesne pogładowe przedstawienie wszystkich dyskutowanych parametrów, znakomicie ułatwiają szacowanie szeregu kolejnych przybliżeń określenia funkcji f/q w stosunku do danego typu trajektorii, a niekiedy wręcz umożliwiają całkowite pominięcie tego postępowania.

Proponowana metoda postępowania syntetycznego przedstawiona na układzie o jednym stopniu swobody z powodzeniem może być stosowana i w przypadku układu mechanicznego silnie nieliniowego o skończonej liczbie stopni swobody. W tym przypadku tok postępowania o tyle się komplikuje, że występuje większa liczba badanych trajektorii uzależniona od ilości

stopni swobody badanego układu.

Przy identycznie postawionym problemie syntezy kryterium doboru wartości charakterystyk układu oraz energii całkowitej układu, dalsze postępowania analityczno-syntetyczne z uwzględnieniem metody delta prowadzimy w oparciu o wyrażenie /III.08/. Metodą przybliżeń /praktycznie trzech prób/ określamy parametr szukaney wartości charakterystyki dla przyjętego problemu syntezy. Ograniczenie wyznaczania trajektorii tylko do pierwszej ćwiartki i w tym przypadku znacznie ogranicza pracochłonność obliczeń.

Praktyczna przydatność proponowanej metody zostanie wykazana na konkretnych mechanicznych układach silnie nieliniowych.

L i t e r a t u r a

1. Ch.Andronov: Teoria kolebanij, Moskwa 1937 r.
2. E. Braun: "Über die graphische Lösung der Differenzialgleichungen erzwungenen Schwingungen bei beliebigen Gesätz für Dämpfung, Rückelkraft und Antriebskraft, Ing. Archiv 1937, 7, s.158
3. E.N. Buland: Analysis of Nonlinear Servos by Plane Delta Method, J. Franklin Inst., Vol. 257, January 1954, 1.
4. T. Bogumił: Niektóre zagadnienia dynamiki lin...; Materiały IV Konferencji Wytrzymałości i Badania Materiałów, wrzesień 1966 r.
5. T. Bogumił: Określenie przebiegów przejściowych układów mech....: Zagadnienia Drganń Nieliniowych 1968 r.
6. W. Czudnowskij: Kolebania i ustojciwost metaliceskich sterznevych konstrukcji, Wopr, Prim. Stalnych Konstrukcji GLISA, 1953.
7. Dusan Ryba: Nielineárnich vlasnosti pneumatik a uchlovych tuhosti naprav na jizdni vlasnosti avtomobilu. Materiały IV Konferencji dynamiki maszyn, Kraków 1965 r.
8. R.S. Guter, B.W. Owczyński: Matematyczne opracowanie wyników doświadczeń, PWN, Warszawa 1965 r.
9. M.T. Huber: Mechanika ogólna i techniczna PWN, 1956 r.
10. L.S.Jacobsen: On a General Method of Solving Second Order Ordinary Differential Equations by Phase Plan Displacement, J.Appl, Vol.19, 1952 r.
11. W.Jegurov: Pribliżennyj metod rascęta vibracjii sudovych perekrytij, Mor. Flot., 1955, 2.

12. J. Lamben: Etude Graphique des Vibrations des Systéms a un Seul Degreé de la Liberte, Rev. Universalle des Mines, 8-e serie XI, 7, 1935.
13. J.La Salle, S.Lefschetz: Zarys teorii stabilności Lapunowa i jego metody bezpośrodkiej, PWN, Warszawa, 1966.
14. H.Langhaar: The Principle of Complementary Energy in Nonlinear Elastic Theory, J.Franklin Inst. 256, 1953, 3.
15. H.R. Lawrance: Dynamics of a Swept Wing. I.Aeronaut. Sci. November 1947 r.
16. A.Lienard: Etude des oscillations centretenues, Rev. Gen. d'Electr. 1928 r.
17. N.W. Mates: Teoretičeskije osnovy rasčota demfirovanja..... Trudy Gos.Pol.Inst.9, 1954, 1.
18. Osiński: Nonlinear vibrations of mass hung on the... Zagadnienia drgań nieliniowych nr 6.
19. Oziemski: Zagadnienie sztywności i tłumienia lin dźwigowych. Archiwum Budowy Maszyn, Tom X, zeszyt 2, 1963 r.
20. J.G. Panovko: Ustojčivost i kolebanija uprugich sistem Moskva 1966 r.
21. P.N. Papus: Izučenie razpołożenia integralnych krivyh zapoźniajuščich obłuct soderžaščuju odnu osobu tocku, Mat. Sbornik 38, 1956, 3.
22. L.A. Pipes: Analysis of a Nonlinear Dynamic Vibration Absorber, I.Appl. Mech. 20, 1953, 4.
23. E.P. Popov: Ocenka kačestva i vybor parametrov nieliniejnyh avtomaticeskich system, Izv. AHCURO ta.T.H. 1956, 12.
24. R.W. Rotenberg: Teoria podvieski awtomobila, Mašgiz, Moskva 1961 r.
25. J.G. Sansone: Equazioni differenziali nel camporeale, rozz. XII, § 2, Bologna 1949.
26. R.Scalan, R.Rosenbacim: Drgania i flater samolotów, PWN 1964 r.

-
27. J.M.Skowroński: Drgania swobodne pewnego układu mechanicznego o silnie nieliniowym tłumieniu i dwóch stopniach swobody. Zagadnienia drgań nieliniowych. Zeszyt nr 1.
 28. J.Skowroński, S.Ziemia: Zastosowanie metody delta..., Biul. WAT, 1958,1.
 29. J.Skowroński, S.Ziemia: Badanie ilościowe przestrzennych trajektorii fazowych ruchu układów mechanicznych silnie nieliniowych metodą delta. Zagadnienia drgań nieliniowych, zeszyt nr 3, 1961 r.
 30. J.Skowroński: Wpływ tłumienia na charakter drgań silnie nieliniowych mechanicznych układów dyskretnych. Zagadnienia drgań nieliniowych, 1960, 2.
 31. J.Skowroński: O możliwościach syntezy pewnych silnie nieliniowych mechanicznych dyskretnych układów drgających. Zagadnienia Drgań Nieliniowych, 1960,1.
 32. J.Skowroński: Wpływ tłumienia na charakter drgań silnie nieliniowych mechanicznych układów dyskretnych. Zagadnienia drgań nieliniowych, 1960, 2.
 33. J.Skowroński: A Method of Qualitative Analysis of Vibrating Discrete systems With Strong Nonlinearity in the Phase Space, Arch.Mech.Stos.10,1958,5.
 34. J.Skowroński: Some Aspects of Qualitative Synthesis..., Arch.Mech.Stos.
 35. J.Skowroński: Liniowe tłumienie nieliniowego impulsu. Rozprawy Inż.92, 1958,1.
 36. J.Skowroński: O możliwościach syntezy ilościowej..., Rozprawy Inż.
 37. J.Szodkowski: Zagadnienie nieprzemienności ruchu pewnego układu mechanicznego. Zagadnienia drgań nieliniowych. Zeszyt nr 1, 1960 r.
 38. F.S.Tse, J.E.Morse, R.T.Hinkle: Mechanical Vibrations - Boston 1963 r.

39. Z. Wasilewski: Badanie zastępczego modułu sprężystości oraz amplitudowego modułu sprężystości lin stalowych. Zeszyty Naukowe Politechniki Warszawskiej, Budownictwo nr 27, 1965 r.
40. T. Waślewski: Sur un principe topologique de l'examen de l'aure asymptotique des integrales des equations diff ordinaire, Ann.de la Soc. Polon de Math.Vol. 20, 1947.
41. A. Winter: The Infinities of the Nonlocal Existence Problem., Amer. I.Math. 68, 1946.
42. A.T. Zahorski: Free Vibrations of a Sweptback Wing, J.Aeronaut.Sci., December 1947.
43. S. Ziemia: Drgania swobodne o silnie nieliniowym tłumieniu. Archiwum Mech.Stos. 1957 r.
44. S. Ziemia: Analiza drgań. PWN, Warszawa 1957 r.
45. S. Ziemia: Free Vibration With Damping of Marked Nonlinear Character. Arch.Mech.Stos.9, 1957,5.

INFORMATION TO THE SYNTHESIS OF THE - LINEAR
MECHANICAL DISCRETE SYSTEMS

The Author suggests to discuss the problem in its qualitative approach on the way of the synthesis of the systems. The Author has based his work on the analysis of the existing methods of examining the mechanical, discrete, heavy, non-linear vibrating systems.

At applying, by turns, the analytic and synthetic procedure, the Author has shown the advantage of the Delta Method for defining the limiting values on the phase trajectory. The further forecasted quantitative tests will prove the usability of the proposed method from the design-constructional point of view.

ВОПРОСЫ СИНТЕЗА МЕХАНИЧЕСКИХ ДИСКРЕТНЫХ СИСТЕМ
С БОЛЬШОЙ СТЕПЕНЬЮ НЕЛИНЕЙНОСТИ

На основе анализа существующих методов исследования механических дискретных колебательных систем с большой степенью нелинейности, изложено предложения качественного разьяснения вопроса синтеза этих систем. Поочередно применяя синтетические и аналитические приемы, подчеркнута качество метода дельта для определения краевых величин фазовой траектории.

Предвиденные дальнейшие количественные исследования должны доказать пригодность предлагаемого метода при проектировании и конструировании.

PRÓBA ANALIZY WPŁYWU NIEKTÓRYCH PARAMETRÓW
KONSTRUKCYJNYCH I TECHNOLOGICZNYCH NA PRACĘ DYFUZORA DdS

Pracujące w przemyśle dyfuzory DdS wykazują poważne zakłócenia w pracy, spowodowane spiętrzeniem się krajanki i tworzeniem się "korków". W oparciu o analizę wymiarową ustalono pod względem jakościowym wpływ dziesięciu podstawowych parametrów na te zakłócenia. Wpływ tych parametrów ujęto końcowymi wzorami określającymi:

1. Poziom krajanki w dowolnym punkcie dyfuzora

$$H = \varphi \left(\frac{V}{V^3}; \frac{K}{V} \sqrt{\frac{\mu}{\eta^2}} \right) \sqrt{\frac{\eta V}{\mu}}$$

2. Ciśnienie panujące wewnątrz dyfuzora

$$P = \varphi \left(\frac{KM \sqrt[3]{V^2}}{\eta^2}; \frac{V \mu V}{\eta} \right) \frac{\eta^2}{\mu \sqrt[3]{V^2}}$$

Podano wnioski co do dalszych badań ilościowych.

1. Wstęp

Stacja dyfuzji jest nie tylko urządzeniem narzucającym tempo przerobowe cukrowni, lecz również straty w niej powstałe mają duże znaczenie w ogólnych stratach fabrykacyjnych. Nowoczesnym aparatem dyfuzyjnym, powszechnie w Polsce stosowanym jest dwuślimakowy ciągły dyfuzor DdS. Dyfuzory te są wyposażone w automatyczną regulację następujących wielkości:

^x dr inż. Ludwik Janicki, dr inż. Tadeusz Bogumił, byli pracownicy WSI.

- rozkładu temperatur wewnątrz aparatu,
- dopływu świeżej wody
- poziomu soku w dolnej części aparatu.

Jednakże istniejąca regulacja nie umożliwia wyeliminowania jednego z poważniejszych zakłóceń pracy dyfuzora, jakim jest spiętrzenie krajanki i tworzenie się "korków", których likwidacja jest trudna.

Określenie wytycznych do kompleksowej automatyzacji wymaga zatem przeanalizowania zagadnienia przesuwania mas w dyfuzorze, celem ustalenia wpływu poszczególnych czynników na poziom krajanki. Opisanie ruchu krajanki za pomocą równań różniczkowych i uzyskanie efektywnego rozwiązania stwarza dużo trudności rachunkowych, a konieczność wprowadzenia pewnych uproszczeń może doprowadzić do dużych rozbieżności między wynikami teoretycznymi a doświadczalnymi.

W przypadku, gdy nie są znane równania różniczkowe, opisujące badane zjawisko, rozważania można przeprowadzić w oparciu o analizę wymiarową. Analiza wymiarowa jest gałęzią matematyki stosowanej, zadaniem której jest wyznaczenie poprawnej postaci /pod względem wymiarowym/ wzorów fizycznych. Jednocześnie pozwala ona na wyrażenie zachowania się układu fizycznego za pomocą najmniejszej liczby zmiennych niezależnych i to w sposób niezależny od zastosowanych jednostek miar.

Spośród zbioru wielkości fizycznych, przyjętych za podstawowe, ustalono układ podstawowych jednostek miar. W mechanice przyjęto trzy podstawowe wielkości w dwu układach o mianowicie:

- długość, masa, czas
- długość, siła, czas.

W termodynamice używa się następujących wielkości podstawowych:

- długość, masa, czas, temperatura.

W niektórych zagadnieniach za wielkość podstawową przyjmuje się ilość ciepła. Wymiary poszczególnych wielkości fizycznych oznaczają się symbolami, wprowadzonymi przez Maxwella: np. długość

$[L]$, czas $[T]$, masę $[M]$, prędkość $\left[\frac{L}{T}\right]$.

Każdemu równaniu fizycznemu można przyporządkować równanie wymiarowe o identycznie uporządkowanych wymiarach i takiej samej postaci, zależnej jedynie od przyjętego układu jednostek. Równaniu fizycznemu, określającemu prędkość przepływu cieczy pod działaniem przyspieszenia ziemskiego g , przy różnicy poziomów h

$$v = \sqrt{2gh} \quad /I.01/$$

odpowiada równanie wymiarowe w układzie LMT

$$\frac{L}{T} = \left(\frac{L}{T^2}\right)^{1/2} \cdot (L)^{1/2} \quad /I.02/$$

Równaniu

$$\tau = \eta \frac{dv_x}{dy} \quad /I.03/$$

gdzie oznaczają:

τ - naprężenie styczne

η - lepkość dynamiczna

v_x - prędkość w kierunku osi x

y - wymiar liniowy prostopadły do kierunku prędkości

odpowiada w układzie LMT równanie wymiarowe

$$\frac{M}{LT^2} = \frac{M}{LT} \cdot \frac{L}{T} \cdot \frac{1}{L} \quad /I.04/$$

Dość często zamiast wymiarów L , M , T używa się w równaniach wymiarowych znaków jednostek miary, a mianowicie: m , s , kg itd.

II. Analiza wymiarowa w zastosowaniu do dyfuzji D_g

W prawach mechaniki, fizyki i nauk przyrodniczych wszystkie występujące funkcje są wymiarowe niezmiennie i wymiarowe jednorodne. Pierwsza własność oznacza, że kształt funkcji nie zależy od wyboru jednostek. Jeżeli

P - oznacza moduł siły działającej zgodnie z przemieszcze-

niem S , a

L - oznacza pracę, to funkcja:

$$L = P \cdot S$$

jest wymiarowo niezmienna, gdyż opisana przez nią zależność jest prawdziwa w każdym układzie jednostek.

Druga własność oznacza, że jeśli argumenty funkcji pomnożymy przez jakiegokolwiek liczby dodatnie to funkcja nie zmieni wymiaru.

Jeżeli

D - oznacza średnicę walca,

H - wysokość, a

V - objętość,

to funkcja

$$V = \frac{\pi}{4} D^2 H \quad /II.01/$$

jest jednorodna, gdyż po dwukrotnym zwiększeniu D , a trzykrotnie H wynik jest 12 razy większy, lecz w dalszym ciągu wielkość V jest objętością.

Większość zastosowań analizy wymiarowej opiera się na twierdzeniu Buckinghama, znanego pod nazwą "Twierdzenia π ", w którym obowiązują następujące założenia:

1. funkcja wielkości wymiarowych $\Phi(A_1 \dots A_m; P_1 \dots P_q)$ jest wymiarowo niezmienna i jednorodna,
2. argumenty $A_1 \dots A_m$ są wymiarowo niezależne.

Stwierdzenie to wymaga dodatkowego wyjaśnienia, a mianowicie: wielkości $A_1 \dots A_n$ są wymiarowo niezależne, jeśli z macierzy utworzonej z ich wykładników można zbudować przynajmniej jeden wyznacznik rzędu "n" różny od zera. Oznacza to, że przyjęcie układu składającego się z "a" jednostek powoduje, że tylko "a" wielkości może być od siebie niezależnych. Np. w układzie k, m, s , z czterech wielkości: droga, lepkość, pra-

ca, moc, co najwyżej 3 mogą być niezależne,

3. argumenty $P_1 \dots P_q$ są wymiarowo zależne od $A_1 \dots A_m$ a więc wyrażają się w postaci:

$$P_1 = \pi_1 A_1^{r_{11}} \dots A_m^{r_{m1}}$$

.....

/II.02/

$$P_q = \pi_q A_1^{r_{1q}} \dots A_m^{r_{mq}}$$

gdzie:

$\pi_1 \dots \pi_q$ są wielkościami bezwymiarowymi

a wykładniki

$r_{11} \dots r_{mq}$ są liczbami rzeczywistymi.

Ponadto zakłada się, że

funkcja $\Phi(\dots)$ musi być postaci

$$\varphi(\pi_1 \dots \pi_q) A_1^{f_1} \dots A_m^{f_m}$$

/II.03/

gdzie $\varphi(\pi_1 \dots \pi_q)$ jest zwykłą funkcją liczbową bezwymiarowych argumentów $\pi_1 \dots \pi_q$ i nie zależy od $A_1 \dots A_m$ a wykładniki $f_1 \dots f_m$ nie zależą od $\pi_1 \dots \pi_q$ ani też od $A_1 \dots A_m$.

III. Zastosowanie analizy wymiarowej do ustalenia strukturalnego wzoru, określającego poziom krajanki w dowolnym punkcie dyfuzora DdS

Celem określenia poziomu krajanki w dowolnym punkcie dyfuzora założono, że jest on zależny od następujących parametrów:

V - objętości roboczej dyfuzora $[m^3]$

μ - umownej gęstości mieszanki $[m^3 \text{ kg}^{-1}]$

η - lepkości dynamicznej $[kg \text{ m}^{-1} \text{ s}^{-1}]$

K - własności krajanki $[\text{kg m}^{-1} \text{s}^{-2}]$

v - maksymalnej prędkości obwodowej ślimaka $[\text{m s}^{-1}]$.

Przyjęcie tych pięciu parametrów wymaga dodatkowego wyjaśnienia, ponieważ obejmują one znacznie więcej wielkości, a mianowicie:

V - objętość robocza dyfuzora zawiera w sobie trzy parametry:

- poziom krajanki w dolnej części dyfuzora
- długość dyfuzora
- średnicę wewnętrzną dyfuzora

μ - umowna gęstość mieszanki składa się z dwu wielkości:

- ilości wody
- ciężaru krajanki

v - prędkość obwodowa ślimaka obejmuje 2 wartości

- średnicę zewnętrzną ślimaka
- ilość obrotów ślimaka.

Oznacza to, że w rzeczywistości uwzględniono 10 parametrów, charakteryzujących rozpatrywany proces.

Poziom krajanki w dowolnym punkcie dyfuzora można określić następującą funkcją:

$$H = \Phi(v, \mu, \eta, k, v) \quad /III.01/$$

Zadanie będzie polegało na określeniu funkcji Φ i ustaleniu planu eksperymentów.

Przyjęto układ jednostek m, kg, s. Spośród pięciu wielkości, od których zależy H najwyżej trzy parametry mogą być wymiarowo niezależne - ponieważ tyle przyjęto jednostek. Celem jest, przyjęc za wielkości niezależne parametry η, μ, v rezerwując pozostałe do zmieniania w toku eksperymentowania. Należy jednakże sprawdzić, czy są one wymiarowo niezależne. Z następujących wykładników ułożono macierz:

$$\begin{vmatrix} 1 & -1 & -1 \\ -1 & 2 & 2 \\ 0 & 1 & -1 \end{vmatrix} \neq 0 \quad /III.02/$$

Wyznacznik trzeciego rzędu tej macierzy nie równa się zero, a jed-

nocześnie nie można utworzyć wyznacznika czwartego rzędu. Oznacza to, że parametry η , μ , v są wymiarowe niezależne. We wzorze Buckingham'a $q = 2$, ponieważ są trzy jednostki $m = 3$, a pięć parametrów. W związku z tym, zgodnie z "Twierdzeniem π " otrzymuje się zależność

$$H = \varphi(\pi_1; \pi_2) \eta \mu v \quad /III.03/$$

Następnie porównując jednostki, określono nieznanne wykładniki potęg w następujących zależnościach:

$$H = \varphi(\eta^{\eta_1} \mu^{\mu_1} v^{v_1})$$

$$v = \pi_1(\eta^{\eta_2} \mu^{\mu_2} v^{v_2})$$

$$K = \pi_2(\eta^{\eta_3} \mu^{\mu_3} v^{v_3})$$

uzyskując ostateczny wzór:

$$H = \varphi\left(\frac{v}{v^3}; \frac{K}{v} \sqrt{\frac{\mu}{\eta^2}}\right) \sqrt{\frac{\eta v}{\mu}} \quad /III.04/$$

celem przeanalizowania badanego procesu należy doświadczalnie określić funkcje: φ_1 ; π_1 i π_2 , ustalając ostateczną postać szukanego wzoru. Jest sprawą oczywistą, że zależność III.04 nie jest jedyną postacią na określenie poziomu krajanki w dowolnym punkcie dyfuzora DdS.

Poziom krajanki może być, np. określony za pomocą ciśnienia panującego wewnątrz dyfuzora i zakładając, że jest on zależny od następujących parametrów:

V - objętość $[m^3]$

μ - gęstość $[kg m^{-3}]$

η - lepkość dynamiczna $[kg m^{-1} s^{-1}]$

K - własności krajanki $[kg m^{-1} s^{-2}]$

v - maksymalna prędkość obwodowa ślimaka $[m s^{-1}]$

Przyjmując w układzie jednostek kg, m, s, jako parametry niezależnie V , μ , v otrzymano wzór:

$$P = \varphi\left(\frac{\kappa \mu \sqrt[3]{V^2}}{\eta^2}; \frac{v \mu v}{\eta}\right) \frac{\eta^2}{\mu \sqrt[3]{V^2}} \quad /III.05/$$

gdzie

$$\frac{\kappa \mu \sqrt[3]{V^2}}{\eta^2} = \pi_1 \quad /III.06/$$

$$\frac{v \mu v}{\eta} = \pi_2 \quad /III.07/$$

Również i w tym przypadku ostateczną postać wzoru III.05 można ustalić po doświadczalnym określeniu funkcji φ ; π_1 ; π_2 .

4. Wnioski

Jak wynika z przytoczonych rozważań wzory strukturalne określające poziom krajanki w DdS mogą mieć różnorodną postać, co ma istotny wpływ na zakres pracy eksperymentalnych.

W tym celu należy przeprowadzić następujące badania:

- 1/ Ustalić własności fizyczno-techniczne przerabianej krajanki takie jak: sprężystość, gęstość itd.;
- 2/ zweryfikować ilość i jakość przyjętych parametrów i ich wpływ na poprawną pracę urządzenia;
- 3/ ustalić wzór strukturalny, określający wpływ poszczególnych parametrów na spiętrzenie krajanki w dyfuzorze.

A TRY OF AN ANALYSIS FOR THE INFLUENCE OF CERTAIN CONSTRUCTIVE
AND TECHNOLOGICAL DIMENSIONS ON THE Dds DIFFUSER

The author states that the Dds diffusers applied in the industrial plants show serious disturbances at work caused by swelling of slices, forming of "plug-ups". On the basis of the dimension analysis, the Author determined, from the qualitative point of view, the influence of the main parameters on the disturbances. The influence of the parameters has been shown by the end formulas determining:

1. the level of the slices at the optional point of the diffuser

$$H = \varphi \left(\frac{V}{v^3}; \frac{K}{v} \sqrt{\frac{\mu}{\eta^2}} \right) \sqrt{\frac{\eta V}{\mu}}$$

2. the pressure inside the diffuser

$$P = \varphi \left(\frac{K \mu \sqrt[3]{V^2}}{\eta^2}; \frac{V \mu v}{\eta} \right) \frac{\eta^2}{\mu \sqrt[3]{V^2}}$$

There are mentioned suggestions therein, concerning the further quantitative tests.

АНАЛИЗ ВЛИЯНИЯ НЕКОТОРЫХ КОНСТРУКТИВНЫХ И
ТЕХНОЛОГИЧЕСКИХ ПАРАМЕТРОВ НА РАБОТУ ДИФфуЗОРА Д.д.с.

В эксплуатируемых в промышленных диффузорах Д.д.с. часто случаются перебои в работе, причиной которых является скопление массы. На основе анализа размеров установлено качественное влияние десяти основных параметров на образование помех в работе диффузоров. Влияние этих параметров определено следующими формулами:

1/ уровень массы в произвольной точке диффузора,

2/ давление внутри диффузора

Изложено предложения для дальнейших количественных исследований.

BADANIE NIEZAWODNOŚCI I TRWAŁOŚCI MOTOROWERÓW

I ROWERÓW - Cz.I

Artykuł niniejszy jest pierwszym z serii publikacji poświęconych badaniom niezawodności i trwałości motorowerów i rowerów. Badania te na zlecenie Zakładów Rowerowych "RO-MET" prowadzą zespoły: Maszyn i Urządzeń Rolniczych oraz Podstaw Konstrukcji Maszyn, Wyższej Szkoły Inżynierskiej w Bydgoszczy. Praca prowadzona jest pod kierunkiem doc. dr hab.inż. Bolesława Wojciechowicza z Politechniki Poznańskiej.

Ze względu na bardzo obszerny materiał dotyczący wyżej wymienionych badań postanowiono, temat ogólny "Badania niezawodności i trwałości motorowerów i rowerów" podzielić na następujące części:

- Część I - "Wprowadzenie do problematyki badań" oraz "Pomiary tensometryczne obciążeń i naprężeń w elementach motoroweru i roweru w warunkach eksploatacji".
- Część II - "Badania eksploatacyjne motorowerów i rowerów"
- Część III- "Analiza naturalnego zużycia elementów roweru i motoroweru w aspekcie ich niezawodności i trwałości".
- Część IV - "Badania przyspieszone na stanowiskach badawczych."
- Część V - "Rachunkowe ujęcie wybranych zagadnień optymalizacji konstrukcji w aspekcie niezawodności i trwałości".
- Część VI - "Podsumowanie całości badań niezawodności i trwałości rowerów i motorowerów".

Ponieważ badania niezawodności i trwałości motorowerów i rowerów prowadzone będą w latach 1970 - 1972, stąd uka-

x mgr. inż. Andrzej Jazdon, Zespół Maszyn i Urządzeń Rolniczych, mgr inż. Józef Szala, Zespół Podstaw Konstrukcji Maszyn WSI w Bydgoszczy.

zywanie się poszczególnych publikacji obejmie ten okres. Jednocześnie autorzy zastrzegają sobie prawo wprowadzenia nieznacznych zmian dotyczących: kolejności publikowania artykułów, zawężania lub poszerzania ich problematyki czy też odstąpienie w sformułowaniu treści podtematów. Całość ukazywać się będzie pod wspólnym tytułem "Badania niezawodności i trwałości motorowerów i rowerów".

1.0.0. Wprowadzenie do problematyki badań

Ze względu na to, że niniejszy artykuł jest pierwszym z serii artykułów dotyczących niezawodności i trwałości motorowerów i rowerów, uznajemy za celowe podanie ogólnych wiadomości z zakresu niezawodności i trwałości a także przedstawienie programu prowadzonych badań.

1.1.0. Ogólne wiadomości o niezawodności i trwałości

Niezawodność - nowa dziedzina nauki oraz nowa gałąź praktyki - rozwinęła się w wyniku potrzeb stawianych przez szybki rozwój współczesnej techniki, a przede wszystkim takich jej dziedzin jak elektronika, radiotechnika czy automatyka. Szczególnie wiele specyficznych problemów należy rozwiązać przy rozpatrywaniu niezawodności urządzeń mechanicznych. Wynika tu z dużej różnorodności elementów składowych tych urządzeń oraz specyfiki charakteru występujących uszkodzeń.

Na niezawodność systemu ma wpływ niezawodność każdego elementu składowego. Tymczasem nowoczesne wyroby cechuje duża ilość elementów składowych - wynikających z wykonywanych przez nie skomplikowanych funkcji - przy jednoczesnym dążeniu do obniżenia ciężaru oraz zmniejszenia ich wymiarów. Jednak im mniejsza maszyna, im mniejszy ma zapas wytrzymałości, a przy tym składa się z większej liczby elementów, tym trudniej zapewnić jej niezbędną niezawodność.

1.1.1. Definicja niezawodności i trwałości [4]

Niezawodność obiektu - własność, która określa jakość wykonywania przez dany obiekt stawianych mu zadań przy uwzględnieniu losowych zmian charakterystyk funkcjonalnych danego obiektu.

Trwałość - własność obiektu charakteryzująca proces zużywania się obiektu podczas jego eksploatacji /wskutek starzenia się, ilości wykonanej pracy, sposobu jego eksploatacji/.

Ilościowo niezawodność i trwałość obiektu oceniana jest różnymi wskaźnikami, których rodzaj i ilość dobiera się adekwatnie do danego obiektu i zadania. Wskaźnikami takimi mogą być:

- praca wykonana do uszkodzenia T ,
- praca wykonana między uszkodzeniami,
- prawdopodobieństwo poprawnego działania $P /t/$,
- średni czas odnawiania T_0 ,
- współczynnik wykorzystania technicznego K_T ,
- średni resurs itd.

1.1.2. Jakość a niezawodność

Niezawodność wyrobu warunkują: poprawność działania, naprawialność, zachowawczość a także trwałość elementów składowych. Własności maszyn i urządzeń wynikają z ich charakterystyk technicznych, jednak ocenić je można jedynie w procesie pracy i to nie tylko w jego początkowym okresie, lecz możliwie w czasie długotrwałej eksploatacji. Właśnie niezawodność ujmuje te dwa czynniki: własności i czas pracy, czyli niezawodność charakteryzuje cechy jakości produktu w procesie jego eksploatacji.

To ścisłe powiązanie niezawodności z jakością jest chyba zasadniczym powodem tak burzliwego rozwoju nauki o niezawodności i wróży jej dalsze zastosowania.

1.2.3. Badania niezawodności maszyn i urządzeń mechanicznych

Dla określenia wskaźników niezawodności należy dla wszystkich maszyn i urządzeń przeprowadzić badania, które podzielić można na dwie grupy:

- A/ badania eksploatacyjne prowadzone w rzeczywistych warunkach pracy,
- B/ badania przyspieszone.

Ad.A Badania eksploatacyjne, dostarczają fundamentalnego zasobu informacji o zachowaniu się obiektu w rzeczywistych warunkach pracy. Pozwalają na zebranie bogatego materiału dotyczącego nie tylko występowania uszkodzeń i przyczyn pojawiania się ich ale także informacji o warunkach i specyfice eksploatacji, mających bezpośredni wpływ na wskaźniki eksploatacji. Badania eksploatacyjne stanowią podstawę do przejścia na przyspieszone metody badań. Ich zasadniczą wadą to długi czas prowadzenia i związane z tym koszty.

ad.B Badania przyspieszone prowadzone są w warunkach różnych od przewidzianych instrukcją eksploatacji ale sprzyjają - cych skróceniu czasu niezbędnego do określenia wymaganych wskaźników niezawodności. Badania te winny stanowić podstawowe źródło szybkiej informacji /na określonym poziomie ufności/.

1.2.0. Program badań niezawodności i trwałości motorowerów i rowerów

Badania niezawodności i trwałości motorowerów i rowerów nabierają znaczenia jeśli uwzględnimy fakt, że Zakłady Rowerowe produkują rocznie 880.000 rowerów oraz 85.000 motorowerów. Poznanie trwałości elementów rowerów i motorowerów winno ujawnić znaczne rezerwy tak na etapie wytwarzania jak i eksploatacji. Ponadto, przy wprowadzeniu nowych typów wyrobów niezmiernie ważną rzeczą jest aby czas od wykonywania prototypu poprzez badanie do decyzji o podjęciu produkcji był jak najkrótszy. Spełnienie tego postulatu jest niemożliwe przy obecnym systemie prowadzenia długotrwałych badań eksploatacyjnych.

Cele jakie postawiono przy podejmowaniu w/w badań były następujące:

- 1/ określenie liczbowych wartości wskaźników trwałości i niezawodności rowerów i motorowerów jako następstwo określenia trwałości ich elementów i zespołów,
- 2/ opracowanie wytycznych dotyczących optymalizacji konstrukcji motorowerów i rowerów w aspekcie trwałości,
- 3/ opracowanie koncepcji stanowisk do badań przyspieszonych oraz opracowanie metod badań przyspieszonych niezawodności i trwałości całych pojazdów oraz ich zespołów i części.

Dla osiągnięcia zakreślonych celów opracowano program pracy, który obejmuje:

- przeprowadzenie badań eksploatacyjnych,
- przeprowadzenie pomiarów tensometrycznych obciążeń i naprężeń w elementach motoroweru i roweru w warunkach eksploatacji,
- opracowanie koncepcji stanowiska do badań przyspieszonych kompletnych pojazdów,
- przeprowadzenie badań na w/w stanowisku,
- opracowanie programu badań przyspieszonych motorowerów i rowerów na stanowisku,
- zaproponowanie koncepcji stanowisk do badań przyspieszonych niezawodności i trwałości wytypowanych zespołów motorowerów i rowerów,
- opracowanie - w oparciu o przeprowadzone badania - programu badań przyspieszonych wytypowanych zespołów na stanowiskach.

W pierwszym roku badań przeprowadzono pomiary tensometryczne obciążeń i naprężeń w elementach motoroweru i roweru w warunkach eksploatacyjnych oraz I etap przyspieszonych badań eksploatacyjnych

2.0.0. Pomiary tensometryczne w warunkach eksploatacji

- 2.1.0. Zasadniczym celem pomiarów tensometrycznych było określenie przebiegu zmian sił i momentów, które w dalszych

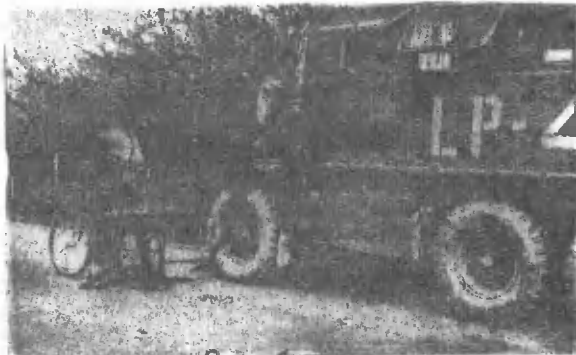
opracowaniach wykorzystane będą do ustalenia programu obciążeń na stanowiskach badawczych. Dokonano także pomiarów naprężeń w miejscach ich koncentracji.

2.2.0. Przebieg pomiarów

Pomiarów dokonano przy pomocy przewoźnego laboratorium, wyposażonego w oscylograf pętlicowy Ultralette 12 i wzmacniacze pomiarowe częstotliwości nośnej typ KWS/6 - T5. W czasie pomiarów laboratorium pokonywało odcinki pomiarowe obok roweru i motoroweru.

Aby jak najdokładniej odwzorować warunki normalnej eksploatacji roweru i motoroweru, w czasie pomiarów przebyto odpowiednio dobrane odcinki dróg o nawierzchniach: asfaltowej, brukowej i polnej.

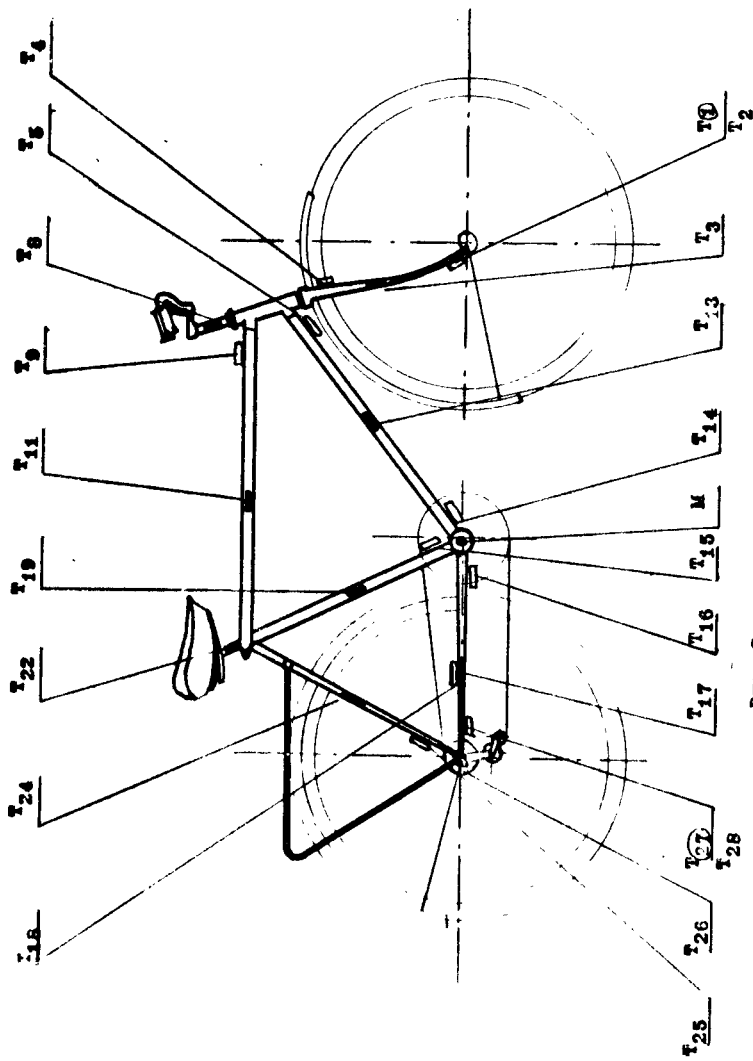
Rower i motorower w czasie pomiarów obciążony był kierowcą o wadze 70 kg, ponadto bagażnik roweru obciążony był ciężarem 10 kg, a motoroweru 18 kg.



Rys. 1

Schemat rozmieszczenia tensometrów dla roweru podano na rys. 2, dla motoroweru na rys. 3. Przykładowy zapis zmian obciążeń na taśmie rejestratora dla roweru podano na rys. 4. Wzmocnienia i prędkości przesuwu taśmy ustalono w czasie pomiarów próbnych tak, aby przebiegi szybkozmienne były zapisane czytelnie.

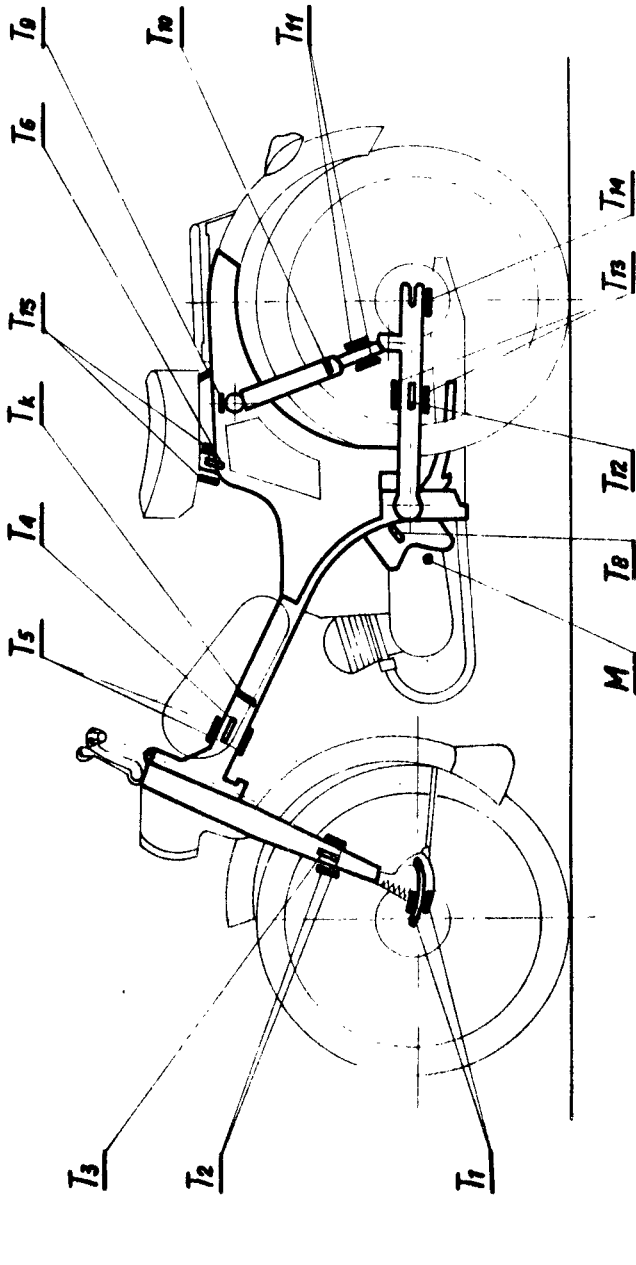
Ze względu na duże podobieństwo w metodzie dokonywania pomiarów, w dalszym ciągu opracowania przytoczymy przykłady z pomiarów roweru, nie podając z braku miejsca przykładów z pomiarów motoroweru.



Rys. 2 -

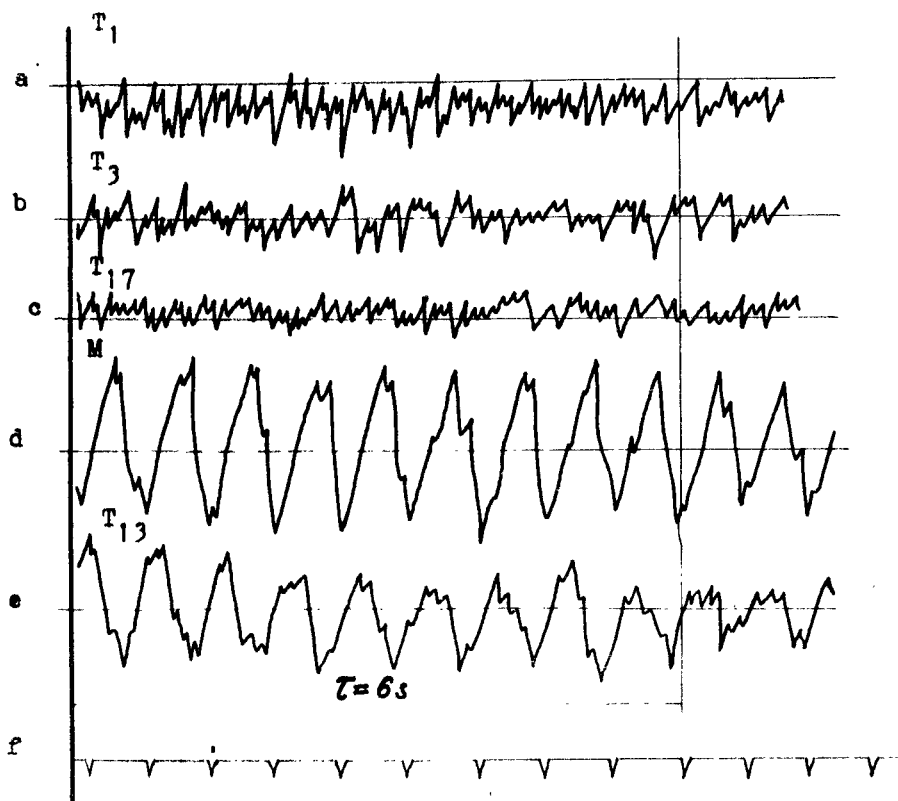
- pomiar naprężeń
- pomiar sił i momentów
- T₁ T₂₇ lewa strona widełek

Schemat rozmieszczeń tensometrów dla roweru.



rys. 3

Schemat rozmieszczeń tensometrów



rys. 4

Fragment zapisu na taśmie oscylografu

- a - rejestracja zmian naprężeń w punkcie T_1 ,
- b, c, e - rejestracja zmian siły w punktach T_3 , T_{17} i T_{13}
- d - rejestracja zmian momentu na osi korb.
- f - znacznik obrotów korb.

2.3.0. Opracowanie statystyczne zapisów z oscylografu

W wyniku badań tensometrycznych otrzymano obszerny materiał, który obejmował 42 zapisy, o łącznej długości około 2000 m. W związku z tym opracowano metodykę obróbki oscylogramów oraz ewidencji wyników aby otrzymać:

- charakterystyki obciążeń poszczególnych punktów pomiarowych,
- widma obciążeń.

Charakterystykę obciążeń określa się przez podanie:

- wykresu mierzonej wielkości w funkcji współrzędnej uogólnionej,
- wartości średniej mierzonej wielkości,
- podanie wartości maksymalnej i minimalnej,
- podanie częstości występowania mierzonych wielkości określonej wartości czyli tzw. histogramów.

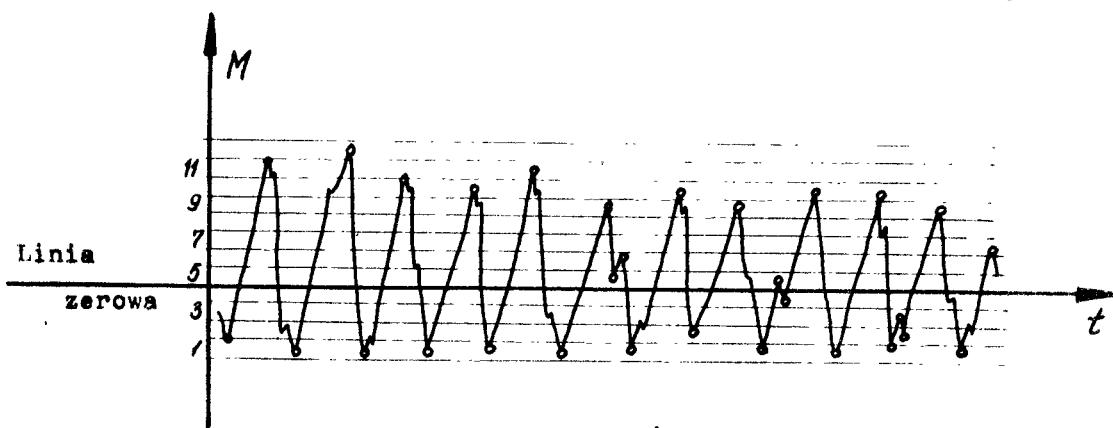
W celu ustalenia charakterystyki oraz widma obciążeń elementu lub zespołu maszyny przeprowadzono schematyzację zapisu oscylograficznego obciążeń.

Schematyzacji można dokonać według jednej z niżej podanych metod:

- metoda wartości ekstremalnych, polegająca na liczeniu punktów szczytowych /maksimów i minimów lub tylko maksimów/,
- metoda liczenia rozpiętości,
- metoda liczenia przekroczeń poziomów,
- metoda rzędnych.

W niniejszym opracowaniu przyjęto metodę wartości ekstremalnych.

Dla przeprowadzenia klasyfikacji wartości przebiegu mierzonej wielkości, zakres między największą i najmniejszą wartością szczytową podzielono za pomocą linii poziomych na jednakowe klasy. W praktyce przyjmuje się od 8 do 12 klas. Suma odczytów



rys. 4

Przykład ustalania klas

ekstremów rozpatrywanego odcinka taśmy w poszczególnych klasach daje częstości n_i /absolutna częstość występowania wartości szczytowych/.

Przeliczając liczebność klas n_i w odniesieniu do łącznej liczby $\sum n_i$ odczytanych wartości szczytowych, otrzymujemy częstości względne występowania wartości szczytowych f_i .

Częstość absolutną kumulowaną otrzymano przez dodanie częstości absolutnej danej klasy do częstości absolutnych wszystkich poprzednich klas. Podobnie tworzymy częstość względną kumulowaną. Zestawienie tabelaryczne dla przykładowych zapisów podano w tab. 1.

Z wybranego odcinka taśmy, dokonano zliczenia ekstremów w poszczególnych przedziałach klasowych zgodnie z rys. 4. Uzyskane wartości z odcinków pomiarowych, przeliczono na długości przebiegu eksploatacyjnego.

Na podstawie przeciętnych warunków eksploatacji ustalono, że na przebieg 6000 km dla roweru i 12000 km dla motoroweru, przypada 60% na drogi o nawierzchni asfaltowej, 30% na drogi o nawierzchni brukowej i 10% na drogi polne. Średni re-surs do naprawy głównej wynoszący dla rowerów 6000 km i dla motorowerów 12000 przyjęto na podstawie Instrukcji Napraw motoroweru "KOMAR" oraz wytycznych otrzymanych z Zakładów Row-erowych "ROMET".

Odcinki pomiarowe ustalono na podstawie ilości znaczników obrotów korby - dla roweru i koła przedniego - dla motoroweru. Ilość znaczników określamy z odcinka, na którym dokonano zliczeń ilości ekstremów.

Tabela 1 Zestawienie dla przykładowych zapisów
 n_i - częstości absolutnych $\sum n_i$ - częstości kumulowane
 f_i - częstości względnych $\sum f_i$ - częstości względnej kumulowanej

Punkt pomiarowy	Przedział klasowy											
	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12
$n_i \cdot 10^4$	5,7	46,5	170	190	72	14	-	-	-	-	-	-
f_i %	1,14	9,2	34,1	38,2	14,56	2,87	-	-	-	-	-	-
$n_i \cdot 10^4$	5,7	52,2	222	412	484	498	-	-	-	-	-	-
f_i %	1,14	10,34	44,4	82,6	97,16	100	-	-	-	-	-	-
$n_i \cdot 10^4$	-	6,2	120	250	511	726	721	534	281	83	34	2,2
f_i %	-	0,19	3,68	7,68	15,7	22,2	22,0	16,3	8,6	2,55	1,0	0,07
$n_i \cdot 10^4$	-	6,2	126	375	887	1613	2334	2868	3149	3232	3266	3268
f_i %	-	0,19	3,87	11,5	27,3	49,5	71,5	87,8	96,4	98,9	99,9	100
$n_i \cdot 10^4$	0,35	10	31,2	74,2	208	368	349	301	336	213	123	37
f_i %	0,02	0,49	1,52	3,62	10,1	18,0	17,0	14,7	16,4	10,4	6,0	1,8
$n_i \cdot 10^4$	0,35	10,3	41,5	115,7	324	693	1042	1343	1679	1892	2015	2052
f_i %	0,02	0,51	2,03	5,65	15,7	33,7	50,7	65,4	81,8	92,3	98,3	100,0
$n_i \cdot 10^4$	2,7	25,3	133	245	494	436	152	14,5	8,8	-	0,35	-
f_i %	0,18	1,66	8,8	16	32,7	29	10,0	0,96	0,58c	-	0,02	-
$n_i \cdot 10^4$	2,7	28,1	161	406	900	1336	1488	1502	1511	151	1512	-
f_i %	0,18	1,84	10,6	26,6	59,3	88,3	98,4	99,4	99,9	99,9	100	100

Długość odcinka pomiarowego dla roweru obliczamy ze wzoru

$$l = 2 \pi R_r \frac{Z_d}{Z_m} \cdot n_z \quad /1/$$

$$l = 4,52 n_z \quad /m/$$

gdzie: R_r = 330 mm - promień toczny koła roweru

Z_d = 46 - ilość zębów koła przekładni łańcuchowej

Z_m = 21 - ilość zębów koła małego przekładni łańcuchowej

n_z = ilość znaczników obrotów korby na taśmie, odpowiadająca odcinkowi, na którym zliczono ekstrema.

Długość odcinka pomiarowego dla motoroweru obliczamy ze wzoru:

$$l = 2 \pi \cdot R_m \cdot n_z \quad /2/$$

$$l = 1,88 n_z \quad /m/$$

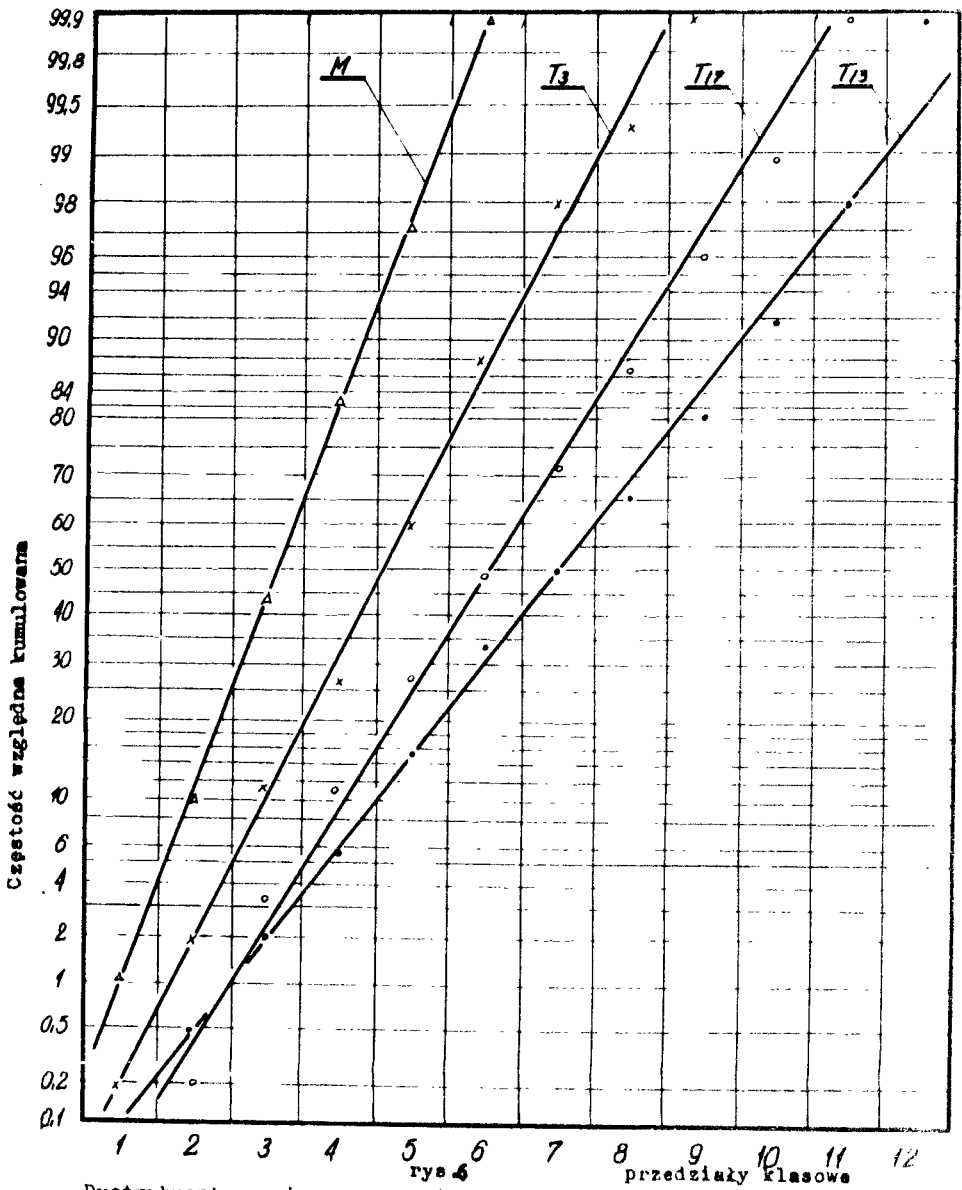
gdzie: R_m = 300 mm - promień toczny koła motoroweru

n_z = ilość znaczników obrotów koła przedniego odpowiadająca odcinkowi, na którym zliczono ekstrema.

Jednym z podstawowych zagadnień analizy statystycznej oscylogramów, jest określenie takiego odcinka analizowanego wykresu, który zapewniłby odpowiedni poziom ufności opracowanych wyników. Zalecenia w literaturze krajowej i zagranicznej [1] podają, że z odcinka analizowanego wykresu powinno się otrzymać 200 - 500 informacji np. punktów szczytowych. W czasie badań odcinki pomiarowe wynosiły w zależności od rodzaju nawierzchni 100 - 200 m.

Wartości częstości absolutnych n_i w tabeli 1, obliczono z zależności:

$$\frac{n_{ip}}{n_i} = \frac{1}{L}$$



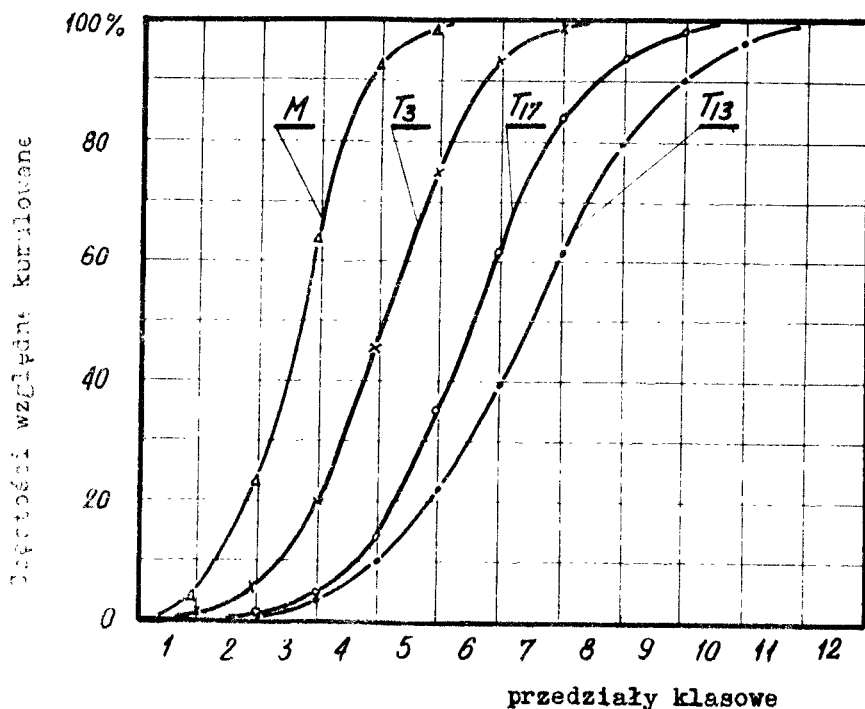
Dystrybuanty empiryczne na siatce laplaso-regularnej
punkty oznaczono zgodnie z rys. 1

gdzie: n_{ip} - ilość ekstremów zapisu w klasie i na odcinku pomiarowym

1 - długość odcinka pomiarowego obliczono z wzoru [1]

L - przebieg w okresie eksploatacji np. dla roweru po drodze polnej $L = 0,1 \cdot 6000000 = 600\ 000$ /m/

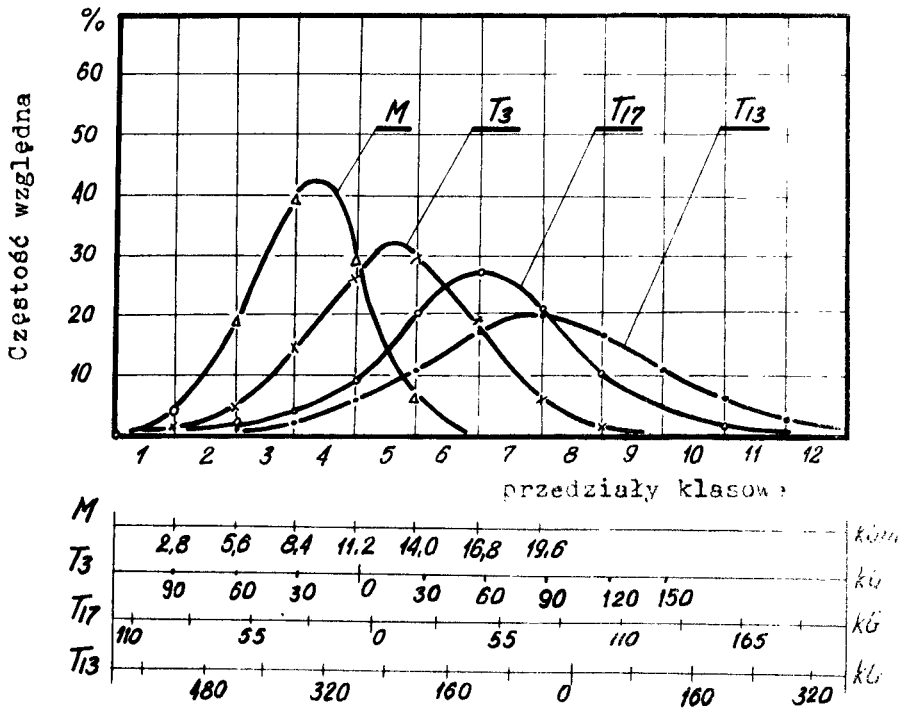
Na podstawie wartości względnej kumulowanej sporządzono wykres na siatce laplaso-regularnej /rys.7/. Wartości otrzymane z pomiaru naniesione na siatkę laplaso-regularną układają się wzdłuż linii prostej, a zatem możemy stwierdzić, że rozkład jest zbliżony do rozkładu normalnego. Wykresy dystrybuanty teoretycznej przybliżającej rozkład empiryczny podano na rys. 8,



rys. 7

Dystrybuanty teoretyczne przybliżające rozkład empiryczny

rozkład częstości względnej otrzymanej z pomiarów, podano na rys. 8.



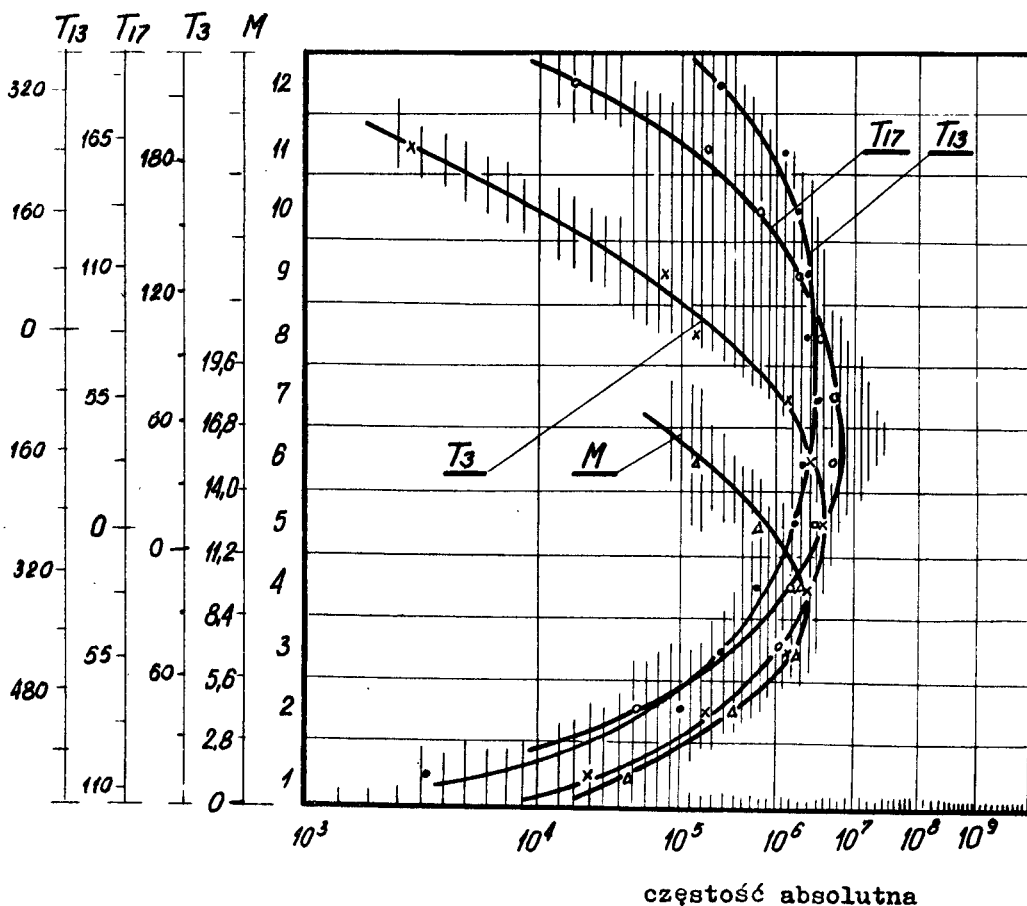
rys. 8

Rozkład częstości względnej

Opracowane widma obciążeń służyć będą do opracowania programu obciążeń próby wielostopniowej i konstrukcji stanowiska badawczego, pozorującego rzeczywiste warunki pracy pojazdu.

Ustalenie widma obciążeń dla głównych elementów i zespołów pojazdu daje ponadto możliwość porównań mających na celu optymalizację parametrów związanych z jej żywotnością i trwałością. Widmo obciążeń daje graficzną interpretację powiązań między wielkością szczytów a absolutną częstością ich występowania w danym elemencie lub zespole pojazdu.

Widma obciążeń dla przykładowych zapisów podane są na rys. 9.



rys. 9

Widma obciążeń na siatce półlogarytmicznej

U W A G A : - Wykres przebiegu momentu podany na rys. 3 odnosi się do przekroju osi korb i mierzony był w środku jej długości, stąd symetria wykresu w stosunku do linii zerowej. Moment obciążający przekładnię łańcuchową dla której wykonano histogram i widmo obciążeń jest momentem jednostronnie zmiennym i wykres jego powstaje przez obrócenie dolnej części wykresu momentu dla osi korb, wokół linii zerowej do pokrycia się z górną częścią wykresu. W wyniku takiego obrotu ze względu na symetrię wykresu w stosunku do linii zerowej, klasa 1 pokrywa się z 12, 2 z 11 i.t.đ.

L I T E R A T U R A

1. Instytut Mechanizacji i Elektryfikacji Rolnictwa w Warszawie, Biuletyn Informacyjny Nr 8/44 Warszawa 1968 r.
2. Z.Dyłał, Z.Orłóś: Wytrzymałość zmęczeniowa materiałów. WNT, Warszawa 1962 r.
3. N.W. Smirnow, J.W.Dunin-Borkowski: Krótki kurs statystyki matematycznej dla zastosowań technicznych.RWN, Warszawa 1960 r.
4. Projekt Polskiej Normy PN-69/N-04000
"Niezawodność. Terminy, określenia i symbole".

A STUDY ON RELIABILITY AND DURABILITY OF
MOTOR-BICYCLES AND BICYCLES - PART I

The article is an introduction to the study of reliability and durability of motor-bicycles and bicycles and a description of tensometric load measurements in elements of motor-cycles and bicycles under working conditions.

It is /at the same time/ the first of a series of publications on these studies.

ИССЛЕДОВАНИЯ БЕЗОТКАЗНОСТИ ДЕЙСТВИЯ И ПРОЧНОСТИ
МОТОВЕЛОСИПЕДОВ И ВЕЛОСИПЕДОВ. Часть I

Эта статья является, своего рода, введением в проблему исследований по безотказности действия и прочности мотовелосипедов и велосипедов, а также описание тензометрических измерений нагрузки в элементах мотовелосипеда и велосипеда в условиях эксплуатации.

Эта статья является также первой из серии публикаций, посвящённых вышеуказанным исследованиям.

Zofia Kasprowicz, Jerzy Steinborn, Wojciech Weiner^x

ANALIZA PORÓWNAWCZA METOD OBLICZANIA ZŁĄCZY ŚRUBOWYCH CIERNYCH O PROSTOKĄTNYCH POWIERZCHNIACH STYKU

Opracowanie przedstawia analizę porównawczą metod obliczania złącza śrubowego obciążonego momentem skręcającym działającym w płaszczyźnie prostokątnego pola styku, dla śrub luźnych rozmieszczonych dowolnie. Przykład liczbowy obrazuje prostotę praktycznego stosowania proponowanej metody.

I. Wstęp

Maszyny i urządzenia, podobnie jak ich zespoły i podzespoły wymagają ulepszania nie tylko pod względem funkcjonalnym, ale także pod względem kształtowania wytrzymałościowego. Zgodnie z wytycznymi teorii konstrukcji, proces konstruowania winien sprowadzić się do szerokiej analizy polegającej na poszukiwaniu optymalnego rozwiązania w oparciu o cztery zasady konstrukcji.

Postulat optymalnego konstruowania może być spełniony także na drodze adaptacji nowych metod obliczeniowych we wszystkich przypadkach gdzie dotychczas stosuje się metody przybliżone, pozostające w odstępstwie od uzasadnionego modelu fizycznego. Wymaga tego pierwsza zasada konstrukcji - zasada optymalnego stanu obciążenia. Zadaniem konstruktora jest dobranie cech konstrukcyjnych przede wszystkim ze względu na obciążenie wytworu. Układy poddane działaniu sił należy kon -

^x mgr inż. Zofia Kasprowicz, mgr inż. Jerzy Steinborn, mgr inż. Wojciech Weiner, Zespół Podstaw Konstrukcji Maszyn WSI w Bydgoszczy

struować w oparciu o twierdzenie:

gdzie tworzywo - tam naprężenia wywołane obciążeniem [1]
 Im dokładniej wyznaczmy naprężenia - tym dokładniej określimy niezbędny materiał umożliwiający przeniesienie obciążenia, a tym samym mniej rozrzutnie dysponować będziemy tworzywem.

Analizę metod obliczania oparto o wyznaczone wartości biegunowego momentu statycznego pól prostokątnych [2], porównując metodę stosowaną dotychczas [3] z metodą proponowaną opierającą się na nowym ujęciu teoretycznym [4].

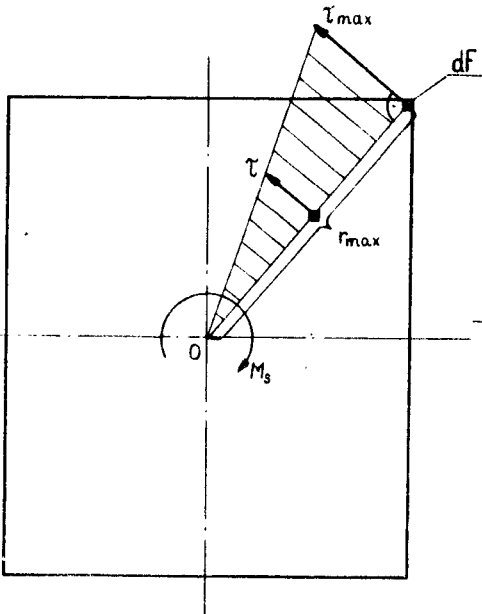
II. Analiza porównawcza stosowanej i proponowanej metody obliczania

1. Związki podstawowe

a) Metoda stosowana [3]

Założenie:

$$\tau = \text{const.}, \tau \approx r \quad (1,2)$$



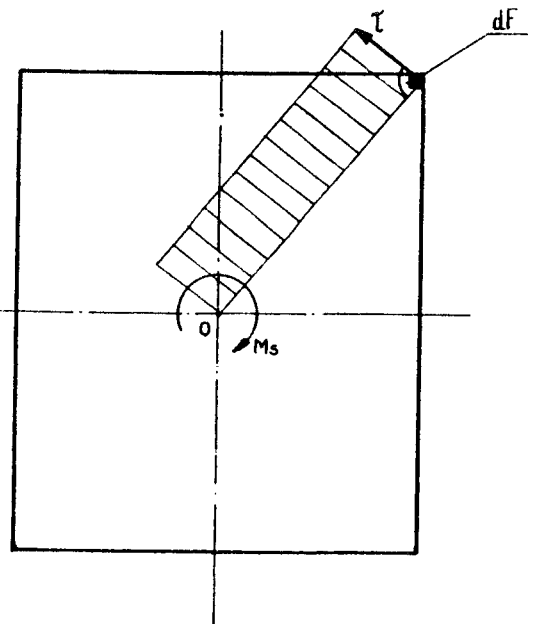
rys. 1a

Schemat złącza obciążonego momentem skręcającym

b) Metoda proponowana [4]

Założenie:

$$\tau = \text{const.}, \tau \perp r \quad (1,3)$$



rys. 1b

Schemat złącza obciążonego momentem skręcającym

$$\tau \cdot r \quad (3)$$

stąd
$$\frac{\tau_{\max}}{r_{\max}} = \frac{\tau}{r} = \text{const.} \quad (4a)$$

$$\tau = \frac{\tau_{\max}}{r_{\max}} r \quad (5a)$$

gdzie τ (kG/cm²) - jednostkowa siła tarcia

$$T = N \mu \quad | : F \quad (4b)$$

$$\tau = p \mu = \text{const.} \quad (5b)$$

Związek (5b) wynika z założenia że powierzchnie styku elementów są idealnie gładkie i sztywne wobec czego w każdym punkcie nacisk powierzchniowy jest stały: $p = \text{const.}$

W obu przypadkach spełniony musi zostać warunek równowagi

$$M_B = \int_F \tau r dF \quad (6)$$

Podstawiając odpowiednie wartości jednostkowej siły tarcia określone związkami (5a) oraz (5b) otrzymujemy:

$$\begin{aligned} M_B &= \int_F \frac{\tau_{\max}}{r_{\max}} r^2 dF = \frac{\tau_{\max}}{r_{\max}} \int_F r dF = \\ &= \frac{\tau_{\max}}{r_{\max}} J_0 \quad (6a) \end{aligned}$$

$$M_B = \int_F \tau r dF = \tau \int_F r dF = \tau S_0 \quad (6b)$$

stąd

$$\tau_{\max} = \frac{M_B r_{\max}}{J_0} = \frac{M_B}{W_0} \quad (\text{kG/cm}^2) \quad (7a)$$

$$\tau = \frac{M_B}{S_0} \quad (\text{kG/cm}^2) \quad (7b)$$

2. Określenie niezbędnej średnicy śrub luźnych

Aby złącze pozostało w równowadze trzeba spełnić następujące warunki

$$\tau_{\max} \leq \frac{Q_w n}{F} \mu \quad (8a)$$

$$\tau \leq \frac{Q_w n}{F} \mu \quad (8b)$$

Zastępując wyrażenie Q_w zależnością określoną wytrzymałością śruby

$$Q_w = k_r \frac{\pi d_r^2}{4} \quad (9)$$

otrzymamy:

$$\tau_{\max} \leq \frac{K_r \pi d_r^2 n \mu}{4F} \quad (10a)$$

$$\tau \leq \frac{K_r \pi d_r^2 n \mu}{4F} \quad (10b)$$

korzystając odpowiednio ze związków (7a) i (7b) wyrazić możemy niezbędną średnicę rdzenia śruby luźnych następująco:

$$\frac{M_s}{W_o} \leq \frac{K_r \pi d_r^2 n \mu}{4F} \quad (11a)$$

$$\frac{M_s}{S_o} \leq \frac{K_r \pi d_r^2 n \mu}{4F} \quad (11b)$$

stąd

$$d_r \geq \sqrt{\frac{4 M_s F}{W_o K_r \pi n \mu}} \quad (12a)$$

$$d_r \geq \sqrt{\frac{4 M_s F}{S_o K_r \pi n \mu}} \quad (12b)$$

co możemy przedstawić jako

$$d_r \geq A \sqrt{\frac{F}{W_o}} \quad (\text{cm}) \quad (13a)$$

$$d_r \geq A \sqrt{\frac{F}{S_o}} \quad (\text{cm}) \quad (13b)$$

$$A = \sqrt{\frac{4 M_s}{K_r \pi n \mu}} \quad (\text{cm}) \quad (14)$$

dalsza analiza porównawcza sprowadza się więc do określenia zmienności funkcji

$$d_r = Af \left(\sqrt{\frac{F}{W_o}} \right) \quad (15a)$$

$$d_r = Af \left(\sqrt{\frac{F}{S_o}} \right) \quad (15b)$$

3. Analiza wyników

Zależności funkcyjne określone wzorami (15a) i (15b) wyznaczono dla stałej wartości A przyjmując:

- moment skręcający $M_s = 30000 \text{ kGcm}$
- naprężenia dopuszczalne $k_r = 1400 \text{ kG/cm}^2$
- współczynnik tarcia $\mu = 0,1$
- liczbę śrub $n = 6$

Analizę dla pełnego porównania obu metod obliczeniowych przeprowadzono w trzech wariantach stosunku boków b/a wynoszącego kolejno 1,2 i 4. Wyniki tej analizy przedstawiają tablice 1,2 i 3.

Tablica 1

a	b	F	\sqrt{F}	W_0	$\sqrt{W_0}$	S_0	$1/\sqrt{S_0}$	d_{rW_0}	M	d_{rS_0}	M	$\frac{d_{rS_0}}{d_{rW_0}} \cdot 100$
cm	cm	cm ²	cm	cm ³	cm ²	cm ³	cm ²	cm	-	cm	-	%
3	3	9	3	6,34	2,52	10,33	3,19	2,50	30	1,98	24	79
5	5	25	5	29,40	5,41	47,82	6,93	1,94	24	1,52	20	"
7	7	49	7	80,50	8,95	131,23	11,48	1,64	22	1,28	16	"
9	9	81	9	171,00	13,08	278,91	16,70	1,44	18	1,13	14	"
1/ wartości S_0 określono wg tablicy 4.												

Tablica 2 Wielkości porównawcze - wariant 1

a	b	F	\sqrt{F}	W_0	$\sqrt{W_0}$	S_0	$1/\sqrt{S_0}$	d_{rW_0}	M	d_{rS_0}	M	$\frac{d_{rS_0}}{d_{rW_0}} \cdot 100$
cm	cm	cm ²	cm	cm ³	cm ²	cm ³	cm ²	cm	-	cm	-	%
3	6	18	4,24	20,1	4,51	32,03	5,66	1,97	24	1,57	20	79
5	10	50	7,07	93,3	9,66	148,31	12,20	1,54	20	1,21	16	"
7	14	98	9,90	256,0	16,00	400,00	20,00	1,31	16	1,04	14	"
9	18	162	12,73	542,0	23,28	900,00	30,00	1,14	14	0,89	10	"

Wielkości porównawcze - wariant drugi

Tablica 3

a	b	F	\sqrt{F}	W_0	$\sqrt{W_0}$	S_0	$1/\sqrt{S_0}$	$d_{r_{w_0}}$	M	$d_{r_{s_0}}$	M	$\frac{d_{r_{s_0}}}{d_{r_{w_0}}} 100$
cm	cm	cm ²	cm	cm ³	cm ²	cm ³	cm ²	cm	-	cm	-	%
3	12	36	6	74,3	8,63	125	11,18	1,46	18	1,12	14	~79
5	20	100	10	344,0	18,55	530	23,02	1,13	14	0,92	12	
7	28	196	14	943,0	30,71	1550	39,40	0,96	12	0,75	10	
9	36	324	18	2010,0	45,00	3150	56,10	0,84	12	0,67	10	

Wielkości porównawcze - wariant trzeci

1/ Wartości S_0 określono posługując się danymi z poz. lit [2]

Analiza wykazała, że niezbędną wytrzymałościowo średnica śrub przy stosowaniu proponowanej metody obliczeń jest około 21 % mniejsza niż dla metody dotychczasowej.

$$d_{r_{s_0}} \approx 0,79 d_{r_{w_0}} \quad (16)$$

Pozwala to na obniżenie ciężaru łączników stosowanych w omawianych złączach - co jest działaniem optymalizującym konstrukcję złącza, z uwagi na kryteria ciężaru i kosztów.

III. Przykład obliczeniowy

Przykład obliczeniowy jest ilustracją praktycznego wykorzystania wartości statycznego momentu biegunowego prostopadłego pola styku (tablica 4) [2].

1. T e m a t

Dla złącza przedstawionego na rysunku 2 obliczyć niezbędną średnicę śrub luźnych.

Dane:

$$\begin{aligned} Q &= 50 \text{ kG} & l &= 200 \text{ mm} \\ a &= 50 \text{ mm} & \mu &= 0,1 \\ b &= 100 \text{ mm} & n &= 2 \\ \text{material} \quad \text{St6} &- k_r = 1400 \text{ kG/cm}^2 \end{aligned}$$

Rozwiązanie:

Obciążenia

$$M_g = Ql = 50 \cdot 20 = 1000 \text{ kG cm}$$

$$Q = 50 \text{ kG}$$

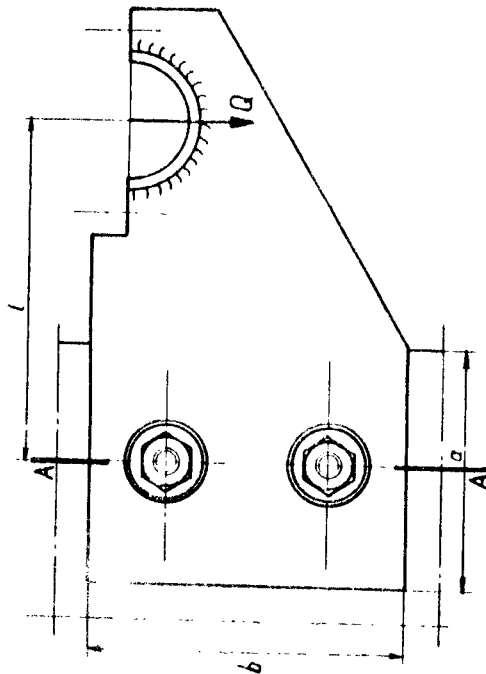
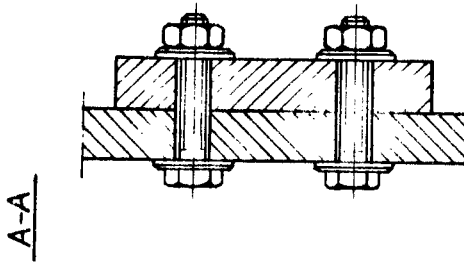
Pole styku

$$F = ab = 5 \cdot 10 = 50 \text{ cm}^2$$

Tablica 4

(jedm.długości)		S_0 (/jedm.dług. β)									
a	b	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
0,1		00.0253	00.1004	00.2254	00.4004	00.6255	00.9005	01.2255	01.6005	02.0255	02.5005
0,2		00.0521	00.2026	00.4528	00.8030	01.2532	01.4534	03.2035	04.0536	04.0536	05.0036
0,3		00.0812	00.3077	00.6836	01.2093	01.8848	02.7102	03.6855	04.8108	06.0861	07.5113
0,4		00.1131	00.4167	00.9189	01.6204	02.5216	03.6226	04.9234	06.4241	08.1247	10.0253
0,5		00.1483	00.5304	01.1596	02.0376	03.1649	04.5418	06.1684	08.0448	10.1710	12.5471
0,6		00.1871	00.6493	01.4065	02.4617	03.8157	05.4689	07.4217	09.6741	12.2262	15.0781
0,7		00.2298	00.7739	01.6603	02.8935	04.4749	06.4051	08.6845	11.3133	14.2916	17.6197
0,8		00.2765	00.9047	01.9217	03.3339	05.1434	07.3512	09.9577	12.9634	16.3684	20.1729
0,9		00.3274	01.0421	02.1913	03.7836	05.8221	08.3081	11.2424	14.6255	18.4577	22.7391
1,0		00.3826	01.1865	02.4694	04.2431	06.5116	09.2767	12.5393	16.3006	20.5604	25.3192
2,0		01.1865	03.0608	05.8086	09.4917	14.1363	19.7555	26.3569	33.9449	42.5228	52.0926
3,0		02.4694	05.8086	10.3301	16.1687	23.3912	32.0346	42.1210	53.6646	66.6748	81.1585
4,0		04.2431	09.4917	16.1687	24.4863	34.5629	46.4691	60.2496	75.9339	93.5426	113.0904
5,0		06.5116	14.1363	23.3912	34.5629	47.8247	63.2871	81.0230	101.0829	123.5026	148.3084
6,0		09.2767	19.7555	32.0346	46.4691	63.2871	82.6411	104.5369	129.3493	156.8332	187.1234
7,0		12.5393	26.3569	42.1210	60.2496	81.0230	104.6369	131.2311	160.9080	193.7440	229.7975
8,0		16.3006	33.9449	53.6646	75.9339	101.0829	129.3493	160.9080	195.8901	234.3949	276.5030
9,0		20.5604	42.5228	66.6748	93.5426	123.5026	156.8332	193.7440	234.3959	278.9138	327.3963
10,0		25.3192	52.0926	81.1585	113.0904	148.3084	187.1294	229.7975	276.5030	327.3963	382.5079

Wartości biegunowego momentu statycznego $S_{0, \text{geb}}$ prostokątnego pola styku [L].



rys. 2

Złącze obciążone siłą poprzeczną i momentem skręcającym leżącymi w płaszczyźnie styku elementów głównych (śruby luźne)

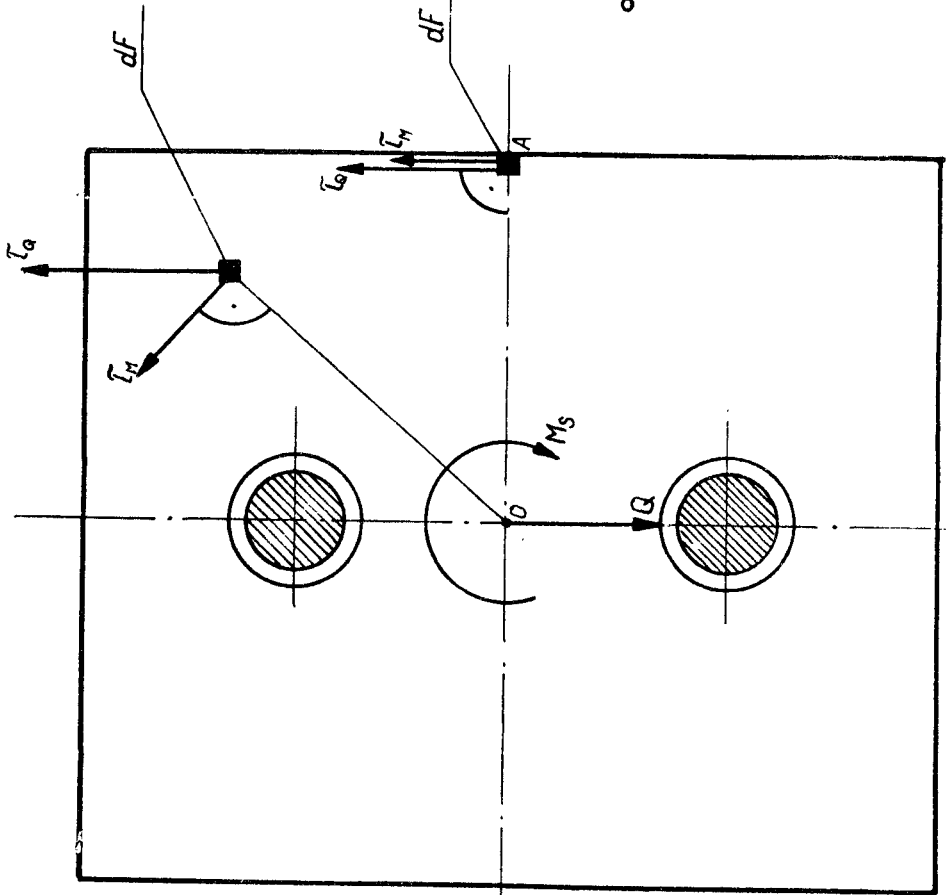
Biegunowy moment statyczny pola styku (tablica 4)

$$S_{0,5,10} = 148,31 \text{ cm}^3$$

Wypadkowa jednostkowych sił tarcia osiąga w polu styku war-

tość maksymalną wzdłuż odcinka OA (rys.3) i wynosi:

$$\tau_w = \tau_Q + \tau_M = \frac{Q}{F} + \frac{Ms}{S_0}$$



rys. 3

Schemat złącza

Aby złącze pozostało w równowadze musi zostać spełniony warunek:

$$\tau_w \leq \frac{Q_w}{F} n \mu$$

Stąd niezbędne napięcie wstępne w śrubie wynosi

$$Q_w \geq \frac{Q}{n\mu} + \frac{M_s F}{S_0 n \mu} = \frac{50}{2.0,1} + \frac{1000,50}{148,31 \cdot 2.0,1} = 1930 \text{ kN}$$

Z warunku wytrzymałościowego określony zostaje niezbędny przekrój rdzenia śruby

$$F_r \geq \frac{Q_w}{K_r} = 1,38 \text{ cm}^2$$

co pozwala na dobór niezbędnych śrub M16, dla których przekrój rdzenia

$$F_r = 1,41 \text{ cm}^2$$

IV. Wnioski

1. Metoda proponowana pozwala na dość znaczne obniżenie ciężaru łączników.
2. Stosowanie proponowanej metody jest możliwe przy wykorzystaniu wyznaczonych wartości S_0 dla powierzchni prostokątnych [2].
3. Wydaje się jak najbardziej celowe uznanie metody proponowanej za właściwą do rachunkowego stosowania.
4. Dla przeprowadzonej metody obliczeń należałoby przeprowadzić weryfikację doświadczalną nośności złącza.

L I T E R A T U R A

1. Dietrych J. : Konstrukcja i konstruowanie. WNT. Warszawa 1968
2. Kasprowicz Z., Steinborn J., Weiner W.: Analityczne wyznaczenie biegunowego momentu statycznego prostokątnych pól styku. 1970 (maszynopis).
3. Korewa W.: Części maszyn. Cz.I. WNT. Warszawa 1969
4. Korewa W., Zygmunt K.: Podstawy konstrukcji maszyn Cz.II WNT. Warszawa 1969.

THE ANALYSE OF THE CALCULATION METHODS OF SCREW
JOINTS WITHIN THE PLANE OF RECTANGLE FIELD OF
THE CONTACT

The article depicts the analyses of the calculation methods of screw joints with unfixed screws loaded with the twisting moment working operating within the plane of rectangle field of the contact. The utilization of the value of the static polar moment of inertia in the determination of joints is illustrated by numeral example.

СРАВНИТЕЛЬНЫЙ АНАЛИЗ МЕТОДА РАСЧЕТА ВИНТОВЫХ
СОЕДИНЕНИИ С ПРЯМОУГОЛЬНЫМИ ПОЛЯМИ СТЫКА.

В статье даётся анализ расчёта винтовых соединений со свободными винтами с нагрузкой скручивающего момента действующего в плоскости прямоугольного поля соединения. Цифровой пример иллюстрирует применение величины полярного статического момента в расчёте этих соединений.

ANALITYCZNE WYZNACZANIE BIEGUNOWEGO MOMENTU
 STATYCZNEGO PROSTOKĄTNYCH PÓL STYKU

W artykule podano zależność określającą wartość statycznego momentu biegunowego S_0 dla pól prostokątnych. Wartości S_0 dla różnych proporcji stabelaryzowano i ujęto wykresami.

I. Wstęp

- Podstawą decyzji konstrukcyjnej musi być wnikliwe rozpoznanie racji wytworu, w omawianym przypadku złącza,
- złącze musi być obmyślane tak, aby istniała możliwość wywołania nim określonego działania, a więc złącze ma określony cel techniczny co stanowi tzw. rację celowości technicznej,
 - użycie tego złącza celem wywołania działania winno być uzasadnione gospodarczo, a więc użycie go musi mieć wartość w sensie opłacalności co stanowi tzw. rację ekonomiczną,
 - obmyślane złącze winno posiadać cechy które umożliwiają wykonanie go przy użyciu dostępnych środków co stanowi tzw. rację technologiczności złącza.

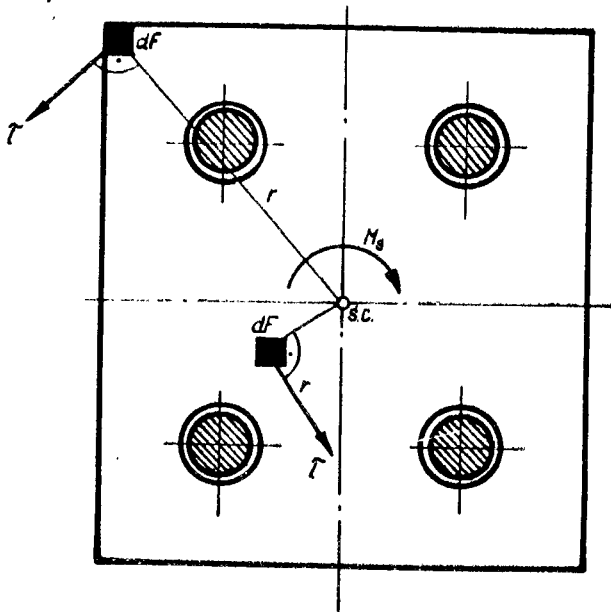
Chcąc aby konstrukcja złącza była racjonalna musimy opierać się na wynikających z tych racji kryteriach ujętych w poniższym zestawieniu:

Kryterium	Rodzaje śrub	
	luźne	pasowane
wykonania	+	+
normalizacji	+	-
pewności	+	+
nośności	+	+
ciężaru łączników	-	+
kosztu łączników	+	-
kosztu obróbki	+	-
+ spełnione		- niespełnione

^x mgr inż. Zofia Kasprowicz, mgr inż. Jerzy Steinborn, mgr inż. Wojciech Weiner, Zespół Podstaw Konstrukcji Maszyn WSI w Bydgoszczy

Analizując kryteria oceny stosowania w złączu śrub luźnych i pasowanych widać wyraźnie, że jedynie kryterium ciężaru łączników przemawia przeciw stosowaniu śrub luźnych, natomiast kryteria możliwości wykonania, kosztu obróbki i kosztu samych łączników zdecydowanie preferują stosowanie śrub luźnych; szczególnie ważną cechą dodatnią jest pełna normalizacja stosowania łączników. Tak przeprowadzona analiza spowodowała konieczność bliższego zainteresowania się możliwościami dokładnego obliczenia złącz śrubowych ciernych, szczególnie w odniesieniu do prostokątnych pól styku, (dla powierzchni kołowych zagadnienie to jest rozpracowane [1]). Sprowadza się to do wyznaczenia wartości biegunowego momentu statycznego S_0 .

Opracowanie niniejsze umożliwia stosowanie w obliczeniach konstrukcyjnych dotyczących złącz o śrubach luźnych, metody opartej o nowe ujęcie teoretyczne [1]. Przy zastosowaniu śrub luźnych przenoszony moment M_S równoważony jest sumą jednostkowych sił tarcia względem środka ciężkości powierzchni styku (rys. 1).



rys. 1

Schemat złącza obciążonego momentem skręcającym

Zakładając sztywność łączonych części i równomierny

nacisk p na powierzchni styku, jednostkowa siła tarcia dla wszystkich punktów powierzchni styku będzie jednakowa [1].

$$\tau = \mu p = \text{const.} \quad (1)$$

stąd
$$M_s = \int_F \tau r dF = \mu p \int_F r dF = \mu p S_0 \quad (2)$$

gdzie:

S_0 - biegunowy moment statyczny powierzchni styku względem jej środka ciężkości w cm^3

F - powierzchnia styku w cm^2

τ - jednostkowa siła tarcia w kg/cm^2

μ - współczynnik tarcia

p - nacisk jednostkowy na powierzchni styku w kg/cm^2

Zależność określona wzorem [2], wykorzystana w obliczeniach dla powierzchni styku o kształcie koła lub kołowego pierścienia, nie była dotychczas stosowana dla powierzchni prostokątnych z uwagi na brak określonych wartości S_0 . Literatura przedmiotowa nie podawała związku analitycznego pozwalającego określić tę wartość.

II. Biegunowy moment statyczny prostokątnej powierzchni styku względem jej środka ciężkości

Biegunowy moment statyczny prostokątnej powierzchni styku wyznaczono analitycznie, sprawdzając wynik metodą całkowania numerycznego. Sporządzono tablicę wartości biegunowego momentu statycznego w oparciu o wynik analityczny na podstawie obliczeń numerycznych.

1. Analityczne wyznaczenie wartości biegunowego momentu statycznego

Biegunowy moment statyczny wyznaczono analitycznie dla przekroju prostokątnego przedstawionego na rys. 2 wg wzoru:

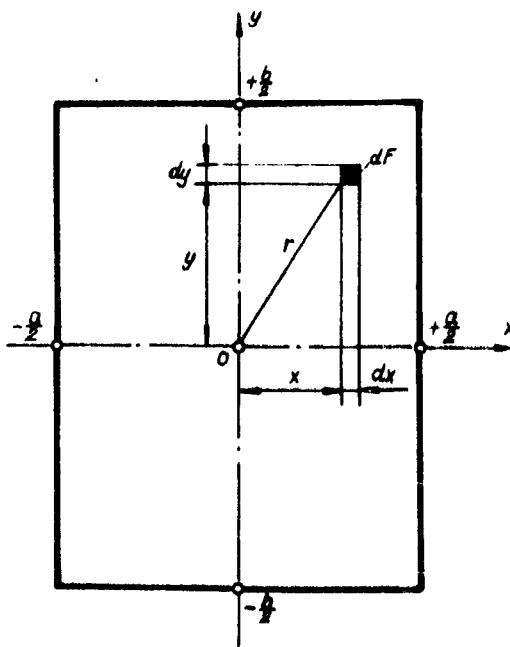
$$S_0 = \int_F r dF = \int_{-\frac{a}{2}}^{\frac{a}{2}} \int_{-\frac{b}{2}}^{\frac{b}{2}} \sqrt{x^2 + y^2} \, dx dy \quad (3)$$

otrzymując z całkowania wynik

$$S_0 = \frac{ab}{8} \sqrt{a^2 + b^2} + \frac{b^3}{8} \ln \left| \frac{a + \sqrt{a^2 + b^2}}{b} \right| + \frac{b^3}{24} \ln \left| \frac{1-m}{1+m} \right| - \\ - \frac{1}{36} \frac{mb^3}{1-m^2} \left[\frac{8}{(1-m^2)^2} - \frac{14}{1-m^2} + 3 \right] + \frac{a^3}{36} (1+3 \ln \left| \frac{b + \sqrt{a^2 + b^2}}{a} \right|), \quad (4)$$

gdzie

$$m = \operatorname{tg} \left(\frac{1}{2} \operatorname{arc} \operatorname{tg} \frac{a}{b} \right) \quad (5)$$



rys. 2

Prostokątne pole styku

2. Wyznaczenie wartości S_0 w oparciu o wynik analityczny - sprawdzenie wyniku przez wyznaczenie wartości S_0 całkowaniem numerycznym

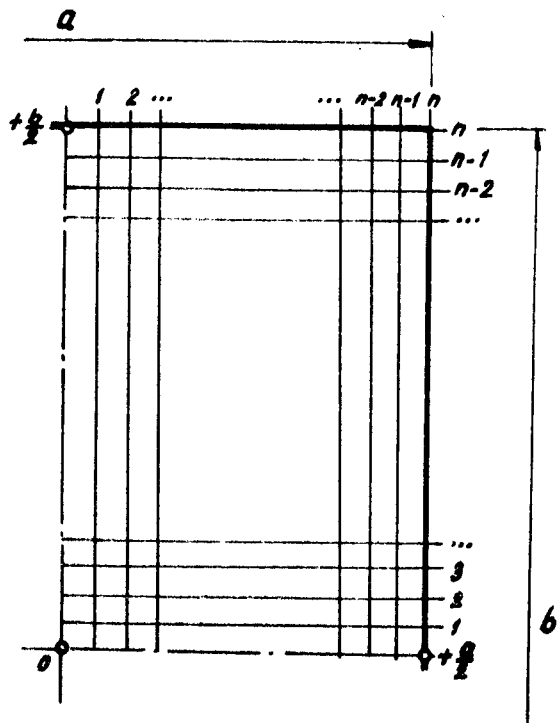
W oparciu o wynik analityczny określony wzorami [4] i [5] wyznaczono wartość biegunowego momentu statycznego prostokątnego pola styku S_0 . Przykładowo dla wartości boków $a = 2$ cm, $b = 2$ cm po zaprogramowaniu wyniku analitycznego (Ośrodek Obliczeniowy WSI - Bydgoszcz) otrzymano wynik

$$S_{0_{2,2}} = 3,0608 \text{ cm}^3$$

Otrzymane wyniki sprawdzono wyznaczając S_0 całkowaniem numerycznym. Przy narastaniu wartości n -krotnego podziału boków ćwiartki (rys. 3). pola

styku, otrzymano przykładowo dla wymiarów boków prostokąta wynoszących $a = 2$ cm, $b = 2$ cm wartości liczbowe biegunowego momentu statycznego S_0 podane w tabelicy 1.

Jak przedstawiono w tabelicy 1 podział rozpatrywanego pola styku na 4×512^2 pól elementarnych zbliża otrzymywany wynik $S_{0_{2,2}}$ do wartości otrzymanej ze wzoru analitycznego. Stanowi to potwierdzenie wyniku anali-



rys. 3
Schemat n -krotnego podziału ćwiartki pola styku

tycznego podanego wzorami [4] i [5].

Tablica 1. Zmiana wartości $S_{02.2}$ dla rosnącej krotności podziału boków ćwiartki pola styku

Krotność podziału n	Biegunowy moment statyczny $S_{02.2}$ (/jedn.dług./ ³)
1	2,8284271248
2	2,9953523925
4	3,0434452346
8	3,0563218424
16	3,0596515166
32	3,0604979997
64	3,0607113953
128	3,0607649679
256	3,0607783907
512	3,0607816939

3. Wartości biegunowego momentu statycznego prostokątnych pól styku

Na podstawie wyniku analitycznego w oparciu o obliczenia numeryczne sporządzono zestawienie wartości biegunowego momentu statycznego prostokątnych pól styku o proporcji boków uzasadnionej potrzebami praktycznymi, co przedstawiono w tablicy 2. Tablica 2 pozwala na wybranie wartości S_0 dla dowolnego prostokąta, przy czym tok postępowania jest następujący:

- w przypadku prostokąta o bokach $a = 2$ cm, $b = 4$ cm

$$S_{02.4} = 9,4917 \text{ cm}^3$$

- w przypadku prostokąta o bokach $a = 20$ cm, $b = 40$ cm

$$S_{020.40} = 9491,7 \text{ cm}^3$$

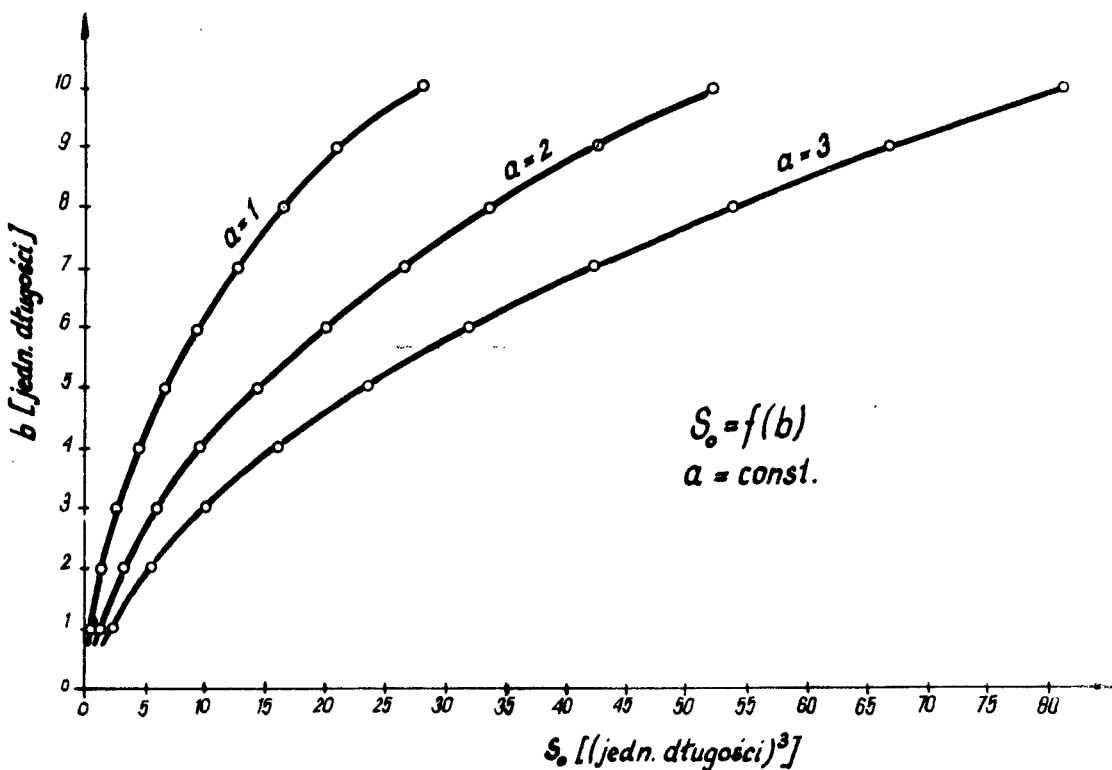
- w przypadku prostokąta o bokach $a = 0,2$ cm, $b = 0,4$ m

Tablica 2. Wartości biegunowego momentu statycznego $S_{0,a,b}$ prostokątnego pola styku

(jedn. długości)		S_0 (/jedn. dżug. / ²)													
		1	2	3	4	5	6	7	8	9	10				
a	b														
0,1	0,1	00.0253	00.1004	00.2254	00.4004	00.6255	00.9005	01.2255	01.6005	02.0255	02.5005				
0,2	0,2	00.0521	00.2026	00.4528	00.8030	01.2532	01.8033	02.4534	03.2035	04.0536	05.0036				
0,3	0,3	00.0812	00.3077	00.6836	01.2093	01.8848	02.7102	03.6855	04.8108	06.0861	07.5113				
0,4	0,4	00.1131	00.4167	00.9189	01.6204	02.5216	03.6226	04.9234	06.4241	08.1247	10.0253				
0,5	0,5	00.1483	00.5304	01.1596	02.0376	03.1649	04.5418	06.1684	08.0448	10.1710	12.5471				
0,6	0,6	00.1871	00.6493	01.4065	02.4617	03.8157	05.4689	07.4217	09.6741	12.2262	15.0781				
0,7	0,7	00.2298	00.7739	01.6603	02.8935	04.4749	06.4051	08.6845	11.3133	14.2916	17.6197				
0,8	0,8	00.2765	00.9047	01.9217	03.3339	05.1434	07.3512	09.9577	12.9634	16.3684	20.1729				
0,9	0,9	00.3274	01.0421	02.1913	03.7836	05.8221	08.3081	11.2424	14.6255	18.4577	22.7391				
1,0	0,9	00.3826	01.1865	02.4694	04.2431	06.5116	09.2767	12.5393	16.3006	20.5604	25.3192				
2,0	0,9	01.1865	03.0608	05.8086	09.4917	14.1363	19.7555	26.3569	33.9449	42.5228	52.0926				
3,0	0,9	02.4694	05.8086	10.3301	16.1687	23.3912	32.0346	42.1210	53.6646	66.6748	81.1585				
4,0	0,9	04.2431	09.4917	16.1687	24.4863	34.5629	46.4691	60.2496	75.9339	93.5426	113.0904				
5,0	0,9	06.5116	14.1363	23.3912	34.5629	47.8247	63.2871	81.0230	101.0829	123.5026	148.3084				
6,0	0,9	09.2767	19.7555	32.0346	46.4691	63.2871	82.6411	104.6369	129.3493	156.8332	187.1294				
7,0	0,9	12.5395	26.3569	42.1210	60.2496	81.0230	104.6369	131.2311	160.9080	193.7440	229.7975				
8,0	0,9	16.3006	33.9449	53.6646	75.9339	101.0829	129.3493	160.9080	195.8901	234.3959	276.5030				
9,0	0,9	20.5604	42.5228	66.6748	93.5426	123.5026	156.8332	193.7440	234.3959	278.9138	327.3963				
10,0	0,9	25.3192	52.0926	81.1585	113.0904	148.3084	187.1294	229.7975	276.5030	327.3963	382.5979				

$$S_{0,2,0,4} = 0,0095 \text{ m}^3$$

Dla wymiarów pośrednich nie można przeprowadzać interpolacji wartości podanych w tabelicy 2, gdyż $S_0 = f(b)$ nie zmienia się liniowo zależnie od wartości wymiaru boku – co przedstawiono na rys. 4.

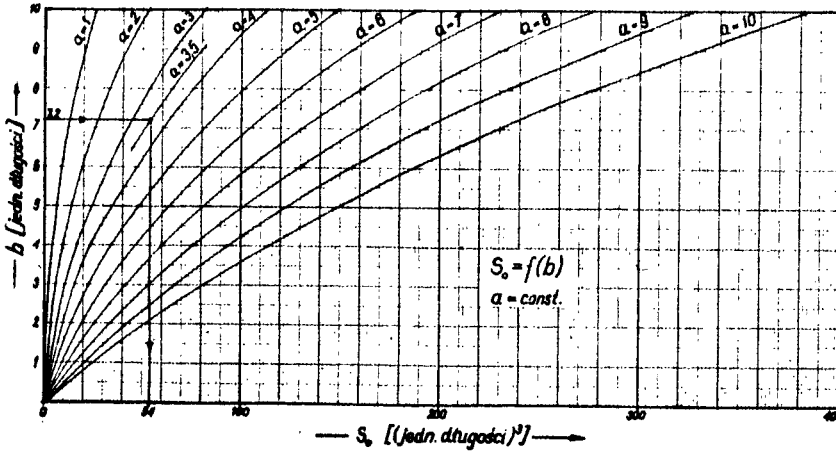


rys. 4

Wykres zależności $S_0 = f(b)$ dla $a = \text{const.}$

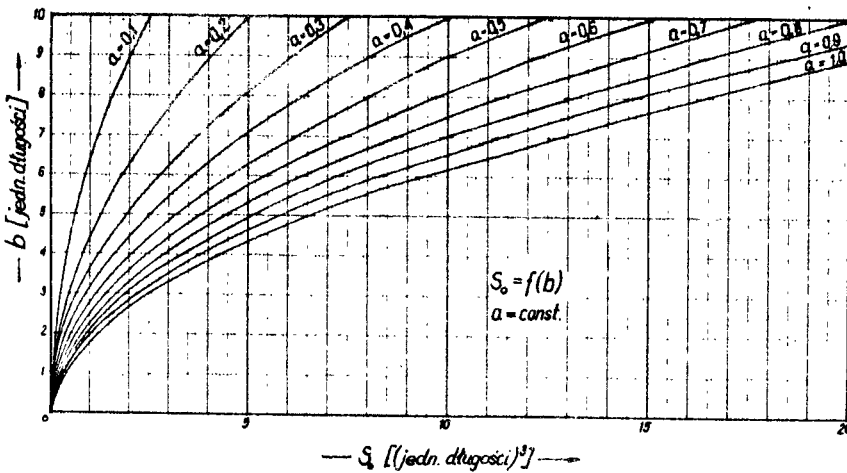
W przypadku wymiarów boków określonych z dokładnością dziesiętną należy posługiwać się przy określaniu S_0 wykresami przedstawionymi na rys. 5 i 6 sporządzonymi w oparciu o wartości ujęte w tabelicy 2.

Przykładowo tok postępowania (korzystając z rys. 5) jest następujący:



rys. 5

Wartości biegunowego momentu statycznego S_0 pól prostokątnych o wymiarach boków $a=1 + 10$ (jedn.dług.), $b=1 - 10$ (jedn.dług.)



rys.6

Wartości biegunowego momentu statycznego S_0 pól prostokątnych o wymiarach boków $a = 0,1 + 1$ (jedn.dług.) $b = 1 + 10$ (jedn.dług.)

- w przypadku prostokąta o bokach $a = 5$ cm, $b = 8,9$ cm

$$S_{o5.8,9} = 121 \text{ cm}^3$$

taki sam wynik otrzymuje się dla $a = 8,9$ cm, $b = 5$ cm

- w przypadku prostokąta o bokach $a = 50$ cm, $b = 89$ cm

$$S_{o50.89} = 121000 \text{ cm}^3$$

- w przypadku prostokąta o bokach $a = 35$ cm, $b = 72$ cm wynik odczytuje się wg schematu pokazanego na rys. 5 otrzymując wartość z pewnym przybliżeniem

$$S_{o35.72} = 54000 \text{ cm}^3;$$

przypadki takie będą praktycznie rzadko występowały gdyż ze względów konstrukcyjnych przyjęcie jednego wymiaru jako dziesiątnej wielokrotności jednostki długości nie nastę-
cza trudności.

III. W n i o s k i

1. Ujęte tabelarycznie oraz wykresami S_o prostokątnych pól styku pozwalają na praktyczne ich wykorzystanie w obliczeniu złącz o śrubach luźnych w nowym ujęciu teoretycznym.
2. Wielkości S_o nie zmieniają swej wartości przy zachowaniu tego samego stosunku boków a/b lub b/a .
3. Wartości momentu statycznego określone wzorami (4) i (5) mogą mieć zastosowanie szersze dla innych proporcji boków zależnie od potrzeb praktycznych

L I T E R A T U R A

1. Korewa W., Zygmunt K.: Podstawy konstrukcji maszyn.
Cz.II WNT, W-wa 1969.

THE ANALYTIC EVALUATE OF THE STATIC POLAR
MOMENT OF INERTIA FOR THE RECTANGLE FIELDS

The dependence defining the value of the static polar moment of inertia S_0 for the rectanale fields is given in this article.

The tables and diagrams are concerned with the values S_0 for various proportions of the sides.

АНАЛИТИЧЕСКОЕ РАСЧЕРКИВАНИЕ ПОЛЯРНОГО СТАТИ-
ЧЕСКОГО МОМЕНТА ПРЯМОУГОЛЬНЫХ ПОЛЕЙ СОЕДИНЕНИЯ.

В статье показана зависимость определяющая величину полярного статического момента S_0 для прямоугольных полей.

Величины S_0 для разных пропорций сторон даны в чертежах и таблицах.

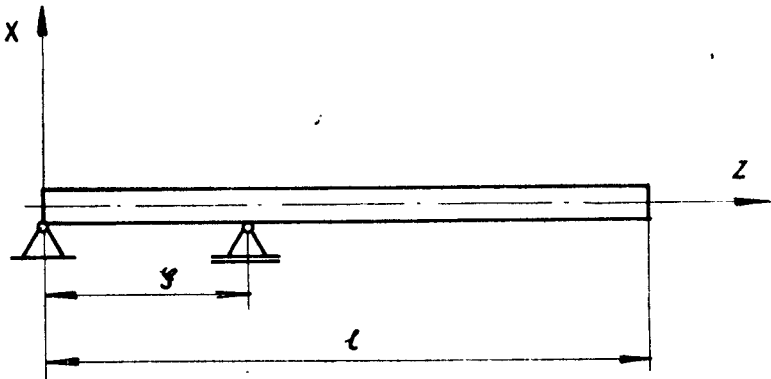
WPLYW SIŁ POPRZECZNYCH, OBROTOW PRZEKROJÓW
POPRZECZNYCH I ZJAWISKA ŻYROSKOPOWEGO NA
CZĘSTOŚĆ DRGAŃ WŁASNYCH WIRUJĄCYCH WAŁÓW

W pracy rozpatruje się wpływ sił poprzecznych, bezwładności obrotowej przekrojów poprzecznych i zjawiska żyroskopowego na częstość drgań własnych wirujących wałów. Autor rozwiązuje ściśle równanie falowe belki z dodaniem członów żyroskopowych. Rozwiązane warunki brzegowe odpowiadają belce dwupodporowej z wysięgnikiem. Wyniki ilościowe dla wału o długości $l = 1$ m, o różnych smukłościach i różnym rozstawie podpór zestawiono w tablicy i na wykresach.

Celem niniejszej pracy jest ilościowe określenie wpływu sił poprzecznych, bezwładności obrotowej przekrojów poprzecznych i zjawiska żyroskopowego na częstość drgań wirujących wałów. Przy inżynierskich obliczeniach wirujących smukłych elementów najczęściej pomija się wpływ powyższych czynników, stosując uproszczone równanie ruchu falowego dla drgań poprzecznych pręta. Chcąc uwzględnić wpływ wszystkich powyższych czynników należy do ogólnych równań falowych belki wprowadzić składniki uwzględniając zjawisko żyroskopowe występujące w czasie wirowania. Jako model rozpatruje się wirujący pryzmatyczny pręt o przekroju kołowym, podparty na dwóch podporach (łożyskach), z których pręta może zajmować różne położenia. W ten sposób otrzymane wyniki będą zależne od stosunku odległości między podporami do długości wału (Rys.1).

Wyprowadzenie wzorów

Dla podstawionego na rys. 1 pryzmatycznego pręta równania falowe w płaszczyznach zx i zy prawoskrętnego układu współrzędnych są:



Rys. 1

$$EI_y \frac{\partial^4 x(z,t)}{\partial z^4} - (\rho I_y + k \frac{EI_y}{G} \rho) \frac{\partial^4 x(z,t)}{\partial z^2 \partial t^2} +$$

$$\rho^2 k \frac{I_y}{G} \frac{\partial^4 x(z,t)}{\partial t^4} + \rho F \frac{\partial^2 x(z,t)}{\partial t^2} = 0.$$

$$EI_x \frac{\partial^4 y(z,t)}{\partial z^4} - (\rho I_x + \rho k \frac{EI_x}{G}) \frac{\partial^4 y(z,t)}{\partial z^2 \partial t^2} + \quad (1)$$

$$\rho^2 k \frac{I_x}{G} \frac{\partial^4 y(z,t)}{\partial t^4} + \rho F \frac{\partial^2 y(z,t)}{\partial t^2} = 0.$$

W równaniach (1) poszczególne symbole oznaczają:

$E \left[\frac{\text{kG}}{\text{cm}^2} \right]$ - moduł sprężystości podłużnej

$G \left[\frac{\text{kG}}{\text{cm}^2} \right]$ - moduł sprężystości poprzecznej

$I_x, I_y \left[\text{cm}^4 \right]$ - osiowe momenty bezwładności przekroju poprzecznego pręta

$\rho \left[\frac{\text{kG sek}^2}{\text{cm}^4} \right]$ - gęstość materiału pręta

F $[\text{cm}^2]$ - przekrój poprzeczny pręta

k - bezwymiarowy współczynnik kształtu przekroju poprzecznego występujący w równaniu różniczkowym ugiętej osi belki z uwzględnieniem sił poprzecznych

$$\left(\frac{d^2 y}{dx^2} = - \frac{Mg}{EI} + \frac{k}{FG} \cdot \frac{dT}{dx} \right) \quad [3]$$

Zakładając przekrój poprzeczny kołowo-symetryczny ($I_x = I_y = I$) i oznaczając pochodne względem zmiennej z przecinkami, a względem zmiennej t kropkami otrzymamy następującą postać równań (1):

$$EI_x \overset{IV}{-} (\rho I + k \frac{EI}{G} \rho) \overset{''''}{y} + \rho^2 k \frac{I}{G} \overset{\cdot\cdot\cdot\cdot}{\dot{y}} + \rho F \overset{\cdot\cdot}{\ddot{y}} = 0 \quad (1')$$

$$EI_y \overset{IV}{-} (\rho I + k \frac{EI}{G} \rho) \overset{''''}{y} + \rho^2 k \frac{I}{G} \overset{\cdot\cdot\cdot\cdot}{\dot{y}} + \rho F \overset{\cdot\cdot}{\ddot{y}} = 0.$$

W równaniach tych składniki pierwszy i czwarty stanowią uproszczone równania drgań poprzecznych w płaszczyznach zx , i zy . Natomiast pierwsze części drugich składników uwzględniają bezwładność obrotów przekrojów, a drugie części drugich składników i trzecie składniki uwzględniają wpływ sił poprzecznych na ruch drgający poprzeczny. Celem uwzględnienia wpływu momentów żyroskopowych w czasie obrotu wprowadza się dodatkowe człony do równań (1') zgodnie z następującym wyprowadzeniem. Rozpatruje się element wirującego wału o długości dz (Rys. 2). Zgodnie z oznaczeniami na rys. 2 składowe momentu żyroskopowego o kierunkach osi x i y są:

$$M_x = 2 \rho I dz \omega \cdot \omega_y$$

$$M_y = 2 \rho I dz \omega \cdot \omega_x,$$

ale prędkości kątowne elementu wału wokół osi x i y możemy wyrazić w postaci:

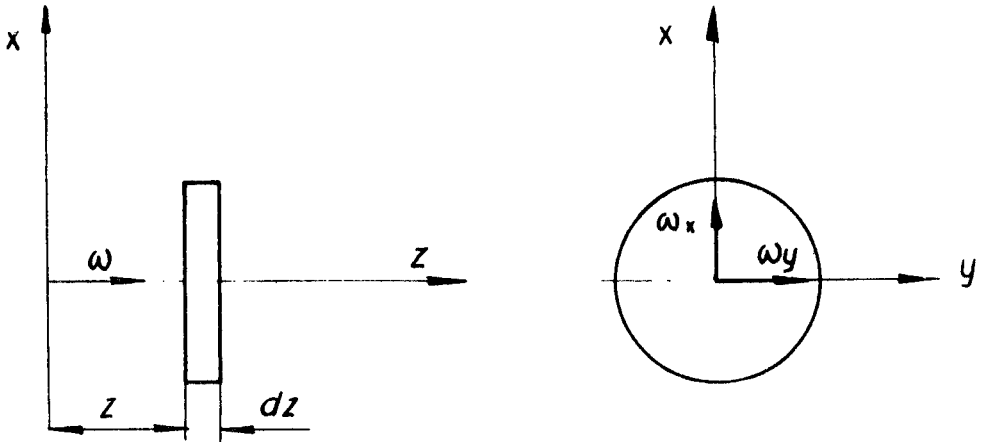
$$\omega_x = \frac{\partial \varphi_x}{\partial t} = \frac{1}{dz} \frac{\partial y}{\partial t}$$

$$\omega_y = \frac{\partial \varphi}{\partial t} = -\frac{1}{dz} \frac{\partial x}{\partial t},$$

stąd

$$M_x = -2\varrho I \omega \frac{\partial y}{\partial t} \quad (2)$$

$$M_y = 2\varrho I \omega \frac{\partial x}{\partial t}$$



Rys. 2

Różniczkując dwukrotnie względem zmiennej z wyrażenia określające składowe momentu żyroskopowego (prawe strony równań (2)) otrzymamy człony żyroskopowe w następującej postaci:

$$-2\varrho I \omega \dot{\varphi}''; \quad 2\varrho I \omega \dot{\varphi}''$$

Podstawiając je w podanej kolejności do równań (1') otrzymamy układ równań małych drgań poprzecznych wirującego wału:

$$EI x^{IV} - (\varrho I + k \frac{EI}{G} \varrho) \dot{x}'''' - 2\varrho I \omega \dot{\varphi}'' + \varrho^2 k \frac{I}{G} \dot{x}'' + \varrho F \dot{x}' = 0 \quad (3)$$

$$EI y^{IV} - (\varrho I + k \frac{EI}{G} \varrho) \dot{y}'''' + 2\varrho I \omega \dot{\varphi}'' + \varrho^2 k \frac{I}{G} \dot{y}'' + \varrho F \dot{y}' = 0$$

Wprowadzając zmienną zespoloną $\psi = x + iy$ otrzymamy jedno równanie o następującej postaci:

$$EI\psi^{IV} - \left(\varrho I + k \frac{EI}{G} \varrho\right) \psi'' + 2\varrho I \omega i \psi'' + \varrho^2 k \frac{I}{G} \psi'' + \varrho F \psi = 0 \quad (4)$$

gdzie $i = \sqrt{-1}$

Równanie (4) spełnia następujące wyrażenie:

$$\psi = V e^{\sqrt{\tilde{\sigma}} Z} e^{i \lambda t} \quad (5)$$

gdzie: V jest dowolną stałą; $\tilde{\sigma}$ - współczynnikiem określającym kształt krzywej ugięcia, a λ - częstością drgań własnych.

Podstawiając równanie (5) do równania (4) otrzymamy równanie charakterystyczne w następującej postaci:

$$EI \tilde{\sigma}^2 + \left[\left(\varrho I + k \frac{EI}{G} \varrho\right) \lambda^2 - 2\varrho I \omega \lambda\right] + \varrho^2 k \frac{I}{G} \lambda^4 - \varrho F \lambda^2 = 0, \quad (6)$$

lub w postaci rozwiązanej ze względu na

$$\tilde{\sigma}_{1,2} = \frac{-\left[\left(\varrho I + k \frac{EI}{G} \varrho\right) \lambda^2 - 2\varrho I \omega \lambda\right]}{2EI} \pm \quad (6')$$

$$\pm \sqrt{\frac{\left[\left(\varrho I + k \frac{EI}{G} \varrho\right) \lambda^2 - 2\varrho I \omega \lambda\right]^2}{4E^2I^2} + \frac{\varrho^2 F \lambda^2 - \varrho^2 k \frac{I}{G} \lambda^4}{EI}}$$

Oznaczając $\tilde{\sigma}_1 = \mu$ i $\tilde{\sigma}_2 = -\nu$ możemy napisać:

$$\mu - \nu = \frac{\left(\varrho I + k \frac{EI}{G} \varrho\right) \lambda^2 - 2\varrho I \omega \lambda}{EI}$$

$$\mu \cdot \nu = \frac{\varrho^2 F \lambda^2 - \varrho^2 k \frac{I}{G} \lambda^4}{EI} \quad (6'')$$

Dla częstości drgań własnych nie przekraczającej kil-

kunastu milionów cykli drugi składnik licznika w drugim równaniu ($6''$) jest mniejszy od składnika pierwszego, a więc $\delta_1 > 0$, a $\delta_2 < 0$, czyli μ i ν są dodatnie.

Stąd wiadomo, że $\sqrt{6''}$ będzie $\pm \sqrt{\mu}$ oraz $\pm i \sqrt{\nu}$.

Przy tych założeniach możemy napisać jedną z całek równania (4) w następującej postaci:

$$v = \left(A \operatorname{ch} \sqrt{\mu} z + B \operatorname{sh} \sqrt{\mu} z + C \cos \sqrt{\nu} z + D \sin \sqrt{\nu} z \right) e^{i\lambda t} \quad (7)$$

Z postaci tej całki widać, że funkcja własna wirującego wału różni się od funkcji własnej drgającej belki różnymi współczynnikami argumentów funkcji hiperbolicznych i koźowych. Równanie (7) ważne jest dla wału o obciążeniu ciągłym dwustronnie podpartego, o dowolnych warunkach brzegowych, czyli dla $0 \leq z \leq \xi$. Dla wału z wysięgnikiem, ponieważ istnieje podpora w obszarze wału, należy dodatkowo uwzględnić reakcję podpory. Dla przedziału $0 \leq z \leq \xi$ istnieją trzy warunki brzegowe, a mianowicie geometryczne

$$(v)_{z=0} = 0$$

$$(v)_{z=\xi} = 0$$

oraz fizyczny $(v'')_{z=0} = 0$

Wykorzystując warunek pierwszy i trzeci dochodzimy do wniosku, że stałe A oraz C są sobie równe:

$$A = C = 0.$$

Stąd dla przedziału $0 \leq z \leq \xi$ równanie ruchu przyjmie następującą postać:

$$v = (B \operatorname{sh} \sqrt{\mu} z + D \sin \sqrt{\nu} z) e^{i\lambda t} \quad (8)$$

Dla części wysięgnikowej, a więc dla $\xi \leq z \leq 1$ metodą przewidywania napiszemy równanie, które spełni warunki drugiej podpory. Równanie to będzie miało następującą postać:

$$v_p = v_1 + \frac{R}{EI} F(\mu, \nu, z) e^{i\lambda t} \quad (9)$$

gdzie: R jest reakcją podpory, a $F(\mu, \nu, z)$ jest funkcją określającą kształt krzywej ugięcia części wysięgnikowej, speł-

niającą warunki:

$$\left[F(\mu, \nu, z) \right]_{z=\xi} = \left[F(\mu, \nu, z) \right]'_{z=\xi} = \left[F(\mu, \nu, z) \right]''_{z=\xi} = 0,$$

$$\text{a } \left[F(\mu, \nu, z) \right]'''_{z=\xi} = 1.$$

Warunki te spełnia następująca funkcja:

$$F(\mu, \nu, z) = \frac{\sqrt{\nu} \operatorname{sh} \sqrt{\mu} (z-\xi) - \sqrt{\mu} \sin \sqrt{\nu} (z-\xi)}{\sqrt{\mu \cdot \nu} (\mu + \nu)} \quad (10)$$

Podstawiając funkcję (10) i równanie (8) do wyrażenia (9) otrzymamy równanie ruchu części wysięgnikowej, a więc dla przedziału $\xi \leq z \leq 1$:

$$v = \left\{ B \operatorname{sh} \sqrt{\mu} z + D \sin \sqrt{\nu} z + \frac{R}{EIV\mu \cdot \nu (\mu + \nu)} \right. \quad (11)$$

$$\left. \left[\sqrt{\nu} \operatorname{sh} \sqrt{\mu} (z-\xi) - \sqrt{\mu} \sin \sqrt{\nu} (z-\xi) \right] \right\} e^{i\lambda t}$$

Dla przedziału $\xi \leq z \leq 1$ istnieją trzy warunki brzegowe a mianowicie:

geometryczny warunek zgodności z przedziałem $0 \leq z \leq \xi$ (niewykorzystany do wyznaczania stałych A i C)

$$(v)_{z=0} = 0,$$

oraz fizyczne $(v'')_{z=1} = 0$

$$(v''')_{z=1} = 0$$

Wykorzystując powyższe warunki otrzymamy następujący układ równań:

$$B \operatorname{sh} \sqrt{\mu} \xi + D \sin \sqrt{\nu} \xi = 0$$

$$B\mu \operatorname{sh} \sqrt{\mu} 1 - D\nu \sin \sqrt{\nu} 1 + H \left[\sqrt{\mu} \operatorname{sh} \sqrt{\mu} (1-\xi) + \sqrt{\nu} \sin \sqrt{\nu} (1-\xi) \right] = 0$$

$$B\sqrt{\mu^3} \operatorname{ch} \sqrt{\mu} 1 - D\sqrt{\nu^3} \cos \sqrt{\nu} 1 + H \left[\mu \operatorname{ch} \sqrt{\mu} (1-\xi) + \nu \cos \sqrt{\nu} (1-\xi) \right] = 0 \quad (12)$$

gdzie $H = \frac{R}{(\mu + \nu) EI}$

Porównując do zera wyznacznik charakterystyczny tego układu równań otrzymamy równanie częstości:

$$\begin{vmatrix} \operatorname{sh} \sqrt{\mu} \xi, & \sin \sqrt{\nu} \xi, & 0 \\ \mu \operatorname{sh} \sqrt{\mu} 1, & -\nu \sin \sqrt{\nu} 1, & \sqrt{\mu} \operatorname{sh} \sqrt{\mu} (1-\xi) + \sqrt{\nu} \sin \sqrt{\nu} (1-\xi) \\ \sqrt{\mu^3} \operatorname{ch} \sqrt{\mu} 1, & -\sqrt{\nu^3} \cos \sqrt{\nu} 1, & \mu \operatorname{ch} \sqrt{\mu} (1-\xi) + \nu \cos \sqrt{\nu} (1-\xi) \end{vmatrix} = 0$$

lub w formie rozwiniętej:

$$\begin{aligned} & \mu \nu \sin \sqrt{\nu} \xi \left[\sqrt{\mu} \operatorname{ch} \sqrt{\mu} 1 \sin \sqrt{\nu} (1-\xi) - \sqrt{\nu} \operatorname{sh} \sqrt{\mu} 1 \cos \sqrt{\nu} (1-\xi) \right] + \\ & + \nu \sqrt{\mu} \operatorname{sh} \sqrt{\mu} \xi \left[\sqrt{\nu} \operatorname{sh} \sqrt{\mu} (1-\xi) \cos \sqrt{\nu} 1 - \sqrt{\mu} \operatorname{ch} \sqrt{\mu} (1-\xi) \right. \\ & \left. - \sin \sqrt{\nu} 1 \right] - (\mu^2 + \nu^2) \operatorname{sh} \sqrt{\mu} \xi \sin \sqrt{\nu} \xi = 0 \end{aligned} \quad (13)$$

Rozwiązując równanie częstości (13) z równaniami (6'') otrzymamy częstości drgań własnych w funkcji prędkości obrotowej wału wysięgnikowego dla różnych wartości wymiarów geometrycznych.

Obliczenia

Rozwiązanie układu równań (13) i (6'') nastręcza wiele trudności. W celu uproszczenia rozwiązania pominiemy drugi składnik licznika drugiego z równań (6''), co nie wpłynie na wyniki dalszych rozważań, gdyż jest on mały w stosunku do drugiego składnika w nawiasie pierwszego z równań (6''), a oba uwzględniają wpływ siły tnącej. (Równość tych składników występuje dla $\lambda = 5 \cdot 10^5$ cykli).

Przy tym założeniu równania (6'') przyjmą następującą postać:

$$\begin{aligned} \mu - \nu &= - \frac{\left(1 + k \frac{EI}{G} \right)^2 - 2}{EI} \\ \mu \cdot \nu &= \frac{8 F \lambda^2}{EI} \end{aligned} \quad (14)$$

a rozwiązując je ze względu na v otrzymamy:

$$v = \frac{\mu}{1 - c\mu} \quad (15)$$

gdzie

$$c = \frac{I}{F} \left(1 + k \frac{E}{G} - 2 \frac{\omega}{\lambda} \right) \quad (16)$$

Podstawiając równanie (15) do równania (13) i oznaczając przez

$$u = \sqrt{\mu} l, \quad A = \frac{\xi}{1} \quad (17)$$

$$i \quad B = \frac{c}{l^2} = \frac{1+k \frac{E}{G} - 2 \frac{\omega}{\lambda}}{s^2},$$

gdzie:

$$s = \frac{l}{\sqrt{\frac{I}{F}}} \quad \text{jest smukłością wału,}$$

otrzymamy równanie parametryczne jednej zmiennej:

$$(1-Bu^2) \sin \frac{Au}{\sqrt{1-Bu^2}} \left[\sqrt{1-Bu^2} \operatorname{ch} u \sin \frac{u(1-A)}{\sqrt{1-Bu^2}} \operatorname{sh} u. \right. \quad (18)$$

$$\left. \cos \frac{u(1-A)}{\sqrt{1-Bu^2}} \right] + \sqrt{1-Bu^2} \operatorname{sh} Au \left[\operatorname{Sh} u (1-A) \cos \frac{u}{\sqrt{1-Bu^2}} - \right. \\ \left. - \sqrt{1-Bu^2} \operatorname{ch} u (1-A) \sin \frac{u}{\sqrt{1-Bu^2}} \right] -$$

$$\left[(1-Bu^2)^2 + 1 \right] \operatorname{sh} Au \sin \frac{Au}{\sqrt{1-Bu^2}} = 0$$

Równanie (18) rozwiązano na maszynie cyfrowej "Odra - 1024" dla następujących wartości parametrów:

$$A = 0,0 \div 1$$

$$i \quad B = 0,0000 \div 0,07.$$

Przyjmując dla pełnego przekroju kołowego wału wykonanego ze stali wartości: $k = \frac{32}{27}$, $E = 2,1 \cdot 10^6 \left[\frac{\text{kg}}{\text{cm}^2} \right]$ i $G = 8,3 \cdot 10^5 \left[\frac{\text{kg}}{\text{cm}^2} \right]$ przekształcimy równanie (17) do postaci:

$$B = \frac{4 - 2 \frac{\omega}{\lambda}}{s^2} \quad (19)$$

Natomiast drugie równanie układu (14) po podstawieniu równania (15) z uwzględnieniem oznaczeń (17) prowadzi do zależności:

$$\lambda = \frac{1}{s \cdot l} \sqrt{\frac{E}{G}} \frac{u^2}{\sqrt{1 - Bu^2}} \quad (20)$$

Równania (19) i (20) pozwalają na wykreślenie funkcji $\lambda = f(\omega)$ dla różnych stosunków A i różnych smukłości s wału. Zależności te (częstość podstawowa, II i III-cia harmoniczna) dla $l = 1\text{m}$ i $s = 100, 50, 20$ i 10 podstawiono na rys. 3 - 6.

Z analizy wyprowadzonych wzorów wynika, że we wzorze (16) poszczególne składniki w nawiasie przedstawiają:

1 - wpływ bezwładności obrotów przekrojów poprzecznych

$k \frac{E}{G} = 3$ dla przekroju kołowego pełnego - wpływ siły tnącej

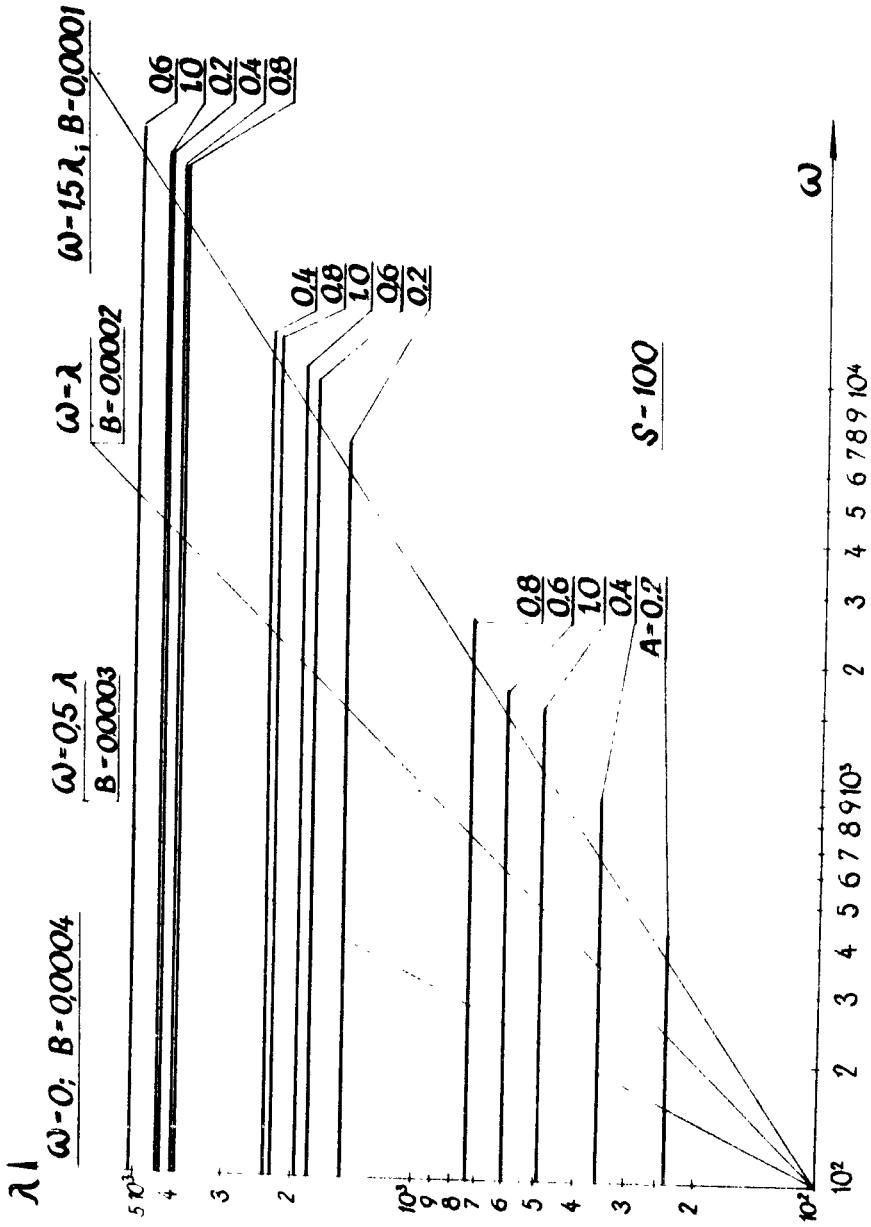
$2 \frac{\omega}{\lambda}$ - wpływ momentu żyroskopowego. Wpływy dwóch pierwszych czynników dodają się, a wpływ momentu żyroskopowego od nich się odejmuje. Wartości krytyczne obrotów wałów występują dla stosunku $\frac{\omega}{\lambda} = 1$, a więc wpływy poszczególnych czynników dla obrotów krytycznych mają się do siebie jak 1 : 3 : 2. Powyższe spostrzeżenia pozwalają określić wartość parametru B dla krytycznych prędkości z uwzględnieniem lub bez uwzględnienia wpływów czynników, o których mowa w tytule niniejszej pracy. I tak:

$B = \frac{2}{s^2}$ - dla przypadku uwzględniającego wpływ wszystkich czynników, a więc przypadku rzeczywistego,

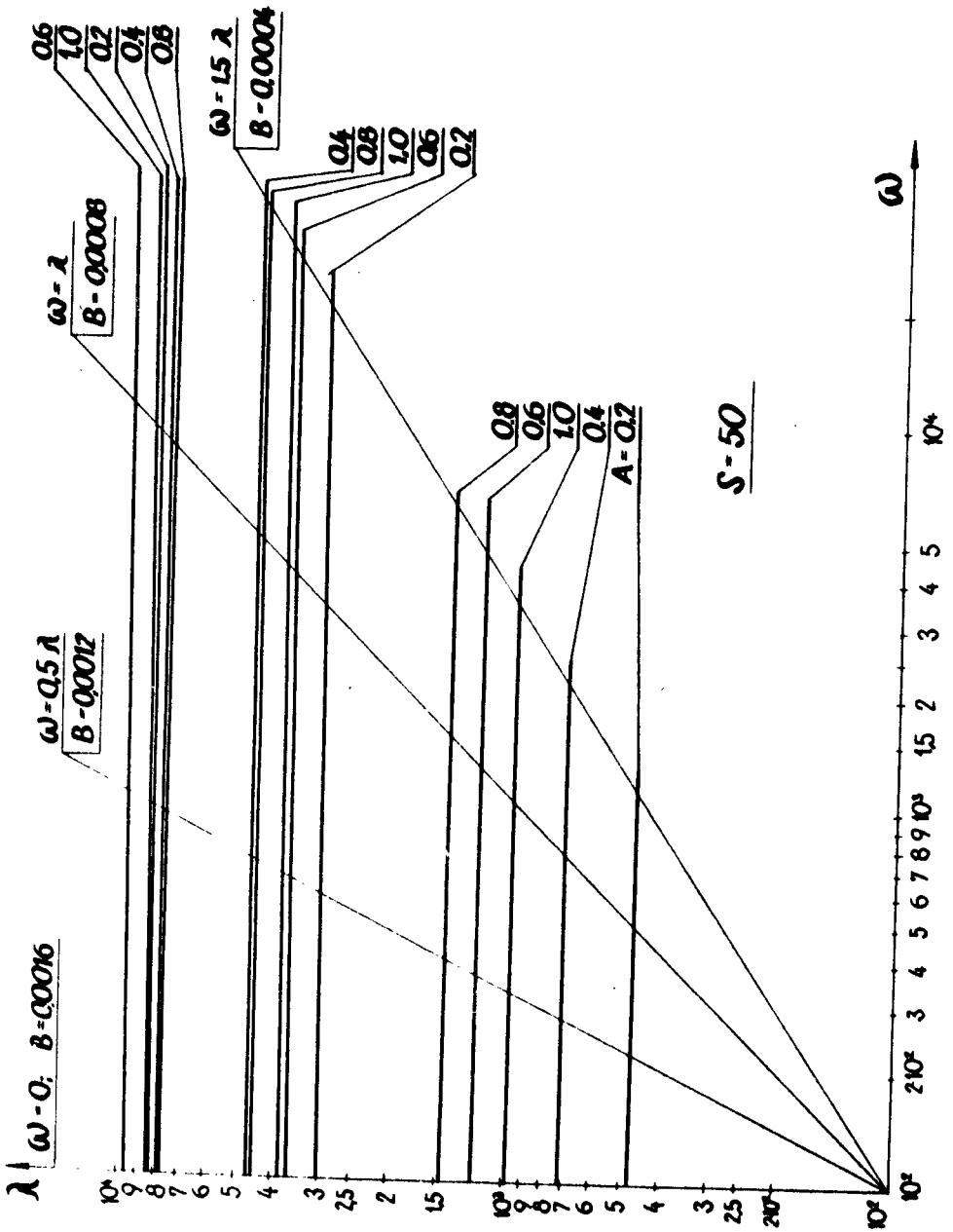
$B = \frac{4}{s^2}$ - dla przypadku uproszczonego, pomijającego wpływ momentu żyroskopowego

$B = 0$ - dla przypadku uproszczonego, pomijającego wpływ wszystkich trzech czynników, a więc dla rozwiązania otrzymanego z uproszczonego równania falowego.

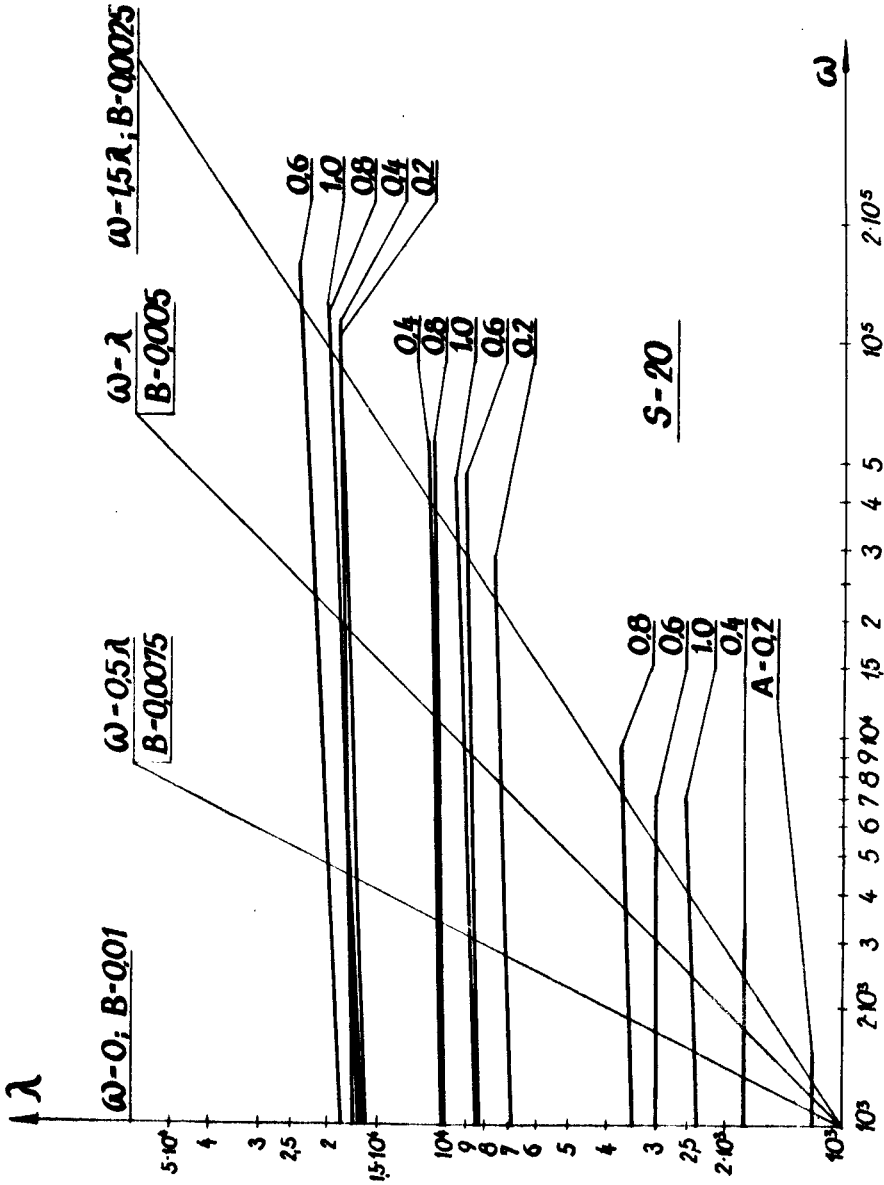
W załączonej w tablicy 1 podane są wartości obrotów krytycznych wałów o długości $l = 1\text{m}$, prędkości rozchodzenia się fali $\sqrt{\frac{E}{\rho}} = 5000 \text{ m/sek}$ i smukłości $s = 100, 50, 20$ i 10 dla wszystkich trzech wyżej wymienionych przypadków. Ponadto w tablicy tej podano procentowy wzrost obrotów krytycznych obliczonych w sposób uproszczony w stosunku do obrotów rzeczywistych (obliczonych wg teorii ścisłej).



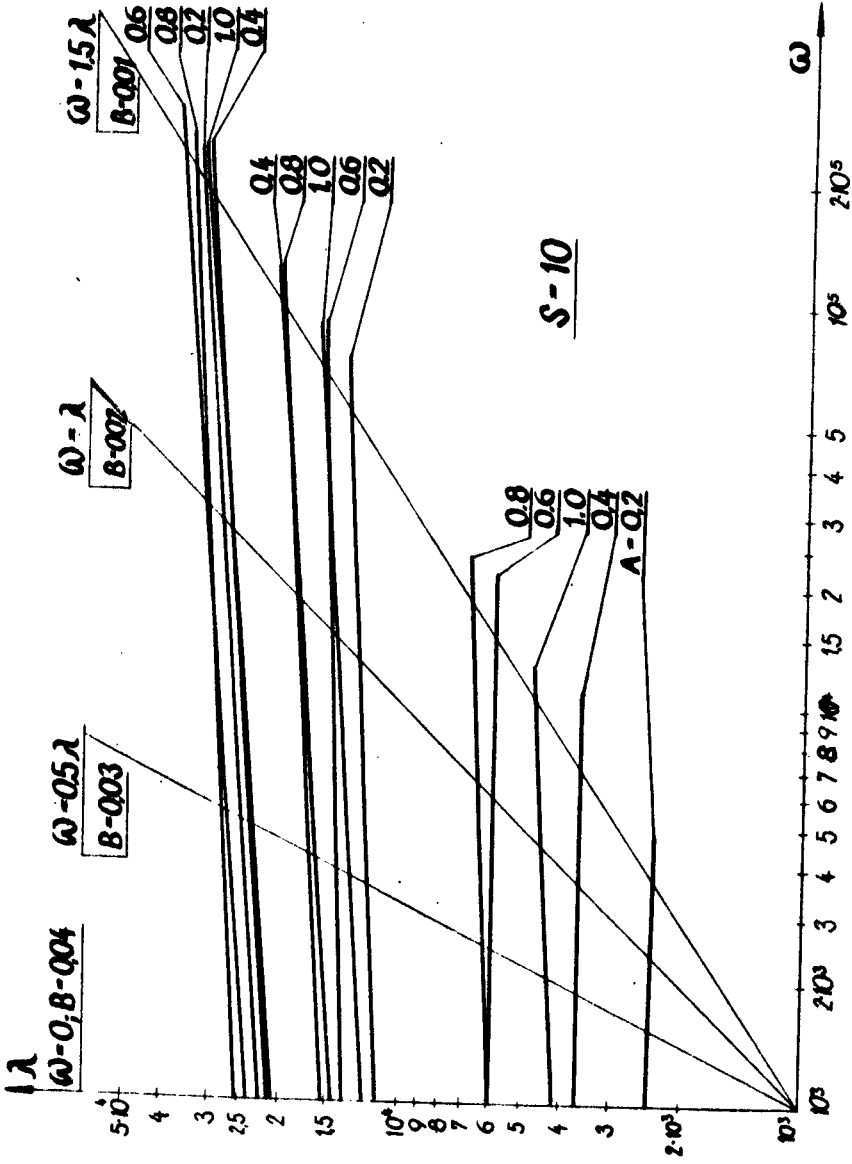
Rys. 3



Rys. 4



Rys. 5



Rys. 6

Tabela częstości krytycznych podsił
o długości $l = 1m$, prędkości rozchodzenia się fal

A	Częstość wirującego wału z uwzględnieniem sił tnących, bezwładn. obrotowej przekrojów i zjawiska żyroskopowego				Częstość niewirującego wału (bélki sił tnących i bezwładn. obrotowej					
	s=100	50	20	10	s=100		50	20		
0,2	238	476	1192	2404	238	0,0	476	0,0	1195	
	1530	3043	7315	12927	1528	- 0,1	3020	- 0,8	7002	
	4330	8488	18779	28241	4301	- 0,7	8273	- 2,5	16745	
0,4	353	707	1773	3581	353	0,0	708	0,0	1778	
	2368	4684	10906	17878	2359	- 0,4	4618	- 1,4	10123	
	4063	7975	17791	26996	4037	- 0,6	7788	- 2,4	15956	
0,6	601	1202	2997	5940	601	0,0	1201	0,0	2989	
	1837	3646	8686	15270	1832	- 0,3	3611	- 1,0	8265	
	5106	9955	21900	30711	5062	- 0,9	9640	- 3,2	18668	
0,8	730	1454	3536	6476	729	- 0,1	1446	- 0,6	3428	
	2267	4509	10806	18519	2263	- 0,2	4474	- 0,8	10255	
	3994	7884	18278	30751	3976	- 0,5	7756	- 1,6	17100	
1,0	493	983	2409	4510	492	- 0,2	979	- 0,4	2314	
	1966	3887	9019	14756	1958	- 0,4	3829	- 1,5	8350	
	4402	8583	18479	26654	4364	- 0,9	8312	- 3,2	16160	

Tabela 1

awowych oraz 2-gich i 3-oh harmonicznych wałów

$E = 5000 \text{ M/sek}$ i smukłości $s = 100, 50, 20$ i 10

$$A = \frac{\xi}{1}$$

) z uwzględnieniem przekrojów			Częstość niewirującego wału (belki) bez uwzględnienia sił tnących i bezwładn. obrotowej przekrojów							
10			s=100		50		20		10	
+ 0,3	2433	+ 1,2	238	0,0	475	0,0	1188	- 0,3	2377	- 1,1
- 4,3	11272	-12,8	1533	+ 0,2	3067	+ 0,8	7663	+ 4,8	15335	+ 18,6
-10,8	22611	-19,9	4360	+ 0,7	8721	+ 2,8	21802	+ 16,1	43604	+ 54,3
+ 0,3	3631	+ 1,4	353	0,0	707	0,0	1767	- 0,3	3534	- 1,3
- 7,2	14831	-17,0	2376	+ 0,3	4753	+ 1,5	11882	+ 9,0	23764	+ 33,0
-10,3	21351	-20,9	4089	+ 0,6	8177	+ 2,5	20444	+ 14,9	40887	+ 51,4
- 0,3	5840	- 1,9	601	0,0	1202	0,0	3005	+ 0,3	6010	+ 1,2
- 4,8	13770	- 3,8	1842	+ 0,3	3683	+ 1,0	9208	+ 6,0	18416	+ 20,6
-14,8	24400	-21,5	5151	+ 0,9	10301	+ 3,5	25753	+ 17,6	51507	+ 67,8
- 3,1	5873	- 9,3	731	+ 0,1	1462	+ 0,4	3655	+ 3,4	7310	+ 12,9
- 5,1	15590	-15,8	2272	+ 0,2	4543	+ 0,8	11358	+ 5,1	22717	+ 22,6
- 6,4	25446	-17,3	4012	+ 0,5	8024	+ 1,8	20060	+ 9,2	40120	+ 30,5
- 3,3	4178	- 7,4	493	0,0	987	+ 0,4	2467	+ 2,4	4935	+ 9,4
- 7,3	12291	-16,7	1974	+ 0,4	3948	+ 1,6	9870	+ 9,4	19739	+ 33,8
-12,6	20814	-21,8	4441	+ 0,9	8883	+ 3,5	22207	+ 20,2	44413	+ 66,6

W n i o s k i

1. Gdy smukłość wirujących wałów jest większa od pięćdziesięciu ($s > 50$) to do obliczeń prędkości krytycznych podstawowych drugich i trzecich harmonicznych można stosować równanie uproszczone ruchu falowego belki. Błędy wynikające z pominięcia sił tnących, bezwładności obrotowej czy zjawiska żyroskopowego nie przekraczają 1% dla częstości podstawowej, 1,5% dla drugiej harmonicznej i 3% dla trzeciej harmonicznej.
2. Gdy smukłość wirującego wału jest mniejsza od pięćdziesięciu pominięcie wpływu sił tnących, bezwładności obrotowej przekrojów (szczególnie sił tnących - gdyż wpływ ich jest trzykrotnie większy od bezwładności obrotowej przekrojów) czy zjawiska żyroskopowego przy obliczaniu częstości krytycznej prowadzi do dość znacznych błędów, szczególnie przy wyższych harmonicznych. Np. dla $s = 20$ dla częstości podstawowej błąd wynosi ponad 3%, dla drugiej harmonicznej ponad 9%, a dla trzeciej ponad 20%. Natomiast dla $s = 10$ odpowiednio 13, 34 i 67%.
3. Siły tnące i siły bezwładności obrotowej przekrojów poprzecznych zmniejszają wartość częstości krytycznych, natomiast momenty żyroskopowe powodują wzrost częstości krytycznej.
4. Przy założonej długości wału największą podstawową częstość krytyczną ma wał podparty na końcu i na $\frac{3}{4}$ długości ($A = 0,75$). Dla takiego podparcia wpływ siły tnącej, bezwładności obrotowej i momentu żyroskopowego jest największy.

L I T E R A T U R A

1. Bogusz W.: Drgania Mechaniczne. AGH, Kraków 1965
2. Dimentberg F.M.: Izgibnyje kolebanija wraszczajuszczich-sia wałow.
3. Jakubowicz A. i Orłóś Z.: Wytrzymałość materiałów. WNT, Warszawa 1966
4. Drgania i fale. red. Kaliski S., PWN, Warszawa 1966
5. Lipka J.: Wytrzymałość maszyn wirnikowych. WNT, W-wa 1967
6. Lipka J.: Wpływ bezwładności obrotowej oraz sił poprzecznych na drgania własne wirujących prętów. Archiwum Budowy Maszyn Tom.VII, 1960 r.
7. Panowko J.G.: Osnowy prikladnoj teorii uprugich kolebanij. "Masziynostrojienije" - Moskwa 1967
8. Współczesne metody obliczeń wytrzymałościowych w budowie maszyn. red. Panomarijew S.D., PWN, Warszawa 1957
9. Siołkowaki B. Obliczenie obrotów krytycznych wału mieszadła ciecchy, Prace Wydziału Nauk Technicznych BTN, Seria B, Nr 2 Bydgoszcz 1970.

INFLUENCE OF TRANSVERSE ENERGIES, TURNS OF TRANSVERSE
SELECTIONS AND GYROSCOPIC PHENOMENON OVER FREQUENCY OF
THEIR OWN VIBRATIONS OF ROTATING SHAFTS

In the work there is examined the influence of transversal energies of rotative inertia of transverse sections and gyroscopic phenomenon over frequency of their own vibrations of rotating shafts. The author solves the strict waves equation of beam with addition of gyroscopic elements. The solved rand conditions suit the bi-supporting beam with cantilever. For quantity calculations there was used the computer "Odra 204". The quantity results for $l=1m$ long shaft of different slenderness and different spacing of supports was specified on table and on diagrams.

ВЛИЯНИЕ ПОПЕРЕЧНЫХ СИЛ, ВРАЩЕНИЯ, СЕЧЕНИЯ И ГИРОСКОПИЧЕСКИХ МОМЕНТОВ НА СОБСТВЕННУЮ ЧАСТОТУ
ВРАЩАЮЩИХСЯ БАЛОВ

Автор решает точные дифференциальные уравнения движения балки с добавкой гироскопических членов. Рассматриваемые уравнения и граничные условия балки эквивалентны вращающемуся валу постоянного сечения с распределённой массой двухопорно закреплённого с консолью. Для численных расчётов была использована вычислительная машина "Одра-204". Результаты расчёта для вала длиной с различными коэффициентами и различным расстоянием гибкости подпор, представлены на таблице и в чертежах.

REGRESJA MODUŁU SPRĘŻYSTOŚCI E_g PRZY ZGINANIU
W ZALEŻNOŚCI OD NAPRĘŻEŃ W EPOKSYDOWYM TWORZYWIE
ZBROJONYM WŁÓKNEM SZKLANYM

Artykuł wykazuje zmianę wartości modułu sprężystości wraz ze wzrostem naprężeń przy zginaniu żywicy epoksydowej zbrojonej matą szklaną. Wartość modułu w zerowym stanie naprężeń może stanowić element porównawczy komponentów różnych żywic i postaci zbrojenia.

Wstęp

Stosowanie tworzyw sztucznych w różnych dziedzinach techniki stało się faktem dokonany; niewątpliwe zaś zalety tworzyw sztucznych zbrojonych włóknem szklanym, takie jak: lekkość, wysoka wytrzymałość, chemoodporność, łatwość formowania i szereg innych wzbudziły zainteresowanie konstruktorów i użytkowników.

Przeszkodę w pełnym stosowaniu tych tworzyw stanowi jednak niepełna znajomość ich cech materiałowych, do badania których nie można adaptować metod pomiaru stosowanych np. dla metali, gdyż w znacznym zakresie badawczym obciążenia nie podlegają prawu Hooke'a. Oznaczanie modułu sprężystości przy zginaniu jest wprowadzicie określone normą przedmiotową PN-69/C-89027 pt. "Oznaczanie wytrzymałości na zginanie" obowiązującą od 1 stycznia 1970 r., ale musi budzić wątpliwość brak precyzji w podanych warunkach pomiaru tej cechy materiałowej.

Założeniem autora było stwierdzenie, charakteru zmienności modułu sprężystości przy zginaniu wraz ze zmianą poziomu naprężeń. Podstawę do przyjęcia takiego założenia stanowiła analiza wyników pomiarów z prób przeprowadzonych

^x mgr inż. Wojciech Weiner, Zespół Podstaw Konstrukcji Maszyn WSI w Bydgoszczy

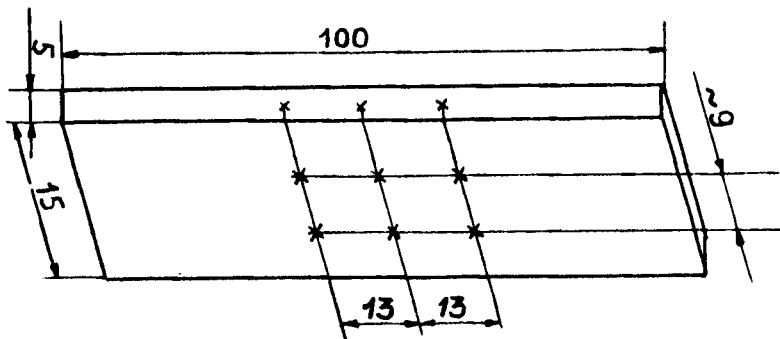
wcześniej [1]. Celem tej analizy jest propozycja przyjęcia wartości modułu sprężystości giętnej w zerowym stanie naprężeń E_{g0} , jako wartości porównawczej komponentów różnych żywic i różnych postaci zbrojenia, oraz podanie zależności funkcyjnej $E_{gx} = f(\sigma)$ mającej zorientować konstruktora z jaką wartością modułu będzie związany założony stan naprężeń.

1. Tworzywo badane

Badano tworzywo warstwowe powstałe przez przesycenie siedmiu warstw maty szklanej o gramaturze 300 g/m^2 żywicą epoksydową Epidian 53 z dodatkiem 10 części wagowych utwardzacza TECZA (Z1). Zawartość szkła w tworzywie wynosi $\sim 32\%$. Z utworzonej w ten sposób płyty o grubości nominalnej 5 mm wycięto kształtki badawcze.

1.1. Próbkki

Przyjęto próbki o szerokości 15 mm i długości 100 mm (rys. 1) Wyboru 30 kształtek do badań ze 100 przygotowanych dokonano metodą losową wg tablic Kadyrowa [3].



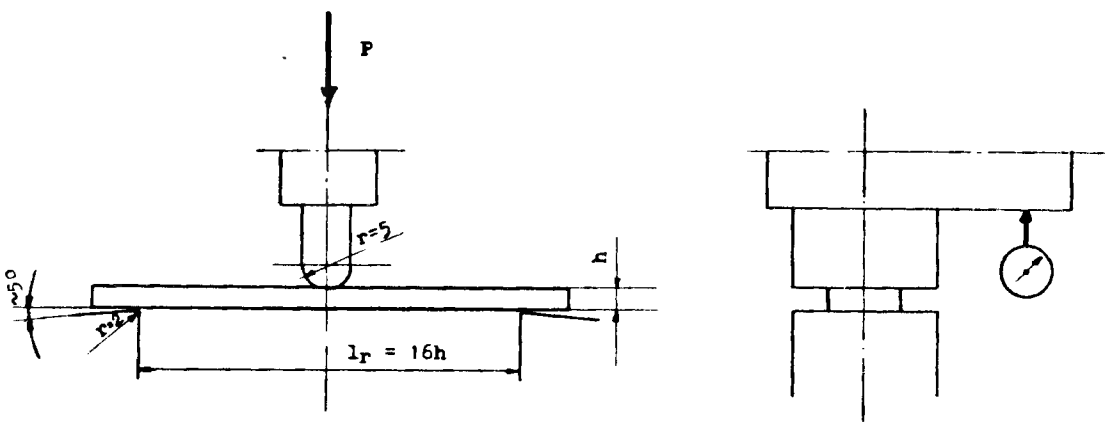
Rys. 1

Wymiary próbki badawczej i rozmieszczenie miejsc pomiaru

Próbki te następnie ponumerowano od 1 do 30 i pomierzono w miejscach oznaczonych na rys. 1 gwiazdkami przyjmując do wyliczenia przekroju A_0 średnią z trzech szerokości i sześciu grubości. Wielkości te zebrano w protokołach pomiarów.

2. Aparatura pomiarowa

Pomiarów dokonywano na zrywarcie ZDM-1000 z oprzy -
rządowaniem do zginania w postaci specjalnie wykonanych pod -
pór i napory (rys. 2) przy szybkości narastania obciążenia =
 6 ± 1 mm/min.



Rys. 2

Schemat stanowiska pomiarowego

Wielkości sił odczytywano z siłomierza zrywarki, a wielkoś -
ci odkształceń mierzono za pomocą czujnika zegarowego EPZET
o działce 0,01 mm i zakresie 10 mm. Temperatura pomieszczenia
wynosiła $20 \pm 1^{\circ}$ C, wilgotność względna 66 %.

3. Metoda pomiaru

Odkształcenia mierzono w następujący sposób: obciążano próbkę siłą 20 kG, co stanowi około 30% obciążenia niszczonego. Dla tego obciążenia zerowano czujnik zegarowy. Następnie zwiększano obciążenie do 25 kG ($\sim 40\%$ obciążenia niszczonego) mierząc pełen przyrost odkształcenia i zmniejszono obciążenie tak, by móc pomierzyć trwale odkształcenie na poziomie 20 kG.

Czynności podobne powtarzano następnie dla 30 kG, 35 kG i 40 kG (co stanowi kolejno około 50%, 60% i 70% ob -

ciężenia niszczącego) mierząc odkształcenia całkowite dla tych obciążeń i trwale dla poziomu 20 kG (rys. 3). Uzyskano w ten sposób odkształcenia dla czterech poziomów naprężeń średnich:

$$\bar{\sigma}_a = 897,66 \text{ kG/cm}^2$$

$$\bar{\sigma}_b = 1076,53 \text{ "}$$

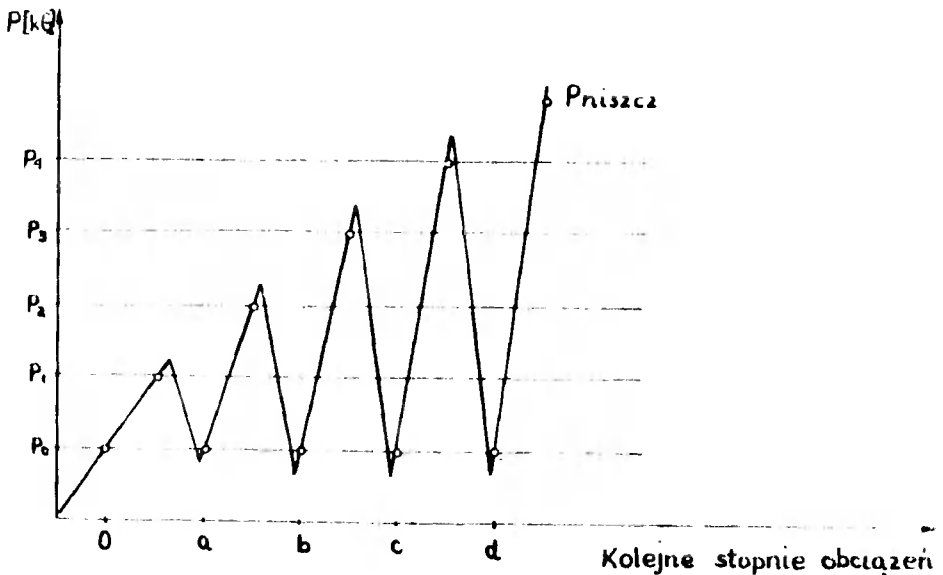
$$\bar{\sigma}_c = 1228,99 \text{ "}$$

$$\bar{\sigma}_d = 1379,04 \text{ "}$$

Tak zebrane wyniki pozwoliły na wyliczenie trzech modułów:

- modułu linii odciążeń E_{ge}
- modułu linii siecznych E_{gs}
- modułu linii stycznych E_{gt}

dla każdego z czterech poziomów naprężeń: a, b, c, d. Moduły te (rys. 3) obliczono na podstawie wzorów będących odpowiednim przekształceniem ogólnie znanego wzoru na moduł sprężystości przy zginaniu:



Rys. 3
Schemat obciążeń

$$E_g = \frac{P \cdot l_r^3}{4 \cdot h^3 \cdot b \cdot f} \quad (1)$$

i tak:

Moduł linii odciężeń obliczono wg wzoru:

$$E_{g_e} = \frac{\Delta P_n \cdot l_r^3}{4 \cdot A_0 \cdot h^2 \cdot \Delta f_{spr_n}} \quad (2)$$

gdzie: $n = a, b, c, d$

ΔP_n - całkowity przyrost obciążenia

A_0 - przekrój próbki

l_r - rozstaw podpór

h - grubość próbki

Δf_{spr_n} - odkształcenie sprężyste stopnia

Moduł linii siecznych obliczono wg wzoru:

$$E_{g_s} = \frac{\Delta P_n \cdot l_r^3}{4 \cdot A_0 \cdot h^2 \cdot \Delta f_{c_n}} \quad (3)$$

gdzie:

f_{c_n} - odkształcenie całkowite stopnia

pozostałe oznaczenia jak dla E_{g_e}

Moduł linii stycznych obliczono wg wzoru:

$$E_{g_t} = \frac{\Delta P \cdot l_r^3}{4 \cdot A_0 \cdot h^2 \cdot [\Delta f_{c_n} - \Delta f_{c_{(n-1)}}]} \quad (4)$$

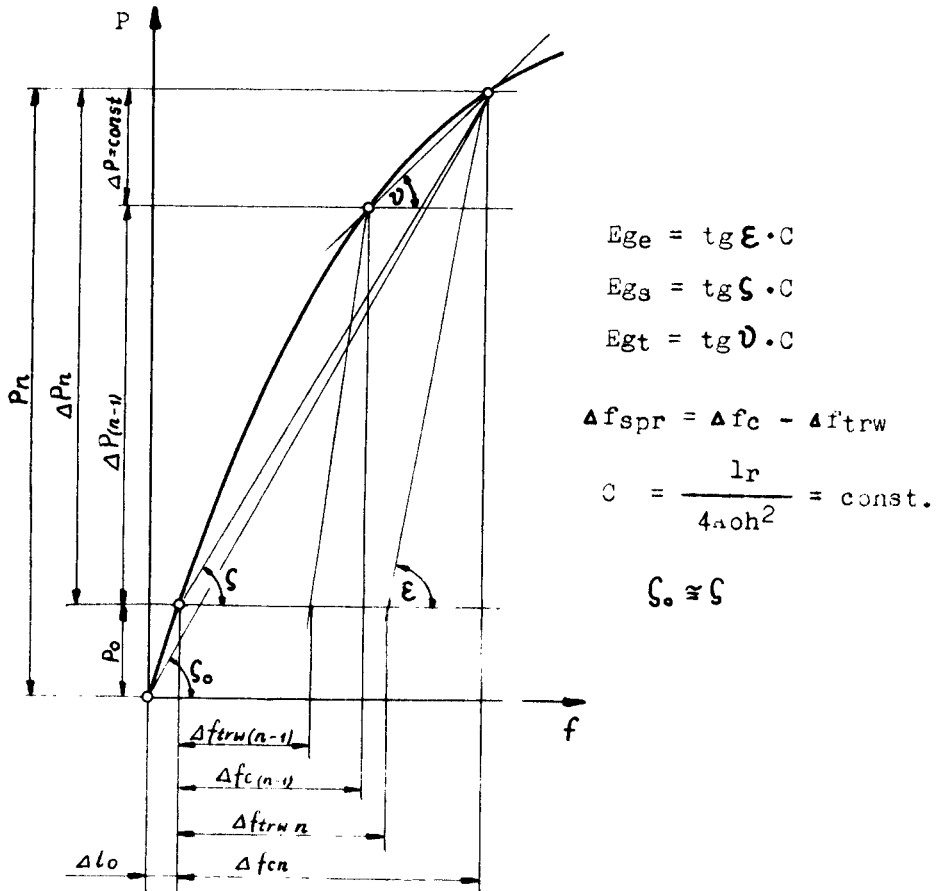
$P = \text{const.}$

gdzie:

ΔP - przyrost obciążenia stopnia

pozostałe oznaczenia jak dla E_{g_e} i E_{g_s}

Sposób obciążania przedstawia rys. 4.



Rys. 4

Graficzne przedstawienie metody pomiaru E_g

4. Wyniki pomiarów

Uzyskano wyniki pomiarów trzech modułów E_{ge} , E_{gs} i E_{gt} dla czterech poziomów naprężeń: a, b, c, d (tabl. 1). Powstały w ten sposób materiał doświadczalny poddano analizie statystycznej.

Tabela 1

E_S	n	kr.G.	anal.	A	E	m_A	m_E	$\frac{A}{m_A}$	$\frac{B}{m_B}$	E_{gr} $\cdot 10^3$	S	S^2
E_e	110	1	109	0,72	0,29	0,74	1,48	0,97	0,19	63,33	9,55	91,18
E_s	110	2	108	0,47	0,20	0,75	1,50	0,62	0,13	57,79	9,95	99,53
E_t	110	1	109	0,73	0,67	0,74	1,48	0,98	0,45	54,53	13,65	186,21
E_{ea}	30	2	28	0,46	0,83	0,46	0,92	1,00	0,90	65,77	10,90	118,50
E_{eb}	30	1	29	0,01	0,99	0,46	0,92	0,02	1,08	63,48	8,15	66,49
E_{ec}	28	-	28	0,62	0,24	0,46	0,92	1,35	0,26	63,18	8,35	69,04
E_{ed}	22	-	22	0,85	0,39	0,52	1,04	1,64	0,38	60,89	7,95	63,05
E_{sa}	30	2	28	0,70	0,62	0,46	0,92	1,52	0,67	63,11	10,15	103,88
E_{sb}	30	-	30	0,001	0,86	0,27	0,54	0,004	1,59	58,14	7,85	61,67
E_{sc}	28	-	28	0,70	0,31	0,46	0,92	1,52	0,34	56,13	7,40	54,02
E_{sd}	22	-	22	0,52	0,61	0,52	1,04	1,00	0,59	53,80	7,70	59,70
E_{ta}	30	2	28	0,80	0,22	0,46	0,92	1,74	0,24	63,14	10,25	105,14
E_{tb}	30	-	30	0,17	1,04	0,45	0,90	0,38	1,16	54,53	8,35	70,10
E_{tc}	28	3	25	0,06	1,13	0,49	0,98	0,12	1,15	52,51	11,60	134,04
E_{td}	22	1	21	0,42	0,17	0,53	1,06	0,79	0,16	47,22	15,01	227,41

Opis symboli:

n - liczność
zbiorukr.G. - wyniki
estające od-
rzucone wg
kryterium
Grebbs aanal. - liczność
zbioru analiz.

A - asymetria

B - eksces

 m_A - wsp.asymetrii m_B - wsp.ekscesuS - odchylenie
standardowe S^2 - wariancja

4.1. Analiza statystyczna wyników

- Sprawdzenie normalności rozkładów:

Wyniki pomiarów wartości modułów E_{g_e} , E_{g_s} , i E_{g_t} jak również wartości tych modułów dla poszczególnych poziomów naprężeń uszeregowano wg rosnących wartości. Następnie podzielono je na przedziały tworząc rozkłady dla których wyliczono wartości ekscesu B i asymetrii A wraz z odpowiednimi współczynnikami m_B i m_A . Ponieważ stosunki $B: m_B$ i $A: m_A$ dla wszystkich przypadków były mniejsze od 3, można uznać z 5% ryzykiem błędu że rozkłady są normalne [2]. W kilku przypadkach posłużono się tu kryterium Grebbsa [6] dla odrzucenia z analizowanego zbioru wartości wyraźnie odstających.

- Sprawdzenie czy rozrzut naprężeń poszczególnych zbiorów istotnie różni wielkości modułów.

Analizę tę oparto o obliczenie współczynnika korelacji r .

Istotność korelacji weryfikowano hipotezą zerową o postaci:

$$H_0 : r = 0 \quad (5)$$

Dla założonego poziomu istotności $\alpha = 0,05$ i obliczonego stopnia swobody $\nu = n-2 = 108$ odczytano z tablic t-Studenta wartość $t_{\alpha} = 1,981$ [4]. Po wyliczeniu wartości funkcji testowej sprawdzano która z tych wartości jest większa. We wszystkich przypadkach t_{α} było większe od $t_{0,05}$, a więc można przyjąć że $r = 0$, wobec czego przyjmujemy z 5% ryzykiem błędu że rozrzut wartości $\tilde{\sigma}$ wokół uśrednionej $\tilde{\sigma}_n$ nie różnicuje istotnie przypisanych odpowiednich wartości E_g .

- Ocena i porównanie wariancji celem stwierdzenia istnienia funkcji o postaci $E_{\sigma} = f(\hat{\sigma})$

Analizę tą przeprowadzono dla E_{σ_e} , E_{σ_s} i E_{σ_t} . Dla każdego z tych modułów obliczono wariancje S^2 , S_f^2 i S_e^2 , a następnie znaleziono wartość

$$T = \frac{S_f^2}{S_e^2} \quad (6)$$

gdzie:

$$S^2 = \frac{\sum_{i=1}^{pq} (x - \bar{x})^2}{pq - 1} \quad (\text{wariancja ogólna})$$

$$S_f^2 = \frac{q \sum_{i=1}^p (a_i - \bar{x})^2}{p - 1} \quad (\text{wariancja wg czynników})$$

$$S_e^2 = \frac{S - S_f}{p(q - 1)} \quad (\text{wariancja resztkowa})$$

q - liczność serii

p - ilość serii

Jednocześnie dla założonego poziomu ufności $\alpha = 0,05$ i wyliczonych współczynników k_1 i k_2 odszukano $T_{\text{tabl. [3]}}$. Ponieważ we wszystkich przypadkach T było większe od T_{tabl} wpływ poziomu naprężeń na wartość modułu należy uznać za istotny.

- Obliczenie modułu wyrównanego E_{σ} dla poszczególnych poziomów naprężeń.

Przeprowadzono obliczenia w celu uzyskania odpowiednich współczynników wagowych p_e , p_s i p_t , co pozwala na określenie war-

tości modułu wyrównanego wg wzoru: (5)

$$E_{\bar{\sigma}} = \frac{E_{g_e} \cdot p_e + E_{g_s} \cdot p_s + E_{g_t} \cdot p_t}{p_e + p_s + p_t} \quad (7)$$

Wyliczone wartości zebrano w Tabeli 2. Dla zbioru zmiennych (Tab. 2) sprawdzono istotność korelacji między wartościami modułu, a wartościami naprężeń. Ponieważ $t^0 > t_{0,05}$ istotność korelacji została udowodniona. Jednocześnie ujemna wartość współczynnika korelacji $r = -0,93$ świadczy o regresji modułu wraz ze wzrostem naprężeń.

Tabela 2

Poziom naprężenie	Naprężenie średnie $\bar{\sigma}$ [kG/cm ²]	Moduł wyrównany (ważony) $E_{g\bar{\sigma}}$ [kG/cm ²]
a	897,66	63 880
b	1076,53	58 780
c	1228,99	57 970
d	1379,04	56 030

- Przebieg zmienności zależności $E_{g\bar{\sigma}} = f(\bar{\sigma})$ i określenie E_{g_0}

Na podstawie dotychczasowych rozważań zakłada się istnienie zależności o postaci:

$$y = a + bx \quad (8)$$

Współczynniki "a" i "b" obliczono metodą najmniejszych kwadratów uzyskując wartości:

$$a = 72,97$$

$$b = -0,0146$$

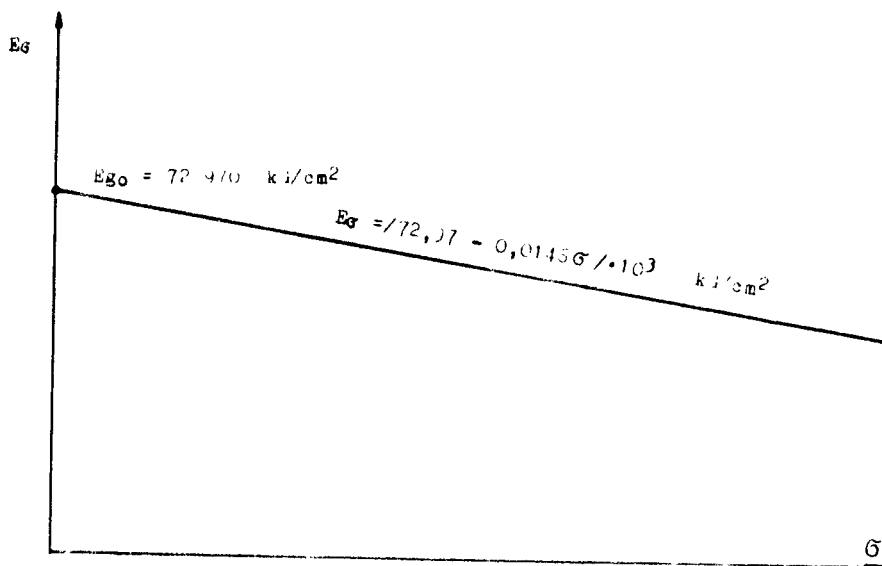
Pozwala to na opisanie zmienności modułu sprężystości przy zginaniu w zależności od poziomu naprężeń równaniem o postaci:

$$E_g \tilde{\sigma} = (72,97 - 0,0146 \tilde{\sigma}) \cdot 10^3 \text{ kg/cm}^2 \quad (9)$$

jednocześnie dla poziomu naprężeń $\tilde{\sigma} = 0$

$$E_{g_0} = 72970 \text{ kg/cm}^2$$

zależność tę przedstawiono na rysunku 5 graficznie.



Rys. 5

Zależność modułu sprężystości przy zginaniu
od wielkości naprężeń

Wnioski

1. Spadek wartości modułu sprężystości przy zginaniu wraz ze wzrostem naprężeń dla epoksydowego tworzywa zbrojonego matą szklaną można uznać za udowodniony (9).

2. Badanie modułu sprężystości przy zginaniu proponowaną metodą pozwala na dokładne określenie specyficznego zjawiska występującego przy jego pomiarze w tworzywach zbrojonych, a mianowicie zależności od poziomu naprężeń.
3. Proponowana metoda pozwala na określenie wartości modułu sprężystości przy zginaniu, w określonym stanie naprężeń interesującym konstruktora, dzięki opisaniu zależności:
 $E_g \zeta = f(\bar{\zeta})$.
4. Przez określenie wartości teoretycznej E_{g_0} w zerowym stanie naprężeń uzyskuje się wartość porównawczą dla komponentów różnych żywic i różnych zbrojeń.

L I T E R A T U R A

1. Kasprowicz Z., Steinborn J., Weiner W.: Badanie cech materiałowych epoksydowych tworzyw zbrojonych włóknem szklanym (maszynopis)
2. Leontiew N.L.: Technika statisticzeskich wyczislений, Gosliesbumizdat, Moskwa 1961
3. Romanowski W.: Zastosowanie statystyki matematycznej w doświadczalnictwie. PWG, W-wa 1951
4. Oktaba W.: Elementy statystyki matematycznej i metodyka doświadczalnictwa. PWN, W-wa 1966
5. Broś J.: Zagadnienia oznaczania własności mechanicznych fenolowych tworzyw warstwowych wzmacnionych tkaniną bawełnianą w próbie rozciągania. Rozprawy Inżynierskie 1,14, PWN, W-wa 1966
6. Metodyka eksploatacyjnych badań niezawodności i trwałości maszyn i urządzeń mechanicznych - zbieranie, rejestracja i obróbka danych. IMER, W-wa 1968.

THE DECREASE OF THE MODULUS OF ELASTICITY
AT FLEXURING DEPENDING ON THE STRESS
IN THE GLASS REINFORCED EPOXY RESINS

This article presents the change of the value of the modulus of elasticity with the increase of the stresses while. Shearing stress while lending epoxy resins glass reinforces. The value of the modulus in the zero state of stresses may determine the comparative element of the components of various resins and reinforcement forms.

СПАД МОДУЛЯ УПРУГОСТИ E ПРИ ИЗГИБЕ
В ЗАВИСИМОСТИ ОТ НАПРЯЖЕНИИ ЭПОКСИДНОЙ
СМОЛЫ АРМИРОВАННОЙ СТЕКЛОВОЛОКНОМ

Статья показывает изменения величины модуля упругости одновременно с увеличением напряжений при изгибе эпоксидной смолы армированной матой из стекловаты. Величина модуля в нулевом положении напряжений может быть сравнительным элементом компонентов разных смол и армирования.

NOSNOSC ŁOŻYSKA POWIETRZNEGO
WZDŁUŻNEGO NA PODSTAWIE RÓWNIANIA NAVIERA - STOKESA

Obliczenia nośności zrealizowano na podstawie ruchu czynnika nośnego określonego przez równanie Naviera-Stokesa. Uwzględniając w równaniu ciągłość przepływu uzyskano całkę nośności. Funkcja eliptyczna umożliwiła jej rozwiązanie w postaci sumy szeregu.

Najważniejszym zadaniem łożyska jest przejmowanie obciążenia w kierunku wzdluznym. Podstawowym wzorem określającym ruch czynnika nośnego jest równanie Naviera - Stokesa.

$$\rho \frac{d\vec{v}}{dt} = \vec{Q} + \mu \Delta \vec{v} - \text{grad } p + \frac{1}{3} \mu \text{grad } (\text{div } \vec{v}) \quad (1)$$

gdzie: \vec{Q} - siła masowa.

Równanie N.- St. jest nieliniowe i dotychczas nie ma dokładnego rozwiązania jego. Celem obliczeń jest nowe, możliwie dokładne rozwiązanie przybliżonego.

Łożysko ma budowę osiowo-symetryczną, więc dla zmian istotna jest składowa prędkość w kierunku promieniowym

$$u = u(r, z) \quad (2)$$

Zmiana prędkości $\frac{du}{dt}$ oznacza pochodną substancjonalną, czyli zupełną

$$\frac{du}{dt} = \frac{\partial u}{\partial t} + \frac{dr}{dt} \frac{\partial u}{\partial r} \quad (3)$$

gdzie pierwsza część posiada charakter lokalny, a druga wynika z przemieszczenia. Lokalna zmiana prędkości jest bardzo mała, czyli

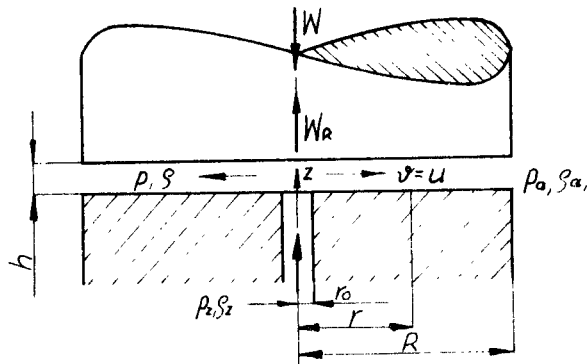
^x Dr inż. Krzysztof Wernerowski, kierownik Zespołu Mechaniki Technicznej WSI w Bydgoszczy

$$\frac{\partial u}{\partial t} \approx 0 \quad (4a)$$

więc

$$\frac{du}{dt} \approx \frac{dr}{dt} \frac{\partial u}{\partial r} \quad (4b)$$

$$\frac{du}{dt} \approx u \frac{\partial u}{\partial r} \quad (4c)$$



Rys. 1

Schemat płaskiego wzdłużnego łożyska powietrznego

Oznaczenia: W - obciążenie, W_R - nośność,

P_Z - ciśnienie powietrza zasilającego,

P - ciśnienie powietrza w szczelinie nośnej,

P_a - ciśnienie powietrza atmosferycznego

g_Z - gęstość powietrza zasilającego,

g - gęstość powietrza w szczelinie nośnej,

g_a - gęstość powietrza atmosferycznego,

u - prędkość wypływu, r - promień,

h - grubość szczeliny nośnej.

Dla gazu siła masowa jest co do wielkości bardzo mała, czyli

$$q \approx 0 \quad (5)$$

Na podstawie budowy osiowo - symetrycznej [2] możemy napisać

$$\left| \text{grad } p \right| = \frac{dp}{dr} \quad (6)$$

Rozpatrujemy równanie ciągłości w postaci całkowej

$$\iiint_{\gamma} \left[\frac{\partial \varrho}{\partial t} + \operatorname{div} (\varrho \vec{v}) \right] d\tilde{\tau} = 0 \quad (7)$$

gdzie: γ - obszar przestrzenny szczeliny nośnej.

Dla ustalonego przepływu jednoparametrowego czynnika ściśliwego jest

$$\frac{\partial \varrho}{\partial t} = 0 \quad (8)$$

Uwzględniając wielkości określone poprzednio otrzymano

$$\varrho u A = \text{const} \quad (9)$$

gdzie: A - pole przekroju strumienia powietrza,

$$A = 2 \pi r z \quad (10)$$

czyli: $\varrho u 2\pi r z = \text{const} \quad (11a)$

$$\varrho u r = \frac{\text{const}}{2 \pi z} \quad (11b)$$

Wprowadzono oznaczenia

$$K(z) = \frac{\text{const}}{2 \pi z} \quad (12a)$$

wobec tego (11b) przyjmuje postać

$$\varrho u r = K(z) \quad (12b)$$

$$u = \frac{K(z)}{\varrho r} \quad (12c)$$

Stosując operator Laplace'a otrzymujemy

$$\Delta u = \frac{\partial^2 u}{\partial z^2} \quad (13)$$

Pozostałe jego składowe jako bardzo małe można pominąć.

Ostatnią wielkość piszemy w postaci

$$\frac{1}{3} \mu \left| \text{grad}(\text{div} \vec{u}) \right| = B f_1(u) = B f_2\left(\frac{1}{r^3}\right) = \frac{B}{r} f_3\left(\frac{1}{r^2}\right) \quad (14)$$

gdzie: B - stała

Na podstawie zależności (2 - 14), odrzucając wielkości małe, przekształcono równanie (1) i uzyskano równanie

$$\rho u \frac{\partial u}{\partial r} = \mu \frac{\partial^2 u}{\partial z^2} - \frac{dp}{dr} + \frac{B}{r} f_3\left(\frac{1}{r^2}\right) \quad (15)$$

Spadek ciśnienia w szczelinie jest określony wzorem

$$\frac{dp}{dr} = \frac{\mu C_1}{\rho r} \quad (16)$$

gdzie: C_1 - stała.

Kolejnym celem jest obliczenie eliptycznego rozkładu prędkości w szczelinie. Podstawiamy (12c, 16) do równania (15)

$$\frac{K(z)}{r} \frac{\partial}{\partial r} \left[\frac{K(z)}{\rho r} \right] = \mu \frac{\partial^2}{\partial z^2} \left[\frac{K(z)}{\rho r} \right] - \frac{\mu C_1}{\rho r} + \frac{B}{r} f_3\left(\frac{1}{r^2}\right) \quad (17)$$

Po obliczeniach otrzymujemy

$$-\frac{K^2(z)}{\rho r^3} = \frac{\mu}{\rho r} \frac{\partial^2 K(z)}{\partial z^2} - \frac{\mu C_1}{\rho r} + \frac{B}{r} f_3\left(\frac{1}{r^2}\right) \quad (18)$$

Przyjmujemy

$$\frac{B}{r} = \frac{\mu C_2}{\rho r} \quad (19)$$

Na podstawie dalszych obliczeń przekształcono równanie (18) do postaci

$$\frac{\partial^2 K(z)}{\partial z^2} = -\frac{K^2(z)}{\mu r^2} + C_1 + C_2 f_3\left(\frac{1}{r^2}\right) \quad (20)$$

Zmiany szczeliny są niezależne od promienia r. Wobec tego możemy napisać:

$$\frac{1}{\mu r^2} = C_3 (\gamma) = C_3 \quad (21a)$$

$$C_1 + C_2 f_3 \left(\frac{1}{r^2} \right) = C_4 (\gamma) = C_4 \quad (21b)$$

oraz

$$\frac{d^2 K(z)}{dz^2} = -C_3 K^2(z) + C_4 \quad (22)$$

Wprowadzono oznaczenie

$$S = -\frac{C_3}{6} K(z) \quad (23)$$

$$\left(\frac{dS}{dz} \right)^2 = 4S^3 - C_5 S - C_6 \quad (24)$$

stałe: $C_5 = \frac{C_3 C_4}{3} \quad (25)$

C_6

Całkuję w obszarze szczeliny

$$\int_0^S \frac{dS}{\sqrt{4S^3 - C_5 S - C_6}} = \int_0^z dz = Z \quad (26)$$

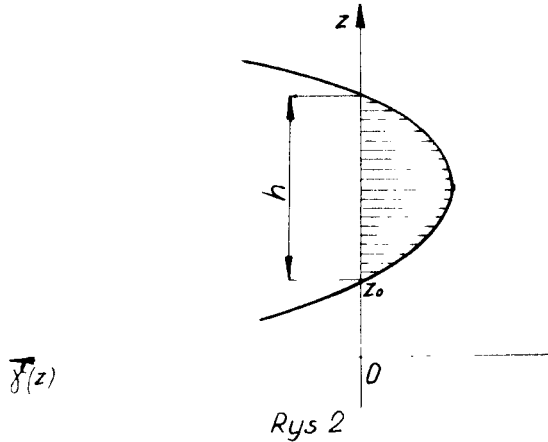
$$\int_{-\infty}^S \frac{dS}{\sqrt{4S^3 - C_5 S - C_6}} = \int_{-\infty}^0 \frac{dS}{\sqrt{4S^3 - C_5 S - C_6}} + Z \quad (27)$$

Eliptyczna funkcja Weierstrassa

$$S = \wp \left[Z + \wp^{-1}(0) \right] = \wp(Z + Z_0) \quad (28)$$

$$\gamma(z, c_5, c_6) = \frac{1}{z^2} + \frac{c_5 z^2}{20} + \frac{c_6 z^4}{28} + \frac{c_5 z^6}{1200} + \frac{3c_5 c_6 z^8}{6160} + \dots \quad (29)$$

$$u = -\frac{1}{r\varrho} \frac{6}{c_3} \gamma(z + z_0, c_5, c_6) \quad (30)$$



Wykres eliptycznej funkcji Weierstrassa

Warunki brzegowe $z = 0,$
 $h = 0,$
 $u = 0.$

$$\gamma(z_0) = \gamma(z_0 + h) = 0 \quad (30a)$$

Rozkład ciśnienia

$$p = \mu c_7 f_4(r) + \frac{c_8}{r} + c_9 \quad (31)$$

gdzie:

$$f_1(r) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{\left(-u \frac{c_3}{2}\right)^{n2n+1}}{(2n+1) n!} \quad (32)$$

c_8, c_9 - stałe

nośność

$$|W| = W_R = \pi(r_0^2 p_z - R p_a + 2 \int_{r_0}^R r p dr) =$$

$$= \pi \left\{ r_0^2 p_z - R p_a + C_9 (R^2 - r_0^2) + \frac{2\mu C_4}{C_{10}} [f_4(R) - f_5(r_0)] \right\} \quad (33)$$

gdzie:

$$f_5(r) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-\mu \frac{C_3}{2})^n r^{2n+3}}{(2n+3)(2n+1)n!} + C_{11} \quad (34)$$

C_{11} - stała

Wzór (33) jest dokładny, lecz kłopotliwy dla zwykłej techniki liczenia. Wykonano również obliczenia bez szeregów. Uwzględniono przemianę izotermiczną.

Wówczas otrzymano wzór na ciśnienie

$$p = \sqrt{p_z^2 - (P_z^2 - P_a^2) \frac{\ln \frac{r}{r_0}}{\ln \frac{R}{r_0}}} \quad (35)$$

Uwzględniając przyspieszenie normalne ruchu obrotowego łożyska

$$p = G_0 - G_1 r^2 \left[G_2 + G_3 (\ln r - 0,5) \right] + G_4 r^4 - G_3 \ln r \quad (36)$$

gdzie: G_0, G_1, \dots - stałe.

Nośność obliczona na podstawie (35)

$$W_R = \pi \left\{ r_0^2 (p_z + G_5) \left[\frac{2}{3} \sqrt{\left(\frac{1}{2} r_w^2 - 2r_w + G_6 \right)^3} + \right. \right.$$

$$\left. \left. + (r_w - 2) \sqrt{\frac{1}{2} r_w^2 - 2r_w + G_6} + 0,66 \operatorname{arsinh} \frac{r_w - 2}{0,97} - 0,94 \right] - \pi a R^2 \right\} \quad (37)$$

gdzie $r_w = \frac{R}{r_0}$

Dokładniejszy wzór wprowadzony na podstawie (36)

$$W_R = \sqrt{\left\{ p_z r_0^2 - G_2 R^4 \left[G_2 + G_3 (\ln R - 0,75) \right] + G_8 R^6 \right.} \\ \left. - R^2 \left[G_0 - G_3 (\ln R - 0,5) \right] - G_9 - p_a R^2 \right\}} \quad (38)$$

Wyprowadzone wzory umożliwiają obliczenie nośności.

L I T E R A T U R A

1. Bieźanow B.N.: Mechanizmy pneumatyczne PWT, Warszawa 1959
2. Schlichting H.: Grenzschicht - Theorie: Verlag G.Braun, Karlsruhe 1965
3. Wernerowski K.: Ruch łożysk powietrznych wzdłużnych (praca doktorska) Poznań 1968.

**AIRIAL BEARINGS CAPACITY ON THE GROUNDS OF
NAVIER AND STOKES EQUATION**

Calculations of capacity was realized on the grounds of capacity factor motion, specified by Navier and Stokes equation. Regarding in equation flow continuity, a capacity integral was obtained. Elliptic function enabled a solution in the shape of sum sequence.

**ГРУЗОПОДЪЁМНОСТЬ ВОЗДУШНОГО ПОДШИПНИКА
НА ОСНОВАНИИ УРАВНЕНИЯ NAVIER-STOKES**

Расчёт грузоподъёмности был проведён на основании движения фактора грузоподъёмности определённого уравнением **Navier-Stokes**. Принимая во внимание в уравнении неравность течения был получен интеграл грузоподъёмности. Эллиптическая функция дала возможность решить её в форме суммы ряда.

WYBRANE ZAGADNIENIA AKUSTYCZNEGO TŁUMIENIA

DRGAN ŁOŻYSK POWIETRZNYCH WZDŁUŻNYCH

Ważnym problemem łożysk powietrznych wzdlużnych jest ograniczony zakres możliwości statecznej pracy. Rozszerzenie możliwości spokojnej pracy jest możliwe dzięki zastosowaniu akustycznego tłumienia. W artykule przedstawiono obliczenia, schematy i charakterystyki wybranych tłumików akustycznych drgań łożysk powietrznych wzdlużnych.

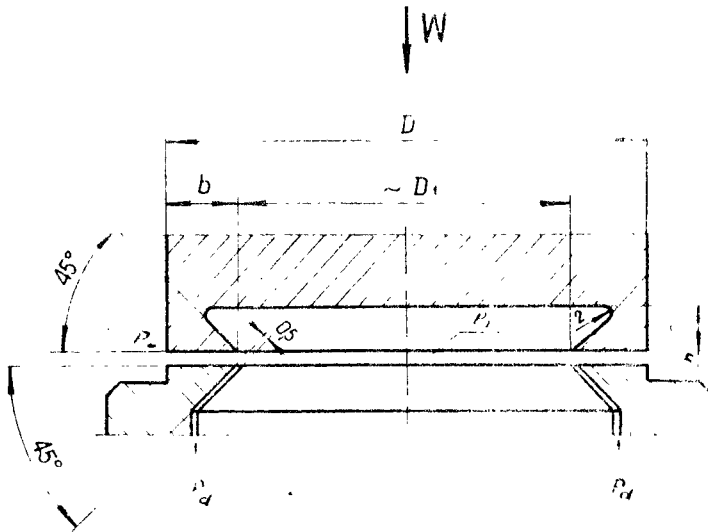
Duży postęp naukowo-techniczny naszych czasów wymaga nowego spojrzenia na wszelkie zagadnienia techniczne. Klasyczne łożyska ślizgowe oraz toczne w wielu przypadkach nie spełniają naszych obecnych postulatów. Jednym z elementów rozwoju naukowo-technicznego są łożyska powietrzne. Szereg trudnych problemów dynamiki maszyn może być rozwiązanych tylko przez ułożyskowanie pneumatyczne.

Istnieje cały szereg rozwiązań omawianych łożysk. W zakresie przejmowania obciążeń osiowych istotną rolę odgrywają łożyska powietrzne wzdlużne.

Najważniejszą częścią łożyska jest poduszka powietrzna w szczelinie nośnej. Podstawową zaletą łożysk powietrznych jest zredukowanie tarcia do szczytkowego minimum. Do dalszych ważniejszych zalet ułożyskowań pneumatycznych zaliczamy:

- znikomy moment tarcia podczas rozruchu,
- małą ilość wydzielającego się ciepła,
- możliwość pracy z bardzo małą i bardzo dużą prędkością obrotową,
- brak styku między czopem a panwią,
- duży wybór materiałów na części łożyska,
- długi czas pracy,
- wyeliminowanie zużycia smarów i olejów,
- możliwość pracy w podwyższonych temperaturach.

^x Dr inż. Krzysztof Wernerowski, Kierownik Zespołu Mechaniki Technicznej WSI w Bydgoszczy



Rys. 1

Przekrój łożyska powietrznego
wzdłużnego płasko-stożkowego
z ciągłym zasilaniem dośrodkowym;
W- obciążenie osiowe

Podobnie jak wszelkie urządzenia techniczne, tak i łożyska powietrzne posiadają pewne wady.

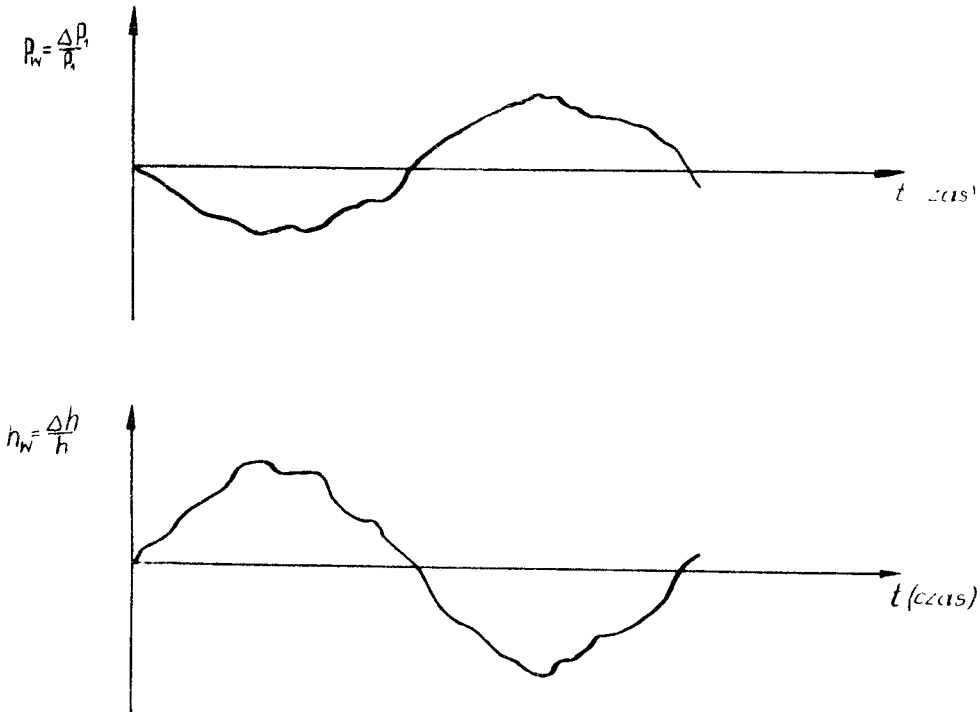
Są nimi:

- zależność grubości szczeliny nośnej od obciążenia i ciśnienia powietrza zasilającego,
- niebezpieczeństwo występowania drgań,
- koszt sprężonego powietrza,
- natychmiastowe zakłócenia pracy łożyska z chwilą odcięcia powietrza zasilającego,
- wysokie wymagania dotyczące czystości powietrza.

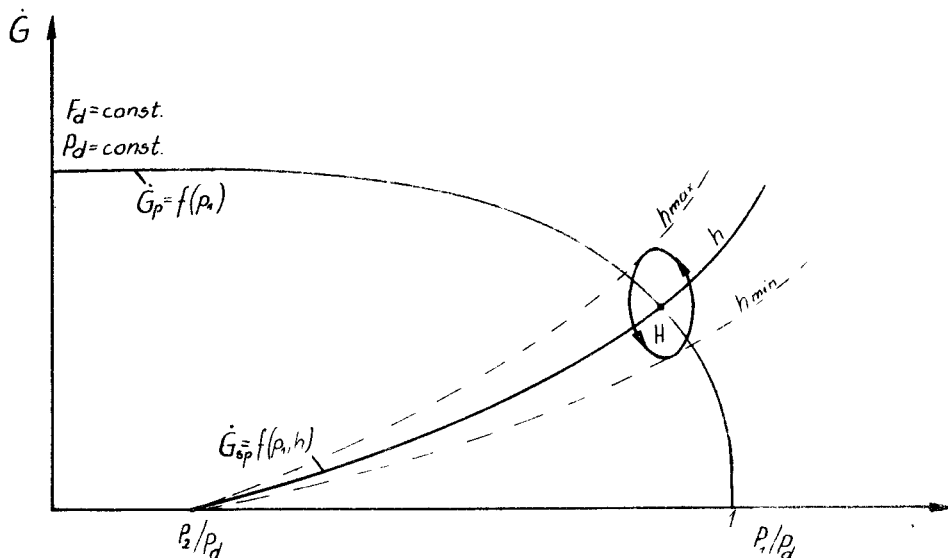
Powszechnie stwierdzono, że zalety omawianych łożysk zdecydowanie górują nad ich wadami.

Ważnym problemem jest tendencja do występowania drgań. Źródłem jest sprężalność gazów. Pojemność komory nośnej zwiększającej ogólną nośność łożyska powoduje z chwilą zaistnienia zmiany grubości szczeliny powietrznej stan cy -

klicznych zmian między doprowadzoną ilością gazu (\dot{G}_p - kropka oznacza pochodną względem czasu ...) oraz uchodzącą (\dot{G}_{sp}). Oczywiście ideałem jest układ w równowadze ($\dot{G}_p = \dot{G}_{sp}$). Na marginesie trzeba zaznaczyć, że w łożyskach bez komór nośnych w zasadzie nie zaobserwowano drgań. Przebieg ruchu drgającego jest następujący. Przypadkowe zwiększenie obciążenia lub inny powód zwęża szczelinę powietrzną i tym samym zmniejsza dopływ gazu. Ponieważ ilość doprowadzonego powietrza jest w przybliżeniu stała, wobec tego wzrasta masa powietrza w komorze wyrównawczej i podnosi się ciśnienie p_1 . W dalszej konsekwencji wzrasta h . Z kolei uchodzi większa ilość powietrza z komory. Następnie zmniejsza się p_1 i h . W ten sposób powstają drgania.



Rys. 2
Wykresy zmian ciśnienia p_w w szczelinie oraz wielkości h_w



Rys. 3

Zależność wielkości szczeliny od ilości powietrza, F_d - przekrój doprowadzenia sprężonego powietrza

Drgania łożyska można przedstawić graficznie. Liczbowo określamy drgania odpowiednimi równaniami. Zmiany ilości powietrza opisuje równanie

$$\Delta G_p - \Delta G_{sp} = \frac{dG_L}{dt} \quad (1)$$

gdzie: Δ - przyrost, gdyż zasadnicza ilość powietrza utrzymuje się stacjonarnie w łożysku.

G_L - całkowita ilość powietrza znajdującego się w łożysku.

Następnie mamy zależność między siłą bezwładności a sprzęgającym działaniem łożyska.

$$M \Delta \ddot{h} - \iint_{(F)} \Delta p \, dF = 0 \quad (2)$$

Równocześnie wiemy, że

$$G_L = f(\Delta \ddot{h}) \quad (3)$$

Na podstawie (1,2,3) wyprowadzamy równanie różniczkowe liniowe jednorodnego trzeciego rzędu

$$\Delta \ddot{\ddot{h}} + A \Delta \dot{\ddot{h}} + B \Delta \dot{h} + C \Delta h = 0 \quad (4)$$

gdzie: A, B, C - stałe zależne od konstrukcji łożyska.

Ogólny warunek stateczności łożyska jest określony nierównością

$$AB > C \quad (4a)$$

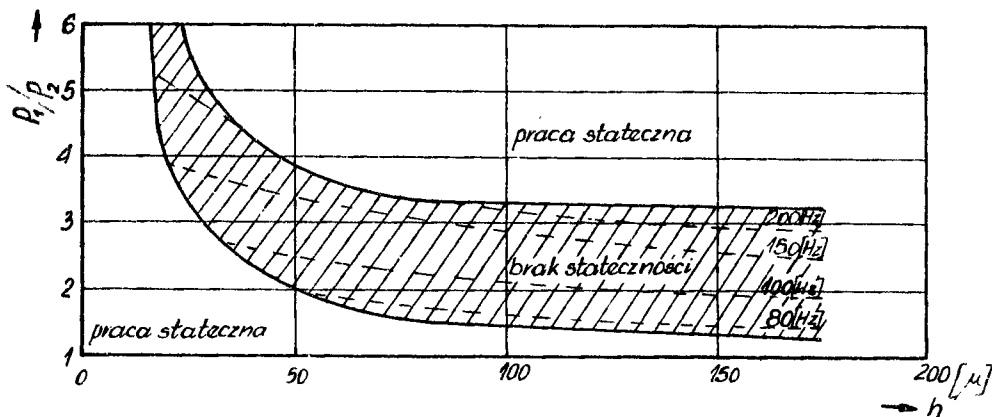
został potwierdzony doświadczalnie.

Przyjmuje się, że stateczność układu powiększa się w miarę zmniejszania się stosunku

$$\frac{V_A}{hF_L} = \frac{\text{objętość komory nośnej}}{\text{objętość szczeliny powietrznej}} \quad (5)$$

Częstotliwość drgań układu zmniejsza się w miarę wzrostu objętości komory nośnej. Kształt zagłębień wyrównawczych w zasadzie nie wpływa na stateczność. Wzrasta ona w miarę powiększania się przekroju F_D elementów doprowadzających sprężone powietrze. Analizując zależność podaną na rysunku 3 stwierdzamy, że dla dużych stosunków P_1/p_0 dosyć mocno spada linia wykresu. Ilości przepływającego powietrza powinny być tak dobrane, aby punkt pracy znajdował się w zakresie możliwie stromych stycznych. Wówczas duże zmiany ilości przepływającego powietrza dają małe zmiany ciśnienia Δp_1 i w konsekwencji małe drgania. Kształt otworów zasilających ma też poważne znaczenie. Dysze Venturiego są lepsze od zwykłych otworów cylindrycznych.

Ustalenie parametrów dla dobrej pracy łożyska jest właściwym kompromisem między wielkością dyszy (zużyciem powietrza), wymiarami komór nośnych, ciśnieniem itd. Podobnie jak przy wszystkich rozwiązaniach konstrukcyjnych, musimy też uwzględniać ekonomiczny punkt widzenia.



Rys. 4

Obszary stateczności w zależności od ciśnienia i wielkości szczeliny

Niebezpieczeństwo drgań możemy usunąć przez tłumienie. Istnieje szereg rozwiązań tłumików akustycznych znajdujących zastosowanie w zakresie usuwania drgań wzdłużnych łożysk powietrznych. Istota działania ich polega na zamienianiu energii akustycznej na ciepłą lub przenoszeniu jej poza obszar drgań. Elementy stratnościowe mogą więc działać na zasadzie tarcia drgających cząstek o ścianki ograniczając przestrzeń oraz w oparciu o wykorzystanie wypromieniowania energii akustycznej z układu. Najintensywniejsze działania są związane z obszarem rezonansu [5].

Typowe wykorzystanie tarcia obserwuje się podczas pochłaniania przez materiały porowate. Zależy ono od:

- grubości materiału,
- akustycznej rezystancji jednostkowej przepływowej r_j [Ns/m³],
- porowatości.

Współczynnik pochłaniania przez materiały porowate jest równy

$$a = 1 - \left| \frac{R_{w1} - Zj2}{R_{w1} + Zj2} \right|^2 \quad (6)$$

gdzie: Rw_1 - rezystancja akustyczna właściwa powietrza,
w $[Ns/m^3]$,

Z_{j2} - impedancja akustyczna jednostkowa powierzchni
materiału pochłaniającego, w $[Ns/m^3]$.

Druga wielkość musi być obliczona. Przyjmujemy, że wszystkie rurki są umieszczone równoległe do osi x i prostopadle do powierzchni płaskiej fali padającej. Warunek równowagi sił wynikający z różnicy ciśnień, tarcia i bezwładności wyraża się równaniem

$$-\frac{\partial p}{\partial x} = r_j \dot{\xi} + \rho_0 \ddot{\xi} \quad (7)$$

gdzie: p - ciśnienie akustyczne,

ξ - przesunięcie cząstki powietrza,

ρ_0 - gęstość powietrza.

Biorąc pod uwagę adiabatyczną przemianę zachodzącą podczas rozchodzenia się dźwięku możemy napisać:

$$-\frac{\partial \xi}{\partial x} = \frac{1}{\rho_0 c^2} \frac{\partial p}{\partial t} \quad (8)$$

gdzie: c - prędkość głosu.

Przeprowadzamy różniczkowanie równań (7,8) i po dalszych przekształceniach uzyskujemy równanie

$$\frac{1}{c^2} \frac{\partial^2 p}{\partial t^2} - \frac{\partial^2 p}{\partial x^2} + \frac{r_j}{\rho_0 c^2} \frac{\partial p}{\partial t} = 0 \quad (9)$$

Obliczenia ograniczamy do przebiegów harmonicznnych. Po dalszych obliczeniach otrzymujemy:

- jednostkową impedancję falową kanalika

$$Z_{-jf} = \rho_0 c \sqrt{1 - j \frac{v_j}{\omega \rho_0 c^2}} \quad (10)$$

- tamowność jednostkową kanalika

$$\underline{\delta} = j\beta \sqrt{1 - j \frac{r_j}{\omega Q_e}} \quad (11)$$

- impedancję jednostkową na początku tłumika

$$\underline{Z}_{jp} = \underline{Z}_{jf} \frac{\underline{Z}_{jk} + \underline{Z}_{jf} \operatorname{tg} h \underline{\delta} l}{\underline{Z}_{jf} + \underline{Z}_{jk} \operatorname{tg} h \underline{\delta} l} \quad (12)$$

gdzie: \underline{Z}_{jk} - odpowiednia impedancja na końcu tłumika

l - długość tłumika

- impedancję wlotową rurek na jednostkę powierzchni materiału

$$\underline{Z}_{j2} = \frac{k}{k_p} \underline{Z}_{jp} \quad (13)$$

gdzie: k_p - współczynnik porowatości,

k - współczynnik doświadczalny uwzględniający rzeczywiste ukształtowanie por w materiale pochłaniającym.

W rozwiązaniach tłumików akustycznych stosuje się materiały dźwiękochłonne do wypełniania całkowitego lub częściowego komór rezonansowych.

Tłumiki komorowe umożliwiają usuwanie drgań w zakresie wąskiego pasma częstości.

W łożysku powietrznym masa gazu w szyjce rezonatora odpowiada tłumiącej masie m układu mechanicznego. Nato - miast powietrze w komorze rezonansowej spełnia rolę sprężyny o stałej c_s . Układ tłumiący pracuje zgodnie z równaniem

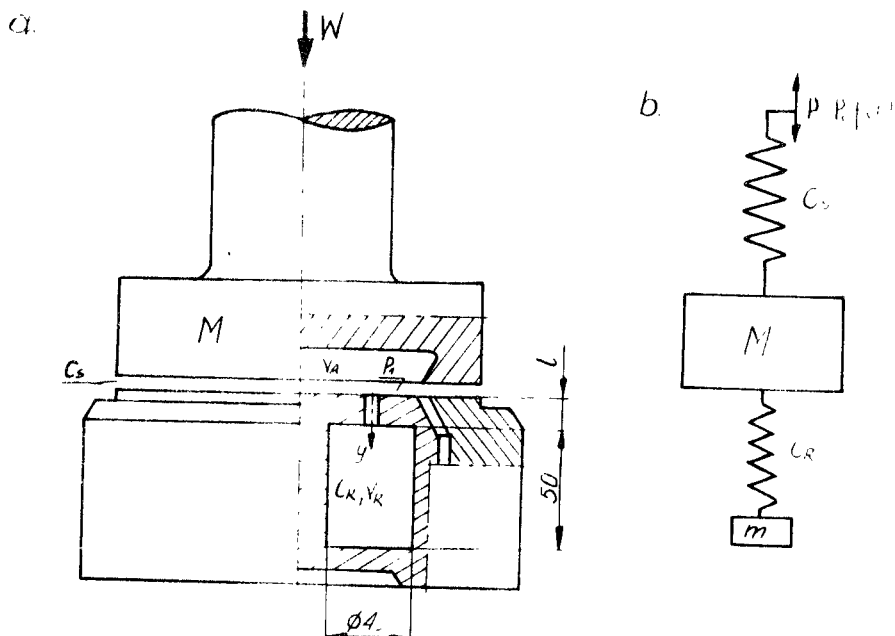
$$m\ddot{y} + C_R \dot{y} = f \cdot p_1(t) \quad (14)$$

gdzie: y - wychylenie, czyli przesunięcie masy powietrza znajdującej się w szyjce rezonatora (długość fali drgania jest bardzo duża w porównaniu z długością szyjki układu tłumiącego),

C_R - stała sprężynowania układu pneumatycznego,

f - przekrój szyjki,

$p_1(t)$ - zmienne ciśnienie w komorze wyrównawczej.



Rys.5

Schemat działania tłumika komorowego podczas tłumienia drgań wzdłużnego łożyska powietrznego;
 a- układ pneumatyczny,
 b- analogiczny układ mechaniczny

Wzbudzenie zewnętrzne w stosunku do układu tłumiącego określone funkcją $p_1(t)$ drga z częstością kołową ω_M , wobec tego układ tłumiący musi spełniać zależność $\omega_R = \omega_M$. Możemy więc napisać

$$\omega_R = \sqrt{\frac{C_R}{m}} \quad (15)$$

oraz
$$C_R = \lambda f^2 \frac{p}{R} \quad (16)$$

Masa powietrza w szyjce i sąsiedztwie jest równa

$$m = \pi l_1 \rho / (g R T) \quad (17)$$

Ostateczny wzór na częstotliwość drgań własnych rezonatora ma postać

$$\nu_R = \frac{\omega_R}{2\pi} = \frac{1}{2\pi} \sqrt{\frac{f a_s^2}{V_R l_1}} \quad (18)$$

gdzie: $a_s = \sqrt{\kappa g RT}$ - prędkość głosu w powietrzu (18a)

l_1 - skuteczna długość szyjki rezonansowej.

Powietrze w obszarach sąsiadujących z szyjką również drga, wobec tego

$$l_1 = l + \frac{\pi}{4}d \quad (18b)$$

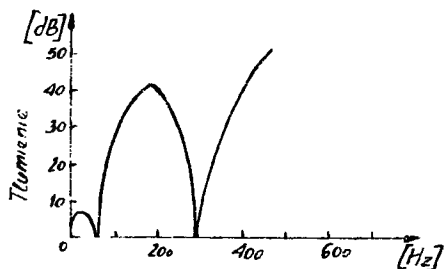
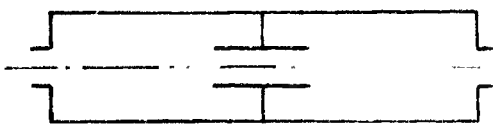
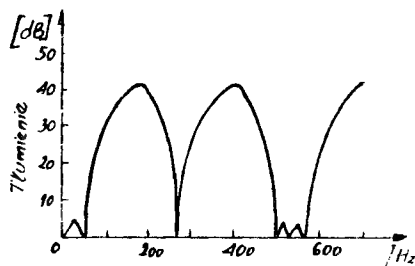
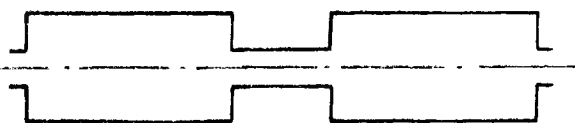
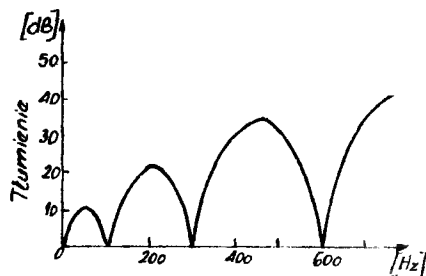
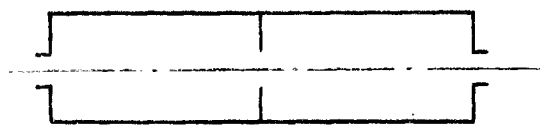
Stosujemy kilka komór na obwodzie.

Drgania akustyczne odbywają się jednak w dosyć szerokich pasmach. Jednocześnie występuje tzw. barwa dźwięku polegająca na równoczesnym występowaniu obok częstotliwości podstawowej jeszcze częstotliwości wyższych.

W przeprowadzonych badaniach łożysk powietrznych wzdłużnych występowały drgania o średnich częstościach rzędu kilkuset herców. Należało więc zbudować takie tłumiki, które byłyby przydatne w rozpatrywanym zakresie częstości. Nie można zbudować takiego tłumika, który by objął tak szerokie pasmo częstości. Dlatego zbudowano układ dwóch tłumików działających na masę drgającego przepływającego powietrza.

Najpierw przeprowadzono obliczenia sekcji szeregowej czyli rezonatora szeregowego. Tłumi on górne pasmo częstości. Wymiary rozpatrywanej części układu tłumików muszą być małe w stosunku do długości fali drgań powietrza. W naszym przypadku warunek ten jest spełniony.

Masa powietrza znajdująca się w środkowej rurze zachowuje się w przybliżeniu jak ciało stałe, a sąsiednie komory spełniają rolę sprężyn. Działanie tłumiące polega na pochłanianiu energii o wyższej częstości przez drgającą masę powietrza w rurze między komorami.



Rys. 6.

Schematy i charakterystyki tłumików akustycznych wielokomorowych szeregowych znajdujących zastosowanie w eliminowaniu drgań wzdłużnych łożysk powietrznych:

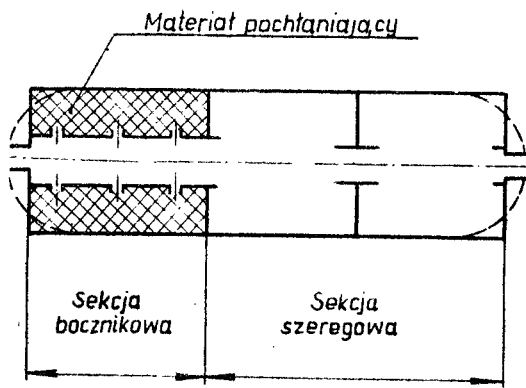
a- podwójny z przegrodą płaską,

b- podwójny z szyjką,

c- podwójny z częścią wewnętrzną

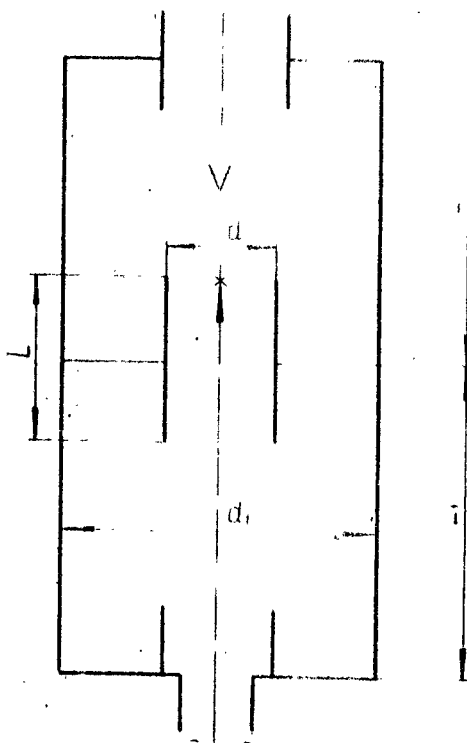
gdzie $m = \frac{F_2}{F_1}$ iloraz przekrojów poprzecznych komór;

przedstawiono rozwiązania dla $m = 16$.



Rys. 7

Schemat układu tłumików akustycznych



Rys. 8

Zasadnicze wymiary sekcji szeregowej

Podczas drgań zachodzi przemiana adiabatyczna

$$pV^{\chi} = p_{1k} V_{1k}^{\chi} = \text{const} \quad (19)$$

gdzie: V - objętość powietrza w komorze,

p_{1k}, V_{1k} - zmienione wartości p i V .

Dla układu z pojedynczą komorą sprężynującą otrzymujemy

$$\frac{dp_{1k}}{dx} = -\chi p V^{\chi} v_1^{-(\chi+1)} \frac{dv_1}{dx} \quad (20)$$

oraz

$$V_1 = V - Ax \quad (21)$$

gdzie: A przekrój poprzeczny rurki o długości L

$$\frac{dV_1}{dx} = -A \quad (22)$$

stała sprężystości czyli współczynnik sztywności

$$\begin{aligned} K &= A \frac{dp_{1k}}{dx} = \frac{A^2 \chi p}{V^{-\chi}} v_1^{-(\chi+1)} = \\ &= \frac{A^2 \chi p}{V} \left(\frac{v_1}{V} \right)^{-(\chi+1)} = \frac{A^2 \chi p}{V} \left(1 - \frac{Ax}{V} \right)^{-(\chi+1)} \end{aligned} \quad (23)$$

Zakładamy

$$\left(\frac{v_1}{V} \right)^{-(\chi+1)} \approx 1 \quad (24)$$

$$\text{czyli } K = \frac{1,4 A^2 p}{V} \quad (25)$$

a dla układu posiadającego dwie komory sprężynujące

$$K_{0g} = 2K \quad (26)$$

Częstość naturalna układu drgań nietłumionych

$$f_n = \frac{\omega_n}{2\pi} = \frac{1}{2\pi} \left(\frac{K_{0g}}{m} \right)^{\frac{1}{2}}, \quad (27)$$

$$m = \frac{G}{981}$$

$$f_n = 4,98 \left(\frac{K_{0g}}{m} \right)^{\frac{1}{2}} = \frac{f_d}{\sqrt{2}} \quad (28)$$

$$G = AL\gamma_p$$

gdzie: γ_p - ciężar właściwy powietrza,

f_d - graniczna dolna częstość tłumika.

Wartości stałe:

dla temperatury $20[^\circ\text{C}]$,

$$\gamma_p = 11,8 \left[\text{N/m}^3 \right]$$

$$p = p_a = 10,1 \left[\text{N/cm}^2 \right]$$

Po szczegółowym obliczeniu otrzymujemy graniczną dolną po -
cząstkową częstość tłumionej fali dźwięku.

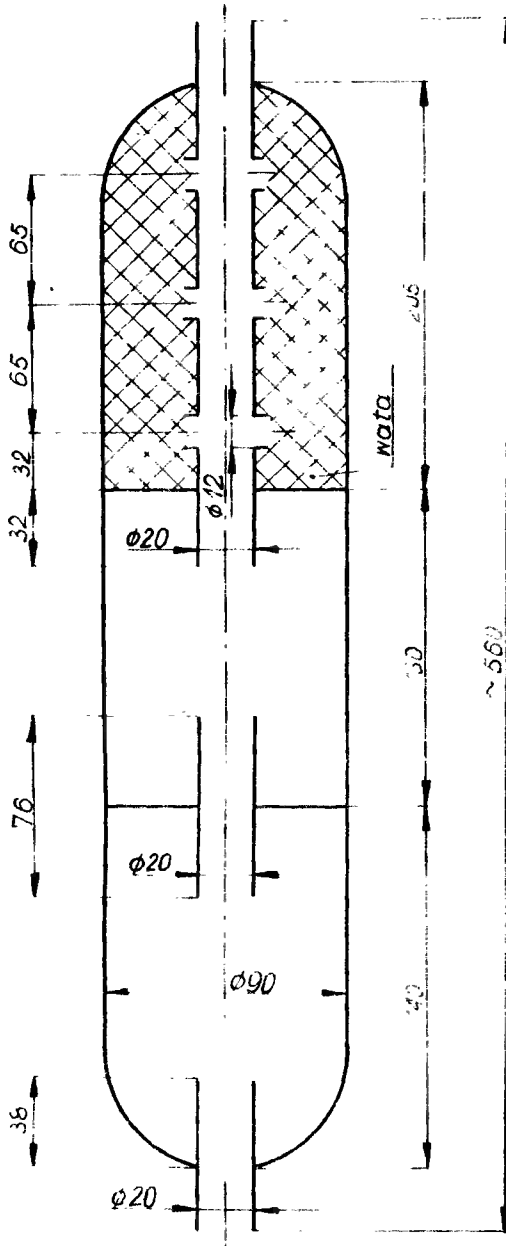
$$f_d = C \left(\frac{A}{VL} \right)^{\frac{1}{2}} \quad (29)$$

gdzie: stała $C = 109\,000 \left[\frac{\text{okr mm}}{\text{s}} \right]$,

wielkość L , A , V odpowiednio w $[\text{mm}]$, $[\text{mm}^2]$, $[\text{mm}^3]$.

Sekcja bocznikowa tłumí pasmo niskich częstotliwości. Obliczenia wykonano dla rezystancji akustycznych strat promieniowania i tarcia. Obszar rezonansowy wypełniono materiałem

porowaty i pochłaniającym energię akustyczną.



Rys 9

Ostateczne główne wymiary układu tłumików akustycznych dla wzdłużnych łożysk powietrznych

W zakresie prac doświadczalnych dla określonej grupy łożysk powietrznych wzdłużnych udało się w pewnych przypadkach zmniejszyć lub nawet usunąć drgania. Dalsze prace są realizowane.

L I T E R A T U R A

1. Trendelenburg F.: Einführung in die Akustik. Berlin 1961.
2. Judin J.Ju.: Rasčiet osnovnych parametrov głušzitieliej szuma aerogazodinamiczieskich ustanowok.
"Promysziennaja aerodinamika", 1959/14.
3. Praca zbiorowa pod redakcją S.Kaliskiego. Drgania i fale, Warszawa 1966.
4. Praca zbiorowa AN USSR, R.M. Sbornik: "Woprosy prikladnoj akustiki i wibracjonnoj tiechniki", Kijów 1966.
5. Sadowski J., Wodziński L.: Akustyka pomieszczeń, Warszawa 1959.
6. Wieliżanina K.A.: Zwukopogłotiteli s pierforirowannoj panelju, "Akusticzieskij žurnal", t.VII, 1961/2.

SELECTED PROBLEMS OF ACOUSTIC ABSORPTION OF
AERIAL THRUST BEARING VIBRATION

The important problem of serial thrust bearings is the limited range of stable work possibility. Expansion of quiet work possibility is acceptable thanks to the use of acoustic absorption. In the article there shown calculations, schemes and characteristics of selected silencers of acoustic absorptions of aerial thrust bearings.

ОТДЕЛЬНЫЕ ПРОБЛЕМЫ АКУСТИЧЕСКОЙ АМОРТИЗАЦИИ
КОЛЕБАНИЙ ВОЗДУШНЫХ УПОРНЫХ ПОДШИПНИКОВ.

Важной проблемой воздушных упорных подшипников является ограниченный период возможности устойчивости работы. Увеличение возможности спокойной работы становится возможным благодаря применению акустической амортизации. В статье даны расчёты, схемы и характеристики отдельных гасителей /антивибраторов/ акустических колебаний воздушных упорных подшипников.

Biblioteka Główna ATR
w Bydgoszczy

Gz

1006

2/1

1976



BYDGOSZCZ