

WYŻSZA SZKOŁA INŻYNIERSKA
im. JANA I JĘDRZEJA ŚNIADECKICH
w Bydgoszczy



ZESZYTY NAUKOWE

Nr 7

MECHANIKA - KONSTRUKCJE

(4)

BYDGOSZCZ 1973

WYŻSZA SZKOŁA INŻYNIERSKA
im. JANA I JĘDRZEJA ŚNIADECKICH
w Bydgoszczy



ZESZYTY NAUKOWE

Nr 7

MECHANIKA - KONSTRUKCJE

(4)

BYDGOSZCZ 1973

Redaktor naukowy
doc. dr inż. Krzysztof Wernerowski

Wydano za zgodą Rektora WSI w Bydgoszczy

Prof. dr inż. Krzysztof Wernerowski
UMK z. 750, nakł. 250, ark. wyd. 7,3 cena zł 9,—, O-9 31 8 73

S P I S T R E Ś C I

Strona

✓	Krzysztof Wernerowski, Henryk Holka, Tomasz Sauter: Możliwości wychwytywania taśmy pilowej po jej zerwaniu	3
✓	Krzysztof Wernerowski, Bronisław Siołkowski, Henryk Holka: Obliczenia i badania sprężyn spiralnych płaskich	13
	Krzysztof Wernerowski, Jerzy Gabański: Szywność płyty prostokątnej o zmiennej grubości podpartej punktowo	33
	Bronisław Siołkowski: Wpływ rozstawu podpór na granice statecznej pracy wałów wysięgnikowych	53
	Bronisław Siołkowski, Tomasz Sauter, Henryk Holka: Niektóre zagadnienia teoretyczne stosowania laminatów na koła w pilarkach taśmowych	63
	Wojciech Weiner: Zmienność wartości modułu sprężystości laminatu epoksydowo-szklanego w próbie zginania	81
	Edward Walicki: Rozwiązanie metodą różnic skończonych uogólnionego zagadnienia brzegowego dla eliptycznego równania różniczkowego	83
✓	Edward Walicki: Laminarny przepływ cieczy lepkiej w prostokątnym kanale	111
	Edward Walicki: Nośność stożkowego łożyska ślizgowego	123

Krzysztof Wernerowski,
Henryk Holka, Tomasz Sauter

MOŻLIWOŚCI WYCHWYTYWANIA TAŚMY PIŁOWEJ PO JEJ ZERWANIU

Wykonano analizę procesu pęknięcia taśmy i rozwiązań wychwytywaczy. Stwierdzono, że ich czas działania musi być bardzo krótki. Istotnym zagadnieniem jest tu duża siła chwytania. Wykazano usterki i błędy kilku istniejących rozwiązań wychwytywaczy. Przedstawiono dobrze działające rozwiązanie. Zostało ono wykonane w Zespole Mechaniki Technicznej.

Ważnym sposobem obróbki drewna jest piłowanie. Obróbka realizowana jest na maszynach zwanych pilarkami taśmowymi /rys. 1/. Podczas pracy często jednak pęka piła taśmowa. Przy dużej prędkości obróbki /około 30 m/sek/ istnieje poważne zagrożenie dla obsługującego.

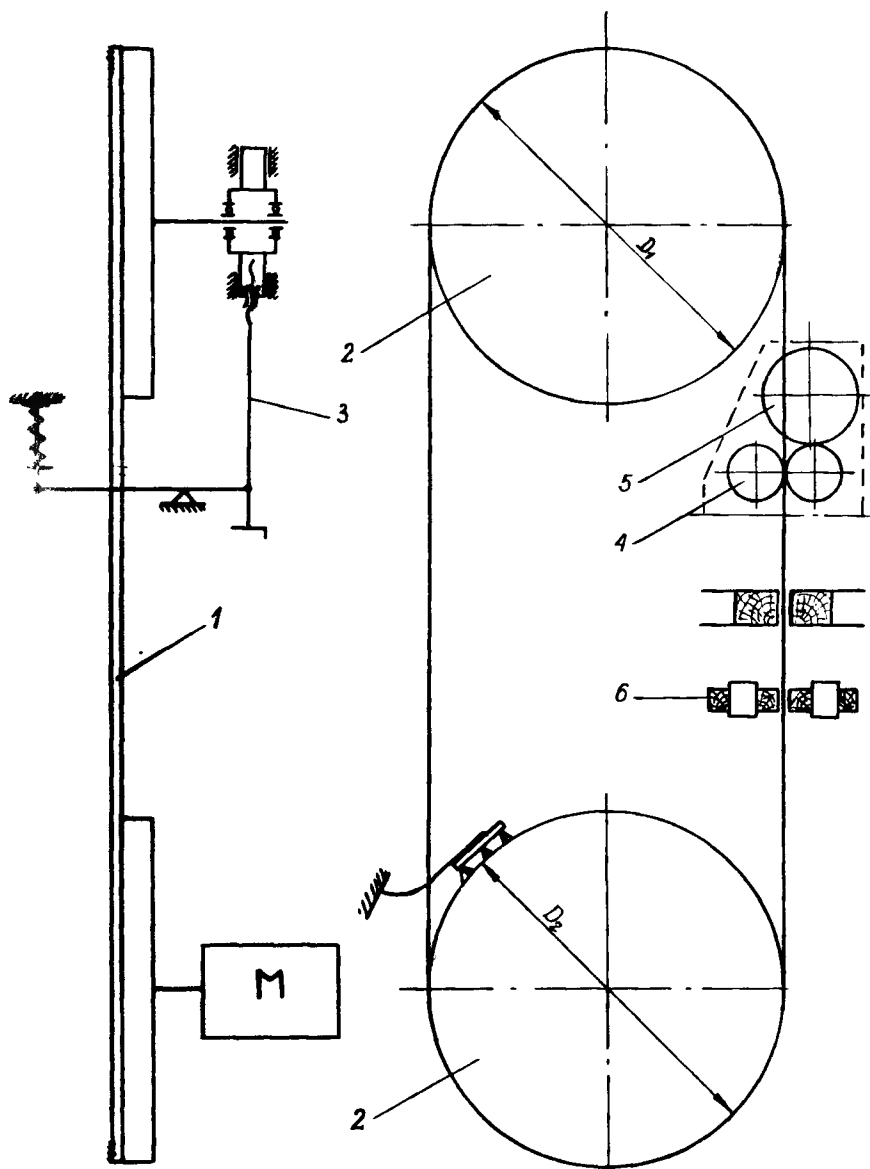
Od szeregu lat prowadzone były w różnych ośrodkach prace w zakresie konstrukcji wychwytywacza taśmy piłowej po jej zerwaniu. W Zespole Mechaniki Technicznej Wyższej Szkoły Inżynierskiej im. Jana i Jędrzeja Śniadeckich zbudowano dobrze działające urządzenie wychwytyjące piłę taśmową po jej zerwaniu.

Podstawowe trudności wynikają z dużej prędkości taśmy. Wobec powyższego czas działania powinien być rzędu 0,015 s. Drugą trudnością jest konieczność uzyskania dużej siły docisku /ok. 0,8 T/ przy małych gabarytach wychwytywacza.

Piły taśmowe wykonywane są ze stali narzędziowej stopowej, chromowo-niklowej lub chromowo-niklowo-wolframowej o twardości 40 - 45 HRC. Jest ona łączona spoiwem srebrnym lub mosiężnym. Najczęściej stosuje się spoiwo/lut/ mosiężny o składzie 54% miedzi i 46% cynku. Temperatura lutowania wynosi 890°. Jako topnika używa się boraksu lub mieszaniny boraksu i kwasu borowego. W celu zmniejszenia twardości miejsce połączenia taśmy odpuszczają w temperaturze 300°. Połączony odcinek wyrównujemy usuwając nadmiar materiału. Grubość taśmy powinna być stała. Praktycznie zmienia się ona w gabarytach $\pm 25\%$ wymiaru nominalnego.

Operacja łączenia obniża wytrzymałość taśmy. Biorąc pod uwagę zmiany wymiarowe składu i struktury materiału stwierdzono, że możliwości przyjmowania obciążeń w miejscu łączenia zmniejszają się o około 20-35%.

Dla konstrukcji wychwytywacza ważna jest również bicie taśmy podczas pracy. Stwierdzono, że maksymalna amplituda waha się w pewnych granicach.



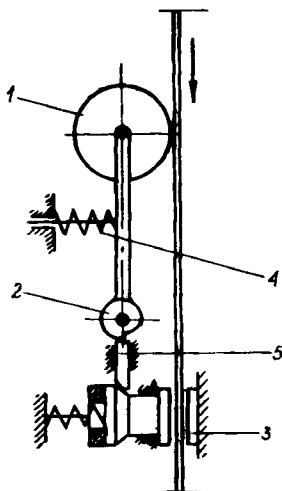
Rys. 1

Schemat pilarki taśmowej DRSD-80; 1 - taśma pilowa, 2 - koła żeliwne, 3 - śruba napinająca, 4 - rolki prowadzące dolne, 5 - rolka prowadząca górna, 6 - klocki drewniane

zależności od położenia rolek prowadzących i wynosi 0,4 i 1,5 mm.

Największe obciążenie piły taśmowej występuje w miejscu skrawania drewna. Pęknięta taśma posiada tendencję do wylatywania po stole pilarki poważnie zagrażając obsługującemu pracownikowi. Osłony metalowe kół i nastawna osłona drewniana stanowią tylko częściową ochronę człowieka. Stworzyło to konieczność opracowania nowego projektu urządzenia zabezpieczającego. Najpierw więc przeprowadzono analizę istniejących rozwiązań. Zasadniczym celem było określenie głównych przyczyn błędów w ich działaniu.

W chwili pęknięcia taśmy rolka /rys. 2/ pod działaniem sprężyny obraca się z krzywką o pewien kąt. Powoduje to odblokowanie młoteczka i tym samym zaczyna się docisk szczęk zaciskowych do taśmy.



Rys. 2

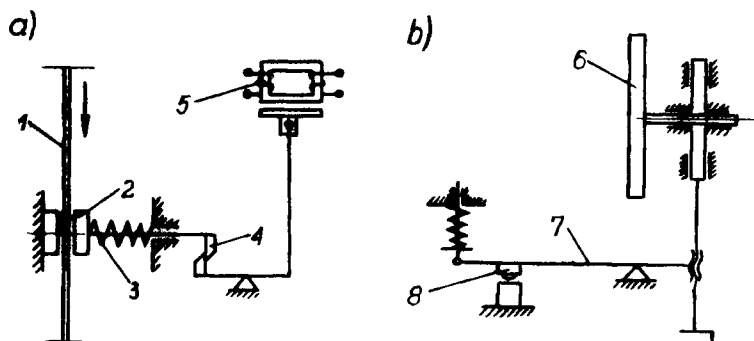
Schemat wychwytywacza;

1 - rolka napinająca, 2 - krzywka, 3 - szczęki zaciskające,
4 - sprężyna odbijająca, 5 - zatrząsk

Stwierdzono, że bezwładność części sterującej jest zbyt wielka i tym samym czas działania sterowania jest duży. Najważniejszą przyczyną błędnego działania była za mała siła sprężyny szczęk zaciskowych. Wielkość potrzebnej siły jest tak duża, że praktycznie przy gabarytach pilarki nie można zastosować prostej sprężyny spełniającej wymieniony postulat.

Po zerwaniu taśmy dźwignia /rys. 3/ zaczyna się obracać i powoduje uruchomienie przekaźnika, który zapewnia działanie elektromagnesu. Dźwignia

z zatraskiem uruchamia sprężynę szczęki. Rozwiązanie to posiada jeszcze więcej wad od poprzedniego. Ilość części zdecydowanie wzrosła. Połączenie sterowania z górnym kołem pasowym wprowadziło bardzo dużą bezwładność. Czas działania jest zdecydowanie za duży. Poza tym organ roboczy nie daje potrzebnej siły zacisku.

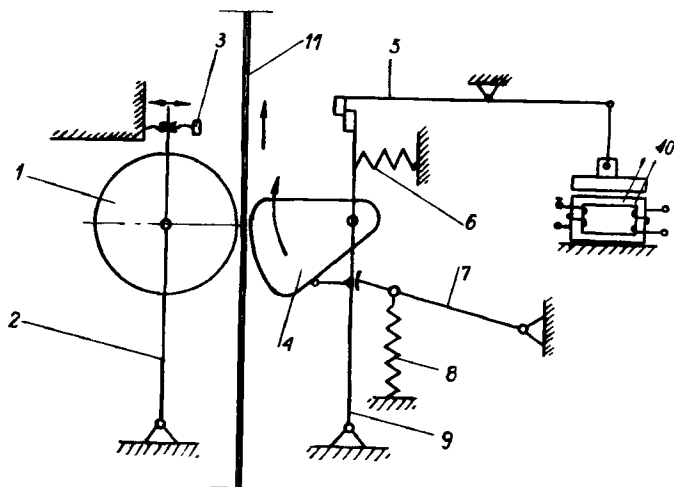


Rys. 3.

Schemat wychwytywacza; a - główna część, b - układ pomocniczy,
 1 - taśma, 2 - szczęki, 3 - sprężyna, 4 - zatrask, 5 - elektromagnes, 6 - koło pasowe, 7 - dźwignia, 8 - przełącznik

Badania wychwytywaczy przedstawionych na rys. 2 i 3 przeprowadzono w Żnińskiej Fabryce Maszyn i Urządzeń oraz w innych fabrykach. Mimo błędnych wyników możemy twierdzić, że wysiłek przy budowie omówionych wychwytywaczy też przyczynił się do rozwoju myśli technicznej. Udowodniono bowiem, że pewne proste koncepcje nie mogą dać pozytywnych wyników i tym samym myśl twórczą należy skierować w inne dziedziny.

Pierwszym problemem była sprawa dużej siły przy wymiarach mechanizmu mieszczących się w gabarytach przestrzeni konstrukcyjnej pilarki taśmowej. Wykorzystano zjawisko samoczynnego zakleszczania się taśmy piłowej w mechanizmie krzywkowym /rys. 4/.



Rys. 4.

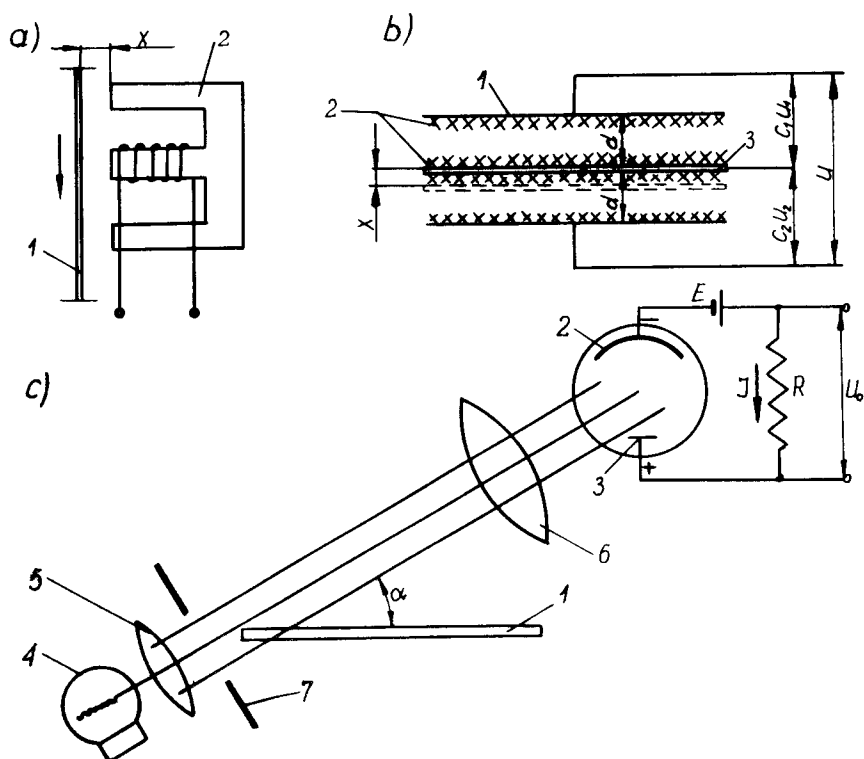
Mechanizm krzywkowy wychwytywacza;

1 - rolka ruchoma, 2 - dźwignia, 3 - śruba ustalająca, 4 - krzywka zaciiskająca, 5 - dźwignia zatrasku, 6 - sprężyna odbijająca, 7 - dźwignia blokująca, 8 - sprężyna naciągowa, 9 - dźwignia, 10 - elektromagnes, 11 - taśma

Ważną zaletą rozwiązania są stosunkowo małe wymiary mechanizmu. Jego drugą dodatnią cechą jest fakt, że siła wzrasta samoczynnie do potrzebnej wartości. Wobec złożonych warunków tarcia połączonego z odkształceniami druga zaleta mechanizmu posiada duże znaczenie.

Zagadnienie sterowania stanowiło drugi odrębny problem. Najpierw więc przeanalizowano możliwość zastosowania czujników elektrycznych.

Każdy z przetworników zmieniał wielkości mechaniczne na sygnał elektryczny, który następnie przez odpowiedni układ elektroniczny i elektromagnesy uruchamiał mechanizm wychwytywacza /rys. 5/.



Rys. 5

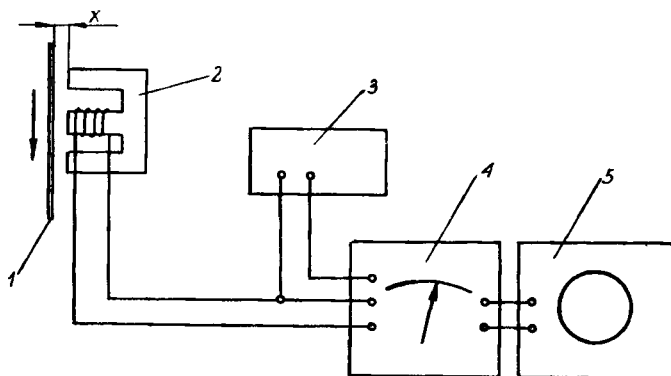
Przetworniki przesunięć taśmy piłowej;

a/ indukcyjny: 1 - taśma, 2 - cewka;

b/ pojemnościowy /kapacytancyjny/: 1 - elektrody nieruchome, 2 - taśma piłowa /elektroda ruchoma/, 3 - nieciągła warstwa drewna;

c/ fotoemisyjny: 1 - piła taśmowa, 2 - fotokatoda, 3 - anoda, 4 - żarówka, 5, 6 - soczewki, 7 - przysłona

Praca czujnika indukcyjnego /rys. 6/ okazała się zawodna przy pełnej prędkości taśmy. Wpływ zmiany materiału w miejscu łączenia był za duży. Niezależnie od poważnej zawodności działania urządzenie odznaczało się też wysokim kosztem.



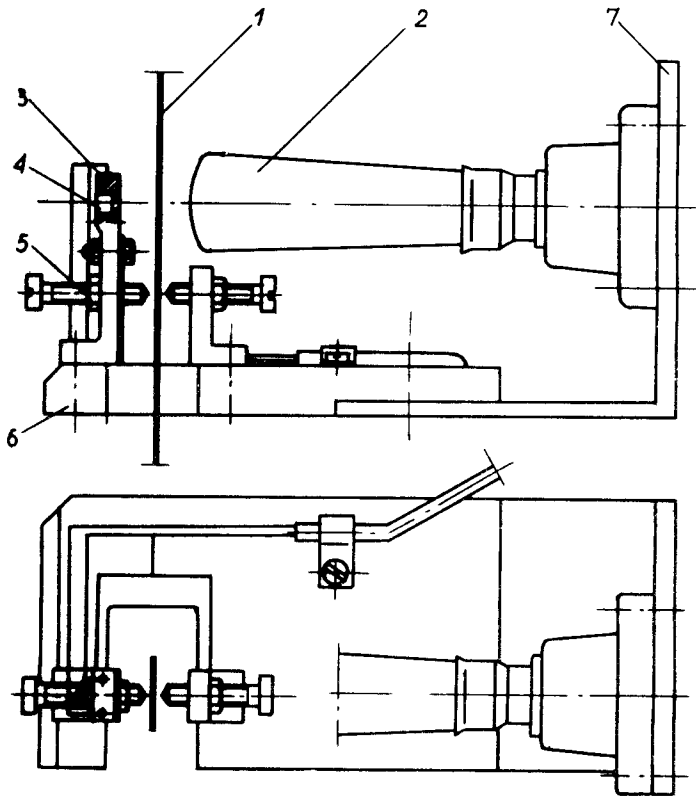
Rys. 6

Schemat blokowy układu elektronicznego czujnika indukcyjnego;
 1 - piła taśmowa, 2 - przetwornik indukcyjny /czynna gałąź mostka/, 3 - selektywna cewka indukcyjna /bierna gałąź mostka/, 4 - mostek pomiarowy Vibrometre TRV-6, 5 - oscyloskop katodowy

Czujnik pojemnościowy różnicowy posiadał analogiczne wady i dodatkowo okazał się zbyt czuły na zanieczyszczenia drewnem.

Pozytywne wyniki dały badania przetwornika fotoenizyjnego. Ważną cechą układu sterującego powinna być niezależność działania. Zaletą taką posiada układ, w którym obwód, bezpośrednio po zerwaniu, zamyka taśma.

Przedstawione rozwiązanie /rys. 7/ pracowało w pełni poprawnie. Wobec szeregu wad układów elektronicznych i elektrycznych przystąpiono do badań sterowania układów czysto mechanicznych.

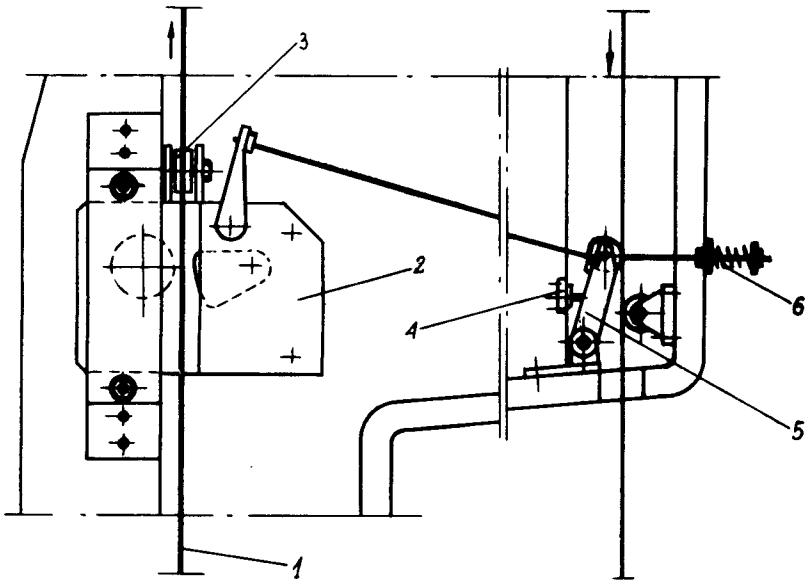


Rys. 7

Układ stykowy wychwytywacza;

1 - taśma, 2 - żarówka, 3 - izolator przezroczysty, 4 - fotoelement, 5 - śruba regulacyjna, 6 - podstawa tekstolitowa, 7 - wspornik metalowy

Zmniejszono wszystkie części /rys. 8/ i tym samym uzyskano małą bezwładność. Stwierdzono, że czas działania jest bardzo krótki i wynosi ok. 0,015 s. Uzyskano siłę zacisku 0,8 T. Długość odcinków, na których nastąpiło zatrzymanie, wynosiła od 150 do 200 mm. Uzyskane wielkości zabezpieczają obsługę przed urazami mechanicznymi.



Rys. 8

Sterowanie mechaniczne;

1 - taśma, 2 - wychwytywacz, 3 - rolka oporowa, 4 - wyłącznik krańcowy, 5 - dźwignia napinająca, 6 - sprężyna

Wykazano doświadczalnie, że istnieje możliwość wychwycenia taśmy piłowej po jej zerwaniu. Prototyp dobrze działającego wychwytywacza został wykonany w Zespole Mechaniki Technicznej.

Krzysztof Wernerowski,
Henryk Holka, Tomasz Sauter

CATCHING POSSIBILITIES OF SAW BAND AFTER CRACKING

S u m m a r y

This article presents the analysis of band creaching and escapement designs. The time of action must be quick. Essential problem is here the great power. Defects and errors of some existing constructions are described. A new and good working design was made in the Technical Mechaniss Group.

Кжиштоф Вернеровски, Генрик Холька, Томаш Саутер

ВОЗМОЖНОСТЬ ВЫХВЫТЫВАНИЯ ЛЕНТЫ ПИЛЫ
ПОСЛЕ ЕЁ СОРВАНИЯ

/Резюме/

Произведён анализ процесса трескания ленты и решения выхвотов. Установлено, что время действия должно быть очень коротким. Главной проблемой является большая сила выхвотывания. Представлены недостатки и ошибки существующих решений выхвотов. Представлено хорошо действующее решение. Было оно осуществлено на кафедре Технической Механики.

Krzysztof Wernerowski,
Bronisław Siołkowski, Henryk Holka

2

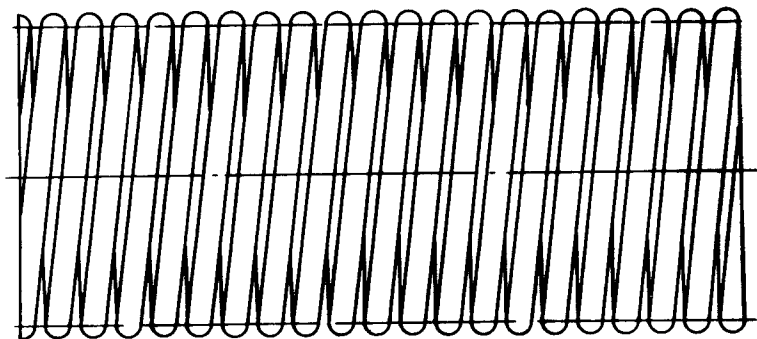
OBLICZENIA I BADANIA SPRĘŻYN SPIRALNYCH PŁASKICH

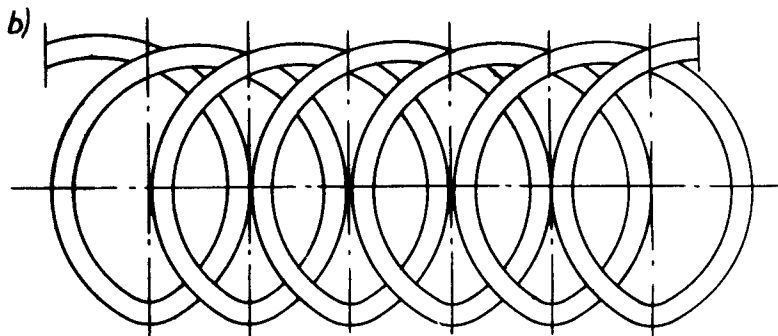
Opracowano model obliczeniowy sprężyny spiralnej płaskiej . Wykonano obliczenia energii odkształcenia sprężystego i sztywności . Równocześnie przeprowadzono badania i analizę możliwości produkcji sprężyn spiralnych płaskich. Stwierdzono, że w pewnych przypadkach sprężyny spiralne płaskie przewyższają zaletami zwykle sprężyny śrubowe walcowe.

1. Wstęp

Obliczenia i badania wykazały, że w pewnych warunkach pracy sprężyny spiralne płaskie /rys. 1/ wykazują więcej zalet od klasycznych sprężyn śrubowo-walcowych.

a)





Rys. 1

Sprężyny: a/ śrubowa walcowa, b/ spiralna płaska

Każdy element podatny charakteryzuje dwie zasadnicze wielkości. Pierwszą z nich jest zdolność akumulowania energii, a druga sztywność.

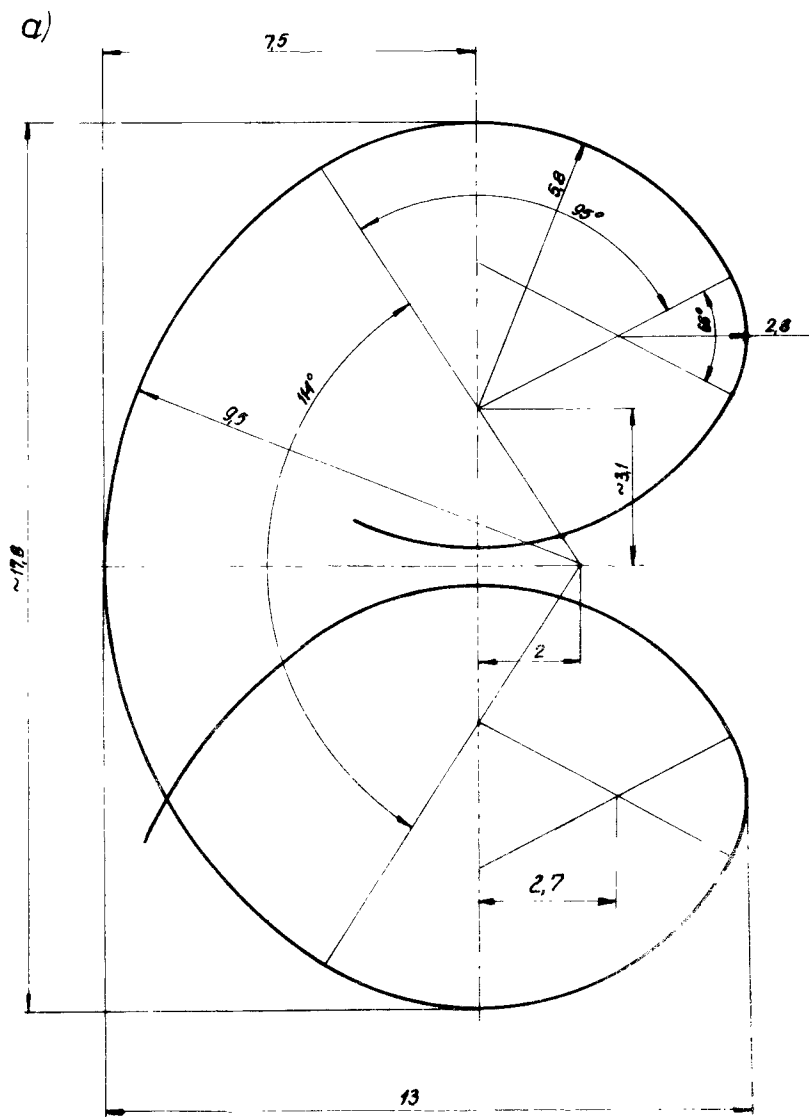
Przeprowadzono dokładną analizę wymienionych cech dla sprężyn spiralnych płaskich i analogicznych walcowych.

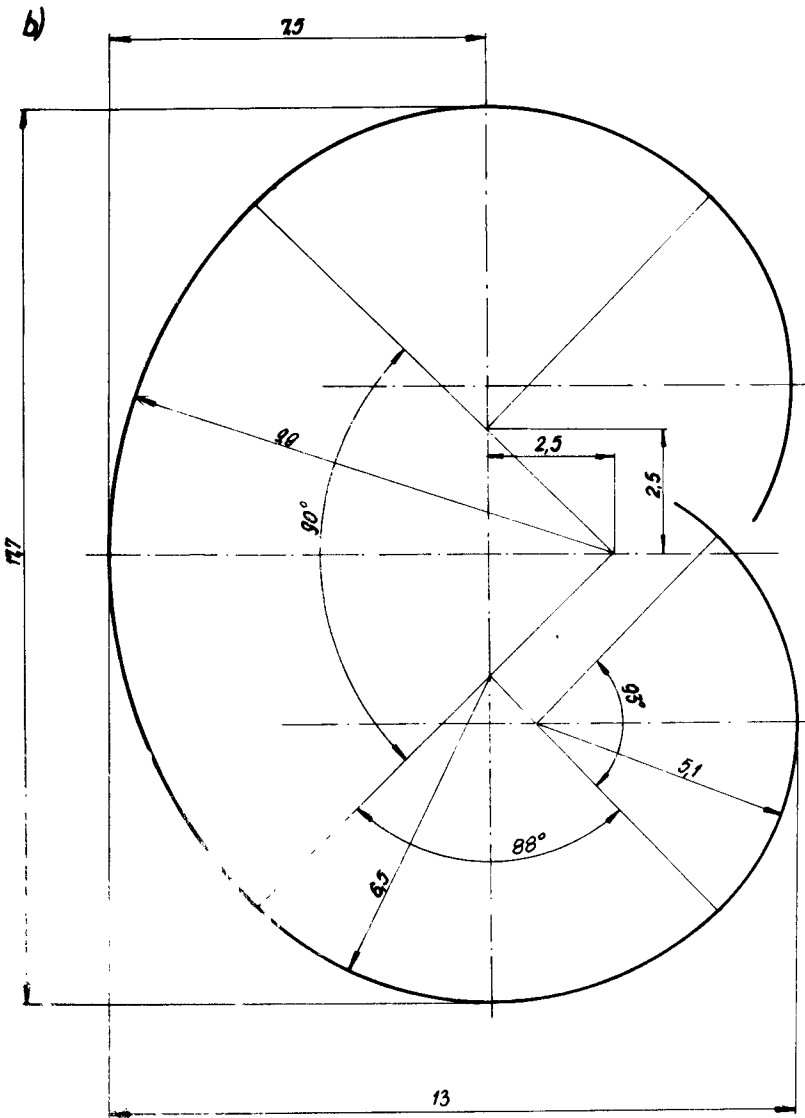
2. Obliczenia

Jeden zwój sprężyny /rys. 2/ złożony jest z trzech łuków kołowych. Modelem obliczeniowym jest więc pręt krzywy leżący w jednej płaszczyźnie.

Momenty gnące w poszczególnych obszarach /rys. 3/ wyrażają się następująco:

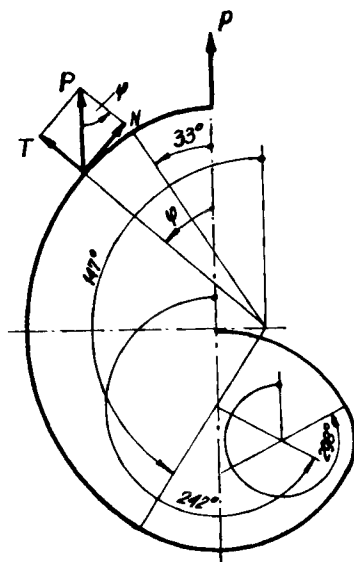
I	$0 \leq \varphi \leq 33^\circ$	$M_g = P \cdot R_2 \sin$	/1a/
II	$33^\circ \leq \varphi \leq 147^\circ$	$M_g = P \cdot /R_1 \sin -2/$	/1b/
III	$147^\circ \leq \varphi \leq 242^\circ$	$M_g = P \cdot R_2 \sin$	/1c/
IV	$242^\circ \leq \varphi \leq 298^\circ$	$M_g = P/R_3 \sin -2,7/$	/1d/
V	$298^\circ \leq \varphi \leq 360^\circ$	$M_g = P \cdot R_2 \sin$	/1e/





Rys. 2

Wymiary obliczanych sprężyn spiralnych płaskich



Rys. 3

Schemat obliczeniowy pręta zakrzywionego, składającego się z pięciu odcinków kołowych, gdzie:

N - siła normalna,
T - siła styczna

Siły styczne nie odgrywają istotnej roli w obliczeniach wytrzymałościowych i zostały pominięte.

Siły normalne dla całego obszaru wyrażają się następującym wzorem:

$$N = P \cdot \sin \psi$$

Tablica 1
Wartości momentów gnących i sił normalnych

/o/	0	15	30	33	45	60	75
M _g / kGmm/	0	1,51P	2,90P	3,16P	4,75P	6,23P	7,22P
N / kG/	0	0,26P	0,50P	0,55P	0,71P	0,87P	0,97P

90	120	135	147	150	180	210	225	340
7,5P	6,23P	4,75P	3,06P	2,90P	0	-2,90P	-4,15P	-5,12P
P	0,87P	0,71P	0,55P	0,5P	0	-0,50P	-0,71P	-0,87P

242	270	298	300	315	330	360
-5,12P	-5,50P	-51,2P	-5,02P	-4,15P	-2,90P	0
-0,88P	-P	-0,88P	-0,87P	-0,71P	-0,50P	0

Dla sprężyny spiralnej płaskiej energia odkształcenia sprężystego, przypadająca na element długości, określona jest następującą zależnością:

$$\frac{dV}{dS} = \frac{N + \frac{Mg}{R}}{2EF} + \frac{Mg^2}{2EI_z} \quad /3/$$

gdzie:

- V - energia
- S - łuk,
- E - moduł Younga,
- F - przekrój;

$$I'_z = \int_F \frac{y^2 R}{R + y} dF; \quad /3a/$$

y - rzędna w płaszczyźnie przekroju poprzecznego sprężyny spiralnej płaskiej.

Dla przekroju kołowego:

$$J'_z = \frac{\pi r^4}{4} \left[1 + \frac{1}{2} \left(\frac{r}{R} \right)^2 + \frac{5}{4} \left(\frac{r}{R} \right)^4 + \dots \right] \quad /4/$$

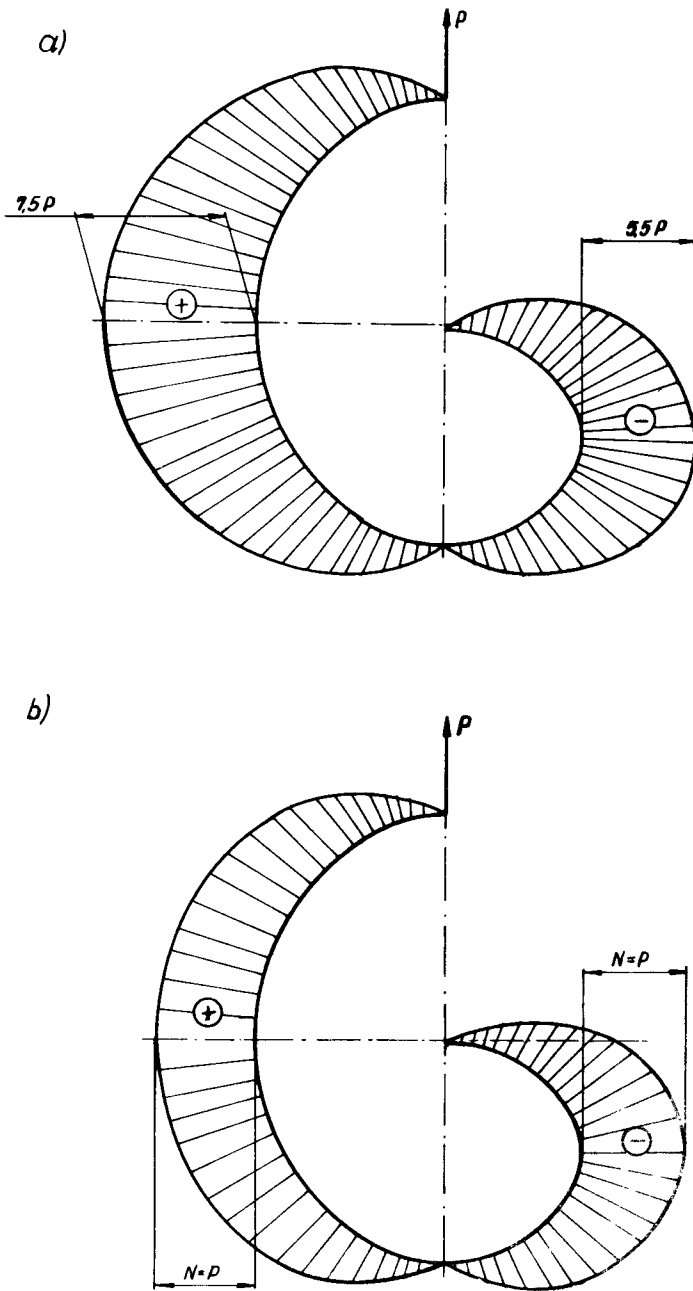
Przyjmując $r = 1 \text{ mm}$ i $R_1 = 9,3$, $R_2 = 5,8$, $R_3 = 2,8 \text{ mm}$ - otrzymamy:

$$J'_{z_1} = \frac{\pi \cdot 1^4}{4} \left[1 + \frac{1}{2} \left(\frac{1}{9,3} \right)^2 + \frac{5}{4} \left(\frac{1}{9,3} \right)^4 \right] = 0,79 \text{ mm}^4 \quad /4a/$$

$$J'_{z_2} = \frac{\pi \cdot 1^4}{4} \left[1 + \frac{1}{2} \left(\frac{1}{5,8} \right)^2 + \frac{5}{4} \left(\frac{1}{5,8} \right)^4 \right] = 0,80 \text{ mm}^4 \quad /4b/$$

$$J'_{z_3} = \frac{\pi \cdot 1^4}{4} \left[1 + \frac{1}{2} \left(\frac{1}{2,8} \right)^2 + \frac{5}{4} \left(\frac{1}{2,8} \right)^4 \right] = 0,84 \text{ mm}^4 \quad /4c/$$

Dla $0 < \varphi < 33^\circ$



Rys. 4

Wykresy: a/ momenty giące, b/ siły normalne

$$U = \int_0^{\varphi} \frac{1/N + \frac{Mg}{R}/2}{2EF} + \frac{Mg^2}{2E J_z'} ds \quad /5a/$$

Podstawiając za N i Mg wzory wyżej podane, a za $d_s = R_1 \cdot d\varphi$, otrzymamy:

$$\begin{aligned} U_1 &= \frac{2 P^2 R_2}{EF} \int_0^{\varphi} \sin^2 \varphi d\varphi + \frac{P^2 R_2^3}{2E J_{z2}'} \int_0^{\varphi} \sin^2 \varphi d\varphi = \\ &= \left(\frac{2 P^2 R_2}{EF} + \frac{R_2^3 P^2}{2E J_{z2}'} \right) \left(\frac{1}{2} \varphi - \frac{1}{4} \sin 2\varphi \right) \Big|_0^{33} = \\ &= \left(\frac{2 P^2 R_2}{0,541^2 E} + \frac{5,8^3 P^2}{2 \cdot 0,8 \cdot E} \right) \left(\frac{1}{2} \cdot \frac{\widehat{n} \cdot 1}{180} \cdot 33 - \frac{1}{4} \sin 66^\circ \right) = \\ &= \left(3,69 \frac{P^2}{E} + 123,6 \frac{P^2}{E} \right) \left(0,288 - 0,228 \right) = \\ &= 127,3 \frac{P^2}{E} \cdot 0,06 = 7,65 \frac{P^2}{E} = 3,64 \cdot 10^{-4} P^2 \quad \text{kGmm} \quad /5b/ \end{aligned}$$

Analogicznie zrealizowano obliczenia energii odkształcenia sprężystego dla pozostałych części sprężyny spiralnej płaskiej, uzyskując następujące wyniki:

$33^\circ \leq \varphi \leq 147^\circ$	$U_2 = 219 \cdot 10^{-4} P^2$	kGmm
$147^\circ \leq \varphi \leq 242^\circ$	$U_3 = 23,8 \cdot 10^{-4} P^2$	kGmm
$242^\circ \leq \varphi \leq 298^\circ$	$U_4 = 24,2 \cdot 10^{-4} P^2$	kGmm
$298^\circ \leq \varphi \leq 360^\circ$	$U_5 = 20,2 \cdot 10^{-4} P^2$	kGmm

Energia całkowita jednego zwoju wynosi:

$$V = \sum_{i=1}^5 V_i = 291 \cdot 10^{-4} P^2 \quad \text{kGmm} \quad /6/$$

Ważna jest energia właściwa:

$$\phi = \frac{U}{V} \quad /7/$$

gdzie: V - objętość zwoju sprężyny.

Dla naszych danych $V = 128,2 \text{ mm}^3$, czyli:

$$\phi = 2,27 \cdot 10^{-4} P^2 \quad \frac{\text{kg}}{\text{mm}}$$

Analogiczna sprężyna śrubowa o wymiarach $d = 2 \text{ mm}$, $D = 13 \text{ mm}$ posiada energię właściwą:

$$\phi = 5,2 \cdot 10^{-4} P^2 \quad \text{kg mm}^2$$

Wykonano też obliczenia dla sprężyn z drutu o $d=1,8 \text{ mm}$:

Lp.	Nr rys.	Sprężyna	Wymiary	Energia zwoju U	Energia właściwa ϕ	Szytwność sprężyny k
			mm	kgmm	kg/mm ²	kg/mm
1	-	śrubowa	d=2	-	$5,2 \cdot 10^{-4} P^2$	7,5
2	2a	plaska	D=13	$291 \cdot 10^{-4} P^2$	$2,27 \cdot 10^{-4} P^2$	17,2
3	-	śrubowa	d=1,8	-	$9,75 \cdot 10^{-4} P^2$	6,15
4	2b	plaska	D=13	$451,1 \cdot 10^{-4} P^2$	$4,07 \cdot 10^{-4} P^2$	11,1

Dobierając średnicę drutu d oraz kształty sprężyny płaskiej możemy w znacznym stopniu zmieniać jej własności.

Szytwność sprężyny spiralnej płaskiej obliczono stosując twierdzenie A. Castigliano:

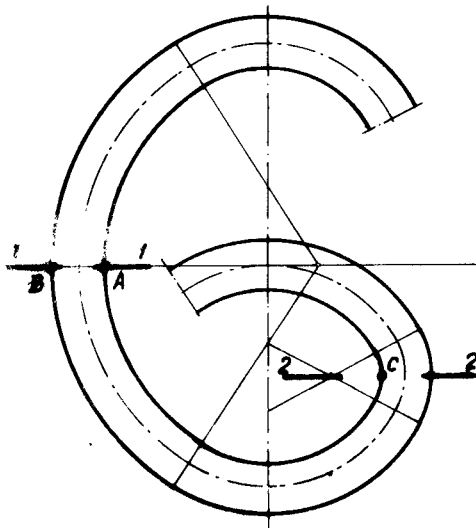
$$\text{strzałka ugięcia } f = \frac{\partial V}{\partial P} = 5,82 \cdot 10^{-4} P \quad \text{mm} \quad /9/$$

$$\text{czyli } k = \frac{P}{f} = 17,2 \quad \text{kg/mm}.$$

Dla analogicznej sprężyny śrubowej mamy:

$$k = 7,5 \quad \text{kg/mm}.$$

Największe naprężenia rozciągające będą występowały w punkcie A przekroju 1-1 /rys. 5/, natomiast największe naprężenia ściskające wystąpią w punkcie B przekroju 1-1 lub w punkcie C przekroju 2-2. Dla obu przekrojów stosuje się teorię zginania prętów krzywych.



Rys. 5

Schemat zwoju sprężyny spiralnej płaskiej

Napężenie rozciągające w punkcie A przekroju 1-1 wynosi:

$$\sigma_A = \frac{N}{F} + \frac{Mg_A}{R_1 F} + \frac{Mg_A}{I'_{z1}} \cdot \frac{r R_1}{R_1 - r} = 11,2 P \quad \text{kg/mm}^2 ; \quad /10a/$$

napężenie ściskające w punkcie B przekroju 1-1:

$$\sigma_B = \frac{N}{F} + \frac{Mg_A}{R_1 F} - \frac{Mg_A}{I'_{z1}} \cdot \frac{r R_1}{R_1 - r} = -10 P \quad \text{kg/mm}^2 ; \quad /10b/$$

napężenie ściskające w punkcie C przekroju 2-2 :

$$\sigma_C = -\frac{N}{F} - \frac{Mg_C}{R_2 F} - \frac{Mg_C}{I'_{z3}} \cdot \frac{r \cdot R_2}{R_2 - r} = 11,1 P \quad \text{kg/mm}^2 . \quad /10c/$$

Maksymalne napężenia styczne w sprężynie śrubowej wynoszą:

$$\begin{aligned} \tilde{\tau}_{\max} &= \frac{P}{\pi r^2} \left(1 + \frac{2R}{r} \right) = \frac{P}{\pi l^2} \left(1 + \frac{2 \cdot 6,5}{1} \right) = \\ &= 4,5 P \quad \text{kg/mm}^2 \end{aligned} \quad /11/$$

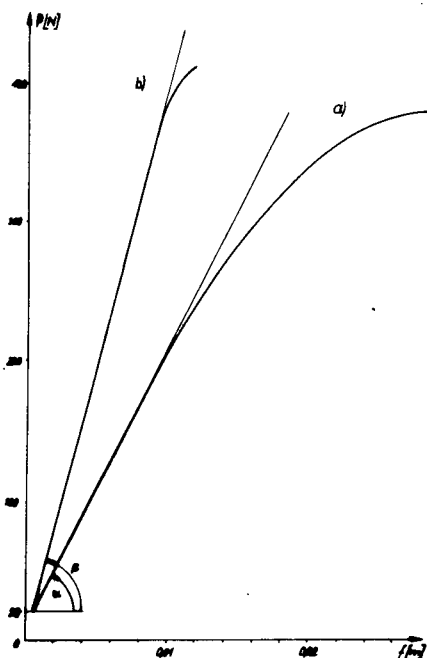
Natomiast zredukowane na naprężenia normalne wg hipotezy Hubera:

$$\sigma_{\text{red}} = \sqrt{3} \hat{\tau}_{\text{max}} = \sqrt{3} \cdot 4,5 P = 7,8 P \quad \text{kG/mm}^2 \quad /12/$$

3. Badania

W celu sprawdzenia wyników obliczeń przeprowadzono badania wytrzymałościowe.

Porównując /rys. 6/ sztywność obliczoną $K_0 = 17,2 \text{ kG/mm}^2$ ze zmierzoną $K_z = 15,2 \text{ kG/mm}^2$ dla sprężyny spiralnej płaskiej widzimy, że różnica wynosi ok. 13%. Różnica ta w dużej mierze spowodowana jest pominięciem naprężeń stycznych przy założeniu, że zwoje sprężyny są płaskie. W przypadku jednak rozważanej sprężyny zwoje nie są zupełnie płaskie, a oględziny plastycznie odkształconej sprężyny potwierdzają występowanie naprężeń tnących. Sztywność obliczona większa od zmierzonej również świadczy o tym, że jeden mały składnik energii sprężystej został pominięty.



Rys. 6

Charakterystyki sprężyn: a/ spiralnej płaskiej, b/ śrubowej walcowej

Z charakterystyk doświadczalnych, o których mowa wyżej, można odczytać graniczne wartości sił obciążających, nie deformujących jeszcze sprężyny. Siły te wynoszą dla sprężyny spiralnej 18 kG, a dla sprężyny śrubowej - 34 kG.

Odpowiadające tym obciążeniom maksymalne naprężenia dla sprężyny śrubowej wynoszą:

$$\sigma_{\max} = \frac{P}{\pi r^2} \left(1 + \frac{2R}{r} \right) = \frac{34}{\pi \cdot 1,5^2} \left(1 + \frac{15,5}{1,5} \right) = 54,5 \text{ kG/mm}^2.$$

Wprowadzając współczynnik bezpieczeństwa $n_x = 1,35$ otrzymamy naprężenia dopuszczalne:

$$k_g = 150 \text{ kG/mm}^2, \quad k_s = 40 \text{ kG/mm}^2,$$

których wielkości są zgodne z podanymi w literaturze.

Zaskakująca może być tu wielkość naprężeń gnących k_g , które mogą nawet przekraczać granicę plastyczności na rozciąganie. Ten paradoksalny na pierwszy rzut oka fakt tłumaczy korzystny rozkład naprężeń, uniemożliwiający powstawanie znacznych ich koncentracji. Należy to tłumaczyć w ten sposób, iż przy osiągnięciu przez pewne zagrożone partie materiału granicy plastyczności następuje taka zmiana rozkładu naprężeń w sprężynie, iż w sąsiednich partiach materiału powstają większe naprężenia niż to wynika z rachunku, a więc przyjmują one na siebie większą od obliczonej część obciążenia całkowitego.

4. Możliwości produkcji sprężyn spiralnych płaskich

Zagadnienie produkcji sprężyn płaskich jest złożone. Istnieją dwa zasadnicze sposoby ich wykonania.

Podstawowa, najczęściej stosowana metoda polega na zastosowaniu półfabrykatu w postaci sprężyny śrubowo-walcowej. Ze względu na sposób przerobu sprężyny śrubowo-walcowej na płaską możemy podzielić ją na trzy odmiany:

- a/ Płaszczenie sprężyny śrubowo-walcowej przez walcowanie;
- b/ Metodę wyginania kolejnych zwojów sprężyny śrubowo-walcowej na automacie;
- c/ Płaszczenie sprężyny śrubowej na prasie przez uderzenie stempla.

Drugi sposób polega na zastosowaniu prostego drutu, zaś pracę nawijania sprężyny płaskiej wykonuje automat.

Z trzech podanych odmian pierwszej metody wykonania sprężyn płaskich najwydajniejsze są odmiany a i b.

Proces wykonania sprężyn płaskich ująć można w trzy zasadnicze operacje.

Wariant a, b

- Op. 1. Wykonanie sprężyny śrubowo-walcowej.
- Op. 2. Płaszczenie sprężyny śrubowo-walcowej.
- Op. 3. Cięcia na długość sprężyny płaskiej.

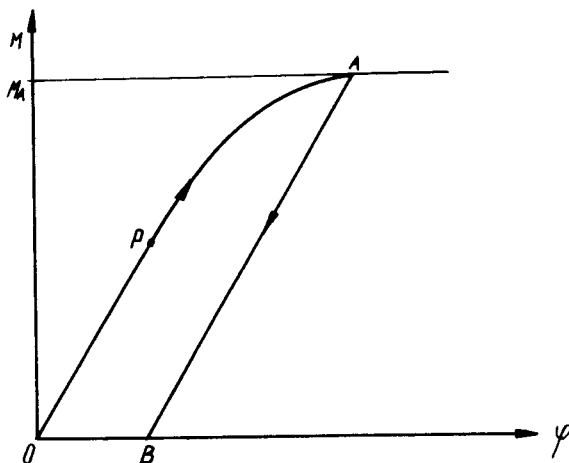
Wariant c

- Op. 1. Wykonanie sprężyny śrubowo-walcowej.
- Op. 2. Cięcia na długość sprężyny śrubowo-walcowej.
- Op. 3. Płaszczenie na prasie odciętych odcinków sprężyny śrubowej.

Wyższość procesów a i b nad c polega na tym, że płaszczenie sprężyny następuje automatycznie, przy czym automat przerabia sprężyny śrubowe o bardzo dużej długości; rola pracownika ogranicza się tylko do kontroli i zasilania automatu w półfabrykat. W procesie c operację główną płaszczenia wykonuje się po pocięciu sprężyny śrubowej na określone długości, a samo płaszczenie wykonuje się na prasie indywidualnie dla każdego odcinka. Stąd duża pracochłonność, nie licząc transportu i kłopotliwego zasilania przy - rzadu.

Przedstawione powyżej warianty procesów technologicznych różnią się kosztem wykonania i pod tym względem wybór określonego procesu jest bardzo istotny. Niemniej jednak ważne jest zagadnienie wyboru procesu ze względu na działanie sprężyny oraz uzyskanie odpowiedniego jej kształtu /energia, sztywność itp./. W tym wypadku trudno jest przewidzieć odpowiedni proces, gdyż samo zagadnienie sprężyn płaskich - tak pod względem obliczenia, jak i technologii - jest zagadnieniem nowym.

Obróbka wiąże się ściśle z odkształceniem plastycznym /rys. 7/.



Rys. 7

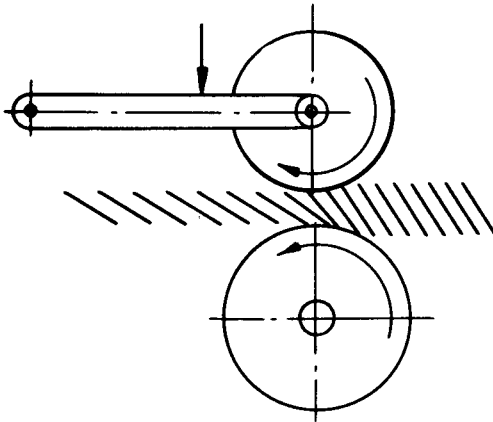
Związek między momentem i odkształceniem przy obciążaniu oraz przy odciażaniu

Krzywa OPA przedstawia proces obciążenia. Następnie wartość momentu zaczyna się zmniejszać i rozpoczyna się sprężyste odkształcanie powrotne.

W procesie płaszczenia najważniejszymi czynnościami są zginanie i skręcanie.

Podczas zginania należy w czasie płaszczenia zakrzywić elementy sprężyny bardziej od wartości żądanej, aby po sprężystym odkształceniu powrotnym uzyskać właściwe ugięcie. Różnicę między kątami zagięcia nazywamy kątem sprężynowania. Wartość wymienionego kąta zależy od rodzaju materiału, jego grubości i promienia gięcia. Wartości podane w literaturze wahają się w szerokich granicach. Wobec tego zalecamy doświadczalne sprawdzenie wartości.

Chociaż podczas zmian kształtu sprężyny ważniejsze jest zginanie, jednak udział skręcania jest również istotny.

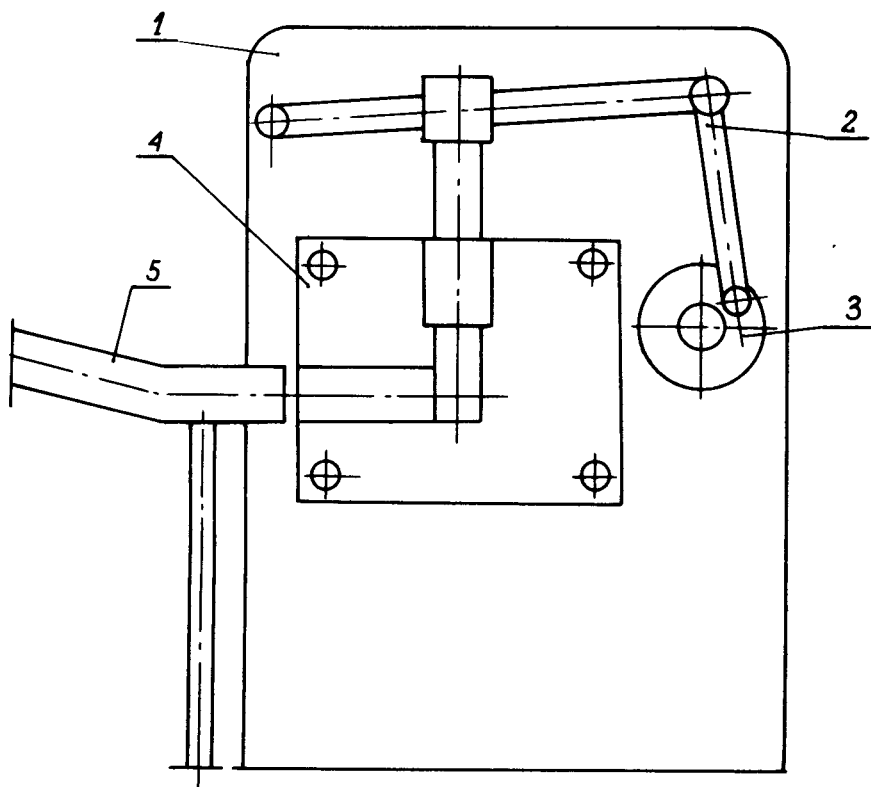


Rys. 8

Schemat płaszczenia sprężyny śrubowo-walcowej przez walcowanie

Na rys. 8 przedstawiono schemat wykonania sprężyny płaskiej przez walcowanie. Urządzenie składa się z dwóch walców, z których dolny jest napędzany, górny zaś posiada regulację szczeliny pomiędzy walcami. Wskazane jest zamocowanie urządzenia wprowadzającego sprężynę śrubową.

Korzystne jest też płaszczenie sprężyny śrubowej /rys. 9/ na automacie, metodą wyginania kolejnych zwojów.



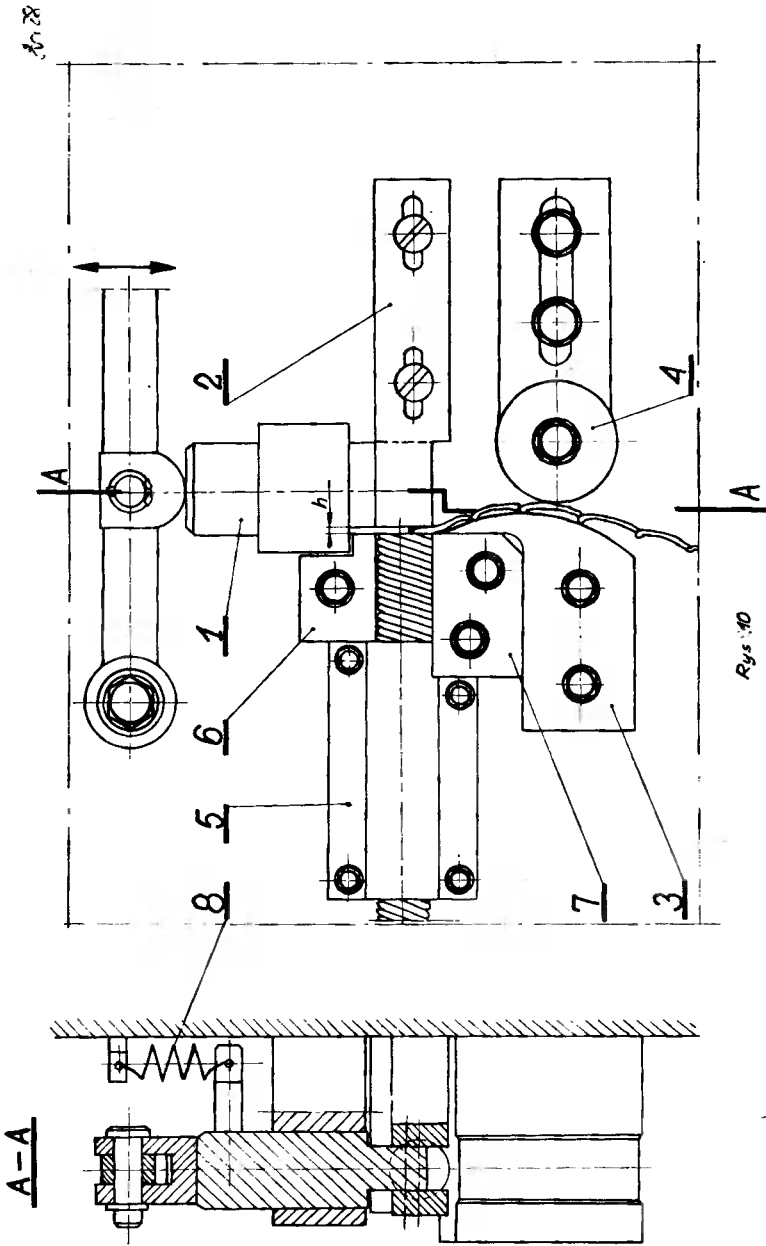
Rys. 9

Schemat ogólny automatu:

1 - korpus, 2 - dźwignia mimośrodowa, 3 - koło mimośrodowe, 4 - zespół roboczy automatu, 5 - podajnik

Zasadniczą częścią automatu /rys. 10/ jest układ zginający w postaci płaskiej płyty 4 przymocowanej do korpusu 1. Suwak 1 wykonuje ruchy posuwisto-zwrotne o regulowanym skoku nastawionym przez ustalenie dźwigni w odpowiedni otwór koła mimośrodowego /poszczególne otwory wykonane są z różnym przesunięciem mimośrodowym/. Zasada pracy urządzenia jest następująca: sprężyna śrubowa o długości określonej długością podajnika na skutek jego pochylecia opada i opiera się czołem o listwę 2. Listwa ta ma wygięcie na suwak oraz posiada możliwość regulacji poziomej. W ten sposób regulować można wysunięcie sprężyny z gniazda między kostkami 7 i 6, a tym samym ustalić - w zależności od średnicy drutu - wielkość wymiaru h.

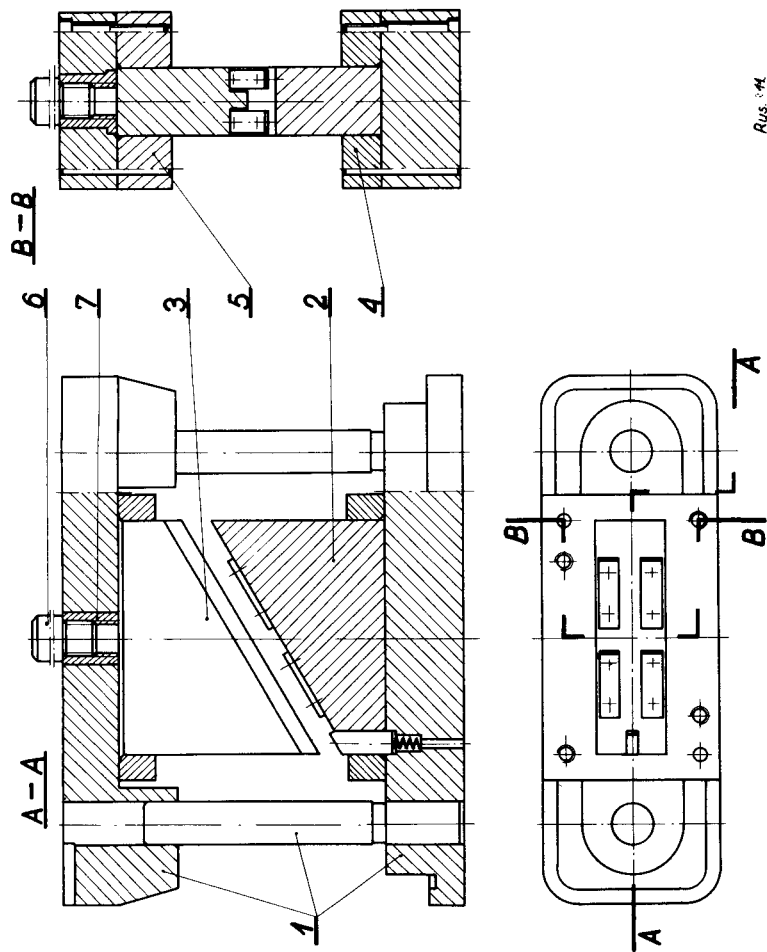
Zgięta sprężyna wysuwa się między krzywką 3 a krążkiem ruchomym 4. Wymuszony ruch suwaka ku górze następuje przy pomocy sprężyny 8.



Rys. 10

Schemat zespołu robocze o automatu:

- 1 - swiak, 2 - listwa, 3 - przewiesz stala, 4 - przegak
- ruczowy, 5 - obramka wodajowa, 6 - linia kotarka,
- 7 - dolna kocina, 8 - sprężyna



Rys. 11

Przyrząd do spłaszczania sprężyn:

- 1 - oprawa, 2 - matryca, 3 - stempeł, 4 - obudowa matrycy,
- 5 - obudowa stempla, 6 - czop, 7 - tuleja

Innym sposobem wykonania sprężyn płaskich jest płaszczanie sprężyny śrubowo-walcowej /rys. 11/ na prasie.

Stempel oraz matryca wykonane są pod odpowiednim kątem tak, że w leżącej na matrycy sprężynie uderza stempel ukośnie do czoła sprężyny. Regulacją kąta wzniosu stempla i matrycy regulować można skok sprężyny płaskiej. Przy poprawnym wykonaniu zalecane jest zastosowanie wypychacza do usuwania wykonanych sprężyn.

5. Wnioski

5.1. Na podstawie wnikliwej analizy metod produkcji stwierdzono, że istnieje możliwość wytwarzania sprężyn płaskich w przyrządzie lub automacie.

5.2. Rozwiązanie konstrukcyjne sprężyny spiralnej płaskiej o zasadniczych własnościach technicznych sprężyny śrubowej walcowej jest możliwe. Stwierdzono, że własności takie posiada sprężyna spiralna płaska wykonana z drutu o mniejszej średnicy.

5.3. Zalety nowego rozwiązania:

- a/ oszczędności materiałowe,
- b/ materiał otaczający zwoje w mniejszym stopniu będzie przeszkadzał podczas swobodnego odkształcania się sprężyny.

5.4. Wady nowego rozwiązania:

- a/ koszt przygotowania operacji płaszczania lub całej produkcji sprężyny spiralnej płaskiej bezpośrednio z drutu,
- b/ dodatkowa robocizna płaszczania.

Literatura

1. Jakubowicz A., Orłowski Z. : Wytrzymałość materiałów. WIT, Warszawa 1966.
2. Karowski R., Niezgodziński M.E. : Wytrzymałość materiałów. IWN, Warszawa 1959.
3. Sobkowski W., Witkowski J.: Nowe układy tapicerskie. Informacja branżowa 2/67.

Krzysztof Wernerowski,
Bronisław Siołkowski, Henryk Holka

COMPUTING AND RESEARCH OF FLAT SPIRAL SPRINGS

S u m m a r y

This paper presents a new compute model of the flat spiral spring. The energy of elastic **strain** and **stiffness** was calculated. Research works and analysis of possibilities in the production were made. In some cases the flat spiral springs have better advantages than the **common** cylindrical ones.

Кжиштоф Вернеровски, Бронислав Сёлковски, Генрик Холька

ВЫЧИСЛЕНИЯ И ИССЛЕДОВАНИЯ ПЛОСКИХ СПИРАЛЬНЫХ ПРУЖИН

/Резюме/

В данной работе разработана вычислительная модель плоской спиральной пружины. Выполнен анализ энергии деформации и неподвижности. Одновременно исследована возможность производства данных пружин. Констатировано, что в некоторых случаях плоские спиральные пружины отличаются лучшими свойствами, чем обыкновенные цилиндрические.

Krzysztof Wernerowski,
Jerzy Cabański

SZTYWNOŚĆ PŁYTY PROSTOKĄTNEJ O ZMIENNEJ GRUBOŚCI PODPARTEJ PUNKTOWO

Opracowano model obliczeniowy płyty. Płytę anizotropową zastąpiono równoważną ortotropową. Wykonano obliczenia sztywności, ugięć termosprężystych i drgań. Opracowano praktyczną metodę obliczeń płyty ortotropowej.

1. Wstęp

Wzrost wymagań w zakresie sztywności dużych maszyn łączy się z rozwojem dokładnych metod obliczeń płyt. Zasadniczym celem przedstawionych obliczeń jest ustalenie możliwości uzyskania większej sztywności przy zmniejszonych grubościach części składowych. Zmniejszenie odkształceń zapewni wyższą dokładność wymiarową przy zmniejszonym ciężarze.

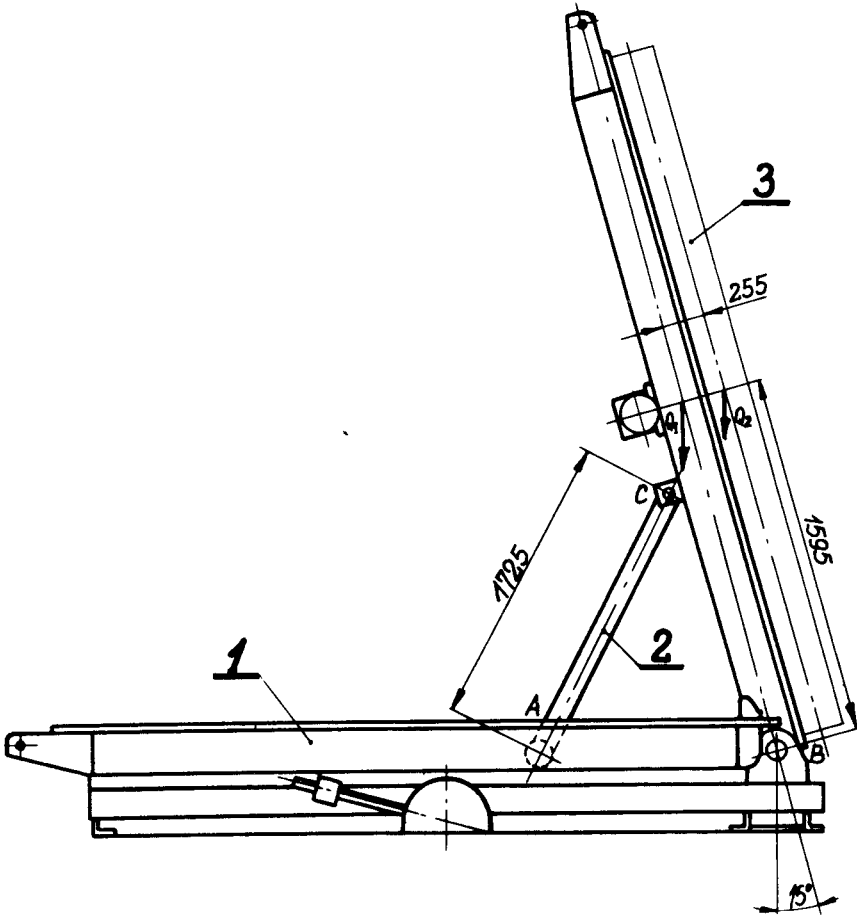
Przykładem konstrukcji anizotropowej jest podstawa maszyny stosowanej w przemysłowym budownictwie.

Na rys. 1 przedstawiono dwa położenia podstawy 1. Wspornik 2 służy do podnoszenia podstawy 1 z formą 3.

Do podstawy /rys. 2/ od spodu są przymocowane trzy elektrowibratory. Po ich uruchomieniu płyta wraz z zamocowanymi do niej formami zostaje wprowadzona w drgania i tym samym odbywa się zagęszczenie masy betonowej.

Po zaformowaniu elementów na podkład kładzie się nakrywą grzewczą. Płyta również zawiera instalację grzewczą.

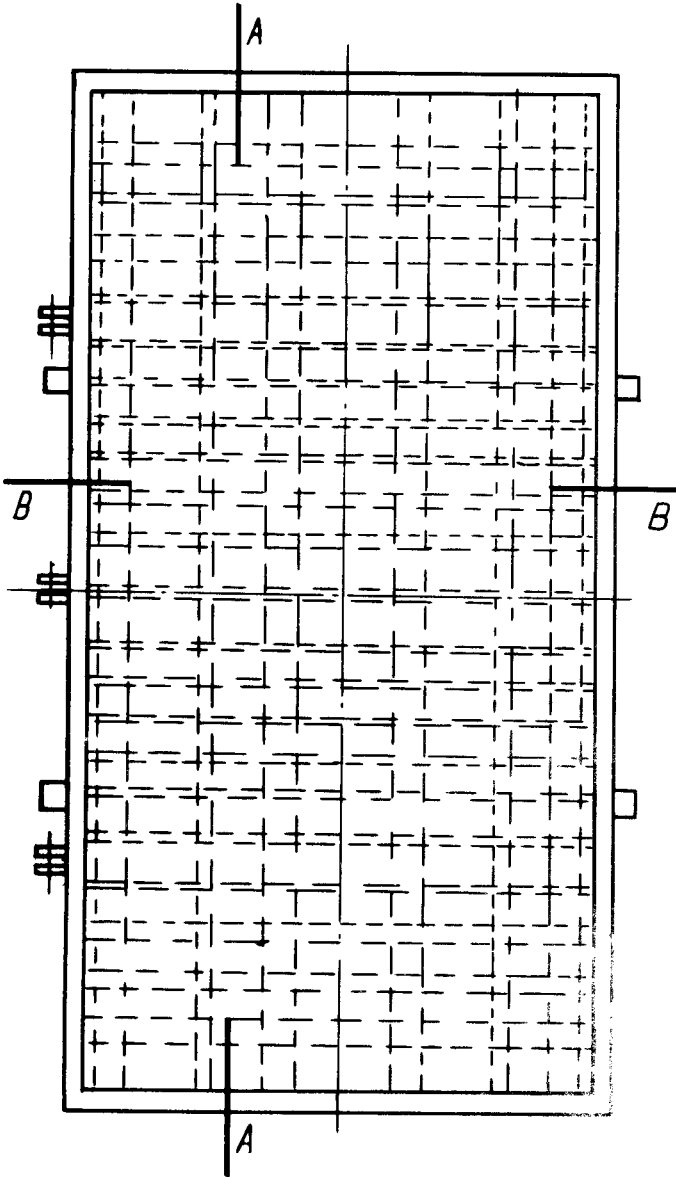
Dokładny anizotropowy charakter płyty /rys. 3,4/ określają przekroje konstrukcji spawanej.



Rys. 1

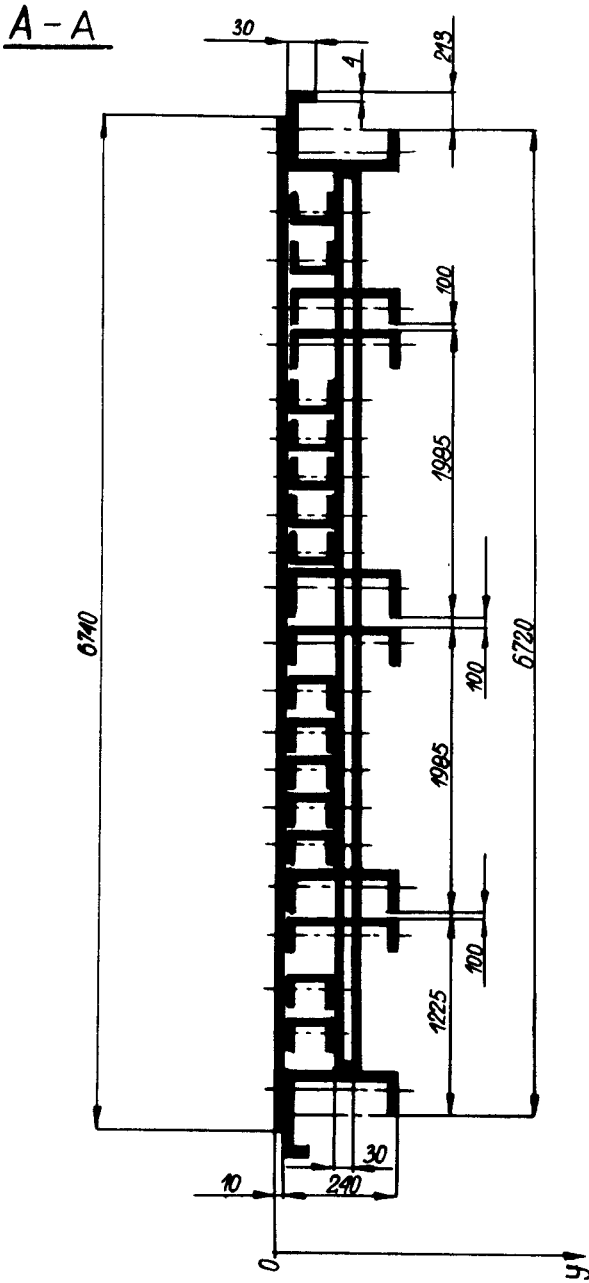
Podkład uniwersalny;

1 - podstawa, 2 - wspornik, 3 - forma

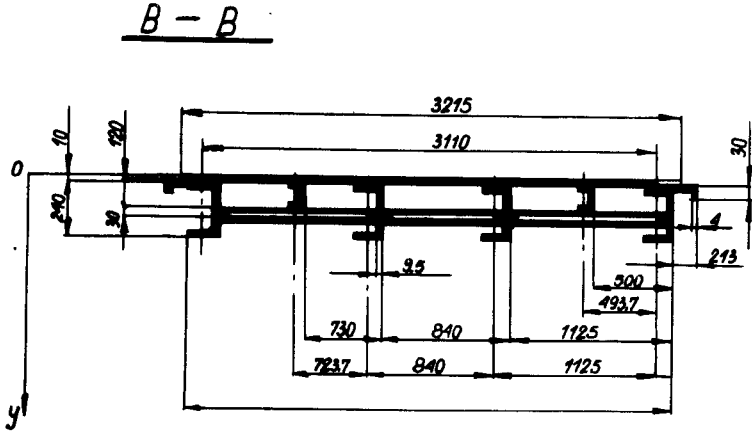


Rys. 2

Schemat podkładu uniwersalnego do produkcji ścian zewnętrznych z obciążeniem



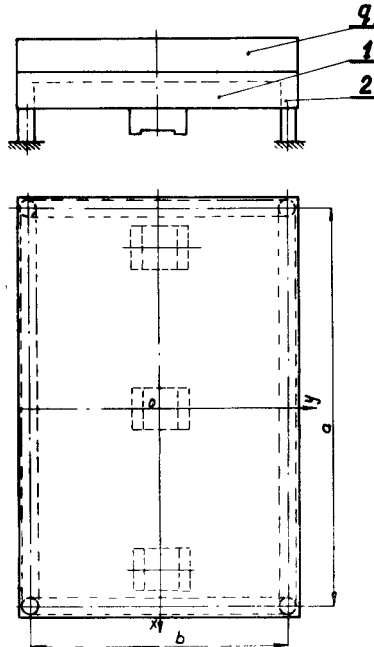
Rys. 3
Przekrój A-A podstawy



Rys. 4
Przekrój B-B podstawy

2. Model obliczeniowy

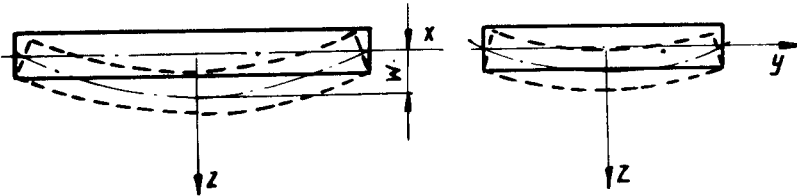
Ustalono model odpowiadający rzeczywistej konstrukcji płyty. Szttywne kształtowniki $\square 240$ na obwodzie można traktować jak belki obwodowe.



Rys. 5

Model podkładu uniwersalnego do produkcji ścian zewnętrznych z obciążeniem; 1 - płyta główna, 2 - belki składowe, q - wypadkowe natężenie obciążenia ciągłego

Pasowanie w zawiasach posiada bardzo duży luz /ok. 4,2 mm/. Wobec tego możemy pominąć podparcie w zawiasach. Całość jest sztywną płytą prostokątną podpartą punktowo w narożach. Przyjęty układ zapewnia możliwość uzyskania większej sztywności całości.



Rys. 6
Schemat ugięcia płyty głównej

Podstawą obliczeń jest ogólne równanie różniczkowe:

$$\frac{\partial^4 W_1}{\partial x^4} + 2 \frac{\partial^2 W_1}{\partial x^2 \partial y^2} + \frac{\partial^4 W_1}{\partial y^4} = -\frac{q}{D} \quad /1/$$

gdzie: D - wypadkowa sztywność płytowa.

Zapis symboliczny głównego równania przedstawia się następująco:

$$\Delta \Delta W_1 = \frac{q}{D} \quad , \quad /2/$$

gdzie:

$$\Delta W_1 = \frac{\partial^2 W_1}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 W_1}{\partial y^2} \quad ; \quad /2a/$$

Δ - operator Laplace'a

Natężenie obciążenia ciągłego q jest funkcją ciężaru własnego konstrukcji, elektrowibratorów, form, betonu itp./rys.5/.

Sztywność płytową blach oraz elementów podobnych obliczamy według wzoru:

$$D_{sb} = \frac{E}{12 (1 - \nu^2)} \cdot \frac{l_1}{\int_0^{l_1} \frac{1}{h^3 / s} ds} \quad /3/$$

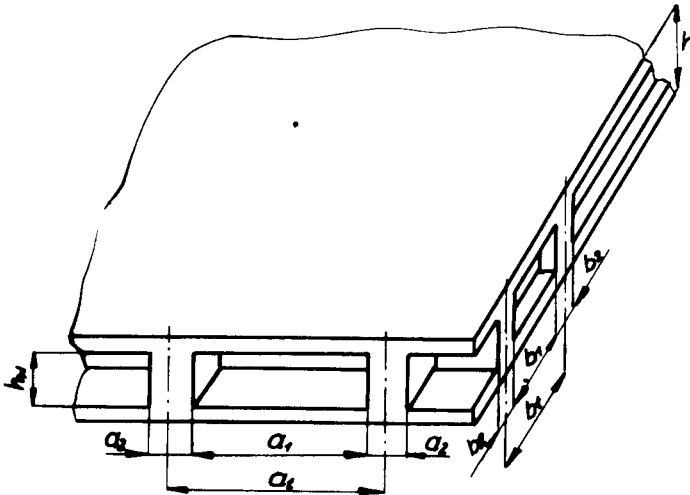
gdzie: E - moduł Younga,
 ν - liczba Poissona,
 s - rozpatrywany kierunek,
 l_1 - podziałka konstrukcyjna.

Dla kształtowników wzmacniających sztywność przedstawia się następująco:

$$D_{sk} = \frac{l_1}{l_2} \cdot \frac{1}{\int_0^{l_1} \frac{ds}{E I_1 / s}} \quad /4/$$

gdzie: $I_1 / s/$ - moment bezwładności przekroju kształtownika,
 l_2 - podziałka konstrukcyjna w kierunku prostopadłym do s .

Podczas obliczeń wypadkowej sztywności płytowej wprowadzono układ ortotropowy.



Rys. 7

Schemat modelu usztywnienia płyty zasadniczej

Grubości żeber są określone przez wzory:

$$a_2 = \frac{12 I_{kx}}{h^3 w} \quad /5a/$$

$$b_2 = \frac{12 I_{ky}}{h^3 w} \quad /5b/$$

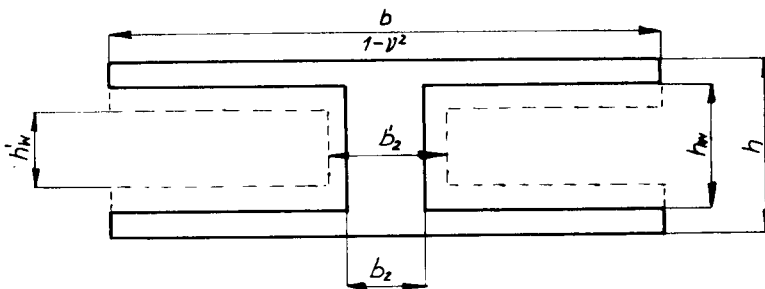
gdzie: I_{kx} , I_{ky} - momenty bezwładności kształtowników.

Sztywność uwzględniająca wspólne działanie blach i kształtowników określa wzór:

$$D_1 = \frac{a_1}{a_2} \cdot \frac{1}{\frac{a_{1,1}}{E I_{1,1}} + \frac{a_{1,2}}{E I_{1,2}}} \quad /6/$$

gdzie: $I_{1,1}$ oraz $I_{1,2}$ - wspólne momenty bezwładności.

W przekroju żebra mamy płytę pełną o grubości h . Jednak przy zginaniu w kierunku poprzecznym do osi żebra nie pracuje cały przekrój. Wobec tego na odcinku a_2 i b_2 przekrój musi być powiększony.



Rys. 8

Udoskonalony przekrój modelu płyty

Proponowany obliczeniowy kształt przekroju płyty uwzględnia rzeczywistą pracę blach i żeber;

$$h'_w = h_w - \frac{a_2}{6} \quad /7a/$$

$$h''_w = h_w - \frac{b_2}{6} \quad /7b/$$

$$a'_2 = a_2 + \frac{b_2}{6} \quad /7c/$$

$$b'_2 = b_2 + \frac{a_2}{6} \quad /7d/$$

Uwzględniając podane zmiany obliczono wspólne momenty bezwładności:

$$J_{y1} = \frac{1}{12} \left(b_1 \frac{h^3 - h_N^3}{1 - \nu^2} + b_2 h_N^3 \right) \quad /8a/$$

$$J_{y2} = \frac{1}{12} \left(b_1 \frac{h^3 - h_N^3}{1 - \nu^2} + b_2 h_N^3 \right) \quad /8b/$$

$$J_{z1} = \frac{1}{12} \left(a_1 \frac{h^3 - h_N^3}{1 - \nu^2} + a_2 h_N^3 \right) \quad /8c/$$

$$J_{z2} = \frac{1}{12} \left(a_1 \frac{h^3 - h_N^3}{1 - \nu^2} + a_2 h_N^3 \right) \quad /8d/$$

Wypadkowa sztywność płytowa /rys. 5/ przedstawia się następująco:

$$D = \frac{bD_x + aD_y}{a+b} \quad /9/$$

Ogólne rozwiązanie głównego równania /1/ jest następujące:

$$\begin{aligned} w_1 = & \frac{q}{324D(\delta + \delta')} \left[\gamma (16x^4 - 24\alpha^2 x^2 + 5\alpha^4) + \right. \\ & \left. + \delta (16y^4 - 24\beta^2 y^2 + 5\beta^4) \right] + \sum_{n=1}^{\infty} A_n \cosh \frac{n\pi y}{a} \cos \frac{n\pi x}{a} + \\ & + \sum_{n=1}^{\infty} B_n \cosh \frac{n\pi x}{b} \cos \frac{n\pi y}{b} + \sum_{n=1}^{\infty} C_n y \sinh \frac{n\pi y}{a} \cos \frac{n\pi x}{a} + \\ & + \sum_{n=1}^{\infty} D_n x \sinh \frac{n\pi x}{b} \cos \frac{n\pi y}{b}, \end{aligned} \quad /10/$$

gdzie: $f = \frac{EJ}{aD}$ - ciężar objętościowy dla osi x, /10a/

$\delta = \frac{EJ}{bD}$ - ciężar objętościowy dla osi y, /10b/

$n = 2k + 1,$

$k = 0, 1, 2, \dots$

A_n, B_n, C_n, D_n - stałe.

Wystarczającą dokładność szybkozbieżnego szeregu zgodnie z wymaganiami zawartymi w normie zakładowej ZN-71/13-08-00005 zapewniają nam wyrazy dla $n = 5$.

Bardzo istotne są obliczenia stałych. Podstawą dalszych obliczeń są warunki brzegowe.

Krawędzie są swobodnie podparte, czyli dla:

$$x = \frac{a}{2}, \quad y = 0, \quad \frac{nb}{16} \quad /11a/$$

$$x = 0, \quad \frac{na}{16}, \quad y = \frac{b}{2} \quad /11b/$$

gdzie: n - dowolna liczba całkowita < 8 ,
musi być spełniony warunek:

$$\frac{\partial^2 W_1}{\partial y^2} + \nu \frac{\partial^2 W_1}{\partial x^2} = 0 \quad /12/$$

Przyjmujemy, że belki składowe mają tylko sztywność na zginanie w płaszczyznach pionowych, natomiast nie mają żadnej sztywności na skręcanie. Wobec tego mamy:

$$\text{dla } x = \frac{a}{2}, \quad y = 0 \quad /13a/$$

$$\text{dla } x = 0, \quad y = \frac{b}{2} \quad /13b/$$

warunek:

$$D \left[\frac{\partial^3 W_1}{\partial y^3} + (2 - \nu) \frac{\partial^3 W_1}{\partial x^2 \partial y} \right] = EJ \frac{\partial^4 W_1}{\partial x^4}, \quad /14/$$

gdzie: EJ - sztywność na zginanie składowych belek podporowych.

W podporach /rys. 5/ równanie nasze jest tożsamościowo równe zeru. Jest to zgodne z rzeczywistością, gdyż podpory są regulowane i w chwili początkowej podkład znajduje się w zerowym położeniu poziomym.

Ostateczne wzory określające warunki brzegowe obliczone na podstawie /12 i 14/ przedstawiają się następująco:

$$\begin{aligned}
 & \frac{q d}{8D(\gamma + \delta)} (4y^2 - b^2) + \pi^2 \left(\frac{1}{a^2} \sum_{n=1}^5 n^2 A_n \cosh \frac{n\pi y}{a} \cos \frac{n\pi x}{a} + \right. \\
 & - \frac{1}{b^2} \sum_{n=1}^5 n^2 B_n \cosh \frac{n\pi x}{b} \cos \frac{n\pi y}{b} + \frac{1}{a^2} \sum_{n=1}^5 n^2 C_n \sinh \frac{n\pi y}{a} \cos \frac{n\pi x}{a} + \\
 & - \left. \frac{1}{b^2} \sum_{n=1}^5 n^2 D_n x \sinh \frac{n\pi x}{b} \cos \frac{n\pi y}{b} \right) + \frac{2\pi}{a} \sum_{n=1}^5 n C_n \cosh \frac{n\pi y}{a} \cos \frac{n\pi x}{a} + \\
 & + \nu \left[\frac{q x}{8D(\gamma + \delta)} (4x^2 - a^2) - \pi^2 \left(\frac{1}{a^2} \sum_{n=1}^5 n^2 A_n \cosh \frac{n\pi y}{a} \cos \frac{n\pi x}{a} + \right. \right. \\
 & - \left. \frac{1}{b^2} \sum_{n=1}^5 n^2 B_n \cosh \frac{n\pi x}{b} \cos \frac{n\pi y}{b} + \frac{1}{a^2} \sum_{n=1}^5 n^2 C_n \sinh \frac{n\pi y}{a} \cos \frac{n\pi x}{a} + \right. \\
 & - \left. \frac{1}{b^2} \sum_{n=1}^5 n^2 D_n x \sinh \frac{n\pi x}{b} \cos \frac{n\pi y}{b} \right) + \\
 & \left. + \frac{2\pi}{b} \sum_{n=1}^5 n D_n \cosh \frac{n\pi x}{b} \cos \frac{n\pi y}{b} \right] = 0
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
D \left\{ \frac{q \delta y}{D(\gamma + \delta)} + \pi^3 \left(\frac{1}{a^3} \sum_{n=1}^5 n^3 A_n \sinh \frac{n\pi y}{a} \cos \frac{n\pi x}{a} + \right. \right. \\
+ \frac{1}{b^3} \sum_{n=1}^5 n^3 B_n \cosh \frac{n\pi x}{b} \sin \frac{n\pi y}{b} + \\
+ \frac{1}{a^3} \sum_{n=1}^5 n^3 C_n y \cosh \frac{n\pi y}{a} \cos \frac{n\pi x}{a} + \\
+ \frac{1}{b^3} \sum_{n=1}^5 n^3 D_n x \sinh \frac{n\pi x}{b} \sin \frac{n\pi y}{b} + \\
+ \frac{3\pi^2}{a^2} \sum_{n=1}^5 n^2 C_n \sinh \frac{n\pi y}{a} \cos \frac{n\pi x}{a} + \\
\left. - (2-\nu) \left[\pi^3 \left(\frac{1}{a^3} \sum_{n=1}^5 n^3 A_n \sinh \frac{n\pi y}{a} \cos \frac{n\pi x}{a} + \right. \right. \right. \\
+ \frac{1}{b^3} \sum_{n=1}^5 n^3 B_n \cosh \frac{n\pi x}{b} \sin \frac{n\pi y}{b} + \\
+ \frac{1}{a^3} \sum_{n=1}^5 n^3 C_n \cosh \frac{n\pi y}{a} \cos \frac{n\pi x}{a} + \\
\left. \left. \left. + \frac{1}{b^3} \sum_{n=1}^5 n^3 D_n x \sinh \frac{n\pi x}{b} \sin \frac{n\pi y}{b} + \right. \right. \right.
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
& + \pi^2 \left(\frac{1}{a^2} \sum_{n=1}^5 n^2 C_n \sinh \frac{n\pi y}{a} \cos \frac{n\pi x}{a} + \right. \\
& \left. + \frac{2}{b^2} \sum_{n=1}^5 n^2 D_n \cosh \frac{n\pi x}{b} \sin \frac{n\pi y}{b} \right) \Bigg] = \\
= & E \left[\frac{q_0 x}{D(\gamma + \delta)} + \pi^4 \left(\frac{1}{a^4} \sum_{n=1}^5 n^4 A_n \cosh \frac{n\pi y}{a} \cos \frac{n\pi x}{a} + \right. \right. \\
& + \frac{1}{b^4} \sum_{n=1}^5 n^4 B_n \cosh \frac{n\pi x}{b} \cos \frac{n\pi y}{b} + \\
& + \frac{1}{a^4} \sum_{n=1}^5 n^4 C_n y \sinh \frac{n\pi y}{a} \cos \frac{n\pi x}{a} + \\
& \left. + \frac{1}{b^4} \sum_{n=1}^5 n^4 D_n x \sinh \frac{n\pi x}{b} \cos \frac{n\pi y}{b} \right) + \\
& \left. + \frac{4\pi^3}{b^3} \sum_{n=1}^5 n^3 D_n \cosh \frac{n\pi x}{b} \cos \frac{n\pi y}{b} \right]
\end{aligned}$$

Forma jest ogrzewana równocześnie przez podstawę i nakrywą grzejącą. W wyniku różnego przewodnictwa w częściach podstawy występują różnice temperatur w obliczonej konstrukcji.

Powstaje moment:

$$M = \frac{-\alpha \cdot t \cdot D(1+\nu)}{h} \quad /17/$$

gdzie: α - współczynnik rozszerzalności liniowej materiału płyty,
 t - różnica temperatur górnej i dolnej.

Równanie dodatkowego odkształcenia termicznego jest następujące:

$$\frac{\partial^2 w_2}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 w_2}{\partial y^2} = \frac{\alpha t(1+\nu)}{h} \quad /18/$$

o rozwiązaniu:

$$w_{2c} = - \frac{\alpha t(1-\nu)4a^2}{\pi^3 h} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\sin \frac{n\pi x}{a}}{n^3} \left(1 - \frac{\cos \frac{n\pi y}{a}}{\cosh \alpha_n} \right) + w_d /19/$$

gdzie: $\alpha_n = \frac{n\pi \cdot b}{2a}$, $n = 2k + 1$, $k = 0, 1, 2, 3, \dots$

Wystarczającą dokładność szybkozbieżnego szeregu zapewnia $n = 7$;

w_d - stała wynikająca z faktu, że dla:

$$y = \pm \frac{b}{2} \quad /20/$$

$$w_2 \sim w_1 .$$

Dla dużej sztywności belek podporowych mamy wzór:

$$w_2 = w_{2c} - w_d . \quad /21/$$

Dolna część płyty jest chłodniejsza od górnej. Powierzchnia górną rozszerza się więcej od dolnej. Uzyskujemy odkształcenie do góry. Jest ono skierowane przeciwnie do pozostałych i z tego punktu widzenia korzystne .

Sprawdzono częstości drgań własnych /2/ płyty i stwierdzono, że różnią się one wyraźnie od częstości drgań wymuszających elektrowibratorów.

W myśl ogólnej teorii płyt prostokątnych /2/:

$$w_{\max} = 2 w_{st} \quad /22/$$

gdzie: w_{st} - ugięcie statyczne.

Stosujemy metodę Naviera dla płyty prostokątnej swobodnie podpartej. Równanie różniczkowe powierzchni odkształconej przyjmuje postać:

$$\frac{\partial^4 w_3}{\partial x^4} + 2 \frac{\partial^4 w_3}{\partial x^2 \partial y^2} + \frac{\partial^4 w_3}{\partial y^4} = \frac{f(x,y)}{D} \quad /23/$$

Przyjmujemy funkcję obciążenia w postaci podwójnego szeregu trygonometrycznego:

$$f(x,y) = \sum_{m=1}^{\infty} \sum_{n=1}^{\infty} a_{mn} \sin \frac{m\pi x}{a} \sin \frac{n\pi y}{b} \quad /24/$$

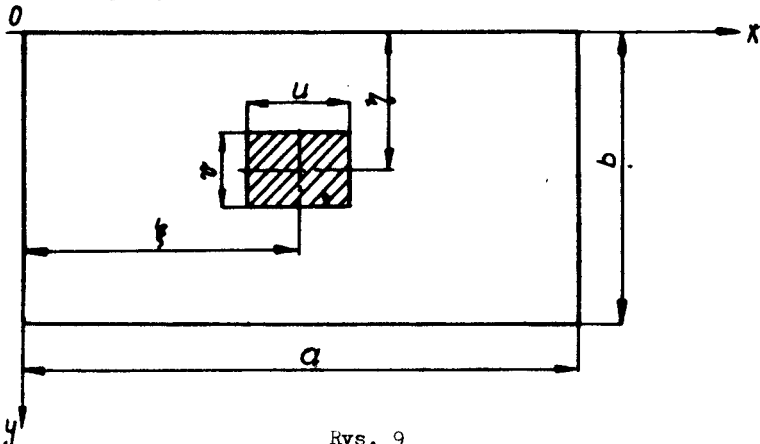
Rozwiązanie równania /23/ jest następujące:

$$w_3 = \frac{1}{\pi^4 D} \sum_{m=1}^{\infty} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{a_{mn}}{\left(\frac{m^2}{a^2} + \frac{n^2}{b^2}\right)^2} \sin \frac{m\pi x}{a} \sin \frac{n\pi y}{b} \quad /25/$$

gdzie: $m = n = 2k + 1$ $k = 0, 1, 2, 3, \dots$

Wystarczającą dokładność szybkozbieżnego szeregu zapewnia nam $m = n = 7$.

Przyjmujemy, że obciążenie jest równomiernie rozłożone w prostokącie u, v . Wypadek jego wynosi P .

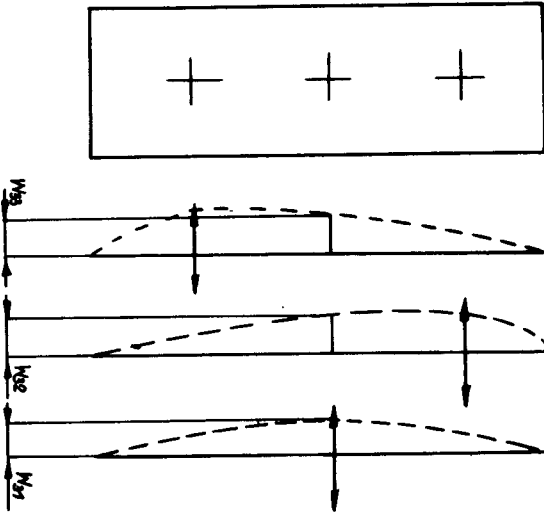


Rys. 9

Schemat zmniejszenia obszaru obciążenia do siły skupionej

Po obliczeniach uzyskano na ugięcie dowolnego punktu płyty:

$$W_3 = \frac{4P}{\pi^4 ab D} \sum_{m=1}^7 \sum_{n=1}^7 \frac{\sin \frac{m\pi x}{a} \sin \frac{n\pi y}{b}}{\left(\frac{m^2}{a^2} + \frac{n^2}{b^2}\right)^2} \sin \frac{m\pi x}{a} \sin \frac{n\pi y}{b} \quad /26/$$



Rys. 10

Schemat obliczeń wypadkowego ugięcia w środku płyty, wywołanego przez trzy siły wymuszające

Biorąc pod uwagę symetrię obciążenia można napisać:

$$W_{32} = W_{33} \quad /27/$$

$$W_3 = W_{31} + 2W_{32} \quad /28/$$

$$W_{3dyn} = 2 /W_{31} + 2W_{32}/ \quad /29/$$

Całkowite ugięcie płyty jest wypadkową ugięcia od ciężaru własnego, termicznego oraz dynamicznego od sił wymuszających:

$$W = W_1 + W_2 + W_3 \text{dyn} \quad /30/$$

Obliczenia szczegółowe zrealizowano na elektronicznej maszynie cyfrowej Odra 1204 w Ośrodku Obliczeniowym Wyższej Szkoły Inżynierskiej im. J.J. Śniadeckich w Bydgoszczy.

Najpierw wyznaczono odkształcenia rzeczywiste istniejącego rozwiązania na podstawie funkcji:

$$W = f /D, \dots/ \quad /31/$$

Dopuszczalne ugięcia są określone przez normę ZN-71/13-08-00005. Wartości ich dla płyty o wymiarach 6595 x 3110 /mm/ są bardzo małe i wynoszą:

- odchylenie płaskości podkładu formy nie większe od 3 /mm/ mierzonych wzdłuż dwóch prostopadłych osi podstawy,
- odchyłki od prostej powierzchni formującej na całej długości podkładu nie mogą przekraczać 4 /mm/,
- odchylenia płaskości podkładu formy nie mogą być większe od 3 /mm/ zmierzonych podpór.

3. Wyniki obliczeń

Tablica 1

Ugięcia płyty w_1 /mm/ pod ciężarem własnym, zapełnionych form i nakryw grzejnej

X	Y	w_1
.000	.000	.090
16.488	.000	.489
32.975	.000	.484
49.462	.000	.477
65.950	.000	.467
82.438	.000	.454
98.925	.000	.438
115.412	.000	.420
131.900	.000	.399
148.388	.000	.375
164.875	.000	.349
181.362	.000	.321
197.850	.000	.291
214.388	.000	.259
230.825	.000	.225
247.312	.000	.190
263.800	.000	.153
280.287	.000	.116
296.775	.000	.077

X	Y	W1
313.263	.000	.037
329.750	.000	.002
.000	15.550	.490
.000	31.100	.491
.000	46.650	.492
.000	62.200	.494
.000	77.750	.496
.000	93.300	.499
.000	108.850	.503
.000	124.400	.507
.000	139.950	.512
.000	155.500	.517
32.975	15.550	.484
65.950	31.100	.468
98.925	46.650	.440
131.900	62.200	.402
164.875	77.750	.354
197.850	93.300	.297
230.825	108.850	.231
263.800	124.400	.159
296.775	139.950	.081

Tablica 2

Wygięcia termiczne W_2 /mm/ płyty

X	Y	W2
.000	.000	0.000
32.975	.000	- 0.298
65.950	.000	- 0.544
98.925	.000	- 0.717
131.900	.000	- 0.829
164.875	.000	- 0.908
197.850	.000	- 0.971
230.825	.000	- 1.018
263.800	.000	- 1.045
296.775	.000	- 1.054
329.750	.000	- 1.055
.000	31.100	0.000
.000	62.200	0.000
.000	93.300	0.000
.000	124.400	0.000
.000	155.500	0.000
65.950	31.100	- 0.526
131.900	62.200	- 0.705
197.850	93.300	- 0.629
263.800	124.400	-0.383

Największe odkształcenie dynamiczne obliczane na podstawie /29/:

$$W_{3dyn} = 0,216 \text{ /mm/}$$

Stwierdzono, że wypadkowe ugięcia /30/ przekraczają wartości dopuszczalne.

Następnie opracowano bardzo istotny program poprawnego ustalenia sztywności na podstawie dopuszczalnych ugięć.

$$D = F / w, \dots /$$

32

Potrzebna jest wartość $D = 4,8469 \cdot 10^9 \text{ /Nmm/}$.

4. Wnioski

4.1. Wyniki obliczeń płyty podkładu uniwersalnego okazały się takie same jak wyniki pewnych pomiarów odkształceń zmierzonych na rzeczywistych badanych maszynach. W ten sposób potwierdzono w praktyce poprawność ustalonej metodyki modelowania i obliczeń.

4.2. Programy umożliwiają szybkie obliczenie wypadkowej sztywności całej płyty.

4.3. Po szczegółowym opracowaniu konstrukcyjnym można obliczeniowo sprawdzić sztywność i odkształcenia korzystając z opracowanych programów.

4.4. Naukowa i dokładna metodyka obliczeń zapewnia poważne możliwości optymalizacji rozwiązań płyt anizotropowych i ortotropowych w zakresie sztywności, przy równoczesnym zmniejszaniu ciężaru.

Literatura

1. Kączkowski Z.: Ortotropowe płyty prostokątne o dowolnych warunkach brzegowych. Archiwum Mechaniki Stosowanej 2/1956.
2. Kocner A.: Pręty i płyty o zmiennej sztywności PWN Warszawa 1969.
3. Praca zbiorowa pod redakcją Kaliskiego S.: Drgania i fale. PWN Warszawa 1966.

Krzysztof Wernerowski,
Jerzy Cabański

STIFFNESS OF THE RECTANGULAR PLATE WITH VARIABLE
THICKNESS SUPPORTED IN POINTS

This article presents a new computing model of plates. The anisotropic design was replaced by the equivalent orthotropic. The stiffness, thermo-elasticity and vibrations were computed. A new practical computing method of orthotropic plate was presented.

Криштоф Вернеровски, Ежи Цабаньски

ЖЁСТКОСТЬ ПРЯМОУГОЛЬНОЙ ПЛИТЫ С ПЕРЕМЕННОЙ ТОЛЩИНОЙ
С ПОДПОРАМИ В ТОЧКАХ

/Резюме/

В работе разработана модель вычислительная плиты. Анизотропная конструкция заменена эквивалентной ортотропной. Проведены вычисления жёсткости, термоупругости и колебаний. Разработан практический метод вычисления ортотропной плиты.

Bronisław Siołkowski

62-203-10101

WPLYW ROZSTAWU PODPÓR NA GRANICE STATECZNEJ PRACY
WAŁÓW WYSIĘGNIKOWYCH

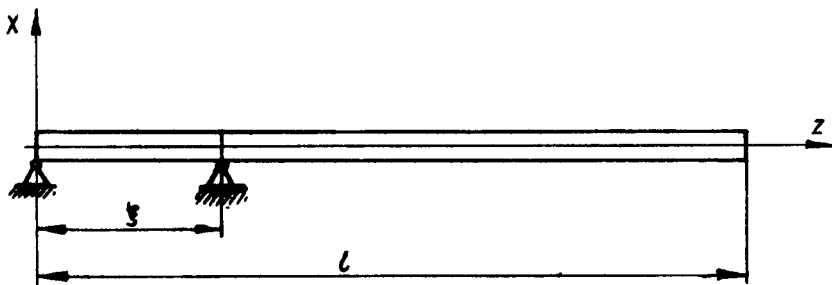
W artykule przedstawione zostały wyniki obliczeń obszarów statecznej pracy wałów wysięgnikowych. Potraktowane zostały jako układy ciągłe, dla których scałkowano równanie różniczkowe drgań poprzecznych. Obliczenia częstości własnych wykonane zostały na EMC dla różnych wartości stosunków długości części wysięgnikowej do całkowitej długości wału. Wyniki obliczeń zestawiono w tabelicy i na rys. 2, na którym zaciemnione są obszary niestatecznej pracy wałów w pobliżu obrotów krytycznych pierwszych, drugich i trzecich.

1. Wstęp

Szereg urządzeń mechanicznych takich jak pompy, turbiny, wentylatory, mieszadła itp. posiadają wały ułożyskowane jednostronnie. Stany krytyczne wynikające z drgań giętnych takich wałów będą zależały od rozstawu łożysk, a ściślej od stosunku rozstawu łożysk do całkowitej długości wału. Różne będą również obszary statecznej pracy wałów dla różnych stosunków rozstawu łożysk do całkowitej długości wału, bo są różne zmiany poszczególnych częstości w zależności od tego stosunku.

Jako model rozpatruje się wirujący przyzmatyczny pręt o przekroju kołowym w całym zakresie stosunku $A = \frac{s}{l}$ tj. dla $0 \leq A \leq 1$ /Rys. 1/.

2. Wzory i oznaczenia



Rys. 1

Model wirującego wału

Dla modelu wirującego wału przedstawionego na rys. 1 wyprowadzono w pracy [4] ścisłe równania ruchu swobodnego ustalonego o następującej postaci:

$$\begin{aligned} EI x'''' - / g I + k \frac{EI}{G} g / x'''' - 2 g I \omega y'' + g^2 k \frac{I}{G} x'' + g F x' &= 0 \\ EI y'''' - / g I + k \frac{EI}{G} g / y'''' - 2 g I \omega x'' + g^2 k \frac{I}{G} y'' + g F y' &= 0 \end{aligned} \quad /1/$$

Po wprowadzeniu zmiennej zespolonej $v = x + iy$ powyższe równania można zastąpić jednym równaniem:

$$EI v'''' - / g I + k \frac{EI}{G} g / v'''' + 2 g I \omega i v'' + g^2 k \frac{I}{G} v'' + g F v' = 0. \quad /2/$$

W podanych równaniach poszczególne symbole nie wyszczególnione na rys. 1 oznaczają:

- EI - sztywność wału,
- g - gęstość materiału wału,
- G - moduł sprężystości poprzecznej,
- ω - prędkość kątowa wirującego wału,
- k - bezwymiarowy współczynnik kształtu przekroju poprzecznego występujący w równaniu różniczkowym ugiętej osi belki z uwzględnieniem sił poprzecznych,
- F - przekrój poprzeczny wału.

Rozwiązaniem równania /2/ w poszczególnych przedziałach zmiennej z są funkcje:

$$\text{dla } 0 \leq z \leq \xi$$

$$v = / B \operatorname{sh} \sqrt{\mu} z + D \sin \sqrt{\nu} z / e^{i \lambda t} \quad /3/$$

$$\text{a dla } \xi \leq z \leq l$$

$$v = \left\{ B \operatorname{sh} \sqrt{\mu} z + D \sin \sqrt{\nu} z + \frac{R}{EI \sqrt{\mu \nu} / \mu + \nu /} \left[\sqrt{\nu} \operatorname{sh} \sqrt{\mu} / z - \xi / - \sqrt{\mu} \sin \sqrt{\nu} / z - \xi / \right] \right\} e^{i \lambda t}, \quad /4/$$

gdzie:

- B i D - są dowolnymi stałymi,
 R - reakcja podpory przesuwnej,
 λ - częstość drgań własnych,
 μ i ν - parametry określone w sposób następujący:

$$\mu - \nu = - \frac{gI + k \frac{EI}{s} \frac{g}{\lambda^2} - 2gI\omega\lambda}{EI}$$

$$\mu \nu = \frac{gF\lambda^2 - g^2 k \frac{I}{s} \lambda^4}{EI} . \quad /5/$$

Po podstawieniu funkcji /3/ i /4/ oraz ich pochodnych do warunków brzegowych odpowiadających modelowi z rys. 1 otrzymuje się równanie częstości w następującej postaci:

$$\begin{aligned} & \mu \sqrt{\nu} \sin \sqrt{\nu} \xi \left[\mu \operatorname{ch} \sqrt{\mu} l \sin \sqrt{\nu} / l - \nu / - \sqrt{\nu} \operatorname{sh} \sqrt{\mu} l \cos \sqrt{\nu} / l - \nu / \right] + \\ & + \nu \sqrt{\mu} \operatorname{sh} \sqrt{\mu} \xi \left[\mu \operatorname{sh} \sqrt{\mu} / l - \nu / \cos \sqrt{\nu} l - \mu \operatorname{ch} \sqrt{\mu} / l - \nu / \sin \sqrt{\nu} l \right] - \\ & - \mu^2 + \nu^2 / \operatorname{sh} \sqrt{\mu} \xi \sin \sqrt{\nu} \xi = 0. \end{aligned} \quad /6/$$

Upraszczając drugie z równań /5/ przez pominięcie drugiego składnika w liczniku /jest on mały w porównaniu ze składnikiem pierwszym / można przy pomocy tych równań łatwo wyrugować parametr ν . Po wykonaniu tej czynności oraz po wprowadzeniu oznaczeń:

$$u = \sqrt{\mu} l, \quad A = \frac{g}{1}, \quad c = \frac{1 + k \frac{E}{s} - 2 \frac{\omega}{\lambda}}{s^2}, \quad /7/$$

gdzie: s jest smukłością pręta, równanie /6/ przyjmuje formę nadającą się do zaprogramowania w języku Algol 60, a mianowicie:

$$\sqrt{1 - cu^2} \left[\frac{Au}{\sqrt{1 - cu^2}} \left(\sqrt{1 - cu^2} \operatorname{ch} u \sin \frac{u/1 - A/}{\sqrt{1 - cu^2}} \operatorname{sh} u \cos \frac{u/1 - A/}{\sqrt{1 - cu^2}} \right) + \right.$$

$$\left. \sqrt{1 - cu^2} \left(\operatorname{sh} u / 1 - A/ \cos \frac{u}{\sqrt{1 - cu^2}} \sqrt{1 - cu^2} \operatorname{ch} u / 1 - A/ \sin \frac{u}{\sqrt{1 - cu^2}} \right) \right]$$

$$\left[\frac{1}{\sqrt{1 - cu^2}} \right] \operatorname{sh} Au \sin \frac{Au}{\sqrt{1 - cu^2}} = 0. \quad /8/$$

... tego o pełnym przekroju kołowym $k \frac{E}{G} = 3$, a dla stanu wyciętego $k = 1$; przyjmując smukłość wału $s = 100$ parametr $C = 0,002$.
 ... parametru C i dla parametru $A = 0,00$ do $1,00$ co $0,05$ równie...
 ... zostało na maszynie cyfrowej Odra-1204, skąd uzyskano...
 ... wartości pierwiastków: u_1, u_2, u_3 i u_4 .
 ... tych pierwiastków wprowadzono do przekształconego uproszczonego...
 ... równania /5/ o postaci:

$$\lambda = \frac{1}{sl} \sqrt{\frac{E}{G}} \sqrt{\frac{u^2}{1 - cu^2}}, \quad /9/$$

skąd dla $l = 1$ m uzyskano częstotliwości własne: pierwszą, drugą, trzecią i czwartą harmoniczną $/\lambda_1, \lambda_2, \lambda_3, \lambda_4/$ w zależności od stosunku $A = \frac{r}{l}$. Wyniki tych obliczeń zestawiono w tabelicy:

A	1	2	3	4
0,05	188	1180	3299	6438
0,10	203	1277	3581	7006
0,15	219	1392	3923	7690
0,20	238	1530	4330	8438
0,25	260	1697	4788	8653
0,30	286	1896	5153	7267
0,35	316	2128	4790	6946
0,40	353	2368	4061	7680
0,45	393	2487	3701	8608
0,50	454	2321	3917	8432

cd.

A	1	2	3	4
0,55	525	2057	4500	7414
0,60	601	1837	5106	6847
0,65	687	1702	4941	7595
0,70	754	1701	4519	8748
0,75	768	1896	4121	8303
0,80	730	2267	3997	7573
0,85	670	2487	4594	7239
0,90	606	2380	5163	8495
0,95	546	2174	4852	8533
1,00	493	1966	4402	7774

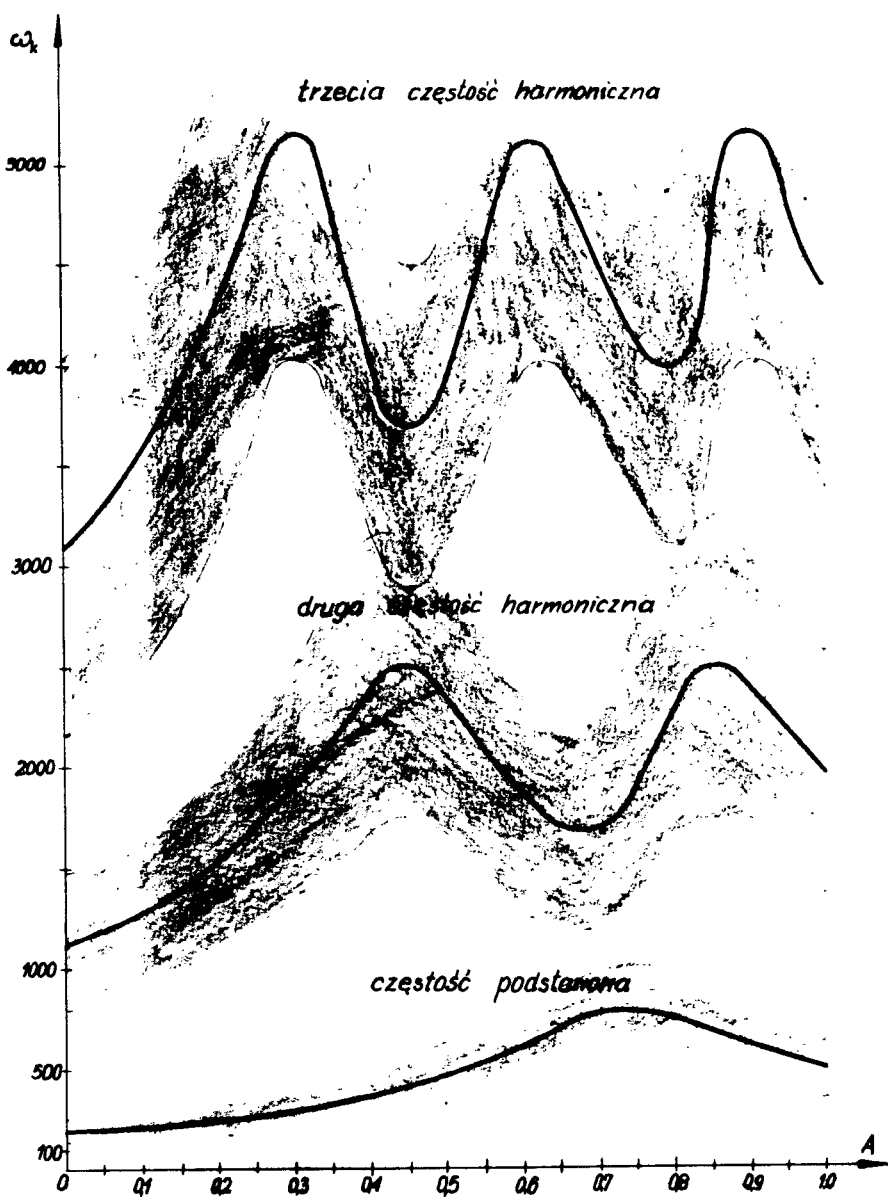
W oparciu o wyniki zestawione w tabelicy sporządzono wykresy częstości własnych / λ_1 , λ_2 , λ_3 / w funkcji stosunku $A = \frac{3}{1}$ /rys. 2/. Dla wartości $A = 0$, co odpowiada tzw. belce wspornikowej, obliczono wartości częstości własnych z wzorów wyprowadzonych w literaturze [2]. Punkty te - jak widać na wykresach - doskonale pokrywają się z krzywą ekstrapolacyjną.

3. Wnioski

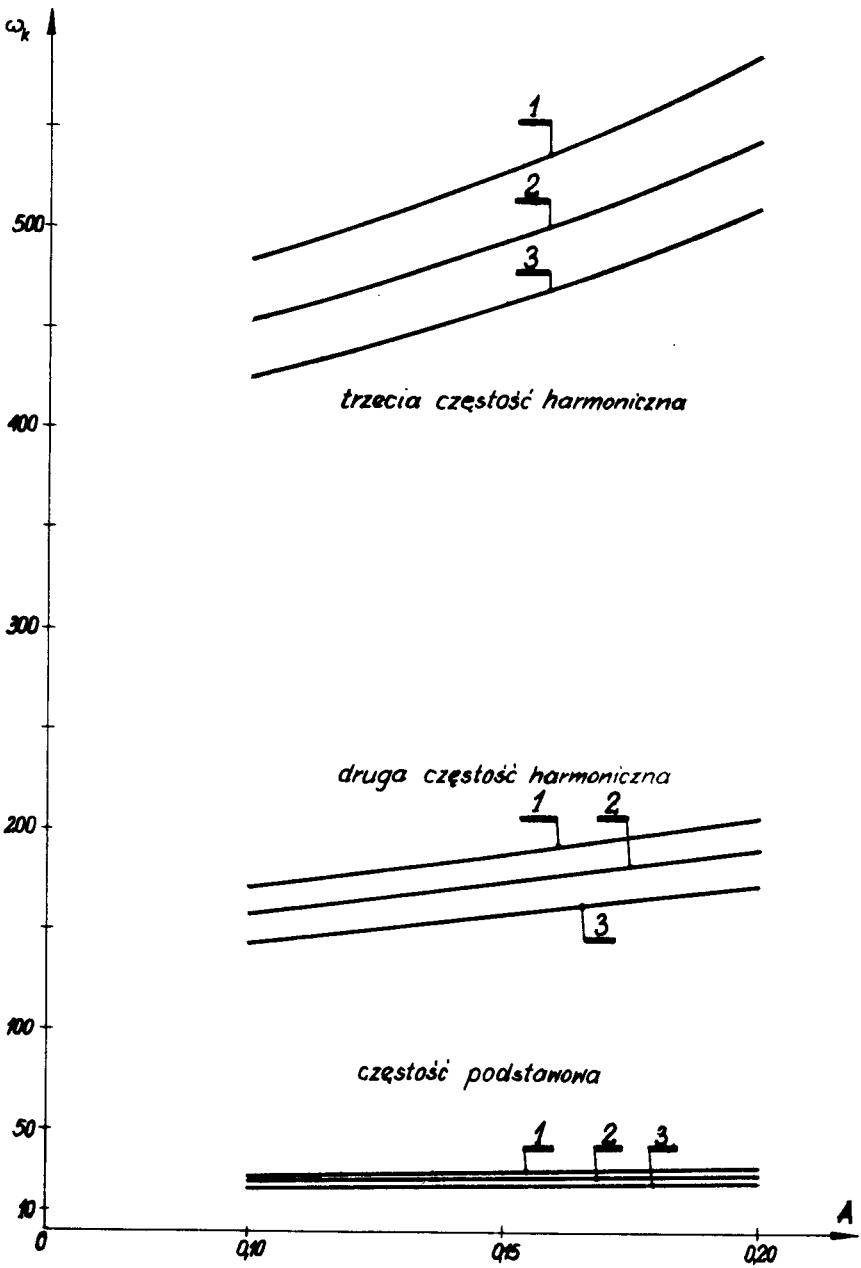
3.1. W całym zakresie stosunku $A = \frac{3}{1}$ częstość podstawowa przyjmuje jedną, druga częstość harmoniczna trzy, trzecia pięć, a czwarta siedem wartości ekstremalnych.

3.2. Wobec różnych położenia wartości ekstremalnych częstości podstawowych, drugich i trzecich częstości harmonicznych, obszary statecznej pracy wałów różnie się układają. Przyjmując zalecane 30% zabezpieczenia przed wzrostem zbyt dużych amplitud drgań poprzecznych wałów, obszary statecznej pracy wałów zdecydowanie się zmniejszają. Na rys. 2 zaciemnione są obszary niebezpiecznej pracy wałów, a pola jasne są obszarami pracy statecznej. Z rysunku widać, że dla niektórych wartości stosunku A nie ma w ogóle obszaru statecznej pracy między drugą a trzecią częstością harmoniczną, albo bardzo mały jest obszar pracy statecznej między częstością podstawową, a drugą harmoniczną.

3.3. Podobne obszary statecznej pracy będą miały wały ułożyskowane jednostronnie z masami skupionymi na ich swobodnych końcach /wirniki turbin, pompy, wentylatorów, mieszadeł itp. /. Obszary będą tylko przesunięte i ewentualnie zwężone w kierunku pionowym. Uzasadnieniem tego wniosku niech będą zależności przedstawione na rys. 3, które wyrażają częstości podstawowe



Rys. 2
Obszary statecznej pracy



Rys. 3
Wykresy częstotci

we, drugie i trzecie **harmoniczne** wału mieszadła o przesuwym rozstawie łożysk, określonym stosunkiem $A = \frac{L}{l}$, zmieniającym się w granicach od 0,1 - 0,2. Cyfrą 1 oznaczone są częstotliwości drgań giętnych samego wału, a cyframi 2 i 3 częstotliwości wałów z wirnikami zamocowanymi na jego końcu. Krzywe oznaczone cyfrą 3 dotyczą wirnika o masie większej od wirnika oznaczonego cyfrą 2. Właściwości te - jak widać na rys. 3 - przesuwają się prawie równoległe do siebie. Dane do rys. 3 zaczerpnięte zostały z aktualnie prowadzonej pracy autora pracy badawczej. Są danymi obliczonymi w oparciu o uproszczone równania ruchu i danymi pomierzonymi na stanowisku badawczym.

Literatura

1. Lipka J.: Wytrzymałość maszyn wirnikowych. WNT, Warszawa 1967.
2. Panomariw S.D - praca zbiorowa: Współczesne metody obliczeń wytrzymałościowych w budowie maszyn. PWN, Warszawa 1957.
3. Siołkowski B.: Obliczenie obrotów krytycznych wału mieszadła cieczy. BTN, Prace Wydziału Nauk Technicznych Seria B, Nr 2, Bydgoszcz 1970.
4. Siołkowski B.: Wpływ sił poprzecznych, obrotów przekrojów poprzecznych i zjawiska żyroskopowego na częstotliwość drgań własnych wirujących wałów. Zeszyty Naukowe WSI w Bydgoszczy, Nr 2, Bydgoszcz 1971.

Bronisław Siołkowski

THE INFLUENCE OF THE SPACING OF SUPPORTS ON THE LIMITS
OF THE STABLE WORK OF THROAT SHAFTS

S u m m a r y

In the article, the results of calculations of the stable work ranges of throat shafts have been presented. The shafts have been treated as continuous systems, for which the differential equation of transverse vibrations has been integrated. The calculations of the natural frequencies have been performed with a computer at different values of the distance ratios of the throat part to the total length of a shaft. The results of the calculations have been specified in a table and in the figure, in which the areas of the unstable work of shafts near to the first, second and third critical rotations have been blackened.

Бронислав Сёлковский

ВЛИЯНИЕ РАССТАВЛЕНИЯ ОПОР НА ЗОНЫ СТАТИЧЕСКОЙ РАБОТЫ
КОНСОЛЬНЫХ ВАЛОВ

/Резюме/

В статье представлены результаты расчётов зон статической работы консольных валов. Автор решает дифференциальные уравнения движения системы с распределённой массой. Для численных расчётов собственных частот была использована вычислительная машина "Одра"-204. Результаты расчёта для вала с различным расстоянием опор представлены на таблице и в чертеже, где зоны нестатической работы вблизи первой, второй и третьей критической скорости затемнены.

Bronisław Siołkowski,
Tomasz Sauter, Henryk Holka

NIKTÓRE ZAGADNIENIA TEORETYCZNE STOSOWANIA LAMINATÓW NA KOŁA W PILARKACH TAŚMOWYCH

W artykule przedstawione zostały teoretyczne prace wstępne zrealizowane przed wykonaniem partii próbnych kół taśmowych z laminatów. Przedstawiony tekst ułożony został w pięciu rozdziałach, na końcu zaś zamieszczono wykaz literatury, z której autorzy korzystali przy wykonywaniu poszczególnych etapów pracy. W rozdziale pierwszym określony jest cel pracy, w drugim i trzecim przedstawiono obliczenia wytrzymałościowe istniejącego koła żeliwnego i wyselekcjonowanego modelu koła z laminatów, w czwartym opisano projekt koła z laminatu, a w piątym sformułowano wnioski do prac badawczych. W takim ujęciu praca ta może służyć jako przykład postępowania przy wdrażaniu nowych tworzyw do konstrukcji maszynowych.

1. Wprowadzenie

Postęp techniczny w budowie maszyn jest w dużym stopniu uzależniony od materiałów konstrukcyjnych. Obecna technika dysponuje dużą liczbą różnych tworzyw, a pomimo to w projektowaniu nowych i rekonstrukcji istniejących maszyn nie wystarcza właściwy dobór materiałów, lecz coraz częściej występuje potrzeba ich projektowania w zależności od konkretnej funkcji danego elementu [4]. Przykładem tego może być projektowanie laminatu o układzie włókien wzmacniających, dostosowanym do rozkładu naprężeń występujących w danym elemencie oraz o odpowiednich własnościach, tłumiących drgania mechaniczne i akustyczne. Taka właśnie potrzeba zaistniała przy rekonstrukcji pilarek do drewna.

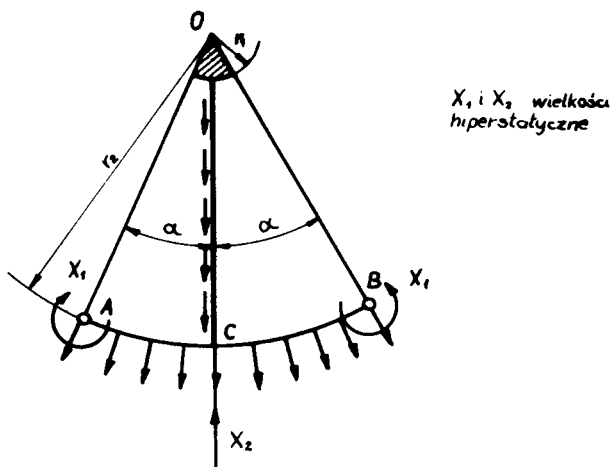
Istotnymi elementami o złożonej funkcji działania są w pilarkach koła taśmowe. Wirują one z dużymi prędkościami, a więc występują w nich duże siły bezwładności. Współpracują z taśmą pilową, co jest źródłem hałasu. Do tej pory wykonywane są z żeliwa z nawulkanizowanymi bieżnikami gumowymi. Takie rozwiązanie zmniejsza hałas, ale stwarza szereg problemów dynamicznych i technologicznych. Koła te są ciężkie i mało trwałe. Bieżniki gumowe wymagają częstej regeneracji, która jest zabiegiem złożonym i kosztowym. Powstał więc problem zastąpienia kół żeliwnych z bieżnikami gumowymi kołami z materiału lżejszego, odpowiednio wytrzymałego i odznaczającego się niehałaśliwą współpracą z taśmą pilową. Istnieje szansa, że problem ten rozwiąza-

koła z laminatów, ewentualnie o odpowiednio sropearowanej warstwie podpo -
wierzchniowej wieńca.

Praca niniejsza ma na celu opracowanie pewnych podstaw teoretycznych
do poprawnego zaprojektowania materiału na koła taśmowe pilarek do drewna.

2. Opracowanie wstępne

W pracach wstępnych wykonano obliczenia wytrzymałościowe istniejącego
koła żeliwnego i zaproponowano kilka rozwiązań kształtów kół z laminatów .
Celem obliczeń wytrzymałościowych istniejących kół była ocena wartości sił
wewnętrznych, pozwalająca na prognozowanie możliwości zastąpienia żeliwa
laminatami.



Rys. 1

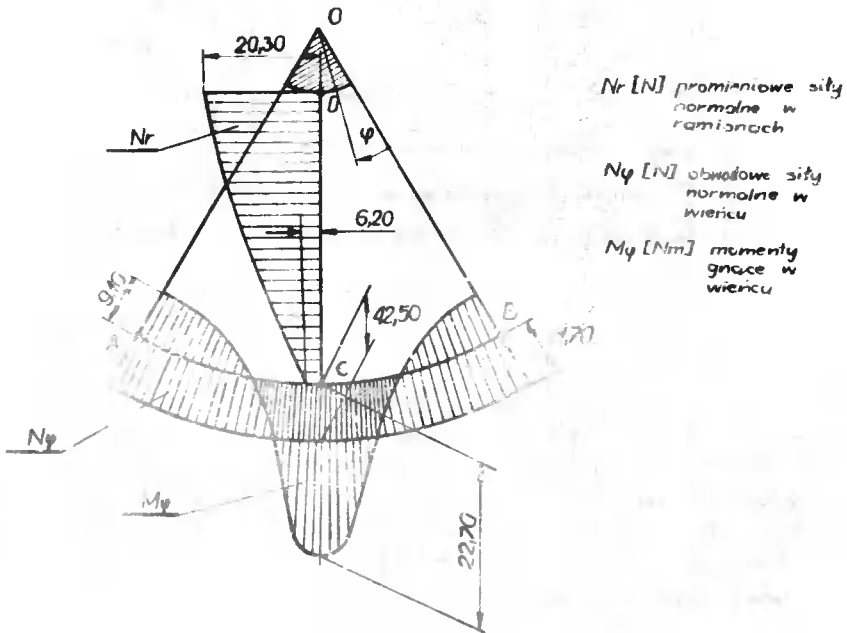
Model obliczeniowy koła żeliwnego

Konstrukcja koła żeliwnego umożliwia przyjęcie modelu obliczeniowego,
przedstawionego na rys. 1. W modelu tym piastę potraktowano jako absolutnie
sztywną, gdyż posiada masywną budowę i przyspieszenia jej cząstek są małe.
W pierwszej części obliczeń wyznaczono siły wewnętrzne, wywołane bezwład -
nością mas ramion i wieńca, a w drugiej oszacowano skutki obciążenia nacią -
giem taśmy.

Ze względu na obciążenie siłami bezwładności, model z rys.1 jest ukła -
dem mechanicznym o symetrii kołowej, dwukrotnie hiperstatycznym. Rozwiąza -
nie teoretyczne takiego modelu można znaleźć w literaturze [6] . Wyniki
szczegółowych obliczeń sił wewnętrznych dla wymiarów koła żeliwnego piły
taśmowej typu DR. B-20 przedstawione są na rys. 2, a odpowiadające im naprę -

zenia zredukowane wynoszą: $\sigma_A = 72 \cdot 10^5$, $\sigma_C = 14,1 \cdot 10^5$

$\sigma_D = 33,5 \cdot 10^5 \text{ N/m}^2$. Przybliżone obliczenia naprężeń, wywołanych naciągnięciem taśmy piłowej, wykazują wzrost maksymalnych naprężeń zredukowanych w punkcie C/ do wartości $200 \cdot 10^5 \text{ N/m}^2$. Rząd wartości naprężeń w kołach żeliwnych pozwala sądzić, że siły bezwładności masy i naciąg taśmy nie wykluczają możliwości stosowania laminatów na te koła.



Rys. 2

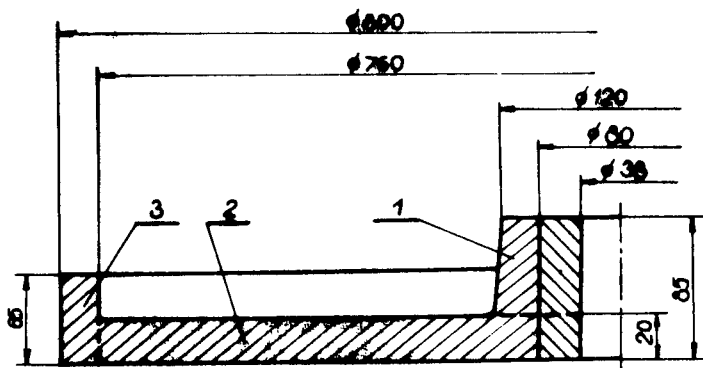
Wykresy sił wewnętrznych w elementach koła żeliwnego

W oparciu o podstawy konstrukcji elementów z tworzyw sztucznych /zaczepnięte m.in. z prac [5] i [8] / i ze względów funkcjonalnych zaproponowano kilka rozwiązań kształtów kół taśmowych. Rozwiązanie o kształcie tarczowym, które uzyskało aprobatę konstruktorów, wytwórców i eksploataatorów pilarek, poddano dalszej analizie teoretycznej.

3. Analiza rozkładu naprężeń w kole tarczowym

Analizę rozkładu naprężeń wykonano w oparciu o liniową teorię sprężystości dla modelu izotropowego. W obliczeniach szczegółów stałe materiałowe i wartości wielkości fizycznych przyjęto takie, jak dla laminatów typu Hgw [7]. Uproszczona konstrukcja koła, przedstawiona na rys. 3, sugeru-

je jego podział na trzy części i zastosowanie zasady superpozycji przy obliczeniu rozkładu naprężeń.

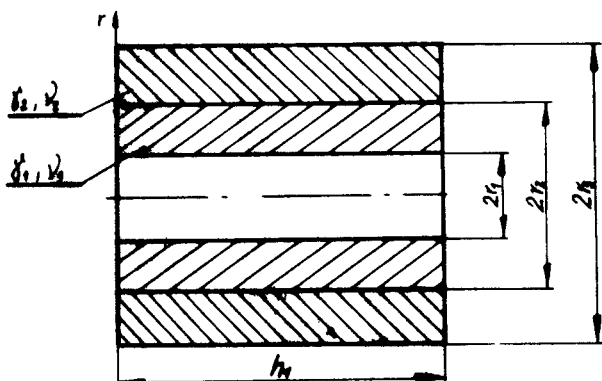


Rys. 3

Schemat obliczeniowy koła tarczowego z laminatu

Na wstępie policzone zostaną funkcje naprężeń w poszczególnych częściach, potraktowanych jako swobodnie wirujące. W dalszej części wyznaczone będą funkcje rozkładu naprężeń wynikających z wzajemnego oddziaływania poszczególnych części. Następnie obliczony zostanie efekt działania taśmy na koło, a na końcu naprężenia zostaną złożone wg hipotezy Hubera.

Pierwszą część, tj. piastę koła z wkładką stalową, można potraktować jako dwuwarstwową wirującą rurę /rys. 4/.



Rys. 4

Schemat obliczeniowy piasty

Dla wirującej rury [6] można znaleźć w literaturze wyprowadzone wzory, wyrażające naprężenia ścienne: promieniowe σ_r , obwodowe σ_t i wzdłużne σ_z w następującej postaci:

$$\sigma_r = \frac{C_1}{2} + \frac{C_2}{r^2} - \frac{3-2\nu}{8(1-\nu)} \sigma \omega^2 r^2 \quad /1/$$

$$\sigma_t = \frac{C_1}{2} - \frac{C_2}{r^2} - \frac{1+2\nu}{8(1-\nu)} \sigma \omega^2 r^2 \quad /2/$$

$$\sigma_z = \nu / \sigma_r + \sigma_t \quad /3/$$

gdzie:

C_1 i C_2 - są stałymi zależnymi od warunków brzegowych,

γ /kg/m³/ - gęstość,

ω /s⁻¹/ - prędkość kątowa,

ν - liczba Poissona.

warunki brzegowe, zgodne z modelem /rys. 1/, pozwalające na wyznaczenie stałych C_1 i C_2 są następujące:

$$\text{dla } r = r_1 \quad \sigma_r = 0 \quad /4a/$$

$$\text{dla } r = r_2 \quad \sigma_{r_l} = \sigma_{r_p} \quad /4b/$$

$$\text{dla } r = r_2 \quad \sigma_{t_l} = \sigma_{t_p} \quad /4c/$$

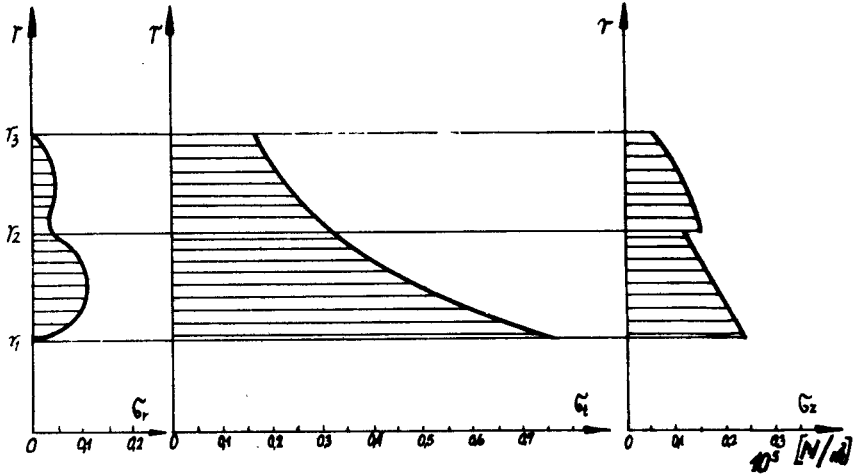
$$\text{dla } r = r_3 \quad \sigma_r = 0 \quad /4d/$$

Po wyliczeniu z warunków brzegowych stałych C_1' i C_2' dla $r_1 \leq r \leq r_2$ oraz C_1'' i C_2'' dla $r_2 \leq r \leq r_3$ i po podstawieniu ich do równań /1/ i /2/ otrzymano funkcje:

$$\sigma_r = f_1 /r/ \quad /1'/$$

$$\sigma_t = f_2 /r/. \quad /2'/$$

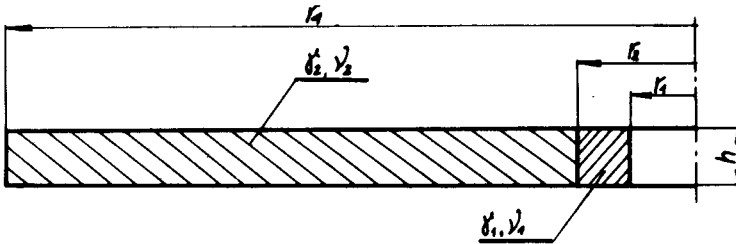
Wartości liczbowe naprężeń w funkcji promienia r dla wymiarów zaprojektowanego koła i danych materiałowych z literatury [7], obliczone ze związków /1'/, /2'/ i /3/, zestawione są w postaci wykresów na rys. 2.



Rys. 5

Wykresy rozkładu naprężeń w piasku

Część druga koła można potraktować jako krążek o stałej grubości złożony z dwóch części /rys. 6/.



Rys. 6

Schemat środkowej części koła /tarczy/

Grubość krążka jest nieduża, a więc naprężenie wzdłużne można pominąć jako małe w stosunku do naprężeń promieniowych i obwodowych. Dla takiego przypadku wytrzymałościowego są wyprowadzone wzory [6]. Postać ich jest następująca:

$$\sigma_r = \frac{D_1}{2} + \frac{D_2}{r^2} - \frac{3+\nu}{8} \gamma \omega^2 r^2 \quad /5/$$

$$\sigma_t = \frac{D_1}{2} - \frac{D_2}{r^2} - \frac{1+3\nu}{8} \gamma \omega^2 r^2, \quad /6/$$

gdzie D_1 i D_2 są stałymi zależnymi od warunków brzegowych, a pozostałe oznaczenia są we wzorach /1/ i /2/. Warunki brzegowe pozwalające na wyznaczenie D_1' i D_2' dla $r_1 \leq r \leq r_2$ oraz D_1'' i D_2'' dla $r_2 \leq r \leq r_4$ są:

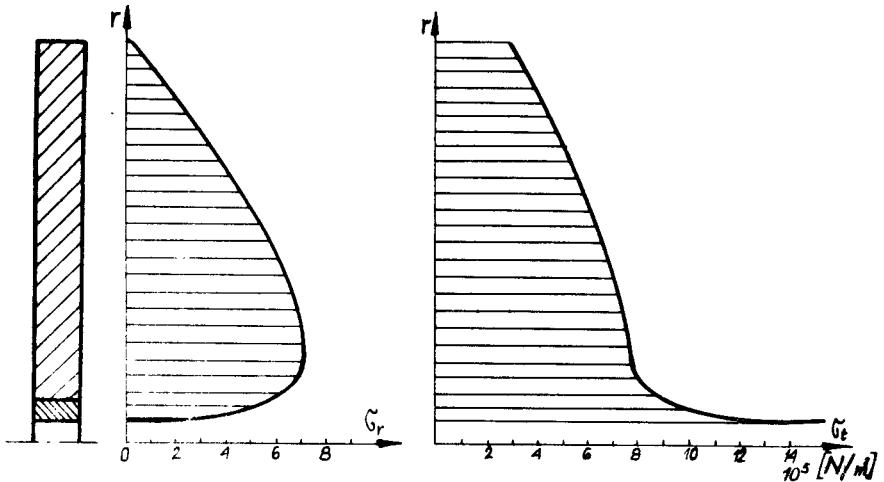
$$\text{dla } r = r_1 \quad \sigma_r = 0, \quad /7a/$$

$$\text{dla } r = r_2 \quad \sigma_{r_1} = \sigma_{r_p}, \quad /7b/$$

$$\text{dla } r = r_2 \quad \sigma_{t_1} = \sigma_{t_p}, \quad /7c/$$

$$\text{dla } r = r_4 \quad \sigma_r = 0. \quad /7d/$$

Po wyliczeniu stałych D_1 i D_2 otrzymano zależności typu /1'/ i /2'/, z których po podstawieniu danych liczbowych obliczono wartości naprężeń. Wykresy tych naprężeń podane są na rys. 7.



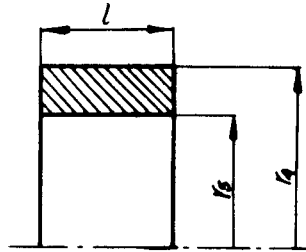
Rys. 7

Wykresy rozkładu naprężeń w tarczy

Część trzecią koła /wieniec/ można zastąpić, tak jak część pierwszą, wciągając rurą, dla której ważne są wzory /1/, /2/ i /3/ z następującymi warunkami brzegowymi:

$$\text{dla } r = r_1 \quad \sigma_r = 0 \quad /8a/$$

$$\text{dla } r = r_2 \quad \sigma_r = \sigma_{r_p} \quad /8b/$$



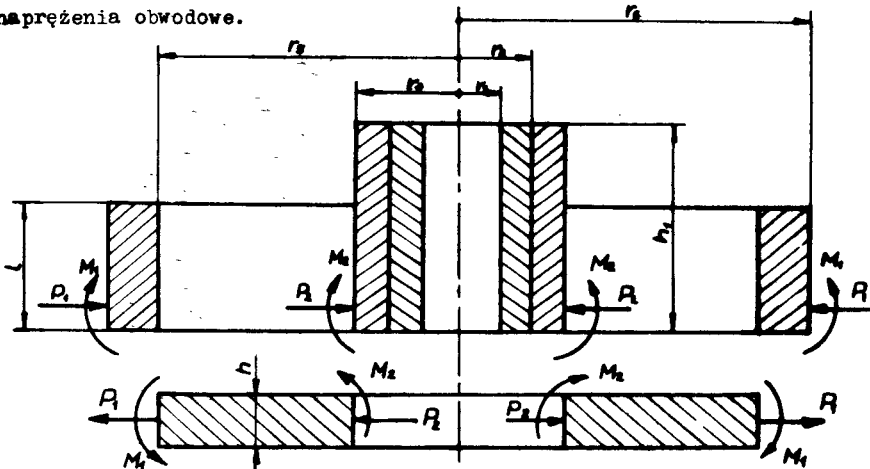
Rys. 8
Schemat wieńca

Wyliczone z tych wzorów wartości naprężeń zestawione są w tabelicy 1.

Tablica 1

r [m]	0,380	0,385	0,390	0,395	0,400
$\sigma_r \cdot 10^5$ [N/m ²]	0,00	0,01	0,01	0,01	0,00
$\sigma_t \cdot 10^5$ [N/m ²]	17,65	17,30	16,95	16,60	16,30
$\sigma_z \cdot 10^5$ [N/m ²]	7,05	6,96	6,80	6,68	6,53

Z przeglądu rozkładów naprężeń w poszczególnych częściach koła, po - traktowanych jako swobodnie wirujące wynika, że największe znaczenie mają naprężenia obwodowe.



Rys. 9

Model wzajemnego oddziaływania poszczególnych części koła

Wzajemne oddziaływanie na siebie poszczególnych części można przedstawić w sposób podany na rys. 9^x. Z rys. 5 i tablicy 1 widać, że naprężenia promieniowe w piastce i wieńcu są małe w stosunku do naprężeń obwodowych. Można je więc potraktować jako wirujące pierścienie. Stąd siły wzajemnego oddziaływania wynoszą:

$$P_1 = \frac{1}{2} \gamma_1 / r_6^2 - r_5^2 / l \omega^2 \quad /9/$$

$$P_2 = \frac{1}{2} \left[\gamma_1 / r_3^2 - r_2^2 / + \gamma_2 / r_2^2 - r_1^2 / \right] h_1 \omega^2 \quad /10/$$

$$M_1 = \frac{1}{2} P_1 / l - h / \quad /11/$$

$$M_2 = \frac{1}{2} P_2 / h_1 - h / . \quad /12/$$

W ten sposób wymodelowane wzajemne oddziaływanie poszczególnych części koła sprowadza się do obliczenia jego części środkowej jako płyty kołowej z otworem w środku, obciążonej momentami M_1 i M_2 i rury grubościenniej o ciśnieniu wewnętrznym

$$p_a = \frac{P_2}{h} \quad \text{i ujemnym ciśnieniu zewnętrznym} \quad p_b = \frac{P_1}{h}$$

Dla płyty kołowej z otworem w środku, podpartej swobodnie na krawędzi wewnętrznej i obciążonej momentami M_1 i M_2 w oparciu o równania różniczkowe podane w monografii [9] można wyprowadzić następujące wzory, określające maksymalne naprężenie gnące promieniowe i obwodowe:

$$\sigma_r = - \frac{6 r_3^2 r_5^2}{h^2 / r_5^2 - r_3^2} \left[\frac{M_1 + M_2}{r^2} - \frac{M_1 r_5^2 + M_2 r_3^2}{r_3^2 r_5^2} \right] \quad /13/$$

$$\sigma_t = \frac{6 r_3^2 r_5^2}{h^2 / r_5^2 - r_3^2} \left[\frac{M_1 + M_2}{r^2} + \frac{M_1 r_5^2 + M_2 r_3^2}{r_3^2 + r_5^2} \right] \quad /14/$$

Obliczone z wzorów /13/ i /14/ naprężenia maksymalne występujące na powierzchni wewnętrznej tarczy koła są podane w tablicy 2.

^{x/} Poprowadzony podział między piastą a tarczą środkową jest inny niż na rys. 3, ale to nie ma wpływu na złożenie naprężeń.

Tablica 2

r [m]	0,06	0,07	0,08	0,09	0,10	0,15	0,20	0,30	0,35	0,38
$\sigma_r \cdot 10^5 [N/m^2]$	-16,3	-5,6	-0,3	4,0	7,1	14,4	17,0	18,7	19,1	19,3
$\sigma_t \cdot 10^5 [N/m^2]$	57,0	47,0	40,6	36,5	33,5	26,0	23,5	21,7	21,3	21,0

Naprężenia promieniowe i obwodowe równomiernie rozłożone na całej grubości h części środkowej koła, a wynikające z oddziaływania wieńca i piasty siłami P_1 i P_2 , można określić przy pomocy wzorów Lamégo [3] :

$$\sigma_r = \frac{r_3^2 p_a + r_5^2 p_b}{r_5^2 - r_3^2} - \frac{r_3^2 r_5^2 / p_a + p_b /}{r_5^2 - r_3^2 / r^2} \quad /15/$$

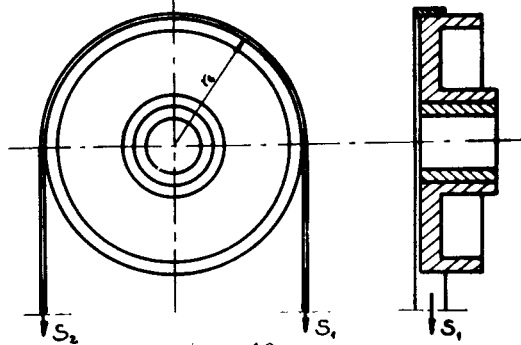
$$\sigma_t = \frac{r_3^2 p_a + r_5^2 p_b}{r_5^2 - r_3^2} + \frac{r_3^2 r_5^2 / p_a + p_b /}{r_5^2 - r_3^2 / r^2} \quad /16/$$

Wartości naprężeń obliczonych wzorami /15/ i /16/ zestawione są w tablicy 3.

Tablica 3

r [m]	0,06	0,07	0,08	0,09	0,10	0,15	0,20	0,30	0,38
$\sigma_r \cdot 10^5 [N/m^2]$	-1,68	-0,46	0,35	0,88	1,30	2,25	2,57	2,81	2,89
$\sigma_t \cdot 10^5 [N/m^2]$	7,71	6,46	5,65	5,10	4,70	3,75	3,42	3,19	3,11

Obciążenie koła taśmą piłową przedstawione jest na rys. 10. Siły na -



rys. 10
Schemat obciążenia koła taśmą piłową

ciągu taśmy wywołują w kole naprężenie normalne i styczne. Ścisłe obliczenie rozkładu naprężeń normalnych jest dosyć trudne. Dla celów, jakie postawione były na wstępie artykułu, wystarczy obliczenie przybliżone, które polegać będzie na określeniu średniego nacisku taśmy na wieniec koła, a ponieważ nacisk taśmy istnieje na całej grubości środkowej części koła, to można zastosować wzory Lamégo dla ciśnienia zewnętrznego. Wzory te można napisać:

$$\sigma_r = -\frac{p r_6^2}{r_6^2 - r_1^2} + \frac{r_6^2 r_1^2 p}{r_6^2 - r_1^2 / r^2} \quad /17/$$

$$\sigma_t = -\frac{p r_6^2}{r_6^2 - r_1^2} - \frac{r_6^2 r_1^2 p}{r_6^2 - r_1^2 / r^2}, \quad /18/$$

gdzie: p jest średnim naciskiem taśmy określonym następująco:

$$p = \frac{N}{F} = S_1 \frac{e^{\mu \alpha} - 1}{\pi r_6 b \mu e^{\mu \alpha}} \quad /19/$$

We wzorze /19/ b jest szerokością taśmy, μ współczynnikiem tarcia, a S_1 - siłą zrywającą taśmę. Na podstawie przeprowadzonych prób wytrzymałość taśmy o szerokości $b = 2$ cm i grubości 0,65 mm określono siłą $S_1 = 15000$. Dla kąta opasania $\alpha = 180^\circ$ i współczynnika tarcia $\mu = 0,2$ średni nacisk $p = 14,5 \cdot 10^5$ [N/m²]. Po podstawieniu do wzorów /17/ i /18/ średniej wartości nacisku p i wymiarów z rys. 3, obliczono naprężenia σ_r i σ_t w funkcji promienia r . Wartości tych funkcji zestawione zostały w tablicy 4.

Tablica 4

r [m]	0,019	0,02	0,04	0,06	0,08	0,10
$\sigma_r \cdot 10^5$ [N/m ²]	0	-1,4	-11,2	-13,0	-13,6	-13,9
$\sigma_t \cdot 10^5$ [N/m ²]	-28,9	-27,5	-17,7	-15,9	-15,3	-15,0

0,15	0,20	0,30	0,35	0,38
-14,2	-14,3	-14,4	-14,4	-14,5
-14,7	-14,6	-14,5	-14,5	-14,5

Wartość naprężenia tangencjalnego w dowolnym napięciem taśmy można obliczyć przy pomocy prostego wzoru: **ściananie:**

$$\tau = \frac{F}{F_0} \cdot \frac{E}{E_0} \cdot \frac{1}{2\pi} \cdot \frac{1}{r^2} \cdot \left(\frac{1}{e^{\mu \cdot r}} - \frac{1}{r_0} \right) \quad /20/$$

Obliczone wartości naprężeń stycznych zestawione są w tabelicy 5.

Tablica 5

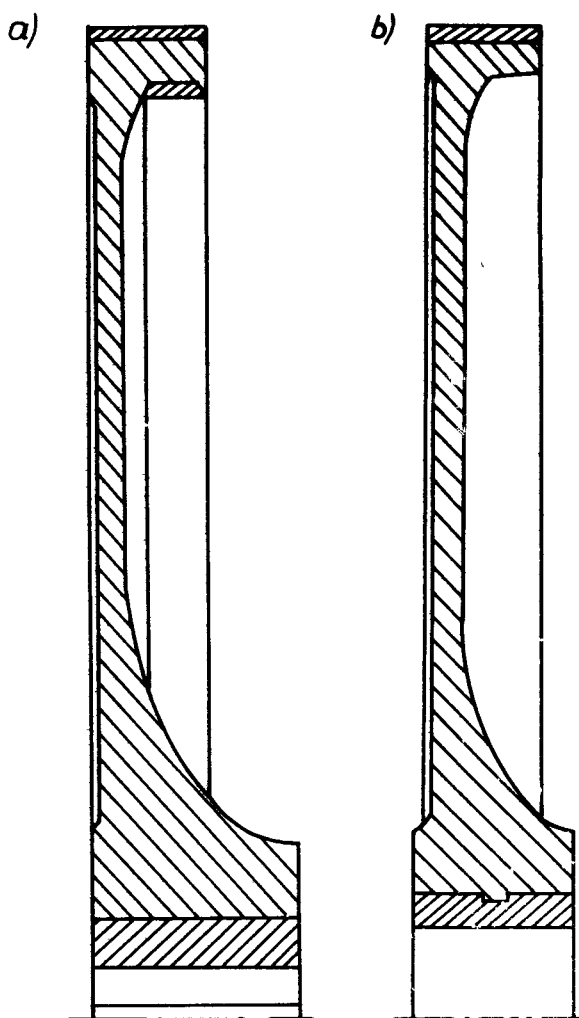
r [m]		0,08	0,10	0,15	0,20	0,30	0,35	0,38
$\tau \cdot 10^3$ [N/cm ²]		30,3	20,6	9,2	5,2	2,3	1,7	1,4

Na rys. 11 przedstawione są rozkłady naprężeń normalnych promieniowych i obwodowych, oraz naprężenia zredukowanych wg hipotezy Hubera;

$$\sigma_{\text{red}} = \sqrt{\sigma_r^2 + \sigma_t^2 - \sigma_r \sigma_t + 3\tau^2} \quad /21/$$

4. Wytyczne projektowania i wykonania kół z laminatów

Wytyczne przytoczone obliczenia rozkładu naprężeń wykonane zostały dla aproszowanych kół kątów koła i orientacyjnych jego wymiarów. W oparciu o wyniki tych obliczeń przystąpiono do zaprojektowania kół, na których będą przeprowadzone próby eksploatacyjne i wytrzymałościowe gdyż, jak się wydaje, dokładne opracowanie teoretyczne stanów krytycznych dla tworzyw laminowanych jest obecnie niemożliwe. Ścisłe określenie wyężenia pozwoli z kolei na zminimalizowanie wymiarów kół przeznaczonych do produkcji.



Rys. 12

Zarys kół próbnych

Przy wymiarowaniu kół próbnych, przedstawionych na rys. 12, skorzystano z następującego wzoru, pozwalającego na obliczenie naprężeń douszczalnych:

$$k_r = \frac{k_m}{\chi \cdot G} \cdot k,$$

gdzie:

R_m - doraźna wytrzymałość na rozciąganie,

X - współczynnik bezpieczeństwa,

G - wypadkowy współczynnik uwzględniający warunki pracy i własności tworzyw sztucznych,

k - współczynnik zmęczenia.

Współczynnik $G [10]$ można przedstawić:

$$G = G_1 + G_2 + G_3 + G_4,$$

Gdzie:

G_1 - współczynnik czasu pracy,

G_2 - współczynnik wpływu otoczenia w zakresie temperatur 30 - 50°C,

G_3 - współczynnik anizotropii tkaniny szklanej i splotu,

G_4 - współczynnik niejednorodności powstałej przy wykonawstwie elementów.

Pierwsza para kół próbnych z laminatów może posiadać bieżniki nie poddane modyfikacji. Wprawdzie warstwa bieżna będzie w tym przypadku twarda, ale być może całe koło będzie posiadało dostateczne własności tłumiące i współpraca koła z taśmą będzie zadowalająco cichobieżna. Gdyby próby wykazały konieczność uelastycznienia warstwy zewnętrznej wieńca tak, aby stała się gumopodobną, to należy do niej zastosować odpowiedni utwardzacz. Dobre wyniki w tym względzie [1] uzyskuje się stosując jako utwardzacz dimeryzowany kwas tłuszczowy $C_{34}H_{64}/COOH/2$ lub kwas poliestrodwukarboksylowy - ten ostatni do utwardzania żywicy epoksydowej typu epidian 5.

Koła próbne proponuje się wykonać przez formowanie ręczne w formie otwartej, celem obniżenia kosztów ich wykonania. Część otwartą tak wykonanego koła /czoło/ należy obrabiać na tokarce, ażeby wyrównać powstałe nierówności. Niezbędne jest ich dokładne wyważenie dynamiczne.

5. Wnioski

Funkcjonalny kształt tarczowy koła z asymetrycznie wyprofilowanym wieńcem jest niekorzystny ze względów wytrzymałościowych. Asymetria piasty i wieńca /szczególnie wieńca/ wywołuje zginanie środkowej części koła. Naprężenia gnące, zestawione w tablicy 2, są najbardziej znaczące ze wszystkich pozostałych, wyliczonych w punkcie 3 niniejszego opracowania. Z tego względu szerokość wieńca należy ograniczyć do niezbędnego minimum, określonego potrzebą zainstalowania hamulca.

Koło o kształtach podanych na rys. 12 należy poddać wszechstronnym badaniom wytrzymałościowym i eksploatacyjnym. Celem badań wytrzymałościowych jest precyzyjne ustalenie wytrzymałości koła z laminatów i określenie naprężeń dopuszczalnych, które pozwolą na optymalizację konstrukcji przeznaczonej do seryjnej produkcji. Przy badaniach eksploatacyjnych należy szczególną uwagę zwrócić na współpracę koła z taśmą piłową.

Literatura

1. Brojer Z., Hertz Z., Penczek S.: Żywice epoksydowe. WNŁ
Warszawa 1972.
2. Broniewski T., Iwaniewicz A., Kopko I., Płaczek W.: Metody badań i ocena tworzyw sztucznych WNT, Warszawa 1970.
3. Jakubowicz A., Orłoś Z.: Wytrzymałość materiałów. WNT,
Warszawa 1966.
4. Valinowski L.: Inżynieria materiałowa - nowa dyscyplina wiedzy.
Mechanik Nr 10 1971r.
5. Korewa W., Zymunt K.: Podstawy konstrukcji maszyn. WNT,
Warszawa 1962.
6. Ponomariew S.D.: Współczesne metody obliczeń wytrzymałościowych w budowie maszyn. PWN, Warszawa 1957.
7. Saechtling H., Żebrowski W.: Tworzywa sztuczne. Poradnik WNT,
Warszawa 1971.
8. Sorocziszyn A.G.: Tworzywa sztuczne wzmocnione włóknem szklanym. Arkady
Warszawa 1969.
9. Timoszenko S., Wojnorowski-Kryger S.: Teria płyt i powłok. Arkady,
Warszawa 1962.
10. Uebing D., Peter K.: Qualitätskontrolle und Zulassungsfragen bei hochbeanspruchten Bauteilen aus glasfaserverstärkten Kunststoffen. Kunststoffe 1970/72.

Bronisław Siołkowski,
Tomasz Sauter, Henryk Holka

SOME THEORETICAL PROBLEMS OF LAMINATE FABRICS ADAPTED
TO THE BAND SAWS OF THE PULLEYS

S u m m a r y

In this article there are some preliminary theoretical band - saws up to the wood problems realized before the experimental execution of the band laminated pulleys.

There are five paragraphs in this article and literary specifications added at the end of it, used by the authors of this work.

In the first paragraph the designs of the work are presented.

In the second and third paragraph the calculation of the existing iron pulley and the pulley and the selected model laminated pulley are presented.

In the fourth one the laminated pulley project is described and in the fifth paragraph some conclusions of the research work are drawn.

We hope that this work may help with initiating new laminate plastics into suitable machine constructions.-

Бронислав Сёлковский, Томаш Саутер, Генрик Холька

НЕКОТОРЫЕ ТЕОРЕТИЧЕСКИЕ ВОПРОСЫ ПРИМЕНЕНИЯ ЛАМИНАТОВ
НА КОЛЁСА ЛЕНТОЧНЫХ ПИЛ

/Резюме/

В статье представлены вступительные теоретические работы проделанные до выполнения пробных колёс. Статья состоит из пяти принципиальных разделов и списка использованной авторами литературы. В первом разделе представлена цель работы, во втором и третьем подсчёты сопротивления чугунного колеса работающего сейчас и выбранный модель ламинатного колеса. В четвертом разделе даётся описание запроектированного ламинатного колеса, а в пятом предложении для исследовательской работы. Таким образом настоящая статья должна послужить примером внедрения новых материалов в строении машин.



Wojciech Weiner

ZMIENNOŚĆ WARTOŚCI MODUŁU SPRĘŻYSTOŚCI
LAMINATU EPOKSYDOWO - SZKLANEGO
W PRÓBIE ZGINANIA

Artykuł zawiera wyniki badań zmienności modułu sprężystości przy zginaniu ze wzrostem szerokości kształtki pomiarowej.

Opracowanie statystyczne dużej ilości par obserwacji pozwala na przyjęcie wyników jako podstawy do dalszych badań szczegółowych, jednocześnie stanowiąc przyczynek do lepszego poznania własności laminatu epoksydowo - szklanego.

Wstęp

W artykule omówiono badania wpływu zmiany pola przekroju prostopadłościenną kształtki pomiarowej /przy stałej jej grubości i stałym rozstawie podpór/ na wartość modułu sprężystości przy zginaniu żywicy epoksydowej zbrojonej włóknem szklanym.

Zmianę pola przekroju próbki uzyskano więc różnicując tylko jej szerokość.

Szukana zmienność ma postać:

$$E_g = f / A_0 / g = \text{const.}$$

lub

$$E_g = f / b / .$$

Normy przedmiotowe podają szeroki zakres wymiarów geometrycznych próbek, a jednocześnie w literaturze [6] podkreśla się brak możliwości przeliczania wyników badań przeprowadzanych na różnych co do wielkości kształtkach pomiarowych.

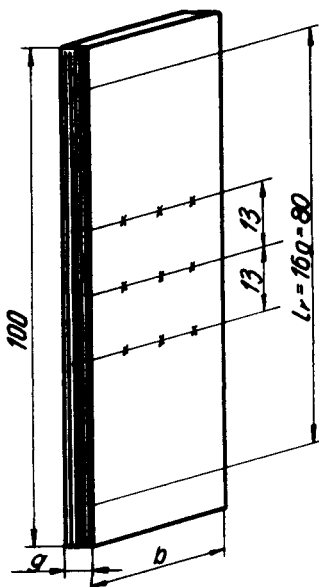
1. Materiał badany

Materiałem przyjętym do badań była utwardzona żywica epoksydowa Epi - dian 53, zbrojona matą szklaną o gramaturze 300. Z materiału tego wykonano płyty o wymiarach 1000x2000 mm i grubości nominalnej 5 mm /7 warstw maty/, przesycając matę ręcznie kompozycją żywicy i utwardzacza Z-1 / proporcja 100 : 10,5/. Płyty wykonywano w temp. 17° i następnie utwardzono w temp. 60° w czasie 2 godzin, w dwa tygodnie po wykonaniu. Zawartość szkła w kompozycji wynosiła ~ 32%.

2. Kształtki pomiarowe

Z tak wykonanych płyt wykonano 7 serii kształtek wodorowych po 10 sztuk, zachowując losowość poboru /wg tablic Kadyrowa/. Serie różniły się między sobą szerokością nominalną $a = 10, 30, 50, 70, 90, 110, 130$ mm przy stałej długości $l = 20$ g = 100 mm.

Próbki mierzone wg schematu /rys. 1/, z dokładnością do 0,01 mm.



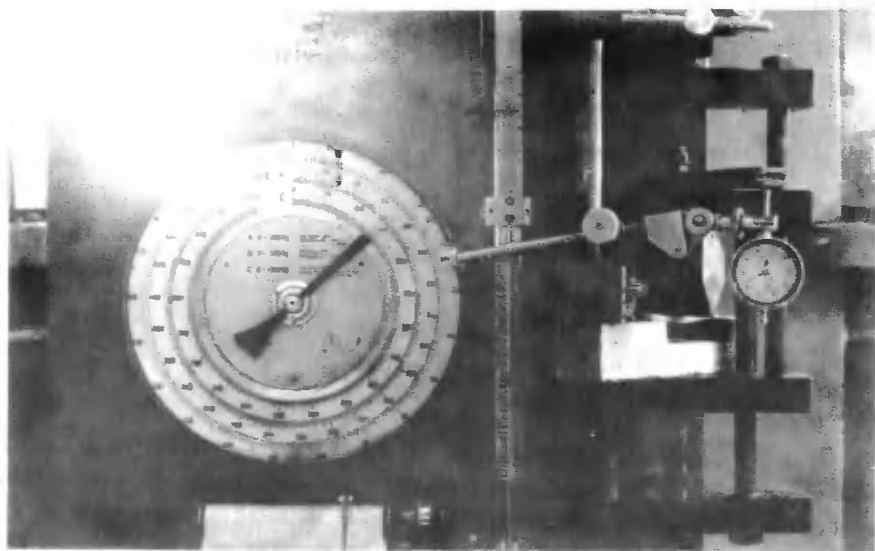
Rys. 1

Schemat pomiaru wartości geometrycznych próbek

3. Metodyka badań

Metodykę badań modułu sprężystości E_T przy zginaniu oparto o zalecenia normy PN-69/C-89027. Dla pomiarów E_T wybrano zakres od $\sim 30\%$ do $\sim 70\%$ naprężeń niszczących, przeciętnych dla każdej serii.

Badań dokonywano na typowej zrywarce ZDM - 1000, wyposażonej w przyrząd do gięcia o $l = 80$ mm wraz z odpowiednim trzpieniem, oraz czujnik zegarowy o działce elementarnej 1/100 mm /rys. 2/.



Rys. 2
Stoisko badawcze

Przyjęto minimalną dla tego typu zrywarki prędkość obciążenia, wynoszącą 5 ± 1 mm/min.

4. Przeprowadzenie prób

Próby przeprowadzono na **kształtkach** uprzednio klimatyzowanych w komorze klimatyzacyjnej KPW-1 w temp. $20 \pm 1^\circ\text{C}$ i wilgotności względnej $65 \pm 5\%$. W laboratorium temperatura wynosiła $18 \pm 19^\circ\text{C}$, a wilgotność względna $\approx 60\%$. Wyniki pomiarów zapisywano w uprzednio przygotowanych protokółach.

4. Obliczanie modułu sprężystości przy zginaniu E_g

Moduł sprężystości wyliczono wg wzoru:

$$E_g = \frac{P \cdot l_r^3}{4 \cdot b \cdot e^3 \cdot f} \quad / \text{kG/cm}^2 / ,$$

przyjmując do obliczeń postać:

$$E_g = \frac{\Delta P \cdot l_r^3}{4 \cdot A_0 \cdot \sigma^2 \cdot \Delta f_{sr}} \quad / \text{kG/cm}^2 / ,$$

gdzie:

- l_r - rozstaw podpór /const = 8 cm/ ,
 g - grubość próbki /cm/ ,
 A_o - przekrój początkowy /średni/ /cm²/ ,
 f - strzałka ugięcia /cm/ ,

$$\Delta P = \Delta P_{sr}$$

$$f_{sr} = \frac{\sum_{i=1}^n f_i}{n}$$

6. Moduł sprężystości giętej E_g

Dla stwierdzenia, czy rozkład zmiennej E_g w poszczególnych seriach odpowiada rozkładowi normalnemu, przeprowadzono analizę opartą na wyliczeniu ekscesu B i asymetrii A wraz z odpowiednimi współczynnikami m_A i m_B [1]. Ponieważ we wszystkich seriach A : m_A i B: m_B były mniejsze od 3 /tab.1/ przyjęto, że rozkłady można uznać za normalne.

Tablica 1

Seria	A	m_A	$\frac{A}{m_A}$	B	m_B	$\frac{B}{m_B}$
Eg 1	0,14	0,387	0,36	0,41	0,77	0,53
Eg 2	0,27	0,387	0,69	0,54	0,77	0,70
Eg 3	0,24	0,387	0,62	0,87	0,77	1,12
Eg 4	0,97	0,387	0,50	0,72	0,77	0,93
Eg 5	0,21	0,387	0,54	0,86	0,77	1,11
Eg 6	0,48	0,387	1,24	0,96	0,77	1,24
Eg 7	0,24	0,387	0,62	0,88	0,77	1,13

Mediana została przeprowadzić analizę wariancyjną [2,3] dla sprawdzenia, czy szerokość rozkładu pozostałki pomiarowej ma wpływ na wartość modułu sprężystości giętej E_g .
 Dokonano testy porównania wariancji dla stwierdzenia istnienia funkcji o postaci:

$$E_g = f / A_o /, \text{ gdzie } A_o = \psi / b / \quad g = \text{const.}$$

Wyliczone wartości wariancji wynoszą:

$$S_f^2 = 376,39$$

$$S_e^2 = 17,08$$

ponieważ $S_f^2 > S_e^2$

$$T = \frac{S_f^2}{S_e^2} = 22,03$$

dla $p = 0,05$

$$k_1 = 6$$

$$k_2 = 266$$

$$k_1 = p - 1 = 7 - 1 = 6$$

$$k_2 = p/g_{gr} - 1 = 7/39 - 1 = 7 \cdot 38 = 266$$

$$T_{\text{tabl}} = 2,133,$$

gdzie: p - ilość serii

q - liczność serii .

Wobec $T > T_{\text{tabl}}$ dla wiarygodności $p = 0,05$ należy uznać za istotny wpływ kształtki pomiarowej na wartość modułu sprężystości giętej E_g .

Określenie funkcji $E_g = f / A_o / g = \text{const.}$

Interpretacja liniowa współzależności modułu sprężystości przy zginaniu i przekroju kształtki A_o gdy $A_o = f / b /$ - średnie wyniki prób:

Nr serii	Przekrój /cm ² /	Moduł /kg/cm ² / · 10 ³	Wartości pomocnicze		
			Ao ²	Eg ²	AoEg
-	Ao	Eg	Ao ²	Eg ²	AoEg
1	0,75	48,17	0,5625	2320,3489	36,1275
2	2,26	52,78	5,1076	2785,7284	119,2828
3	3,76	54,88	14,1376	3011,8144	206,3488
4	5,27	52,16	27,7729	2720,6656	274,8832
5	6,82	52,12	46,5124	2716,4944	355,4584
6	8,43	48,36	71,0649	2338,6896	407,6748
7	9,30	56,57	86,4900	3200,1649	526,1010
7	36,59	365,04	251,6479	133237,2062	1925,8765
n	ΣA_o	ΣE_g	ΣA_o^2	ΣE_g^2	$\Sigma A_o E_g$

Na podstawie analizy graficznej zakłada się istnienie prostej o równaniu:

$$E_g = a + b \cdot A_0$$

Najbardziej prawdopodobną prostą otrzymaną metodą najmniejszych kwadratów, wyznaczając współczynniki a i b z zależności:

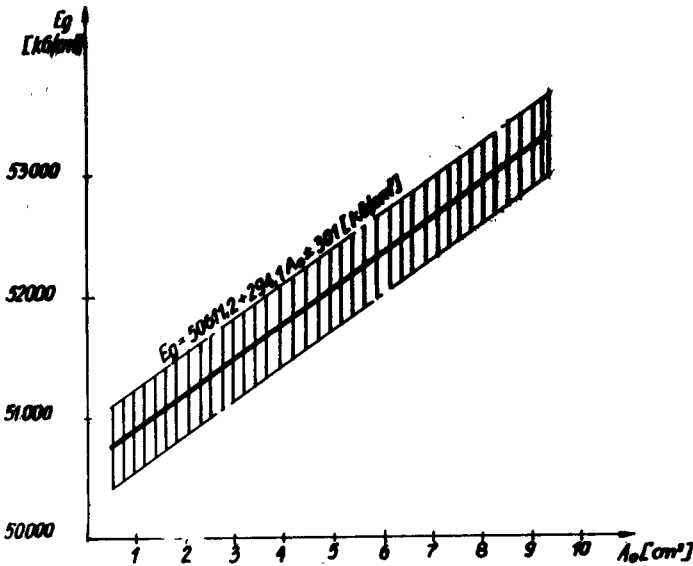
$$a = \frac{\sum A_0^2 \sum E_g - \sum A_0 E_g \sum A_0}{n \sum A_0^2 - (\sum A_0)^2} = 50,6112$$

$$b = \frac{n \sum A_0 E_g - \sum A_0 \sum E_g}{n \sum A_0^2 - (\sum A_0)^2} = 0,2941$$

Równanie prostej ma więc postać:

$$E_g = /50,6112 + 0,2941 A_0/ \cdot 10^3 \pm 301 \quad /kg/cm^2/ ,$$

gdzie ± 301 stanowi średnie odchylenie standardowe.



Rys. 3

Zmienność modułu sprężystości przy zginaniu E_g

Uzasadnienie fizyczne znalezionej zmienności nie stanowiło celu niniejszych badań.

W pracach [4] i [5] podano hipotezy uzasadniające zmianę cech wytrzymałościowych tworzyw zbrojnych przy zmianie wymiarów geometrycznych próbek. Opierają się one na ilości mikropęknięć w przekroju próbki, oraz na długości włókien "pracujących" w wyniku przyłożonych sił.

7. Wnioski

- 7.1. Powyższy materiał badawczy pozwolił na przeprowadzenie analizy statystycznej dla stwierdzenia istnienia współzależności zmiennych $E_g = f / A_0$. Stwierdzono w oparciu o analizę wariancyjną, że zmiana przekroju początkowego A_0 , wynikająca ze zmiany szerokości, różnicuje wartość modułu sprężystości przy zginaniu E_g .
- 7.2. Na podstawie powyższej analizy uzyskano praktyczną porównywalność wyników pomiarów modułu sprężystości E_g badanego tworzywa, uwzględniającą wpływ przekroju kształtki pomiarowej, gdy grubość i rozstaw podpór pozostają stałe.
- 7.3. Opracowanie niniejsze oraz dalsze badania szczegółowe komponentów różnych żywic i postaci zbrojenia mogą stanowić przyczynek do lepszego poznania własności laminatów zbrojonych włóknem szklanym.

Literatura

1. Cyplakow O.E.: Osnovy formowania stiekló - plastikowych obłoczek. Maszynostrojenie-Leningrad 1968.
2. Leontjew N.L.: Tjechnika statisticzieskich wyczisljenij. Gosliesbumiz - dat-Moskwa 1961
3. Metody badań i ocena własności tworzyw sztucznych. WNT, Warszawa 1970.
4. Niemiec J., Sierensen S.W., Strieljajew W.S: Procznost płastrmass, Maszynostrojenie-Moskwa 1970.
5. Oktaba W.: Elementy statystyki matematycznej i metodyka doświadczalnictwa. PWN, Warszawa 1966.
6. Romanowski W.: Zastosowanie statystyki matematycznej w doświadczalnictwie. PWE, Warszawa 1951.

Wojciech Weiner

VARIABILITY OF EPOXIDE-GLASS LAMINATED PLASTIC MODULUS
OF ELASTICITY VALUE IN THE BEND TEST

S u m m a r y

This work deals with the results of modulus of elasticity variability at bending with increasing the width of tested sample.

Statistical elaboration of a bulk of observation pairs enables to accept the results there of as a basis for further detailed tests.

It is, at the same time, a share to a better understanding of the epoxide-glass laminated plastic properties.

Войцех Вейнер

ИЗМЕНЕНИЯ ВЕЛИЧИНЫ МОДУЛЯ УПРУГОСТИ ПРИ ИЗГИБЕ
ЭПОКСИДНОГО СТЕКЛОПЛАСТА

/Резюме/

Статья содержит результаты исследований изменчивости модуля упругости при изгибе по мере роста ширины испытываемого образца.

Статистическая обработка большого количества пар наблюдений даёт возможность принять их за основу дальнейших более точных исследований.

Одновременно статья является дальнейшим шагом по пути познания свойств эпоксидного стеклопласта.

Edward Walicki

ROZWIĄZANIE METODĄ RÓŻNIC SKONCZONYCH
 UOGÓLNIONEGO ZAGADNIENIA BRZEGOWEGO
 DLA ELIPTYCZNEGO RÓWNANIA RÓŻNICZKOWEGO

W pracy przedstawiono rozwiązanie uogólnionego zagadnienia brzegowego - danego zależnościami 1 i 2 - dla równania eliptycznego.

Podano prosty schemat różnicowy równania 1 przy użyciu prostokątnej siatki. Następnie wyprowadzono formuły aproksymacyjne dla węzłów brzegowych pierwszego typu /rys. 3 - 6/ i węzłów brzegowych drugiego typu /rys. 7 -10/.

Postać formuł różnicowych dla rozwiązania postawionego zagadnienia dostosowano do użycia metod iteracyjnych.

1. Schemat różnicowy równania eliptycznego

Niech będzie dany płaski obszar G z granicą Γ . W obszarze tym będziemy poszukiwać rozwiązania równania różniczkowego:

$$a(x,y)\Psi''_{xx} + b(x,y)\Psi''_{yy} + c(x,y)\Psi'_x + d(x,y)\Psi'_y + g(x,y)\Psi = f(x,y), \quad /1/$$

spełniającego uogólniony warunek brzegowy, dany zależnością:

$$[P(s)\Psi'_n + Q(s)\Psi'_s + r(s)\Psi]_{\Gamma} = u(s); \quad /2a/$$

tutaj:

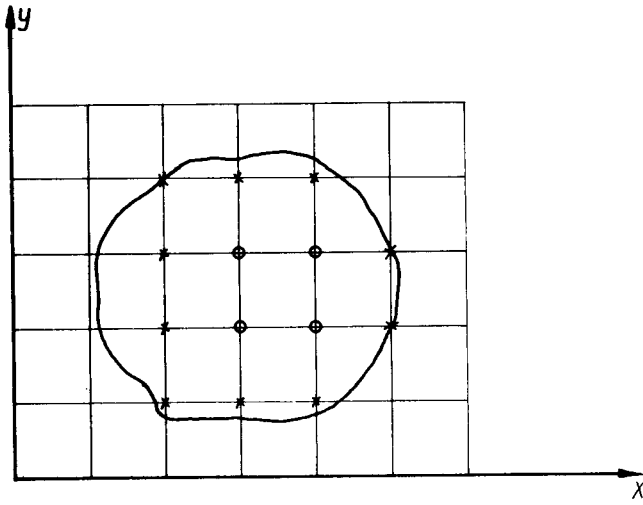
$\Psi = \Psi(x,y)$; s, n - kierunek stycznej i normalnej do brzegu Γ obszaru G .

Będziemy zakładać, że współczynniki w /1/ i /2a/ zapewniają istnienie, jednoznaczność i dostateczną gładkość rozwiązania.

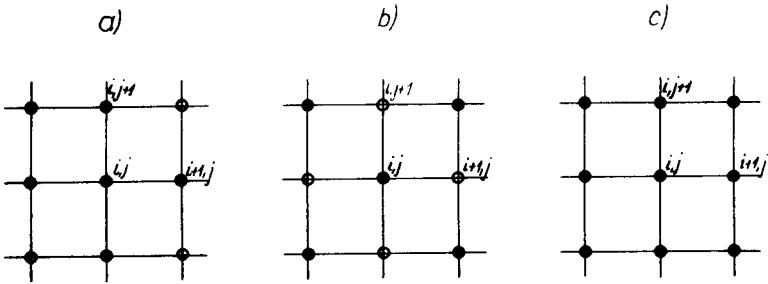
Pokryjmy obszar G prostymi odpowiednio równoległymi do osi współrzędnych /rys.1/, tworzącymi prostokątną siatkę:

$$\begin{aligned} x &= x_0 + i h, & (i = 0, 1, 2 \dots) \\ y &= y_0 + j l, & (j = 0, 1, 2 \dots) \end{aligned}$$

Punkty przecięcia się prostych nazywać będziemy węzłami. Dwa węzły nazywać będziemy sąsiednimi, jeżeli są oddalone od siebie w kierunku osi x lub y o wielkość kroku siatki. Węzły, które znajdują się na brzegu Γ obszaru i



Rys.1.



Rys.2.

nie, które wprowadzicie będą w obszarze G , lecz sąsiadują z węzłami do niego nie należącymi, nazywać będziemy węzłami brzegowymi. Pozostałe węzły obszaru G nazywać będziemy węzłami wewnętrznymi.

Na rys. 1 węzły brzegowe oznaczone krzyżykiem wyznaczają tzw. granicę siatkową obszaru.

W celu uzyskania rozwiązania równania (1) metodą różnic skończonych dogodnie jest stosować wewnątrz obszaru G (tzn. w węzłach wewnętrznych obszaru) schematy różnicowe, oparte na przybliżeniach różnicowych pochodnych, wchodzących do równania (1), uwzględniając zaczerpnięte węzły siatki pokazanej na rys. 2.

Schematy oparte na przybliżeniach różnicowych uwzględniających węzły pokazane na rys. 2a i rys. 2b dają dokładność $O(h^2)$ [8], zaś schemat uwzględniający węzły pokazane na rys. 2c daje dokładność $O(h^4)$ a przy ciążności pochodnych funkcji f odpowiednio wysokiego rzędu nawet dokładność $O(h^6)$.

Jednak ze względu na prostotę obliczeń i łatwość ich automatyzacji, jak również ze względu na dalsze rozważania dotyczące zagadnienia brzegowego, ograniczymy się do przytoczenia schematu różnicowego opartego na węzłach pokazanych na rys. 2a.

Stosując wzór Taylora:

$$\begin{aligned} \Psi(x_0 \pm h, y_0 \pm l) &= \Psi_0 + \left(\pm h \frac{\partial}{\partial x} \pm l \frac{\partial}{\partial y} \right) \Psi + \frac{1}{2!} \left(\pm h \frac{\partial}{\partial x} \pm l \frac{\partial}{\partial y} \right)^2 \Psi + \\ &+ \frac{1}{3!} \left(\pm h \frac{\partial}{\partial x} \pm l \frac{\partial}{\partial y} \right)^3 \Psi + \dots \end{aligned}$$

do węzłów siatki pokazanej na rys. 2a otrzymamy różnicowe przybliżenia dla pochodnych występujących w równaniu (1):

$$\left(\frac{\partial \Psi}{\partial x} \right)_{i,j} = \frac{\Psi_{i+1,j} - \Psi_{i-1,j}}{2h},$$

$$\left(\frac{\partial \Psi}{\partial y} \right)_{i,j} = \frac{\Psi_{i,j+1} - \Psi_{i,j-1}}{2l},$$

$$\left(\frac{\partial^2 \Psi}{\partial x^2} \right)_{i,j} = \frac{\Psi_{i+1,j} - 2\Psi_{i,j} + \Psi_{i-1,j}}{h^2},$$

$$\left(\frac{\partial^2 \Psi}{\partial y^2} \right)_{i,j} = \frac{\Psi_{i,j+1} - 2\Psi_{i,j} + \Psi_{i,j-1}}{l^2}.$$

Tutaj, i w dalszej części tekstu, będziemy zakładać, że $O(h) = O(1)$.

Oznaczając wartości współczynników równania (1) w węzle (i, j) przez $a_{ij}, b_{ij}, c_{ij}, d_{ij}, e_{ij}, f_{ij}$ otrzymamy dla węzła (i, j) różnicowe równanie:

$$a_{ij} \frac{\psi_{i+1,j} - 2\psi_{ij} + \psi_{i-1,j}}{h^2} + b_{ij} \frac{\psi_{i,j+1} - 2\psi_{ij} + \psi_{i,j-1}}{l^2} +$$

/4/

$$c_{ij} \frac{\psi_{i+1,j} - \psi_{i-1,j}}{2h} + d_{ij} \frac{\psi_{i,j+1} - \psi_{i,j-1}}{2l} + e_{ij} \psi_{ij} = f_{ij}.$$

Takie równania można napisać dla każdego wewnętrznego węzła.

Osobny, nader istotny problem stanowi traktowanie węzłów brzegowych. Zazwyczaj stosuje się dla nich formuły różnicowe dające dokładność rzędu kroku siatki [1,2], co w wielu zagadnieniach technicznych jest niewystarczające, bowiem prowadzi do rozwiązań obciążonych dużymi błędami.

Dalej podaje się wyprowadzenia zależności różnicowych pozwalających rozwiązać rozważane zagadnienie brzegowe z lokalną dokładnością $O(h^3)$.

Ponieważ bezpośrednie stosowanie warunku brzegowego (2a) nie jest do-
godne do badań, wprowadzimy postać równoważną.

Oznaczmy przez φ kąt między styczną do brzegu obszaru i osią x ; wtedy warunek brzegowy (2a) można zapisać w postaci:

$$\left[p(s) \psi'_{xx} + q(s) \psi'_{yy} + r(s) \psi \right] / r = u(s), \quad /2/$$

gdzie

$$p(s) = P(s) \cos \varphi - Q(s) \sin \varphi,$$

$$q(s) = P(s) \sin \varphi + Q(s) \cos \varphi.$$

Węzły brzegowe podzielono na dwa typy w zależności od położenia brzegu Γ względem węzłów wewnętrznych. Węzły przedstawione na rys. 3 do 6 zaliczone do pierwszego typu, a węzły przedstawione na rys. 7 do 10 do drugiego typu. Dla uproszczenia zapisu wprowadzono numerację węzłów w miejscach numeracji wiersza i kolumny punktu siatki, w którym znajduje się rozważany węzeł.

2. Węzły pierwszego typu

Rozważmy węzeł brzegowy 0, przedstawiony na rys. 3, oraz otaczające go cztery sąsiednie węzły, z których węzeł 1 jest węzłem leżącym na brzegu Γ obszaru G.

Stosując wzór Taylora do węzłów $(0,3)$ i węzłów $(0,1)$ otrzymamy odpowiednio:

$$\psi_3 = \psi_0 - h \psi'_{x_0} + \frac{h^2}{2} \psi''_{xx_0} + o(h^3) , \quad /5/$$

$$\psi'_{x_0} = \psi'_{x_1} - \alpha \psi''_{xx_0} + o(h^2) \quad /6/$$

Z warunku brzegowego (2) znajdujemy:

$$\psi'_{x_1} = \frac{1}{p_1} (u_1 - q_1 \psi'_{y_1} - r_1 \psi_1) , \quad /7/$$

a ponieważ:

$$\psi_1 = \psi_0 + \alpha \psi'_{x_0} + o(h^2)$$

oraz:
$$\psi'_{y_1} = \psi'_{y_0} + \alpha \psi''_{xy_0} ,$$

to podstawienie powyższych zależności do równania (7) prowadzi do wzoru:

$$\psi'_{x_1} = \frac{1}{p_1} (u_1 - q_1 \psi'_{y_0} - q_1 \alpha \psi''_{xy_0} - r_1 \psi_0 - r_1 \alpha \psi'_{x_0}) \quad /8/$$

W celu pozbycia się pochodnej mieszanej w (8) zróżniczkujemy (2) względem y. Otrzymamy dla węzła 1:

$$p'_{y_1} \psi'_{x_1} + p_1 \psi''_{xy_1} + q'_{y_1} \psi'_{y_1} + q_1 \psi''_{yy_1} + r'_{y_1} \psi_1 + r_1 \psi'_{y_1} = u'_{y_1} ;$$

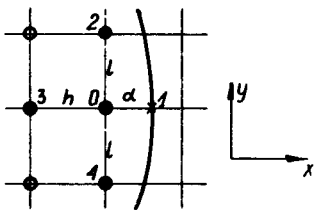
stad, po przekształceniu, znajdziemy:

$$\psi''_{xy_0} = \frac{1}{p_1} (u'_{y_1} - p'_{y_1} \psi'_{x_0} - q'_{y_1} \psi'_{y_0} - q_1 \psi''_{yy_0} - r'_{y_1} \psi_0 - r_1 \psi'_{y_0}) .$$

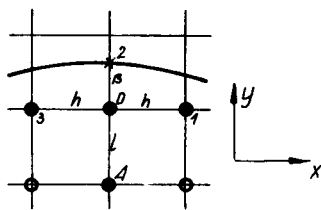
Podstawienie powyższego wyrażenia do (8) prowadzi do związku:

$$\begin{aligned} \psi'_{x_1} = \frac{1}{p_1} [& u_1 - q_1 \psi'_{y_0} - \frac{q_1 \alpha}{p_1} (u'_{y_1} - p'_{y_1} \psi'_{x_0} - q'_{y_1} \psi'_{y_0} - q_1 \psi''_{yy_0} + \\ & - r'_{y_1} \psi_0 - r_1 \psi'_{y_0}) - r_1 \psi_0 - r_1 \alpha \psi'_{x_0}] . \end{aligned} \quad /9/$$

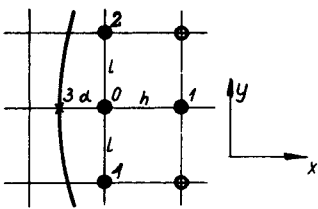
Uwzględniając (9) w (8) otrzymamy:



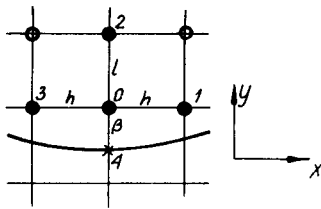
Rys. 3.



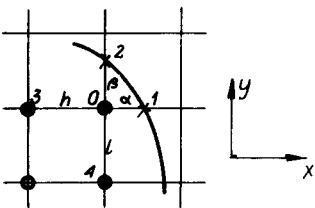
Rys. 4.



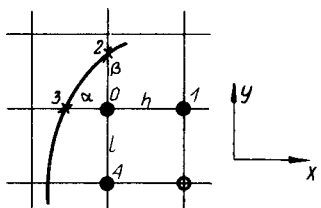
Rys. 5.



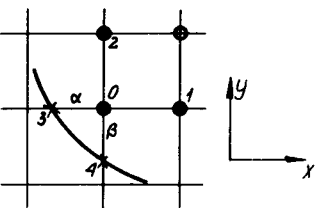
Rys. 6.



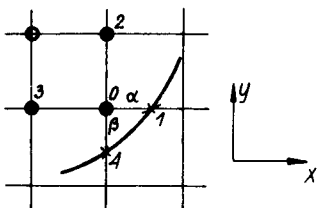
Rys. 7.



Rys. 8.



Rys. 9.



Rys. 10.

$$\psi'_{x_0} = \frac{1}{1} \left[1 - q_1 \psi'_{y_0} - \frac{q_1 \alpha}{p_1} (u'_{y_1} - p'_{y_1} \psi'_{x_0} - q'_{y_1} \psi'_{y_0} + \right. \\ \left. - q_1 \psi''_{yy_0} - r'_{y_1} \psi_0 - r_1 \psi'_{y_0}) - r_1 \psi_0 - r_1 \alpha \psi'_{x_0} \right] - \alpha \psi''_{xx_0} ,$$

lub po prostych przekształceniach:

$$\psi'_{x_0} = \frac{r_1}{B_1} \left[u_1 - q_1 \psi'_{y_0} - \frac{q_1 \alpha}{p_1} (u'_{y_1} - q'_{y_1} \psi'_{y_0} - q_1 \psi''_{yy_0} + \right. \\ \left. - r'_{y_1} \psi_0 - r_1 \psi'_{y_0}) - r_1 \psi_0 - p_1 \alpha \psi''_{xx_0} \right] .$$

Wprowadźmy to wyrażenie do (5); po odpowiednim zgrupowaniu wyrazów dostaniemy:

$$B_1 \psi_3 - C_1 \psi_0 - D_1 \psi'_{y_0} + q_1^2 h \alpha \psi''_{yy_0} + F_1 = \frac{1}{2} p_1^2 h (2\alpha + h) \psi''_{xx_0} . /10/$$

Pisząc wzór Taylora dla węzłów (0,2) i (0,4) mamy:

$$\psi_2 = \psi_0 + 1 \psi'_{y_0} + \frac{1}{2} \psi''_{yy_0} + o(1^3) ,$$

$$\psi_4 = \psi_0 - 1 \psi'_{y_0} + \frac{1}{2} \psi''_{yy_0} + o(1^3) .$$

Stąd wyznaczamy:

$$\psi'_{y_0} = \frac{\psi_2 - \psi_4}{21} , \quad \psi''_{yy_0} = \frac{\psi_2 + \psi_4 - 2\psi_0}{1^2} . \quad /11/$$

Wprowadźmy zależności (11) do wzoru (10) i pomnóżmy go obustronnie przez a/h^2 ; wtedy:

$$\frac{a}{h^2} \left[B_1 \psi_3 - C_1 \psi_0 - \frac{D_1}{21} (\psi_2 - \psi_4) + \frac{q_1^2 h \alpha}{1^2} (\psi_2 + \psi_4 - 2\psi_0) + \right. \\ \left. + F_1 \right] = \frac{p_1^2 (2\alpha + h)}{2h} a \psi''_{xx_0} . \quad /12/$$

Rozwinięcia współczynników B_i , C_i , D_i , E_i , F_i , będących skrótami pewnych wyrażeń - podane są w Dodatku.

Mnożąc drugą z zależności (11) przez $\frac{p_1^2(2\alpha + h)}{2h}$ b i dodając stronami do (12) dostaniemy:

$$\frac{a}{h^2} [B_1 \psi_3 - C_1 \psi_0 - \frac{D_1}{2l} (\psi_2 - \psi_4)] + \frac{E_1}{h^2} (\psi_2 + \psi_4 - 2\psi_0) +$$

$$\frac{a}{h^2} F_1 = \frac{p_1^2(2\alpha + h)}{2h} (a \psi''_{xx_0} + b \psi''_{yy_0}). \quad /13/$$

Korzystając ze związków:

$$h \psi'_{x_0} = \psi_0 - \psi_3, \quad 2l \psi'_{y_0} = \psi_2 - \psi_4$$

możemy napisać zależność:

$$\frac{p_1^2(2\alpha + h)}{2h} \left(c \frac{\psi_0 - \psi_3}{h} + d \frac{\psi_2 - \psi_4}{2l} + g \psi_0 \right) =$$

$$= \frac{p_1^2(2\alpha + h)}{2h} (c \psi'_{x_0} + d \psi'_{y_0} + g \psi_0). \quad /14/$$

Dodając stronami (13) i (14) otrzymamy:

$$\frac{a}{h^2} B_1 \psi_3 - \frac{a}{h^2} C_1 \psi_0 - \frac{a D_1}{2h^2 l} (\psi_2 - \psi_4) + \frac{E_1}{h^2} (\psi_2 + \psi_4 - 2\psi_0) +$$

$$\frac{p_1^2(2\alpha + h)}{2h} \left[-\frac{c}{h} (\psi_0 - \psi_3) + \frac{d}{2l} (\psi_2 - \psi_4) + g \psi_0 \right] + \frac{a F_1}{h^2} =$$

$$= \frac{p_1^2(2\alpha + h) f_0}{2h};$$

tutaj oznaczono:

$$f_0 = a \psi''_{xx_0} + b \psi''_{yy_0} + c \psi'_{x_0} + d \psi'_{y_0} + g \psi_0. \quad /16/$$

Porządkując wyrażenie (15) otrzymamy zależność wiążącą wartości funkcji ψ w węźle 0 z wartościami w sąsiednich węzłach:

$$\psi_c = A_{01} + A_{21} \psi_2 + A_{31} \psi_3 + A_{41} \psi_4, \quad /17/$$

gdzie:

$$A_{01} = \frac{2 a F_1 - f_0 p_1^2 (2\alpha + h)h}{2M_1},$$

$$A_{21} = \frac{-2 a D_1 + 4lE_1 + dp_1^2 (2\alpha + h)h}{4lM_1},$$

/18/

$$A_{31} = \frac{2 a F_1 - c p_1^2 (2\alpha + h)}{2 M_1},$$

$$A_{41} = \frac{2 a D_1 + 4 l E_1 - dp_1^2 (2\alpha + h)h}{4 l M_1}.$$

Wyprowadzimy zależność różnicową dla węzła 0 przedstawionego na rys.4. Pisząc wzór Taylora dla węzłów(0,4) oraz (0,2) mamy odpowiednio:

$$\psi_4 = \psi_0 - l \psi'_{y_0} + \frac{l^2}{2} \psi''_{yy_0} + o(l^3), \quad /19/$$

$$\psi'_{y_0} = \psi'_{y_2} - \beta \psi''_{yy_0} + o(l^2) \quad /20/$$

Z warunku brzegowego (2) wyznaczamy:

$$\psi'_{y_2} = \frac{1}{q_2} (u_2 - p_2 \psi'_{x_2} - r_2 \psi_2) \quad ; \quad /21/$$

a ponieważ:

$$\psi_2 = \psi_0 + \beta \psi'_{y_0} + o(l^2),$$

więc:

$$\psi'_{x_2} = \psi'_{x_0} + \beta \psi''_{xy_0}.$$

Podstawienie powyższych zależności do równania (21) prowadzi do związku:

$$\psi'_{y_2} = \frac{1}{q_2} (u_2 - p_2 \psi'_{x_0} - p_2 \beta \psi''_{xy_0} - r_2 \psi_0 - r_2 \beta \psi'_{y_0}) \quad /22/$$

Zróżniczkujemy (2) względem zmiennej x ; wtedy:

$$p'_{x_2} \psi'_{x_2} + p_2 \psi''_{xx_2} + q_{x_2} \psi'_{y_2} + q_2 \psi''_{xy_2} + r'_{x_2} \psi_2 + r_2 \psi'_{x_2} = \\ = u'_{x_2};$$

stąd wyznaczamy:

$$\psi''_{xy_0} = \frac{1}{q_2} (u'_{x_2} - p'_{x_2} \psi'_{x_0} - p_2 \psi''_{xx_0} - q'_{x_2} \psi'_{y_0} - r'_{x_2} \psi_0 + \\ - r_2 \psi'_{x_0})$$

Podstawienie tej zależności do (22) prowadzi do związku:

$$\psi'_{y_2} = \frac{1}{q_2} [u_2 - p_2 \psi'_{x_0} - \frac{p_2 \beta}{q_2} (u'_{x_2} - p'_{x_2} \psi'_{x_0} + \\ - q_{x_2} \psi'_{y_0} - p_2 \psi''_{xx_0} - r'_{x_2} \psi_0 - r_2 \psi'_{x_0}) - r_2 \psi_0 - r_2 \beta \psi'_{y_0}]. \quad /23/$$

Wstawiając (23) w (20) otrzymamy po wykonaniu prostych przekształceń:

$$\psi_0 = \frac{q_2}{B_2} [u_2 - p_2 \psi'_{x_0} - \frac{p_2 \beta}{q_2} (u'_{x_2} - p'_{x_2} \psi'_{x_0} - p_2 \psi''_{xx_0} + \\ - r'_{x_2} \psi_0 - r_2 \psi'_{x_0}) - r_2 \psi_0 - q_2 \beta \psi''_{xy_0}].$$

Wstawiając nasze wyrażenie do (1) i grupując wyrazy dostaniemy:

$$-p_2 \psi'_{x_0} - \frac{p_2 \beta}{q_2} (u'_{x_2} - p'_{x_2} \psi'_{x_0} - p_2 \psi''_{xx_0} - r'_{x_2} \psi_0 - r_2 \psi'_{x_0}) - r_2 \psi_0 - q_2 \beta \psi''_{xy_0} = \frac{1}{2} q_2^2 (2\beta + 1) \psi''_{yy_0} \quad /24/$$

Posługując się wzorem Taylora możemy napisać:

$$\psi_1 = \psi_0 + h \psi'_{x_0} + \frac{h^2}{2} \psi''_{xx_0} + o(h^3),$$

$$\psi_3 = \psi_0 - h \psi'_{x_0} + \frac{h^2}{2} \psi''_{xx_0} + o(h^3);$$

Stąd mamy:

$$\psi'_{x_0} = \frac{\psi_1 - \psi_3}{2h}, \quad \psi''_{xx_0} = \frac{\psi_1 + \psi_3 - 2\psi_0}{h^2}. \quad /25/$$

Podstawiając (25) do (24) i mnożąc stronami otrzymaną równość przez b/l^2 dostaniemy:

$$\frac{b}{l^2} \left[B_2 \psi_4 - C_2 \psi_0 - \frac{D_2}{2h} (\psi_1 - \psi_3) + \frac{P_2^2}{h^2} \frac{1}{\beta} (\psi_1 + \psi_3 - 2\psi_0) + F_2 \right] = \frac{q_2^2 (2\beta + 1)}{21} \cdot b \psi''_{yy_0}. \quad /26/$$

Mnożąc drugą z zależności (25) przez $\frac{q_2^2 (2\beta + 1)}{21}$ i dodając stronami do (26) otrzymamy:

$$\frac{b}{l^2} \left[B_2 \psi_4 - C_2 \psi_0 - \frac{D_2}{2h} (\psi_1 - \psi_3) \right] + \frac{E_2}{l^2} (\psi_1 + \psi_3 - 2\psi_0) + \frac{b F_2}{l^2} = \frac{q_2^2 (2\beta + 1)}{21} (\psi''_{xx_0} + b \psi''_{yy_0}). \quad /27/$$

Ze związków:

$$1 \psi'_y \quad \psi - \psi_4, \quad 2h \psi'_{x_0} = \psi_1 - \psi_3$$

wynika równość:

$$\frac{q_2^2 (2\beta + 1)}{21} \left(c \frac{\psi_1 - \psi_3}{2h} + d \frac{\psi_0 - \psi_4}{l} + g \psi_0 \right) =$$

$$= \frac{q_2^2 (2\beta + 1)}{21} \left(c \psi'_{x_0} + d \psi'_{y_0} + g \psi_0 \right) . \quad /28/$$

Dodając stronami (27) do (28) i grupując odpowiednio wyrazy otrzymamy zależność różnicową wiążącą wartości funkcji ψ w węźle 0 z wartościami w sąsiednich węzłach:

$$\psi_0 = A_{02} + A_{12} \psi_1 + A_{32} \psi_3 + A_{42} \psi_4 , \quad /29/$$

gdzie:

$$A_{02} = \frac{2b F_2 - f_0 q_2^2 (2\beta + 1)l}{2 M_2} ,$$

$$A_{12} = \frac{-2b D_2 + 4h E_2 + c q_2^2 (2\beta + 1)l}{4h M_2} , \quad /30/$$

$$A_{32} = \frac{2b D_2 + 4h E_2 - c q_2^2 (2\beta + 1)l}{4h M_2} ,$$

$$A_{42} = \frac{2b B_2 - d q_2^2 (2\beta + 1)}{2 M_2} .$$

Rozumując podobnie można wyprowadzić zależności aproksymacyjne dla węzłów przedstawionych na rys. 5 i rys. 6.

Dla węzła przedstawionego na rys 5 będzie:

$$\psi_0 = A_{03} + A_{13} \psi_1 + A_{23} \psi_2 + A_{43} \psi_4 , \quad /31/$$

gdzie:

$$A_{03} = - \frac{2a F_3 + f_0 p_3^2 (2\alpha + h)}{2 M_3} , \quad /32/$$

$$A_{13} = \frac{2a B_3 + c p_3^2 (2\alpha + h)}{2 M_3} ,$$

$$A_{23} = \frac{2a D_3 + 4l E_3 + dp_3^2 (2\alpha + h)h}{4lM_3} ,$$

/32/

$$A_{43} = - \frac{2a D_3 - 4l E_3 + dp_3^2 (2\alpha + h)h}{4lM_3} ,$$

Dla węzła przedstawionego na rys. 6. otrzymamy:

$$\psi_0 = A_{04} + A_{14} \psi_1 + A_{24} \psi_2 + A_{34} \psi_3 , \quad /33/$$

gdzie:

$$A_{04} = - \frac{2b F_4 + f_0 q_4^2 (2\beta + 1) l}{2 M_4} ,$$

$$A_{14} = \frac{2b D_4 + 4hE_4 + c q_4^2 (2\beta + 1) l}{4h M_4} ,$$

/34/

$$A_{24} = \frac{2b B_4 + d q_4^2 (2\beta + 1)}{2 M_4} ,$$

$$A_{34} = - \frac{2b D_4 - 4h E_4 + c q_4^2 (2\beta + 1) l}{4h M_4} .$$

3. Węzły drugiego typu

Rozważmy węzeł brzegowy 0 przedstawiony na rys. 7 oraz otaczające go cztery węzły, z których węzły 1 i 2 są węzłami leżącymi na brzegu Γ obszaru G.

Dla wyprowadzenia formuły różnicowej dla tego węzła posłużymy się zależnościami (10) i (24).

Z wzoru Taylora dla węzła 4, tzn. z wzoru (19), wynika:

$$\psi'_{y_0} = \frac{\psi_0 - \psi_4}{l} + \frac{1}{2} \psi''_{yy_0} ;$$

wprowadzając powyższą wartość ψ'_{y_0} do (10) otrzymamy:

$$\begin{aligned} \frac{1}{2} p_1^2 h (2\alpha + h) \psi''_{xx_0} + \frac{1}{2} (D_1 l - 2 q_1^2 h \alpha) \psi''_{yy_0} = \\ = - \left(C_1 + \frac{D_1}{l} \right) \psi_0 + B_1 \psi_3 + \frac{D_1}{l} \psi_4 + F_1 \quad . \quad /35/ \end{aligned}$$

Podobnie, uwzględniając w (24) wartość pochodnej ψ_{x_0} równą:

$$\psi'_{x_0} = \frac{\psi_0 - \psi_3}{h} + \frac{h}{2} \psi''_{xx_0} \quad ,$$

mamy:

$$\begin{aligned} \frac{1}{2} (D_2 h - 2 p_2^2 l \beta) \psi''_{xx_0} + \frac{1}{2} q_2^2 l (2\beta + 1) \psi''_{yy_0} = \\ = - \left(C_2 + \frac{D_2}{h} \right) \psi_0 + \frac{D_2}{h} \psi_3 + B_2 \psi_4 + F_2 \quad . \quad /36/ \end{aligned}$$

Rozwiązując układ równań (35) i (36) względem pochodnych ψ''_{xx_0} i ψ''_{yy_0} dostaniemy:

$$\begin{aligned} W_{12} \psi''_{xx_0} = q_2^2 l (2\beta + 1) \left[- \left(C_1 + \frac{D_1}{l} \right) \psi_0 + B_1 \psi_3 + \frac{D_1}{l} \psi_4 + F_1 \right] + \\ - (D_1 l - 2 q_1^2 h \alpha) \left[- \left(C_2 + \frac{D_2}{h} \right) \psi_0 + \frac{D_2}{h} \psi_3 + B_2 \psi_4 + F_2 \right], \quad /37/ \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} W_{12} \psi''_{yy_0} = p_1^2 h (2\alpha + h) \left[- \left(C_2 + \frac{D_2}{h} \right) \psi_0 + \frac{D_2}{h} \psi_3 + B_2 \psi_4 + F_2 \right] + \\ - (D_2 h - 2 p_2^2 l \beta) \left[- \left(C_1 + \frac{D_1}{l} \right) \psi_0 + B_1 \psi_3 + \frac{D_1}{l} \psi_4 + F_1 \right]. \quad /38/ \end{aligned}$$

Mnożąc wyrażenie 53 przez a, wyrażenie (54) przez b i dodając stronami otrzymamy:

$$W_{12} (a \psi''_{xx_0} + b \psi''_{yy_0}) = - G_1 \left[- \left(C_2 + \frac{D_2}{h} \right) \psi_0 + \frac{D_2}{h} \psi_3 + B_2 \psi_4 + F_2 \right] +$$

$$+ G_2 \left[- \left(C_1 + \frac{D_1}{l} \right) \psi_0 + B_1 \psi_3 + \frac{D_1}{l} \psi_4 + F_1 \right]. \quad /39/$$

$$\text{Ponieważ: } \psi'_{x_0} = \frac{\psi_0 - \psi_3}{h}, \quad \psi'_{y_0} = \frac{\psi_0 - \psi_4}{l},$$

to możemy napisać równość:

$$W_{12} \left(c \psi'_{x_0} + d \psi'_{y_0} + g \psi_0 \right) = W_{12} \left(c \frac{\psi_0 - \psi_3}{h} + d \frac{\psi_0 - \psi_4}{l} + g \psi_0 \right). \quad /40/$$

Dodając stronami (39) do (40) i grupując odpowiednio wyrazy otrzymamy wzór aproksymacyjny dla rozważanego węzła w postaci:

$$\psi_0 = A_{012} + A_{312} \psi_3 + A_{412} \psi_4, \quad /41/$$

gdzie:

$$\begin{aligned} A_{012} &= \frac{-G_1 F_2 + G_2 F_1 - f_0 W_{12}}{M_{12}}, \\ A_{312} &= \frac{-G_1 D_2 + G_2 B_1 h - c W_{12}}{h M_{12}}, \\ A_{412} &= \frac{-G_1 B_2 l + G_2 D_1 - d W_{12}}{l M_{12}}. \end{aligned} \quad /42/$$

Podobnie rozumując można wyprowadzić zależności aproksymacyjne dla węzłów przedstawionych na rys. 8-10.

Dla węzła przedstawionego na rys. 8 będzie:

$$\psi_0 = A_{023} + A_{123} \psi_1 + A_{423} \psi_4, \quad /43/$$

gdzie:

$$\begin{aligned} A_{023} &= \frac{-H_2 F_3 + H_3 F_2 + f_0 W_{23}}{M_{23}}, \\ A_{123} &= \frac{H_2 B_3 h - H_3 D_3 - c W_{23}}{h M_{23}}, \end{aligned} \quad /44/$$

$$A_{423} = \frac{-H_2 D_3 + H_3 B_2 l + d W_{23}}{l M_{23}} \quad /44/$$

Dla węzła pokazanego na rys. 9 otrzymamy:

$$\psi_0 = A_{034} + A_{134} \psi_1 + A_{234} \psi_2 \quad , \quad /45/$$

gdzie:

$$A_{034} = \frac{G_3 F_4 - G_4 F_3 - f_0 W_{34}}{M_{34}} \quad ,$$

$$A_{134} = \frac{-G_3 D_4 + G_4 B_3 h + c W_{34}}{h M_{34}} \quad , \quad /46/$$

$$A_{234} = \frac{-G_3 B_4 l + G_4 D_3 + d W_{34}}{l M_{34}} \quad .$$

Dla węzła przedstawionego na rys. 10 będzie:

$$\psi_0 = A_{041} + A_{241} \psi_2 + A_{341} \psi_3 \quad . \quad /47/$$

gdzie:

$$A_{041} = \frac{-H_1 F_4 + H_4 F_1 - f_0 W_{41}}{M_{41}} \quad ,$$

$$A_{241} = \frac{H_1 B_4 l - H_4 D_1 - d W_{41}}{l M_{41}} \quad , \quad /48/$$

$$A_{341} = \frac{-H_1 D_4 + H_4 B_1 h + c W_{41}}{h M_{41}} \quad .$$

4. Omówienie otrzymanych zależności

Rozwiążmy równanie (4) względem wartości funkcji ψ w węźle (i, j) ; używając numeracji węzłów takiej, jak na rys. 3 do 10, możemy rozwiązanie zapisać w postaci:

$$\psi_0 = A_0 + A_1 \psi_1 + A_2 \psi_2 + A_3 \psi_3 + A_4 \psi_4 \quad /47/$$

gdzie:

$$A_0 = \frac{-f_0 h^2 l^2}{2a l^2 + 2b h^2 - g h^2 l^2} \quad ,$$

$$A_1 = \frac{(2a + c h) l^2}{2(2a l^2 + 2b h^2 - g h^2 l^2)} \quad ,$$

$$A_2 = \frac{(2b + d l) l^2}{2(2a l^2 + 2b h^2 - g h^2 l^2)} \quad , \quad /50/$$

$$A_3 = \frac{(2a - c h) l^2}{2(2a l^2 + 2b h^2 - g h^2 l^2)} \quad ,$$

$$A_4 = \frac{(2b - d l) h^2}{2(2a l^2 + 2b h^2 - g h^2 l^2)} \quad ,$$

Wyprowadzone w pracy formuły różnicowe dla węzłów brzegowych mają lokalną dokładność $O(h^3)$. Przy dodatnich wartościach współczynników A_{ij} ($i, j = 1, 2, 3, 4$) we wzorach typu (17) oraz A_{ijk} ($i, j, k = 1, 2, 3, 4$) we wzorach typu (41), formuły te - wspólnie z formułami typu (49) dla węzłów wewnętrznych - pozwalają rozwiązać postawione zadanie brzegowe z dokładnością $O(h^2)$ [4, 8].

Dodatknie wartości współczynników A_{ij} oraz A_{ijk} zależą od wartości $p(s)$ oraz $q(s)$ i przy dostatecznie małych h i l wystąpią, jeżeli wyrażenie $p \psi'_x + q \psi'_y$ będzie bliskie ψ'_n .

W przypadku węzłów pierwszego typu przedstawionych na rys. 3 i 5 współczynniki A_{ij} będą dodatnie dla $|p(s)| > |q(s)|$, a w przypadku węzłów przedstawionych na rys. 4 i 6 dla $|q(s)| > |p(s)|$.

Dla szczególnego przypadku $a = b = 1$ wyprowadzone formuły ulegają nieznacznemu uproszczeniu i dla węzłów pierwszego typu pokrywają się z zależnościami podanymi w pracy [5].

Natomiast w pracy [7] omówiono sposób rozwiązania postawionego zadania dla równań Laplace'a i Poissona oraz brzegu w kształcie łuku okręgu koła.

Dla $p = q = 0$ wyprowadzone zależności tracą sens liczbowy. Jedynym

tych przypadkach zmienia się charakter zagadnienia brzegowego; zagadnienie z uogólnionego przechodzi w zagadnienie Dirichleta, dla którego należy stosować w węzłach brzegowych niesymetryczną aproksymację różnicową równania (1) [3,6].

Należy stwierdzić, że przytoczona tutaj postać formuł rozwiązujących postawione zagadnienie (t.j. formuł typu (49) oraz typu (17) i (41)) jest szczególnie dogodna do stosowania metod iteracyjnych.

5. Dodatek

$$B_1 = p_1^2 - q_1 \alpha p'_{y_1} + p_1 r_1 \quad ,$$

$$B_2 = q_2^2 - p_2 \beta q'_{x_2} + q_2 r_2 \quad ,$$

$$B_3 = p_3^2 + q_3 \alpha q'_{y_3} - p_3 r_3 \quad ,$$

$$B_4 = q_4^2 - p_4 \beta q'_{x_4} - q_4 r_4 \quad ;$$

$$C_1 = B_1 - h (q_1 \alpha r'_{y_1} - p_1 r_1) \quad ,$$

$$C_2 = B_2 - l (p_2 \beta r'_{x_2} - q_2 r_2) \quad ,$$

$$C_3 = B_3 - h (q_3 \alpha r'_{y_3} + p_3 r_3) \quad ,$$

$$C_4 = B_4 - l (p_4 \beta r'_{x_4} - q_4 r_4) \quad ;$$

$$P_1 = h q_1 (p_1 - \alpha q'_{y_1} - \alpha r_1) \quad ,$$

$$P_2 = l p_2 (q_2 - \beta r'_{x_2} - \beta r_2) \quad ,$$

$$P_3 = h q_3 (p_3 + \alpha q'_{y_3} - \alpha r_3) \quad ,$$

$$P_4 = l p_4 (q_4 + \beta r'_{x_4} + \beta r_4) \quad ;$$

$$E_1 = \frac{h}{2l^2} [2a q_1^2 + b p_1^2 (2\alpha + h)],$$

$$E_2 = \frac{1}{2h^2} [a q_2^2 (2\beta + 1) + 2b p_2^2 \rho],$$

$$E_3 = \frac{h}{2l^2} [2a q_3^2 \alpha + b p_3^2 (2\alpha + h)],$$

$$E_4 = \frac{1}{2h^2} [a q_4^2 (2\beta + 1) + 2b p_4^2 \rho];$$

$$F_1 = h (u_1 p_1 - q_1 \alpha u'_{y_1}),$$

$$F_2 = l (u_2 q_2 - p_2 \beta u'_{x_2}),$$

$$F_3 = h (u_3 p_3 + q_3 \alpha u'_{y_3}),$$

$$F_4 = l (u_4 q_4 - p_4 \beta u'_{x_4});$$

$$M_1 = aC_1 + 2E_1 - \frac{p_1^2 (2\alpha + h)}{2} (c + hg),$$

$$M_2 = bC_2 + 2E_2 - \frac{q_2^2 (2\beta + 1)}{2} (d + lg),$$

$$M_3 = aC_3 + 2E_3 + \frac{p_3^2 (2\alpha + h)}{2} (c - hg),$$

$$M_4 = bC_4 + 2E_4 + \frac{q_4^2 (2\beta + 1)}{2} (d - lg);$$

$$W_{12} = \frac{1}{2} [p_1^2 q_2^2 h l (2\alpha + h) (2\beta + 1) - (D_1 l - 2q_1^2 h \alpha) (D_2 h - 2p_2^2 l \rho)],$$

$$W_{23} = \frac{1}{2} [-q_2^2 p_3^2 h l (2\alpha + h) (2\beta + 1) + (D_2 h + 2p_2^2 l \rho) (D_3 l + 2q_3^2 h \alpha)],$$

$$W_{34} = \frac{1}{2} [p_3^2 q_4^2 h l (2\alpha + h) (2\beta + 1) - (D_3 l - 2q_3^2 h \alpha) (D_4 h - 2p_4^2 l \rho)],$$

$$w_{41} = \frac{1}{2} \left[-q_4^2 p_1^2 h l (2\alpha + h) (2\beta + 1) + (D_4 h + 2p_4^2 l \beta) (D_1 l + 2q_1^2 h \alpha) \right];$$

$$G_1 = a (D_1 l - 2q_1^2 h \alpha) - b p_1^2 h (2\alpha + h) ,$$

$$G_2 = a q_2^2 l (2\beta + 1) - b (D_2 h - 2p_2^2 l \beta) ,$$

$$G_3 = a (D_3 l - 2q_3^2 h \alpha) - b p_3^2 h (2\alpha + h) ,$$

$$G_4 = a q_4^2 l (2\beta + 1) - b (D_4 h - 2p_4^2 l \beta) ;$$

$$H_1 = a (D_1 l + 2q_1^2 h \alpha) + b p_1^2 h (2\alpha + h) ,$$

$$H_2 = a q_2^2 l (2\beta + 1) + b (D_2 h + 2p_2^2 l \beta) ,$$

$$H_3 = a (D_3 l + 2q_3^2 h \alpha) + b p_3^2 h (2\alpha + h) ,$$

$$H_4 = a q_4^2 l (2\beta + 1) + b (D_4 h + 2p_4^2 l \beta) ;$$

$$M_{12} = -G_1 \left(c_2 + \frac{D_2}{h} \right) + G_2 \left(c_1 + \frac{D_1}{l} \right) - w_{12} \left(\frac{c}{h} + \frac{d}{l} + g \right) ,$$

$$M_{23} = H_2 \left(c_3 - \frac{D_3}{l} \right) + H_3 \left(c_2 - \frac{D_2}{h} \right) + w_{23} \left(-\frac{c}{h} + \frac{d}{l} + g \right) ,$$

$$M_{34} = -G_3 \left(c_4 + \frac{D_4}{h} \right) + G_4 \left(c_3 + \frac{D_3}{l} \right) + w_{34} \left(\frac{c}{h} + \frac{d}{l} - g \right) ,$$

$$M_{41} = H_4 \left(c_1 - \frac{D_1}{l} \right) + H_1 \left(c_4 - \frac{D_4}{h} \right) + w_{41} \left(\frac{c}{h} - \frac{d}{l} + g \right) ,$$

Literatura

1. Aleksidze M. A., Gabuniya A.S.: Nowyje formuły dlja raznostnogo riešeni-
ja elliptičeskogo upravnenija s obščimi krajewymi usłowijami. Tr.
wyčisl. centra AN Gruzii SSR, T. 9, 1970.
2. Aleksidze M.A.: Oboščeniye mažorantnogo metoda Gersgorina. Tr. wyčisl.
centra AN Gruz. SSR, T. 3, 1963.
3. Batschelet E.: Über die numerische Auflösung von Randwertproblemen bei
elliptischen partialen. Differentialgleichungen, ZAMP, 3, Nr 3 .
1952.
4. Berezin J.S., Zidkow NiP.: Metody wyčislenij, T.2, Fizmatgiz , Moskwa
1962.
5. Kantorowicz L.W., Kryłow W.J.: Približennyje metody wyššego analiza .
Gostechmizdat-Moskwa 1949.
6. Panow D.J.: Metody numeryczne rozwiazywania równań różniczkowych cząstko-
wych, PWN, Warszawa 1955.
7. Shaw W.: Relaxation Methods. Dover Publ. Inc. 1953.
8. Wołkow E.A.: K riešeniju metodom setok urawnenij elliptičeskogo tipa s
krawiewymi usłowijami, sodieržanščimi proizvodnyje. DAN SSSR, T. 102,
Nr 3, 1955.

Edward Walicki

THE FINITE - DIFFERENCE SOLUTION OF THE GENERAL
BOUNDARY- VALUE PROBLEM FOR ELLIPTIC EQUATION

S u m m a r y

In this paper the solution of the general boundary - value problem - given by relations (1) and (2) - for the elliptic equation is presented.

It gives the four - points formula of finite - difference approximation of the equation (1) in the rectangular network. Next the approximal expressions are given for the boundary points irregular stars of the first type (Figs 3 - 6) and the second type (Figs 7 - 10) .

The form of the obtained expressions for solving the problem is adapted for the use of reiteration methods.

Эдвард Валицкий

РЕШЕНИЕ МЕТОДОМ КОНЕЧНЫХ РАЗНОСТЕЙ ГРАНИЧНОЙ ЗАДАЧИ
ОБЩЕГО ТИПА ДЛЯ ЭЛЛИПТИЧЕСКОГО УРАВНЕНИЯ

/Резюме/

В настоящей работе представлено решение общей граничной задачи - данной уравнениями /1/ и /2/ - для эллиптического уравнения.

Представлена простая разностная четырёхузловая схема уравнения при использовании прямоугольной сетки.

Затем выведены аппроксимационные формулы для граничных узлов первого типа /рис. 3 - 6/ и для граничных узлов второго типа /рис. 7 - 10/.

Разностные формулы для решения представленной задачи приспособлены для применения метода простой итерации.

Edward Walicki

LAMINARNY PRZEPŁYW CIECZY LEPKIEJ W PROSTOKĄTNYM KANALE

W pracy podano wzory opisujące rozkład prędkości i wydatek laminarnego przepływu cieczy lepkiej w prostokątnym kanale o przekroju $/2a \times 2b/$. Rozważono przypadki przepływu ustalonego i nieustalonego w poziomym kanale całkowicie wypełnionym cieczą, oraz w kanale nachylonym do poziomu, częściowo i całkowicie wypełnionym cieczą.

Dla przepływu nieustalonego przyjęto gradient ciśnienia w postaci liniowej funkcji czasu.

1. Wstęp

Przepływy cieczy o dużych lepkościach w zakresie prędkości stosowanych w technice zachowują często charakter przepływów laminarnych. Takie przepływy przez kanały o przekroju kołowym, czy eliptycznym, wydają się być dostatecznie przebadane, natomiast brakuje omówień przepływów przez kanały o innych kształtach, ostatnio coraz częściej spotykanych w zastosowaniach.

W pracy rozważono szczególne przypadki przepływu laminarnego ustalonego i nieustalonego w kanale o przekroju prostokątnym całkowicie lub częściowo wypełnionym cieczą lepką. W oparciu o znane rozwiązanie przepływu ustalonego w kanale o poziomej osi wyprowadzono rozwiązania dla przepływów:

- nieustalonego przepływu w kanale o poziomej osi, wywołanego gradientem ciśnienia będącym liniową funkcją czasu,
- ustalonego przepływu w nachyłym kanale częściowo wypełnionym cieczą,
- ustalonego przepływu, wywołanego ciśnieniem hydrostatycznym w nachyłym kanale całkowicie wypełnionym cieczą.

Podano formuły opisujące profil prędkości i wydatek przepływającej cieczy. Formuły dla wydatku przedstawiono w postaci dogodnej do obliczeń technicznych, zbliżonej do formuły określającej wydatek przepływu ustalonego w kanale o poziomej osi.

Równania Naviera i Stokesa oraz równanie ciągłości, opisujące dowolny przepływ cieczy lepkiej [1], redukują się dla rozważanego przepływu w kanale o protoliniowej osi/ do równania (1) wiążącego prędkość przepływu $w = w(x, y, t)$ z ciśnieniem $p = p(z, t)$:

$$\nu \left(\frac{\partial^2 w}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 w}{\partial y^2} \right) = \frac{\partial w}{\partial t} + \frac{1}{\rho} \frac{\partial p}{\partial z}, \quad /1/$$

gdzie ν - lepkość kinematyczna cieczy, ρ - gęstość cieczy; tutaj założono, że oś Oz pokrywa się z osią kanału. Dla przepływu ustalonego $w = w(x, y)$, $p = p(z)$, zatem równanie / 1 / przyjmuje postać:

$$\frac{\partial^2 w}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 w}{\partial y^2} = - \frac{K}{\nu}, \quad /2/$$

gdzie oznaczono: $K = - \frac{1}{\rho} \frac{\partial p}{\partial z} = \text{const}$.

W powyższych równaniach założono mały wpływ sił masowych na ruch cieczy w kanale.

2. Ustalony przepływ w prostokątnym poziomym kanale

Obierzmy prostokątny układ współrzędnych, jak pokazano na rys. 1; wtedy brzeg kanału będzie określony nierównościami:

$$-a \leq x \leq +a, \quad -b \leq y \leq +b, \quad (b > a). \quad /3/$$

Aby wyznaczyć rozkład prędkości w przepływającej cieczy, należy scałkować równanie / 2 /, spełniając warunki brzegowe:

$$w = 0 \quad \text{dla} \quad x = \pm a, \quad y = \pm b.$$

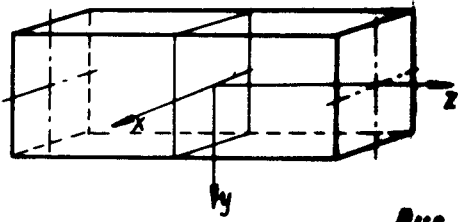
Warunek brzegowy względem boków kanału $x = \pm a$ i warunek symetrii względem osi Oy zostanie spełniony przez przyjęcie prędkości $w(x, y)$ w postaci szeregu trygonometrycznego [2,3]:

$$w(x, y) = \sum_{n=0}^{\infty} \cos \frac{(2n+1)\pi}{2a} x Y_n, \quad /4/$$

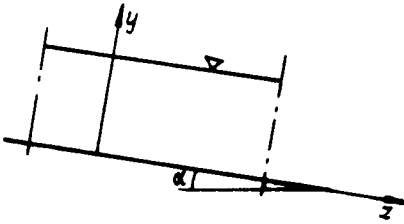
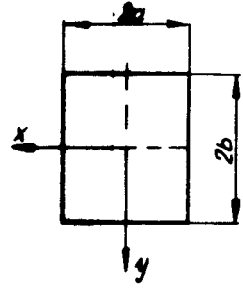
tutaj: $Y_n = Y_n(y)$.

Podstawiając /4/ do /2/ i rozwijając prawą stronę /2/ w szereg Fouriera:

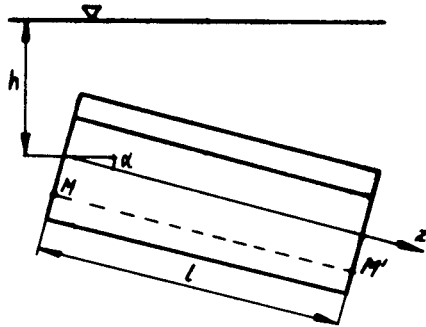
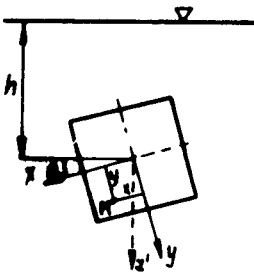
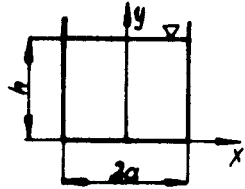
$$-\frac{K}{\nu} = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{4K}{\nu} \frac{(-1)^n}{(2n+1)\pi} \cos \frac{(2n+1)\pi}{2a} x \quad /5/$$



Rys. 1.



Rys. 2.



Rys. 3

otrzymamy dla, wyznaczenia Y_n równanie różniczkowe:

$$Y_n'' - \frac{(2n+1)^2 \pi^2}{4a^2} Y_n = \frac{4K}{\nu} \frac{(-1)^n}{(2n+1)\pi}$$

Rozwiązanie ogólne tego równania ma postać:

$$Y_n = A \sinh \frac{(2n+1)\pi}{2a} y + B \cosh \frac{(2n+1)\pi}{2a} y + \frac{16K\alpha^2}{\nu} \frac{(-1)^n}{(2n+1)^3 \pi^3}$$

Z warunku symetrii przepływu względem osi Ox wynika, że stała całkowania $A = 0$. Stałą całkowania B wyznaczmy z warunku znikania prędkości na bokach kanału $y = b$.

Mamy zatem:

$$Y_n = \frac{16K\alpha^2}{\nu} \frac{(-1)^n}{(2n+1)^3 \pi^3} \left[1 - \frac{\cosh \frac{(2n+1)\pi}{2a} y}{\cosh \frac{(2n+1)\pi}{2a} b} \right] \quad /6/$$

Po podstawieniu zależności /6/ do wzoru /4/ otrzymamy:

$$w = \frac{16K\alpha^2}{\nu \pi^3} \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n}{(2n+1)^3} \left[1 - \frac{\cosh \frac{(2n+1)\pi}{2a} y}{\cosh \frac{(2n+1)\pi}{2a} b} \right] \cos \frac{(2n+1)\pi x}{2a} \quad /7/$$

Wydatek cieczy określa zależność:

$$Q = \iint_F w dF = \int_{-a}^a dx \int_{-b}^b w dy = \frac{128K\alpha^3 b}{\nu \pi^4} \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{(2n+1)^4} +$$

$$- \frac{256K\alpha^4}{\nu \pi^5} \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{(2n+1)^5} \operatorname{tgh} \frac{(2n+1)\pi b}{2a}$$

lub po uwzględnieniu zależności [4]:

$$\sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{(2n+1)^4} = \frac{\pi^4}{96}$$

mamy:

$$Q = \frac{4K\alpha^3 b}{3\nu} \left(1 - \frac{192}{\pi^5} \frac{a}{b} \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{(2n+1)^5} \operatorname{tgh} \frac{(2n+1)\pi b}{2a} \right) \quad /8/$$

W ogólności wydatek można przedstawić w postaci:

$$Q = \frac{4K\alpha^3 b}{3\nu} f\left(\frac{b}{a}\right) \quad /9/$$

gdzie wartość funkcji $f(b/a)$ podano w tabelicy 1.

Tablica 1

$\frac{b}{a}$	1,0	1,2	1,5	2,0	2,5	3,0
$f \frac{b}{a}$	0,422	0,498	0,588	0,687	0,747	0,789
$\frac{b}{a}$	4	5	10	12	100	
$f \frac{b}{a}$	0,843	0,873	0,936	0,948	0,993	0,999

W przypadku, gdy $a > b$, dogodniej jest stosować niżej przytoczone zależności:

$$W = \frac{16 K b^2}{\nu \pi^3} \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n}{(2n+1)^3} \left[1 - \frac{\cosh \frac{(2n+1)\pi}{2b} x}{\cosh \frac{(2n+1)\pi a}{2b}} \right] \cos \frac{(2n+1)\pi}{2b} y \quad /7a/$$

$$Q = \frac{4 K b^3 a}{3 \nu} \left(1 - \frac{192}{\pi^3} \frac{b}{a} \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{(2n+1)^5} \operatorname{tgh} \frac{(2n+1)\pi a}{2b} \right) \quad /8a/$$

$$Q = \frac{4 K b^3 a}{3 \nu} f \left(\frac{a}{b} \right) \quad /9a/$$

Zależności te dla $a > b$ charakteryzują się szybszą zbieżnością niż zależności /7/ - /9/. Współczynnik $f \frac{a}{b}$ jest identyczny ze współczynnikiem zawartym w tablicy 1. W celu odczytania jego wartości należy formalnie zastąpić symbol $\frac{b}{a}$ przez symbol $\frac{a}{b}$.

3. Nieustalony przepływ w prostokątnym kanale

Rozważmy przepływ cieczy lepkiej wywołany liniowo zmiennym w czasie gradientem ciśnienia. Równanie (1) można zapisać w postaci:

$$\frac{\partial w}{\partial t} - \nu \left(\frac{\partial^2 w}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 w}{\partial y^2} \right) = - \varphi(t) \quad /1a/$$

tutaj $\varphi(t) = \frac{1}{g} \frac{\partial p}{\partial x}$ jest liniową funkcją czasu.

Na mocy liniowości funkcji $\varphi(t)$ będziemy poszukiwać rozwiązania równania w postaci sumy rozwiązań:

$$W(x, y, t) = W_0(x, y) \varphi(t) + W_1(x, y) \varphi'(t) \quad /10/$$

gdzie przecinkiem oznaczono pochodną względem czasu.

Podstawiając (10) do (1a) otrzymamy:

$$(\nu \Delta W_0 - 1) \varphi(t) + (\nu \Delta W_1 - W_0) \varphi'(t) = 0,$$

a stąd następujące rekurencyjne równania:

$$\Delta W_0 = \frac{1}{\nu} \quad \Delta W_1 = \frac{1}{\nu} W_0 \quad /11/$$

dla których warunki brzegowe mają postać:

$$W_0 = W_1 = 0 \quad \text{dla } x = \pm a, \quad y = \pm b$$

Zauważmy, że rozwiązanie pierwszego z równań (11) będzie identyczne z rozwiązaniem (1) równania (2), jeżeli zastąpimy K przez -1 . Mamy więc dla W_0 wyrażenie:

$$W_0 = -\frac{16a^2}{\nu \pi^3} \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n}{(2n+1)^3} \left[1 - \frac{\cosh \frac{(2n+1)\pi y}{2a}}{\cosh \frac{(2n+1)\pi b}{2a}} \right] \cos \frac{(2n+1)\pi x}{2a} \quad /12/$$

Drugie z równań (11) możemy przedstawić - przy wykorzystaniu pierwszego z nich - w postaci:

$$\Delta^2 W_1 = \frac{1}{\nu} \Delta W_0 \quad \text{lub} \quad \Delta^2 W_1 = \frac{1}{\nu^2} \quad /13/$$

Rozwiązania tego równania będziemy poszukiwać w postaci podwójnego szeregu trygonometrycznego:

$$W_1 = \sum_{n=0}^{\infty} \sum_{m=0}^{\infty} A_{nm} \cos \frac{(2n+1)\pi x}{2a} \cos \frac{(2m+1)\pi y}{2b}$$

Podstawiając przewidywaną postać rozwiązania do równania (13) i rozwijając jego prawą stronę w szereg trygonometryczny:

$$\frac{1}{\nu^2} = \sum_{n=0}^{\infty} \sum_{m=0}^{\infty} \frac{16}{\nu^2} \frac{(-1)^{n+m}}{(2n+1)(2m+1)} \cos \frac{(2n+1)\pi x}{2a} \cos \frac{(2m+1)\pi y}{2b}$$

otrzymamy:

$$A_{nm} = \frac{256a^2 b^2}{\nu^2 \pi^6} \frac{(-1)^{n+m}}{(2n+1)(2m+1) [(2n+1)^2 b^2 + (2m+1)^2 a^2]}$$

oraz rozwiązanie równania (13) :

$$w_1 = \frac{256\alpha^4 b^4}{\nu^2 \pi^6} \sum_{n=0}^{\infty} \sum_{m=0}^{\infty} (-1)^{n+m} \frac{\cos \frac{(2n+1)\pi x}{2a} \cos \frac{(2m+1)\pi y}{2b}}{(2n+1)(2m+1) [(2n+1)^2 b^2 + (2m+1)^2 \alpha^2]} \quad /14/$$

Podstawienie rozwiązań (12) i (14) dla w_0 i w_1 do zależności (10) daje wyrażenie określające rozkład prędkości przepływającej cieczy w kanale. Wydatek cieczy jest równy:

$$\begin{aligned} Q &= \int_F w dF = \varphi(t) \int_{-a}^a dx \int_{-b}^b w_0 dy + \varphi'(t) \int_{-a}^a dx \int_{-b}^b w_1 dy = \\ &= -\frac{4\alpha^3 b}{3\nu} \left(1 - \frac{192}{\pi^3} \frac{a}{b} \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{(2n+1)^3} \operatorname{tgh} \frac{(2n+1)\pi b}{2a}\right) \varphi(t) + \\ &+ \frac{4096\alpha^5 b^5}{\nu^2 \pi^8} \left(\sum_{n=0}^{\infty} \sum_{m=0}^{\infty} \frac{1}{(2n+1)^2 (2m+1)^2 [(2n+1)^2 b^2 + (2m+1)^2 \alpha^2]} \right) \varphi'(t) \end{aligned}$$

lub po uwzględnieniu zależności [4] :

$$\sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{(2n+1)^2 [(2n+1)^2 \frac{b^2}{\alpha^2} + (2n+1)^2]} = \frac{\pi^4}{32} \frac{\frac{(2n+1)\pi b}{2a} - \operatorname{tgh} \frac{(2n+1)\pi b}{2a}}{\left[\frac{(2n+1)\pi b}{2a}\right]^2}$$

mamy:

$$\begin{aligned} Q &= -\frac{4\alpha^3 b}{3\nu} \left(1 - \frac{192}{\pi^3} \frac{a}{b} \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{(2n+1)^3} \operatorname{tgh} \frac{(2n+1)\pi b}{2a}\right) \varphi(t) + \\ &+ \frac{16\alpha^5 b^4}{3\nu^2 \pi^2} \left(1 - \frac{192}{\pi^3} \frac{a}{b} \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{(2n+1)^3} \operatorname{tgh} \frac{(2n+1)\pi b}{2a}\right) \varphi'(t) \quad /15/ \end{aligned}$$

Tutaj, podobnie jak dla poprzednio rozważanego przepływu, wydatek można przedstawić w postaci:

$$Q = \frac{-4\alpha^3 b}{3\nu} \left[\varphi(t) - \frac{4\alpha^2 b^3}{\nu \pi^2} \varphi'(t) \right] f\left(\frac{b}{a}\right) \quad /16/$$

gdzie wartości funkcji $f\left(\frac{b}{a}\right)$ podaje tablica 1.

4. Przepływ cieczy w kanale otwartym

Niech brzez kanału i położenie zwierciadła cieczy będą określone nierównościami /rys. 2/:

$$-a \leq x \leq +a, \quad 0 \leq y \leq h$$

Przy przepływach cieczy lepkiej w kanałach otwartych przyjmuje się zazwyczaj [1], że $\frac{\partial p}{\partial z} = 0$; jedyną siłą wywołującą ruch cieczy jest siła składowa ciężkości skierowana wzdłuż osi kanału. W rozważanym przypadku składowa jest równa:

$$Z = g \sin \alpha,$$

równanie ruchu (2) przyjmuje postać:

$$\frac{\partial^2 w}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 w}{\partial y^2} = - \frac{g \sin \alpha}{\nu} \quad /17/$$

Równanie to należy scałkować, spełniając warunki brzegowe:

$$w = 0 \text{ dla } x = \pm a, \quad y = 0; \quad \frac{\partial w}{\partial y} = 0 \text{ dla } y = h$$

Rozwiązania równania (17) będziemy poszukiwać /podobnie jak to uczyniliśmy w punkcie 2 pracy dla równania (2) /w postaci szeregu trygonometrycznego (4); dalej wyznaczmy ogólne równanie dla Y_n /przez podstawienie $K = g \sin \alpha / \nu$. Stałe całkowania wyznaczmy z drugiego i trzeciego warunku brzegowego. Po wyliczeniach otrzymamy:

$$w = \frac{16g a^2 \sin \alpha}{\nu \pi^3} \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n}{(2n+1)^3} \left[1 + \operatorname{tgh} \frac{(2n+1)\pi h}{2a} \operatorname{sinh} \frac{(2n+1)\pi y}{2a} - \operatorname{cosh} \frac{(2n+1)\pi y}{2a} \right] \cos \frac{(2n+1)\pi x}{2a} \quad /18/$$

Wydatek przepływającej cieczy otrzymamy, całkując odpowiednio wyrażenie dla prędkości; jeżeli $h > a$, to wydatek można przedstawić w postaci wzoru:

$$Q = \frac{2ga^3 h \sin \alpha}{3\nu} f\left(\frac{h}{a}\right) \quad /19/$$

gdzie $f\left(\frac{h}{a}\right) = f\left(\frac{b}{a}\right)$ odczytujemy z tablicy 1.

Przepływ ustalony w zamkniętym kanale wywołany ciśnieniem hydrostatycz-

ny kanał o przekroju prostokątnym ($-a \leq x \leq +a$; $-b \leq y \leq +b$) i osi symetrii Ox na rys. 3/ nachylenie do poziomu pod kątem α . Niech środek

przekroju początkowego kanału znajduje się na głębokości h pod zwierciadłem cieczy i niech długość kanału będzie równa l .

Ciśnienie hydrostatyczne w dowolnym punkcie $M(x,y)$ przekroju początkowego określa zależność:

$$p = \rho g (h + x \cos \alpha \sin \beta + y \cos \alpha \cos \beta)$$

Wartość K , związana z gradientem ciśnienia, można wyrazić dla przepływu laminarnego w postaci wzoru [1]:

$$K = -\frac{1}{\rho} \frac{dp}{dz} = -\frac{1}{\rho} \frac{\Delta p}{\Delta l} = -\frac{1}{\rho} \frac{P_2 - P_1}{l};$$

tutaj Δp oznacza przyrost ciśnienia, Δl - przyrost długości kanału. Zatem w rozważnym przypadku, można przyjąć:

$$K = -\frac{1}{\rho} \frac{p(M') - p(M)}{l} = \frac{p}{\rho l}$$

gdzie $p(M)$ oznacza ciśnienie w punkcie M ,
 $p(M')$ oznacza zaś ciśnienie w punkcie M' .

Bwzględniając w powyższym wyrażeniu dla p otrzymamy:

$$K = \frac{\rho}{\rho l} (h + x \cos \alpha \sin \beta + y \cos \alpha \cos \beta) \quad /20/$$

Na cząstki cieczy działa również składowa siły masowej, skierowana wzdłuż osi kanału i równa:

$$Z = g \sin \alpha$$

A więc równanie ruchu cieczy w kanale przyjmie postać:

$$\frac{\partial^2 W}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 W}{\partial y^2} = -\frac{\rho}{\rho} \left(\sin \alpha + \frac{h}{l} \right) - x \frac{\rho \cos \alpha \sin \beta}{\rho l} - y \frac{\rho \cos \alpha \cos \beta}{\rho l} \quad /21/$$

Na mocy liniowości powyższego równania możemy napisać:

$$\frac{\partial^2 W_0}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 W_0}{\partial y^2} = -\frac{\rho}{\rho} \left(\sin \alpha + \frac{h}{l} \right) \quad /22/$$

$$\frac{\partial^2 W_1}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 W_1}{\partial y^2} = -x \frac{\rho \cos \alpha \sin \beta}{\rho l} \quad /23/$$

$$\frac{\partial^2 W_2}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 W_2}{\partial y^2} = -y \frac{\rho \cos \alpha \cos \beta}{\rho l} \quad /24/$$

tutaj $W_0 + W_1 + W_2 = W$ jest rozwiązaniem równania (21).

Rozwiązania powyższych równań muszą spełniać warunki brzegowe:

$$W_i = 0 \text{ dla } x = \pm a, y = \pm b \quad (i = 1, 2, 3).$$

Rozwiązanie równania (22) otrzymamy z wzoru (7), zastępując w nim K przez $g(\sin \alpha + \frac{h}{l})$.

Natomiast rozwiązania równania (23) będziemy poszukiwać w postaci szeregu trygonometrycznego:

$$W_2 = \sum_{n=1}^{\infty} \sin \frac{n\pi x}{a} Y_n, \quad /25/$$

$$\text{gdzie } Y_n = Y_n(y).$$

Podstawiając (25) do (23) i rozwijając prawą stronę (23) w szereg Fouriera:

$$-x \frac{g \cos \alpha \sin \beta}{\nu l} = - \sum_{n=1}^{\infty} \frac{2a g \cos \alpha \sin \beta}{\pi \nu l} \frac{(-1)^{n-1}}{n} \sin \frac{n\pi x}{a}$$

otrzymamy dla wyznaczenia Y_n równanie różniczkowe:

$$Y_n'' - \frac{n^2 \pi^2}{a^2} Y_n = - \frac{2a g \cos \alpha \sin \beta}{\pi \nu l} \frac{(-1)^{n-1}}{n}.$$

Rozwiązanie ogólne tego równania ma postać:

$$Y_n = A \sinh \left(\frac{n\pi y}{a} \right) + B \cosh \left(\frac{n\pi y}{a} \right) + \frac{2a^2 g \cos \alpha \sin \beta}{\pi^3 \nu l} \frac{(-1)^{n-1}}{n^3}.$$

Wyznaczając stałe z warunku znikania prędkości na bokach kanału dla $y = \pm b$ otrzymamy:

$$Y_n = \frac{2a^2 g \cos \alpha \sin \beta}{\pi^3 \nu l} \frac{(-1)^n}{n^3} \left[\frac{\cosh \left(\frac{n\pi y}{a} \right)}{\cosh \left(\frac{n\pi b}{a} \right)} - 1 \right]. \quad /26/$$

Podstawienie zależności (26) do wzoru (25) otrzymamy:

$$W_2 = \frac{2a^2 g \cos \alpha \sin \beta}{\pi^3 \nu l} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n}{n^3} \left[\frac{\cosh \left(\frac{n\pi y}{a} \right)}{\cosh \left(\frac{n\pi b}{a} \right)} - 1 \right] \sin \frac{n\pi x}{a} \quad /27/$$

Podobnie, przewidujemy rozwiązanie równania (24) w postaci szeregu trygonometrycznego:

$$W_3 = \sum_{n=1}^{\infty} \sin \frac{n\pi y}{b} X_n, \quad /28/$$

$$\text{gdzie } X_n = X_n(x).$$

Dalej znajdujemy:

$$w_3 = \frac{2b^3 g \cos \alpha \cos \beta}{\gamma l^3 \gamma l} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n}{n^3} \left[\frac{\cosh \frac{n\pi x}{b}}{\cosh \frac{n\pi a}{b}} - 1 \right] \sin \frac{n\pi y}{b} \quad /29/$$

Rozwiązanie równania (21) przyjmuje ostatecznie postać:

$$\begin{aligned} W = & \frac{4g(l \sin \alpha + h)}{\gamma l} \frac{a^2}{\pi^3} \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n}{(2n+1)^3} \left[1 - \frac{\cosh \frac{(2n+1)\pi y}{2a}}{\cosh \frac{(2n+1)\pi b}{2a}} \right] \cos \frac{(2n+1)\pi x}{2a} + \\ & + \frac{2ag \cos \alpha \sin \beta}{\gamma l} \frac{a^2}{\pi^3} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n}{n^3} \left[\frac{\cosh \left(\frac{n\pi y}{a} \right)}{\cosh \left(\frac{n\pi b}{a} \right)} - 1 \right] \sin \left(\frac{n\pi x}{a} \right) + /30/ \\ & + \frac{2bg \cos \alpha \cos \beta}{\gamma l} \frac{b^2}{\pi^3} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n}{n^3} \left[\frac{\cosh \left(\frac{n\pi x}{b} \right)}{\cosh \left(\frac{n\pi a}{b} \right)} - 1 \right] \sin \left(\frac{n\pi y}{b} \right). \end{aligned}$$

Wydatek przepływającej cieczy jest równy:

$$\begin{aligned} Q &= \iint_F w dF = \int_{-a}^{+a} dx \int_{-b}^{+b} w dy = \\ &= \frac{4g(l \sin \alpha + h) a^2 b}{3\gamma l} \left(1 - \frac{192}{\pi^3} \frac{a}{b} \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{(2n+1)^6} \operatorname{tgh} \frac{(2n+1)\pi b}{2a} \right) \quad /31/ \end{aligned}$$

Wzór powyższy można zapisać w postaci:

$$Q = \frac{4g(l \sin \alpha + h) a^2 b}{3\gamma l} f\left(\frac{b}{a}\right) \quad /32/$$

gdzie wartości funkcji $f\left(\frac{b}{a}\right)$ należy odczytywać z tablicy 1.

Literatura

1. Gradsztejn I. S., Rzyżek J. N.; Tablice całek i sumaryjadow i przewidywien. Izd. Nauka, Moskwa 1971.
2. Lojczyński L. G.; Mechanika żidkosti i gaza. GJF - ML Moskwa 1959.
3. Pipes L; Applied Mathematics for Engineers and Physicists. MB Graw - Hill Book Comp. Inc. New York 1946.
4. Snedden J.; Równania różniczkowe cząstkowe. PWN, Warszawa 1962.

Edward Walicki

LAMINAR FLOW OF VISEOUS, INCOMPRESSIBLE
FLUID THROUGH RECTANGULAR DUCT

S u m m a r y

In this paper the formulae for velocity distribution and flux for laminar, viscous and incompressible fluid flow through rectangular $/2a \times 2b/$ duct are given.

The steady and unsteady flow through horizontal duct totally filled with fluid, as well as steady flow through inclined duct partially and totally filled with fluid are described.

For unsteady flow the pressure gradient is linear function of time.

Эдвард Валицкий

ЛАМИНАРНОЕ ТЕЧЕНИЕ ВЯЗКОЙ ЖИДКОСТИ ЧЕРЕЗ КАНАЛ
С ПРЯМОУГОЛЬНЫМ СЕЧЕНИЕМ

/Резюме/

В работе даны формулы описывающие распределение скоростей и расхода в ламинарном течении несжимаемой вязкой жидкости через канал с прямоугольным сечением $/2a \times 2b/$. Рассмотрено стационарное и нестационарное течение через горизонтальный канал полностью наполненный жидкостью, а также через частично наклоненный канал и полностью наполненный жидкостью.

Для нестационарного течения принят градиент давления как линейной функции времени.

Edward Walicki

NOŚNOŚĆ STOŻKOWEGO ŁOŻYSKA ŚLIZGOWEGO

W pracy omówiono przepływ cieczy lepkiej, o lepkości będącej funkcją temperatury, w szczelinie stożkowego łożyska ślizgowego. Rozważono przypadek hiperbolicznej i parabolicznej zależności lepkości od temperatury. Dla przepływającej cieczy podano zależności określające wzdłużną i poprzeczną składową prędkości oraz określono rozkład ciśnień. Następnie podano formuły określające nośność łożyska, wydatek objętościowy i moment tarcia. Formuły te podano również dla przypadku stałej lepkości cieczy smarującej.

1. Wstęp

Stożkowe łożyska ślizgowe i zachodzące w nich zjawiska przepływu płynu lepkiego były już nieraz tematem badań teoretycznych i doświadczalnych. Badania te obejmowały zarówno uproszczone modele przepływu gazu lepkiego, przewodzącego ciepło [7,8,9], jak i przepływu cieczy lepkiej o stałej lepkości [7,10,11,12].

Celem niniejszej pracy jest określenie nośności łożyska stożkowego /rys.1/, smarowanego czynnikiem nieściśliwym /ciecz lepka/ o lepkości będącej funkcją temperatury.

Rozpatrywane łożysko jest łożyskiem o pionowej osi symetrii, w którym między dwiema powierzchniami stożkowymi - górną wirującą z prędkością kątową ω i dolną nieruchomą - znajduje się wąska szczelina o grubości h , wypełniona cieczą. Tworzące obu powierzchni stożkowych dają kąt φ z płaszczyzną prostopadłą do osi łożyska /kąt φ nie powinien być zbyt bliski kąta prostego/.

Uproszczony model czynnika smarującego i odpowiednio uproszczony model przepływu tego czynnika pozwalają uzyskać stosunkowo proste zależności, określające nośność łożyska oraz inne parametry, jak wydatek objętościowy i moment tarcia.

Zagadnienie rozwiązano zakładając izotermiczność ścianek łożyska.

2. Równania ruchu

Przepływ cieczy smarującej w łożysku charakteryzuje się osiową symetrią. Obierzmy stożkowy układ współrzędnych x, θ, y /rys.2/, związany z tworzącymi dolnej powierzchni stożkowej łożyska. Przyjęty układ współrzędnych

jest związany z cylindrycznym układem współrzędnych r, θ, z zależnościami:

$$\begin{aligned} r &= x \cos \varphi - y \sin \varphi \\ \theta &= \theta \\ z &= x \sin \varphi + y \cos \varphi \end{aligned} \quad /1/$$

Również składowe prędkości w obu układach współrzędnych spełniają podobne zależności:

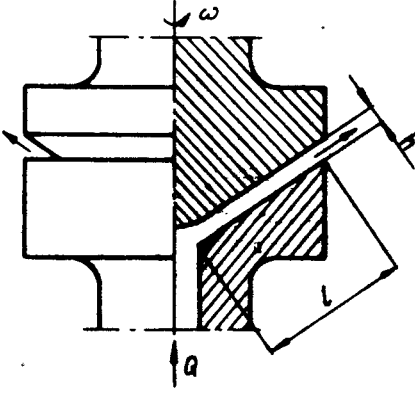
$$\begin{aligned} v_r &= v_x \cos \varphi - v_y \sin \varphi \\ v_\theta &= v_\theta \\ v_z &= v_x \sin \varphi + v_y \cos \varphi \end{aligned} \quad /2/$$

Wprowadzając powyższe zależności do równań ruchu ustalonego cieczy lepkiej, danych w układzie współrzędnych cylindrycznych [1], otrzymamy równanie ciągłości:

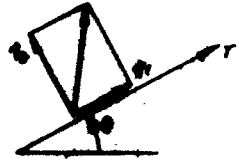
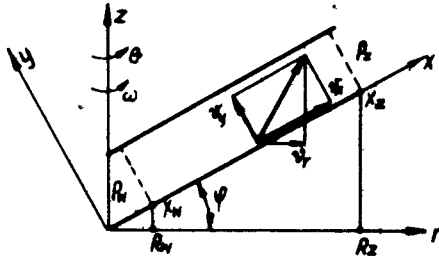
$$\frac{\partial v_x}{\partial x} + \frac{\partial v_y}{\partial y} + \frac{v_x \cos \varphi - v_y \sin \varphi}{x \cos \varphi - y \sin \varphi} = 0 \quad /3/$$

oraz równania Naviera i Stokesa:

$$\begin{aligned} \rho \left(v_x \frac{\partial v_x}{\partial x} + v_y \frac{\partial v_x}{\partial y} - \frac{v_\theta^2 \cos \varphi}{x \cos \varphi - y \sin \varphi} \right) &= - \frac{\partial p}{\partial x} + \mu \left[\frac{\partial^2 v_x}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 v_x}{\partial y^2} + \right. \\ &+ \frac{1}{x \cos \varphi - y \sin \varphi} \left(\frac{\partial v_x}{\partial x} \cos \varphi - \frac{\partial v_x}{\partial y} \sin \varphi \right) - \frac{v_x \cos \varphi - v_y \sin \varphi}{(x \cos \varphi - y \sin \varphi)^2} \cos \varphi \left. \right], \\ \rho \left(v_x \frac{\partial v_y}{\partial x} + v_y \frac{\partial v_y}{\partial y} + v_\theta \frac{v_x \cos \varphi - v_y \sin \varphi}{x \cos \varphi - y \sin \varphi} \right) &= \mu \left[\frac{\partial^2 v_\theta}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 v_\theta}{\partial y^2} + \right. \\ &+ \frac{1}{x \cos \varphi - y \sin \varphi} \left(\frac{\partial v_\theta}{\partial x} \cos \varphi - \frac{\partial v_\theta}{\partial y} \sin \varphi \right) - \frac{v_\theta}{(x \cos \varphi - y \sin \varphi)^2} \left. \right], \\ \rho \left(v_x \frac{\partial v_z}{\partial x} + v_y \frac{\partial v_z}{\partial y} + \frac{v_\theta^2 \sin \varphi}{x \cos \varphi - y \sin \varphi} \right) &= - \frac{\partial p}{\partial z} + \mu \left[\frac{\partial^2 v_z}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 v_z}{\partial y^2} + \right. \\ &+ \frac{1}{x \cos \varphi - y \sin \varphi} \left(\frac{\partial v_z}{\partial x} \cos \varphi - \frac{\partial v_z}{\partial y} \sin \varphi \right) + \frac{v_x \cos \varphi - v_y \sin \varphi}{(x \cos \varphi - y \sin \varphi)^2} \sin \varphi \left. \right]. \end{aligned} \quad /4/$$



Rys. 1



Rys. 2

Równania powyższe można znacznie uprościć, zakładając małą grubość szczeliny w stosunku do jej długości:

$$\frac{h}{l} \ll 1 \quad /5/$$

co pociąga za sobą zależność:

$$r = x \cos \psi . \quad /6/$$

Dokonując oszacowania wielkości poszczególnych składników [3], otrzymamy uproszczony układ równań ruchu:

$$\frac{\partial}{\partial x}(x v_x) + \frac{\partial}{\partial y}(x v_y) = 0 , \quad /7/$$

$$-\rho \frac{v_0^2}{x} = -\frac{\partial p}{\partial x} + \mu \frac{\partial^2 v_x}{\partial y^2} , \quad /8/$$

$$0 = \frac{\partial v_0}{\partial y^2} , \quad /9/$$

$$0 = \frac{\partial p}{\partial y} . \quad /10/$$

Do powyższych równań należy dołączyć równania, opisujące zależność lepkości dynamicznej cieczy smarującej od temperatury. Najczęściej używane są równania w postaci zależności hiperbolicznej [1,3,4,6]:

$$\mu = \frac{\mu_0}{1 + \alpha T} \quad /11/$$

lub parabolicznej [5,6]:

$$\mu = \mu_0 (1 + \beta T + \gamma T^2) \quad /12/$$

gdzie: $\mu_0, \alpha, \beta, \gamma$, - stałe współczynniki zależne od cieczy smarującej. Dla cieczy o stałej lepkości przyjmuje się: $\alpha = \beta = \gamma = 0$.

Wobec małej grubości szczeliny i przy założeniu izotermiczności ścianek kołowych można pominąć zmiany temperatury w kierunku osi Oy [2]; natomiast w kierunku osi Ox założymy liniową zależność temperatury w funkcji długości osi Ox porządkującej, mianowicie:

$$T = T_w + (T_x - T_w) \frac{x \cos \psi - R_w}{R_z - R_w} . \quad /13/$$

Wzrost lepkości dynamicznej cieczy smarującej są następujące:

$$\text{dla } x \cos \psi = R_w \text{ jest } p = p_w, T = T_w, \mu = \mu_w \quad /14/$$

dla $x \cos \varphi = R_z$ jest $p = p_x, T = T_z, \mu = \mu_x,$

dla $y = 0$ jest $v_x = v_0 = v_y = 0,$

/14/

dla $y = h$ jest $v_x = v_y = 0, v_0 = \omega x \cos \varphi$

3. Całki równań ruchu

Całkując równanie /9/ dwukrotnie względem zmiennej y i wyznaczając stałe całkowania z warunków brzegowych, otrzymamy:

$$v_0^2 = \frac{\omega}{h} x y \cos \varphi \quad /15/$$

Podobnie, całkując równanie /10/, znajdujemy:

$$p = p(x) \quad /16/$$

Zajmijmy się równaniem ciągłości /7/; całkując je względem zmiennej y dostaniemy:

$$\frac{\partial}{\partial x} \int_0^h x v_x dy + x v_y \Big|_0^h = 0,$$

skąd, po uwzględnieniu warunków brzegowych, mamy:

$$\int_0^h v_x dy = \frac{C_1}{x \cos \varphi}. \quad /17/$$

Podstawiając wartość składowej prędkości v_0 z wzoru /15/ do równania /8/, znajdujemy po wykonaniu całkowania:

$$v_x = \frac{1}{2\mu} \frac{dp}{dx} y^2 - \frac{\rho \omega^2 x y^4}{12\mu h^2} \cos^2 \varphi + C_2 y + C_3.$$

Stałe całkowania wyznaczmy z warunków brzegowych; po wyliczeniach znajdziemy:

$$v_x = \frac{1}{2\mu} (y^2 - hy) \frac{dp}{dx} - \frac{\rho \omega^2 x}{12\mu h^2} (y^4 - \frac{11}{3} y^3) \cos^2 \varphi \quad /18/$$

Podstawiając powyższe wyrażenie do wzoru /17/ dostaniemy:

$$\frac{dp}{dx} = 0,3 \rho \omega^2 x \cos^2 \varphi - \frac{12\mu}{h^3} \frac{C_1}{x \cos \varphi}. \quad /19/$$

Dalszy tok postępowania jest zależny od wyboru wzoru określającego lepkość w funkcji temperatury.

Uwzględniając /11/ w /19/ otrzymamy po wykonaniu całkowania:

$$p = 0,15 \rho \omega^2 x^2 \cos^2 \psi + \left[(p_w - 0,15 \rho \omega^2 R_w^2) \ln \frac{(Ax \cos \psi + B) R_z \mu_z}{\mu_0 x \cos \psi} + \right. \\ \left. - (p_z - 0,15 \rho \omega^2 R_z^2) \ln \frac{(Ax \cos \psi + B) R_w \mu_w}{\mu_0 x \cos \psi} \right] \left(\ln \frac{R_z \mu_z}{R_w \mu_w} \right)^{-1}; \quad /20/$$

gdzie oznaczono:

$$A = \alpha \frac{T_z - T_w}{R_z - R_w} \\ B = 1 + \alpha \left(T_w - \frac{T_z - T_w}{R_z - R_w} R_w \right). \quad /21/$$

Podstawiając /12/ do /19/ otrzymamy po wykonaniu całkowania:

$$p = 0,15 \rho \omega^2 x^2 \cos^2 \psi + \frac{p_w - 0,15 \rho \omega^2 R_w^2}{M} \left[\frac{\alpha}{2} (x^2 \cos^2 \psi - R_z^2) + \right. \\ \left. + b(x \cos \psi - R_z) + c \ln \frac{x \cos \psi}{R_w} \right] - \frac{p_z - 0,15 \rho \omega^2 R_z^2}{M} \left[\frac{\alpha}{2} (x^2 \cos^2 \psi - R_w^2) + \right. \\ \left. + b(x \cos \psi - R_w) + c \ln \frac{x \cos \psi}{R_w} \right]; \quad /22/$$

tutaj oznaczono:

$$\alpha = \gamma \left(\frac{T_z - T_w}{R_z - R_w} \right)^2, \\ b = \left(\frac{T_z - T_w}{R_z - R_w} \right)^2 \left[\beta + 2\gamma \left(T_w - \frac{T_z - T_w}{R_z - R_w} R_w \right) \right], \\ c = 1 + \beta \left(T_w - \frac{T_z - T_w}{R_z - R_w} R_w \right) + \gamma \left(T_w - \frac{T_z - T_w}{R_z - R_w} R_w \right)^2, \\ M = \frac{\alpha}{2} (R_w^2 - R_z^2) + b(R_w - R_z) + c \ln \frac{R_w}{R_z}. \quad /23/$$

Mając zależności określające rozkład ciśnienia, możemy wyznaczyć składową wzdłużną \vec{v}_x prędkości przepływu cieczy; w zależności od użytej formuły dla lepkości otrzymamy z wzoru /18/ odpowiednie wyrażenia:

$$\vec{v}_x = \left[\frac{0,15 \rho \omega^2 \cos^2 \psi}{\mu_0} (Ax \cos \psi + B) x - \frac{p_w p_z + 0,15 \rho \omega^2 (R_z^2 - R_w^2)}{x \cos \psi \ln \frac{R_z \mu_z}{R_w \mu_w}} \frac{B}{2 \mu_0} \right] (y^2 - h y) + \\ - \frac{\rho \omega^2 \cos^2 \psi}{12 \eta^2 \mu_0} (Ax \cos \psi + B) (y^3 - h y^2) x \quad /24/$$

dla wzoru /11/ oraz:

$$v_x = \left[\frac{0,15 \rho \omega^2 \cos^2 \varphi}{\mu_0} \frac{x}{ax^2 \cos^2 \varphi + bx \cos \varphi + c} + \frac{p_w - p_z + 0,15 \rho \omega^2 (R_z^2 - R_w^2)}{2 \mu_0 M x \cos \varphi} \right] (y^2 - hy) - \frac{\rho \omega^2 \cos^2 \varphi}{12 h^3 \mu_0} \frac{x}{ax^2 \cos^2 \varphi + bx \cos \varphi + c} (y^3 - h^2 y) \quad /25/$$

dla wzoru /12/.

4. Siła nośna łożyska

Znając składowe prędkości v_x, v_θ oraz ciśnienie p możemy wyznaczyć siłę nośną P łożyska, wydatek objętościowy Q przepływającej cieczy oraz moment tarcia M_T , z następujących wzorów:

$$P = \pi R_w^2 p_w + 2\pi \cos^2 \varphi \int_{R_w/\cos \varphi}^{R_z/\cos \varphi} x p dx, \quad /26/$$

$$Q = 2\pi x \cos \varphi \int_0^h v_x dy, \quad /27/$$

$$M_T = 2\pi \cos^2 \varphi \int_{R_w/\cos \varphi}^{R_z/\cos \varphi} \mu x^2 \frac{\partial v_\theta}{\partial y} dx \quad /28/$$

Podstawiając tutaj znalezione uprzednio wyrażenia dla p, v_x, v_θ , otrzymamy:

$$P = \pi R_w^2 p_w + \frac{0,15 \pi \rho \omega^2}{2} (R_z^4 - R_w^4) + \frac{\pi}{\ln \frac{R_z \mu_z}{R_w \mu_w}} \left\{ [p_w - p_z + 0,15 \rho \omega^2 (R_z^2 - R_w^2)] \left[R_z^2 \ln \frac{\mu_0}{R_z \mu_z} - R_w^2 \ln \frac{\mu_0}{R_w \mu_w} + \frac{B}{A} (R_z - R_w - \frac{B}{A} \ln \frac{\mu_w}{\mu_z}) \right] + [(p_w - 0,15 \rho \omega^2 R_w^2) \ln \frac{R_z \mu_z}{\mu_0} - (p_z - 0,15 \rho \omega^2 R_z^2) \ln \frac{R_w \mu_w}{\mu_0}] (R_z^2 - R_w^2) \right\},$$

$$Q = \frac{\pi h^3 B}{6 \mu_0} \frac{p_w - p_z + 0,15 \rho \omega^2 (R_z^2 - R_w^2)}{\ln \frac{R_z \mu_z}{R_w \mu_w}} \cos \varphi, \quad /30/$$

$$M_T = \frac{2\pi\mu_0\omega}{h\cos\psi} \frac{1}{A^3} \left[\frac{A^3}{3} (R_z^3 - R_w^3) - \frac{A^2 B}{2} (R_z^2 - R_w^2) + AB^2 (R_z - R_w) - B \ln \frac{\mu_w}{\mu_z} \right] \quad /31/$$

dla lepkości określonej wzorem /11/ oraz:

$$P = \pi R_w^2 p_w + \frac{0,15\eta\omega^2}{2} (R_z^4 - R_w^4) + \frac{\pi}{M} \left\{ [p_w - p_z + 0,15\eta\omega^2 (R_z^2 + R_w^2)] \left[\frac{a}{4} (R_z^4 - R_w^4) + \frac{2b}{3} (R_z^3 - R_w^3) + \frac{c}{2} R_z^2 \left(\ln R_z - \frac{1}{2} \right) + \right. \right. \\ \left. \left. - \frac{c}{2} R_w^2 \left(\ln R_w - \frac{1}{2} \right) \right] - [(p_w - 0,15\eta\omega^2 R_w^2) \left(\frac{a}{2} R_z^2 + b R_z + c \ln R_z \right) + \right. \\ \left. - (p - 0,15\eta\omega^2 R_z^2) \left(\frac{a}{2} R_w^2 + b R_w + c \ln R_w \right)] (R_z^2 - R_w^2) \right\}, \quad /32/$$

$$Q = - \frac{\pi h^3}{6\mu_0} \frac{p_w - p_z + 0,15\eta\omega^2 (R_z^2 - R_w^2)}{M} \cos\psi, \quad /33/$$

$$M_T = \frac{2\pi\mu_0\omega}{h\cos\psi} \left[\frac{a}{6} (R_z^6 - R_w^6) + \frac{b}{5} (R_z^5 - R_w^5) + \frac{c}{4} (R_z^4 - R_w^4) \right], \quad /34/$$

dla lepkości określonej wzorem /12/.

W przypadku, gdy lepkość cieczy jest stała, w powyższych wzorach należy dokonać przejść granicznych:

$$A \rightarrow 0, B \rightarrow 1$$

lub:

$$a \rightarrow 0, b \rightarrow 0, c \rightarrow 1.$$

Ponieważ bezpośrednio zastosowanie tych przejść do wzorów /29/ + /34/ jest kłopotliwe, stosujemy je do wzorów /20/ i /22/, określających ciśnienie, oraz do wzorów /24/ i /25/, określających składową v_x prędkości smarującej cieczy.

Otrzymamy wtedy:

$$p = 0,15\eta\omega^2 x^2 \cos^2\psi + [(p_w - 0,15\eta\omega^2 R_w^2) \ln \frac{R_z}{x \cos\psi} + \quad /35/$$

$$\begin{aligned}
 & -(p_1 - 0,15 \rho \omega^2 R_z^2) \ln \frac{R_w}{R_z \cos \varphi} \left] \left(\ln \frac{R_z}{R_w} \right)^{-1}, \\
 Q_x = & \left[0,15 \rho \omega^2 x \cos^2 \varphi - \frac{p_1 - p_2 + 0,15 \rho \omega^2 (R_z^2 - R_w^2)}{2 x \cos \varphi \ln \frac{R_z}{R_w}} \right] (y^2 - h y) + \\
 & - \frac{\rho \omega^2 x \cos^2 \varphi}{12 h^2} (a y^3 - h y^3).
 \end{aligned} \tag{36/}$$

Podstawiając powyższe zależności do wzorów /26/, dostaniemy:

$$\begin{aligned}
 P = & \pi R_z^2 p_2 + \pi (R_z^2 - R_w^2) \left[\frac{p_1 - p_2 + 0,15 \rho \omega^2 (R_z^2 - R_w^2)}{2 \ln \frac{R_z}{R_w}} + \right. \\
 & \left. - 0,075 \rho \omega^2 (R_z^2 + R_w^2) \right],
 \end{aligned} \tag{37/}$$

$$Q = \frac{\pi h^3}{6 \mu} \frac{p_1 - p_2 + 0,15 \rho \omega^2 (R_z^2 - R_w^2)}{\ln \frac{R_z}{R_w}} \cos \varphi, \tag{38/}$$

$$M_T = \frac{\pi \mu \omega}{2 h \cos \varphi} (R_z^4 - R_w^4). \tag{39/}$$

tutaj:

$$\mu = \mu_2 = \mu_w = \mu_0$$

5. Wnioski

Wprowadzone wzory pozwalają określić siłę nośną łożyska, wydatek objętościowy przepływającej cieczy i moment tarcia dla przypadku cieczy smarującej o zmiennej lepkości będącej funkcją temperatury.

W przypadku stałej lepkości wzory te ulegają znacznemu uproszczeniu, ułatwiając interpretację zjawisk zachodzących w rozważanym łożysku.

Analiza wzorów dla tego przypadku pozwala zauważyć, że siła nośna P łożyska zależy od wydatku, będącego efektem przepływu wzdłużnego w szczeliny łożyska oraz od ssącego działania wirującej powierzchni stożkowej, zmniejszającego jej wartość. Przy odpowiednio dużych obrotach ssące działanie może nawet zmienić zwrot siły nośnej.

Wydatek Q przepływającej cieczy zależy od różnicy ciśnień na wlocie i wylocie z łożyska, od ssącego działania wirującej powierzchni stożkowej oraz od kąta φ .

Moment tarcia jest wynikiem ruchu obrotowego górnej powierzchni łożyska i znika dla $\omega = 0$.

Literatura

1. Ananasewicz S., Kazimierski Z., Lewandowski J., Szaniawski A.: The flow of the gas layer between two conical surfaces, Fluid Dynamics Transactions vol.5 part II, PWN, Warszawa 1971.
2. Bukowski J.: Mechanika płynów, PWN, Warszawa 1968.
3. Comolet R.: Petites turbines à air sur palier à air. Société Hydrotechnique de France. IX - 6mes Journées de l'Hydraulique, Paris 1966, Question II, Rapport No 8 D - 1.
4. Czernawski S.A.: Podшипniki skolżeniya, Maszriz, Moskwa 1963.
5. Gawrilenko B.A., Minin W.A., Roźdiestwienskij S.N.: Gidrawliczeskij priwod, Maszinostrojenije, Moskwa 1968.
6. Gołubiew A.J.: Sowriemiennye upłotnienia warszczajuszczichsja wałow. Maszriz, Moskwa 1963.
7. Gottwald F., Vieweg R.: Berechnung und Modellversuche an Wasser und Luftlagen, Z. angew. Physik 2, 11, 1950.
8. Pawlin A.K.: Ob odnom skłuczaje intiegrirowaniya urawnienij dwiżeniya wjazkoj židkosti s pieremiennym koeffiejentom wjazkosti. Prikl. Mat. Meeh. 19, 1, 1955.
9. Rice W., Mc Alister K.W.: Laminar throughflow of newtonian fluid between coaxial rotating cones. J. Appl. Mech. Trans. ASME ser. E vol 37, No 1, 1970.
10. Rice W., Mc Alister K.W.: Throughflows between rotating surfaces of revolution, having similiary solutions. J. Appl. Mech. Trans. ASME ser. E vol 37, No 4, 1970.
11. Szaniawski A.: Przepływ lepkiej cieczy nieściśliwej w szczelinie stożkowego łożyska ślizgowego. Prace IPPT PAN, 15/1970.
12. Targ S.M.: Osnownyje zadaczi teorii laminarnykh tiecezenij. GIT - TL, Moskwa 1951.

Edward Walicki

LOAD - CARRIVING CAPAERTY OF CONICALE SLIDE BEARING

S u m m a r y

In this paper the fluid flow of variable viscensity with temperature through slot of conical slide bearing is described.

The hiperbolie and parabolie dependence of the viscesity in funtion of temperature are considered. For fluid flow the formulae for alongitudinal and transversal components of velocity distribution and formula for pressure distribution are given. Next the formulae for load-carriving capacity, flux and frietional moment are given. This formulae for flow with constant viscosity are also given.

Эдвард Валицки

ПРЕДЕЛЬНАЯ НАГРУЗКА КОНИЧЕСКОГО ПОДШИПНИКА СКОЛЬЖЕНИЯ

/Резюме/

В работе представлено течение несжимаемой вязкой жидкости с вязкостью зависящей от температуры, в щели конического подшипника скольжения.

Рассмотрен случай гиперболической и параболической зависимости вязкости от температуры. Для текущей жидкости представлены формулы определяющие продольные и поперечные слагаемые скорости, а также определенораспределение давления. Затем представлены формулы определяющие предельную нагрузку, расход и момент сопротивления подшипника. Эти формулы даны также для постоянной вязкости.

Biblioteka Główna ATR
w Bydgoszczy

Cz

1006

14

1996



BYDGOSZCZ

Cena zł 9,-