

AKADEMIA TECHNICZNO-ROLNICZA
IM. JANA I JĘDRZEJA ŚNIADECKICH
W BYDGOSZCZY

Rozprawy
nr 45

ADAM PODHORECKI

**METODA ELEMENTÓW
CZASOPRZESTRZENNYCH
W GEOMETRYCZNIE NIELINIOWEJ
TEORII LEPKOSPĘŻYSTOŚCI**

BYDGOSZCZ – 1991

AKADEMIA TECHNICZNO-ROLNICZA
IM. JANA I JĘDRZEJA ŚNIADECKICH
W BYDGOSZCZY

Rozprawy
nr 45

ADAM PODHORECKI

**METODA ELEMENTÓW
CZASOPRZESTRZENNYCH
W GEOMETRYCZNIE NIELINIOWEJ
TEORII LEPKOSPREŻYSTOŚCI**

BYDGOSZCZ – 1991

PRZEWODNICZĄCY KOMITETU REDAKCYJNEGO
prof. dr hab. Ojcumiła Stefaniak

OPINIODAWCY

prof. dr hab. inż. Roman Bogacz
doc. dr hab. inż. Marek Witkowski

REDAKTOR NAUKOWY

prof. dr hab. inż. Romuald Świtka

OPRACOWANIE REDAKCYJNE I TECHNICZNE

mgr Halina Kluczyńska, Zbigniew Gackowski



Wydano za zgodą Rektora
Akademii Techniczno-Rolniczej
w Bydgoszczy

5 19667/1

ISSN 0209-0597

**WYDAWNICTWO UCZELNIANE AKADEMII TECHNICZNO-ROLNICZEJ
W BYDGOSZCZY**

Wyd. I. Nakład 150 egz. Ark. aut. 3,65, ark. druk. 4. Papier drukowy kl. V, 70g
Oddano do druku 31.01.1991. Druk ukończono w lutym 1991 r.

MEN

Uczelniany Zakład Małej Poligrafii ATR, Bydgoszcz, ul. Olszewskiego 20
Zamówienie nr 18/91.

Spis treści

| | str. |
|---|------|
| 1. WSTĘP | 5 |
| 2. RÓWNANIA TEORII LEPKOSPĘŻYSTOŚCI | 9 |
| 2.1. Założenia | 9 |
| 2.2. Równania geometryczne | 10 |
| 2.3. Równania konstytutywne | 11 |
| 2.4. Równania równowagi dynamicznej | 16 |
| 2.5. Warunki brzegowe | 18 |
| 2.6. Warunki początkowe | 18 |
| 2.7. Równanie czteropracy wirtualnej | 19 |
| 2.8. Istnienie i jednoznaczność rozwiązań | 21 |
| 3. DYSKRETYZACJA OBSZARU CZASOPRZESTRZENI WEDŁUG ZASADY METODY ELE- MENTÓW CZASOPRZESTRZENNYCH | 23 |
| 3.1. Założenia MECZ | 23 |
| 3.2. Bezpośrednie określenie charakterystyk elementu czasoprze- strzennego | 24 |
| 3.3. Wariacyjne sformułowanie MECZ | 26 |
| 3.4. Ważona metoda residualna podstawą sformułowania MECZ | 27 |
| 3.5. Rekurencyjny charakter równań MECZ | 28 |
| 4. PRZYKŁADY ROZWIĄZAŃ DRGAŃ OŚRODKA LEPKOSPĘŻYSTEGO | 31 |
| 4.1. Drgania podłużne pręta | 31 |
| 4.2. Drgania belki | 41 |
| 5. UWAGI KOŃCOWE | 53 |
| LITERATURA | 55 |
| STRESZCZENIA | 63 |

1. WSTĘP

Problemy formułowane i analizowane w mechanice kontinuum sprowadzają się do rozwiązywania złożonych układów cząstkowych równań różniczkowych względem zmiennych przestrzennych i czasu. Do rozwiązywania takich zagadnień stosuje się wiele różnych metod analitycznych i numerycznych. Wśród stosowanych metod numerycznych bezwzględnie przoduje intensywnie rozwijana metoda elementów skończonych (MES). Efektywność i wszechstronność tej metody, połączona z ewolucją komputerową, umożliwia rozwiązywanie wielu problemów inżynierskich, których zadowalające rozwiązanie kilka lat temu wydawało się zupełnie niemożliwe. Dla większości zagadnień inżynierskich - z dziedziny mechaniki - nie udaje się ciągle uzyskać rozwiązań ścisłych, stąd stosowanie metod przybliżonych jest jedyną możliwością otrzymania użytecznych informacji dotyczących rozważanego zagadnienia mechaniki.

Bibliografia metody elementów skończonych jest bardzo liczna, poczynając od pionierskiej pracy Turnera [108], poprzez monografie Przemienieckiego [100], Holanda [33], Desai'a [26], Zienkiewicza [122], Martina i Careya [80], Gallaghery [29], Segerlinda [104], Bathe i Wilsona [16], Norrie i de Uriesa [85]. W języku polskim ukazało się też kilka monografii, np.: Kruszewskiego [68, 69], Szmeltera [105, 106], Kleibera [65].

Duży nacisk położono w ostatnich latach na wariacyjne sformułowanie MES, np. prace Odena i Reddy'ego [89], Washizu [109], Kleibera [65, 59]. Stosując MES do zagadnień statycznych uzyskujemy układ równań liniowych lub nieliniowych, zależnie od charakteru związków fizycznych i geometrycznych. Przy analizie dynamicznej lub reologicznej konstrukcji, cząstkowe równania różniczkowe po dyskretyzacji przestrzennej zostają zastąpione układem zwyczajnych równań różniczkowych względem czasu. Ważnym zadaniem staje się teraz rozwiązywanie tych równań ruchu. Wśród podstawowych podejść stosowanych do rozwiązywania równań ruchu wyróżniamy grupę metod bezpośredniego całkowania (metoda różnic skończonych, metoda Houbolta [34], metody Wilsona i Newmarka [123, 81]) oraz metody superpozycji modalnej. Wiele prac poświęcono stabilności i dokładności rozwiązań przy stosowaniu różnych metod numerycznego całkowania równań ruchu, np.: prace Bathe i Wilsona [14], Collatza [21], Nickella [83, 84], Langer'a [73]. W latach siedemdziesiątych zaczęto stosować MES do analizowania nieliniowych zagadnień dynamiki, adaptując w tym celu metody bezpośredniego całkowania [101, 113, 3, 32, 15].

W Polsce metoda elementów skończonych zaczęła się burzliwie rozwijać w latach siedemdziesiątych, a jedną z pierwszych publikacji była praca Kisiele'a [55] pt. „Metoda elementów skończonych”. W Warszawie - w Woj-

skowej Akademii Technicznej - dobrze oprogramowano MES do różnych zagadnień inżynierskich [105, 106]. Programy opracowane pod kierunkiem Szmeltera i Dacki chętnie stosuje się w biurach projektów. W Instytucie Podstawowych Problemów Techniki PAN rozwinęto i oprogramowano MES w ujęciu przyrostowym - do rozwiązywania dynamicznych i statycznych zagadnień nieliniowych geometrycznie i fizycznie. Zagadnieniom tym poświęcone są głównie prace Kleibera [65, 59, 58, 24, 60, 61, 62, 63, 64] oraz Borkowskiego i Sarana [17, 102, 103, 18]. W Gdańsku Kruszewski, z zespołem rozwinął metodę sztywnych elementów skończonych, dostosowaną szczególnie do obliczeń konstrukcji okrętowych [68, 69, 30, 118, 91, 119, 92]. We Wrocławiu Langer ze współpracownikami opracował i adaptował różne metody bezpośredniego całkowania równań ruchu [73, 70, 71, 57, 72, 37, 74, 75, 76, 77]. Waszczyszyn w Krakowie udoskonalili metody rozwiązywania nieliniowych zagadnień stateczności w ujęciu MES [110, 111, 112].

Możliwości tworzenia elementów skończonych w czasie i przestrzeni zauważyli dość wcześnie Fried, Oden, Argyris, Scharpf i Chan [27, 88, 1, 2]. W monografii Zienkiewicza [122] też mówi się o możliwości stosowania elementów czasoprzestrzennych. Przesłanki te stały się podstawą opracowanej przez Kączkowskiego oryginalnej metody czasoprzestrzennych elementów skończonych [42, 43]. Idea metody polega na dyskretyzacji kontinuum czasoprzestrzennego, w wyniku czego przejście od równań różniczkowych do równań algebraicznych odbywa się w jednym etapie. Cechą wyróżniającą metodę elementów czasoprzestrzennych (MECZ) od innych metod bezpośredniego całkowania równań ruchu jest charakterystyczna aproksymacja pól przemieszczeń, odkształceń i naprężeń w całym analizowanym obszarze czasoprzestrzennym. Np.: przemieszczenia - w obszarze skończonego elementu czasoprzestrzennego (SKECZ) - opisujemy parametrami węzłowymi r_e

$$\underline{u}(X, t) = \underline{\Phi}(X, t) r_e \quad (1.1)$$

gdzie $\underline{\Phi}(X, t)$ jest macierzą kształtu zawierającą funkcje czasoprzestrzenne. Przy stosowaniu np. MES dokonuje się aproksymacji przestrzennej

$$\underline{u}(X, t) = \underline{\Phi}(X) r_e(t) \quad (1.2)$$

($\underline{\Phi}$ jest macierzą kształtu zawierającą funkcje przestrzenne), co powoduje, że układ cząstkowych równań różniczkowych przekształca się w układ zwykłych równań różniczkowych względem czasu, które następnie rozwiązujemy różnymi metodami numerycznymi. Zaletą postępowania (1.2) jest możliwość dyskretyzacji przestrzeni i czasu niezależnie od siebie. Wadą tej formuły jest jednak to, że raz ustalony podział przestrzeni nie może być w zasadzie zmieniany w czasie. W MECZ takich arbitralnych ograniczeń nie mamy. Nie skrępowana dyskretyzacja stwarza możliwości dostosowania podziału obszaru czasoprzestrzennego do przebiegu obciążenia, do zmieniającego się w czasie brzegu (brzeg ruchomy), do rozwiązywania takich zadań nieliniowych, w których drgania ustroju spełniają różne równania różniczkowe w przesuwania

jącym się czasie. Istnieje też taka możliwość rozseparowania układu równań, która jest uzależniona tylko od sposobu dyskretyzacji. Tematyka prac badawczych, w których wykorzystywano MECZ, jest już bogata. Pierwsze prace Ką cz k o w s k i e g o [42, 43, 47] poświęcone były głównie interpretacji różnych pojęć czasoprzestrzennych. Sformułowano w nich równanie czteropracy wirtualnej, przedstawiono zasady budowania macierzy sztywności dla dowolnych elementów czasoprzestrzennych. W następnych pracach rozwiązywano różne zadania dynamiki liniowej [44, 45, 46, 19, 114, 38, 39, 53]. W jednej z rozpraw [48], Ką cz k o w s k i i L a n g e r wykazali, że przy prostokątnych elementach czasoprzestrzennych MECZ można traktować jako klasyczną metodę bezpośredniego całkowania równań ruchu. Często podejmowano problem stabilności MECZ [73, 22, 23, 41, 40, 93, 10, 52, 99, 11]. Dalsze badania doprowadziły do opracowania nowych, nieprostokątnych elementów czasoprzestrzennych [50, 115, 8, 116, 9, 117, 67]. Użycie takich dowolnych w kształcie SKECZ pozwoliło między innymi na przyjęcie niestacjonarnej dyskretyzacji konstrukcji, a tym samym na rozwiązanie nowej, szerszej klasy zagadnień. Poczyniono udane próby sformułowania MECZ dla zagadnień geometrycznie nieliniowych [115, 94, 97, 12]. Dokonano też interesującego zastosowania MECZ w termosprężystości [49, 51] i lepkosprężystości [95, 96, 97]. Model czasoprzestrzeni technicznej odpowiadający czterowymiarowej euklidesowej przestrzeni metrycznej analizował w rozprawie habilitacyjnej Witkowski [115]. Ukazała się praca Bajera i Podhoreckiego [12], w której dokonano aktualnej syntezy MECZ. W literaturze światowej rzadko spotyka się prace, w których stosuje się lub rozwija metodę elementów czasoprzestrzennych, np. [78, 79, 20, 120, 82, 66]. Pewne nowe elementy do rozwoju MECZ wnosi publikacja Hughesa i Hulberta [35].

Literatura podstawowa na temat lepkosprężystości jest bogata, np. prace Gurtina i Sternberga [31], Nowackiego [86]. W kraju ukazało się też kilka ważnych prac na temat lepkosprężystości, poza już wspomnianą monografią [86], np.: Kisiela [54, 56], Derskiego i Ziemby [25], Zawadzkiego [121], Osińskiego [90].

Problemy związane z wyznaczeniem naprężeń i odkształceń w ciałach lepkosprężystych komplikują się głównie z powodu reologicznych równań stanu, które występują w postaci związków różniczkowych lub całkowych. Istnieje ogólna teoria Alfrey'a i Lee zwana analogią sprężysto-lepkosprężystą, gdzie wykorzystano formalne podobieństwo pomiędzy transformacjami Laplace'a związków opisujących ciało lepkosprężyste a równaniami teorii sprężystości. Praktyczne możliwości tej analogii są jednak ograniczone do zupełnie podstawowych zadań, gdyż pojawiają się trudności natury matematycznej przy wyznaczeniu transformacji odwrotnej. Taka sytuacja zmusza do szukania rozwiązania różnych problemów praktycznych na drodze numerycznej. Najczęściej ciało lepkosprężyste opisuje się, w różnych metodach numerycznych, elementarnym modelem Kelvina-Voigta, który w wielu zagadnieniach dynamiki zapewnia zadowalające tłumienie drgań [122, 68, 69, 65, 44, 47, 19, 115]. Model ten jednak w znikomy sposób opisuje lepkosprężyste właściwości ciał rzeczywistych, w związku z czym zachodzi potrzeba tworzenia bardziej złożonych modeli, a więc i bardziej rozbudowanych związków konstytutywnych.

Zienkiewicz [122] do rozwiązywania zadań lepkosprężystych - w ujęciu MES - stosuje metody naprężeń lub odkształceń początkowych, a więc sposoby iteracyjne. Dużą uniwersalność mają metody przyrostowe słuszne dla dowolnych nieliniowości geometrycznych i fizycznych. Takie postępowanie preferują między innymi Argyris [4] i Kleiber [65, 59]. Interesujący sposób analizy reologicznej dla obciążeń quasistatycznych zaproponowali Świtka i Husiar [36, 107]. Sposób ten polega na dyskretnej aproksymacji naprężeń w czasie, co pozwala następnie na analityczne wyznaczenie (transformacja Laplace'a) odkształceń z różniczkowych równań stanu. W rezultacie uzyskuje się związki rekurencyjne. Pewne sformułowanie równań ruchu - dla dowolnie modelowanego ośrodka lepkosprężystego w ujęciu MES - zostało przedstawione w pracy Podhoreckiego [98], w której uzyskany układ zwyczajnych równań różniczkowych względem czasu można rozwiązywać znanymi metodami bezpośredniego całkowania lub superpozycji modalnej.

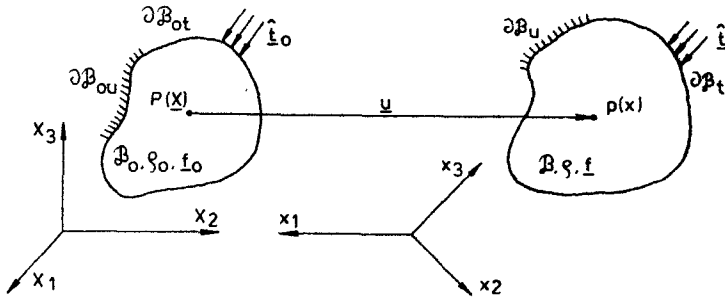
Wydaje się, że metoda elementów czasoprzestrzennych stwarza nową jakość w niestacjonarnych zagadnieniach początkowo-brzegowych. Dotyczy to także ośrodka lepkosprężystego, który przy założeniu małych przemieszczeń rozpatrywano w pracach Podhoreckiego [95, 96].

Zadaniem autora niniejszej pracy jest analiza ciał lepkosprężystych poddanych zmiennym obciążeniom o dowolnie dużych przemieszczeniach i odkształceniach w ujęciu MECZ. W rozdziale pierwszym zestawiono dotychczasowy dorobek naukowy w zakresie metody elementów czasoprzestrzennych. Przedstawiono też podstawową literaturę na temat metody elementów skończonych i lepkosprężystości. Potrzeba stosowania metod numerycznych w lepkosprężystości wynika głównie z powodu reologicznych równań stanu, które występują w postaci związków różniczkowych lub całkowych. Rozdział drugi zawiera sformułowanie równań teorii lepkosprężystości, w których uwzględniono efekty geometrycznie nieliniowe. Związki konstytutywne przedstawiono w postaci całkowitej. Lepkosprężyste cechy materiału ujmują funkcje relaksacji, które mogą być wyznaczone doświadczalnie lub opisywane innymi parametrami materiałowymi. Do określenia deformacji i ruchu ośrodka w teorii skończonych deformacji użyto stacjonarnego opisu Lagrange'a. Zdefiniowane równanie czteropracy wirtualnej może być w szczególności przedstawione w postaci znanej zasady Hamiltona. W rozdziale trzecim, na podstawie równania czteropracy wirtualnej, sformułowano równania algebraiczne metody elementów czasoprzestrzennych. Takie same równania uzyskano korzystając z ważonej metody residualnej. Przy danych warunkach początkowych układ równań MECZ sprowadza się do formuły rekurencyjnej. Równania rekurencyjne ulegają naturalnemu rozseparowaniu przy podziale czasoprzestrzeni na elementy skończone o kształcie symplektycznym. Podano też kryterium stabilności, nakładające na wymiary elementu czasoprzestrzennego pewne warunki. Rozdział czwarty zawiera sformułowanie macierzy sztywności elementu czasoprzestrzennego dla osiowo drgającego pręta, przy dowolnie dużych odkształceniach, oraz drgania belki przy umiarkowanych odkształceniach i dużych przemieszczeniach. Wykonano też obliczenia kilku zadań testowych - uzyskując prawidłowe rozwiązania.

2. RÓWNANIA TEORII LEPKOSPĘŻYSTOŚCI

2.1. Założenia

Rozpatrujemy ciało lepkospężyste zajmujące w naturalnej (początkowej) konfiguracji obszar $\bar{\mathcal{B}}_0$, który jest podzbiorem przestrzeni euklidesowej trójwymiarowej R^3 . Przez \mathcal{B}_0 oznaczamy wnętrze tego obszaru, a przez $\partial\mathcal{B}_0$ jego brzeg, który jest sumą zbiorów $\partial\mathcal{B}_{ot}$ i $\partial\mathcal{B}_{ou}$ (rys.2.1).



Rys.2.1

Ruch ciała będziemy badali w przedziale czasu $t \in \langle 0, \infty \rangle$. Do określenia deformacji i ruchu ośrodka w teorii skończonych deformacji użyjemy stacjonarnego opisu Lagrange'a \underline{x} . Zmienne dynamiczne występujące w tym opisie, tj. pole wektorowe przemieszczeń \underline{u} i sił masowych $\varrho_0 \underline{f}_0$, symetryczne pole tensorowe naprężeń Pioli-Kirchhoffa $\underline{\mathbb{I}}$ oraz pole tensorowe odkształceń Cauchy-Greena $\underline{\mathbb{E}}$ określone są na iloczynie kartezjańskim zbiorów $\mathcal{B}_0 \times \langle 0, \infty \rangle$. Pole wektorowe sił powierzchniowych $\hat{\underline{t}}_0$ opisane jest natomiast na iloczynie $\partial\mathcal{B}_0 \times \langle 0, \infty \rangle$. Konfigurację aktualną charakteryzują odpowiednio: układ osi kartezjańskich \underline{x} , obszary \mathcal{B} , $\partial\mathcal{B}_t$, $\partial\mathcal{B}_u$, siły masowe $\varrho \underline{f}$ i siły powierzchniowe $\hat{\underline{t}}$.

Zmienne dynamiczne są funkcjami ciągłymi. Funkcja $f(t)$ jest klasy C^N , $N = 0, 1, 2, \dots$ w przedziale $t \in (a, b)$, gdy $f(t)$ istnieje, jest ciągła i N razy różniczkowalna w sposób ciągły (gładka). Funkcja $f(t)$ jest klasy H^N (Heviside'a), jeśli $f(t)$ istnieje w przedziale $t \in (-\infty, \infty)$ oraz

a) $f(t) = 0$, $t \in (-\infty, 0)$,

b) $f(t)$ jest klasy C^N , $t \in \langle 0, \infty \rangle$, $N = 0, 1, 2, \dots$

Funkcja $f(\underline{x}, t)$, $(\underline{x}, t) \in \mathcal{B}_0 \times (a, b)$ jest klasy $C^{M, N}$, jeśli $f(\underline{x}, t)$ istnieje w obszarze $(\underline{x}, t) \in \mathcal{B}_0 \times (a, b)$, a pochodne cząstkowe

$$\underbrace{f_{ij\dots k}^{(n)}}_{m \text{ indeksów}}(\underline{X}, t) = \frac{\partial^{m+n} f(\underline{X}, t)}{\partial X_1 \dots \partial X_k \partial t^n} \quad (m=0,1,2\dots M; n=0,1,2\dots N)$$

istnieją i są ciągłe w obszarze $(\underline{X}, t) \in \beta_0 \times (a, b)$.

Funkcja $f(\underline{X}, t), (\underline{X}, t) \in \beta_0 \times (-\infty, \infty)$ jest klasy $H^{M,N}$ jeśli

- a) $f(\underline{X}, t) = 0, (\underline{X}, t) \in \beta_0 \times (-\infty, 0)$,
 b) $f(\underline{X}, t)$ jest klasy $C^{M,N}, (\underline{X}, t) \in \beta_0 \times \langle 0, \infty \rangle$.

2.2. Równania geometryczne

Jeżeli korzystamy z tego samego kartezjańskiego układu współrzędnych do opisu konfiguracji pierwotnej i aktualnej, to odkształcenia opisujemy tensorem Greena w postaci [28]:

$$E_{ij}(\underline{X}, t) = \frac{1}{2} \left[\frac{\partial u_i}{\partial X_j} + \frac{\partial u_j}{\partial X_i} + \frac{\partial u_k}{\partial X_i} \frac{\partial u_k}{\partial X_j} \right] \quad (2.1)$$

$$(\underline{X}, t) \in \beta_0 \times \langle 0, \infty \rangle,$$

$$i, j, k = 1, 2, 3.$$

gdzie:

$$u_j(\underline{X}, t) = x_j - X_j \quad (2.2)$$

opisuje składowe wektora przemieszczenia.

Miarami odkształcenia mogą być też wydłużenia względne $\underline{\varepsilon}$ i odkształcenia postaciowe $\underline{\gamma}$, które w odróżnieniu do składowych tensora Greena mają interpretację geometryczną [86, 28]:

$$\varepsilon_{kk} = \sqrt{1 + 2E_{kk}} - 1,$$

$$\cos \varphi_{ik} = \cos(90 - \gamma_{ik}) = \sin \gamma_{ik} = \frac{2E_{ik}}{\sqrt{(1+2E_{ii})(1+2E_{kk})}}, \text{ dla } i \neq k. \quad (2.3)$$

Wyrażenia (2.3) można rozwinąć w szeregi potęgowe

$$\varepsilon_{kk} = E_{kk} \left(1 - \frac{1}{2} E_{kk} + \frac{1}{2} E_{kk} E_{kk} - \dots \right),$$

$$\gamma_{ik} = \frac{2E_{ik}}{\sqrt{(1+2E_{ii})(1+2E_{kk})}} \left(1 + \frac{2E_{ik}E_{ik}}{3(1+2E_{ii})(1+2E_{kk})} + \dots \right), \quad i \neq k, \quad (2.4)$$

$$|2E_{kk}| \leq 1, \quad \left| \frac{2E_{ik}}{\sqrt{(1+2E_{ii})(1+2E_{kk})}} \right| < 1.$$

Następne odkształcenia ε_{ij} zapiszmy w formie rozwiniętej

$$\varepsilon_{ij} = \delta_{ik} \delta_{jk} \varepsilon_{kk} + \frac{1}{2} (\delta_{kk} \delta_{ik} \delta_{jl} - \delta_{kl} \delta_{ik} \delta_{jk}) \tau_{kl} \quad (2.5)$$

(sumowanie po wskaźniku „n^k”).

Po wprowadzeniu szeregów (2.4) uzyskamy

$$\varepsilon_{ij} = a_{ijkk} \varepsilon_{kk} + b_{ijkl} \varepsilon_{kl} \quad (2.6)$$

gdzie:

$$a_{ijkk} = \delta_{ik} \delta_{jk} \left(1 - \frac{1}{2} \varepsilon_{kk} + \frac{1}{2} \varepsilon_{kk} \varepsilon_{kk} - \dots \right) \quad (2.7)$$

$$b_{ijkl} = \frac{\delta_{kk} \delta_{ik} \delta_{jl} - \delta_{kl} \delta_{ik} \delta_{jk}}{\sqrt{(1+2\varepsilon_{kk})(1+2\varepsilon_{ll})}} \left[1 + \frac{2\varepsilon_{kl} \varepsilon_{kl}}{3(1+2\varepsilon_{kk})(1+2\varepsilon_{ll})} + \dots \right]$$

Dla małych odkształceń zanika różnica między prezentowanymi miarami odkształcenia

$$\varepsilon_{ij} = E_{ij} \quad \text{dla} \quad |E_{ij}| \ll 1. \quad (2.8)$$

gdyż współczynniki (2.7) są wielkościami stałymi

$$\begin{aligned} a_{ijkk} &\equiv \delta_{ik} \delta_{jk} \\ b_{ijkl} &\equiv \delta_{kk} \delta_{ik} \delta_{jl} - \delta_{kl} \delta_{ik} \delta_{jk}. \end{aligned} \quad (2.9)$$

2.3. Równania konstytutywne

W każdym realnym procesie dynamicznym mamy do czynienia z rozpraszaniem energii mechanicznej, która nieodwracalnie zamienia się na ciepło. Jeżeli ilość tej energii w trakcie jakiegoś procesu jest nieduża w porównaniu z energią sprężystą, to ciało można uważać za sprężyste. W przeciwnym przypadku do opisu zjawisk dynamicznych należy stosować modele reologiczne - uwzględniające straty energetyczne. Przy analizie problemów geometrycznie liniowych najczęściej korzysta się z modeli liniowej lepkosprężystości typu różniczkowego, np. Hooke'a, Kelvina-Voigta, Maxwella, Zenera, Bürgersa i modeli całkowych Boltzmana [31, 86, 54, 25, 121, 90].

Rozpatrywać będziemy ciało lepkosprężyste, które w warunkach izotermicznych możemy opisać następującym reologicznym równaniem stanu

$$F(\underline{I}, \underline{E}, t) = 0 \quad (2.10)$$

gdzie \underline{I} jest II tensorem naprężenia Pioli-Kirchhoffa.

Związek między symetrycznymi tensorami naprężenia $T_{ij}(\underline{X}, t)$ i odkształcenia $E_{ij}(\underline{X}, t)$ lub $\varepsilon_{ij}(\underline{X}, t)$ napiszmy w postaci całkowej

$$T_{ij}(\underline{X}, t) = \int_{-\infty}^t \Psi_{ijkl}^*(\underline{E}, \underline{X}, t-z) \frac{\partial E_{kl}}{\partial z}(\underline{X}, z) dz . \quad (2.11)$$

$$T_{ij}(\underline{X}, t) = \int_{-\infty}^t \Psi_{ijkl}(\underline{E}, \underline{X}, t-z) \frac{\partial E_{kl}}{\partial z}(\underline{X}, z) dz ,$$

gdzie Ψ_{ijkl}^* i Ψ_{ijkl} są tensorowymi funkcjami relaksacji materiału, które można wyznaczyć doświadczalnie [121]. Tensory te w myśl zasady Onsagera wykazują własności symetrii ([28], str. 385). Jeżeli naprężenia i odkształcenia spełniają warunek

$$T_{ij}(\underline{X}, t) = E_{ij}(\underline{X}, t) = 0, \quad \underline{X}, t \in \beta_0 \times (-\infty, 0), \quad (2.12)$$

to równania (2.11) można sprowadzić do postaci

$$T_{ij}(\underline{X}, t) = \Psi_{ijkk}^{\square}(\underline{E}, \underline{X}, t) E_{kk}(\underline{X}, 0) + \Psi_{ijkl}^{\square\square}(\underline{E}, \underline{X}, t) E_{kl}(\underline{X}, 0) + \\ + \int_0^t \left[\Psi_{ijkk}^{\square}(\underline{E}, \underline{X}, t-z) \frac{\partial E_{kk}}{\partial z}(\underline{X}, z) + \Psi_{ijkl}^{\square\square}(\underline{E}, \underline{X}, t-z) \frac{\partial E_{kl}}{\partial z}(\underline{X}, z) \right] dz, \quad (2.13)$$

$$T_{ij}(\underline{X}, t) = \Psi_{ijkl}(\underline{X}, t) E_{kl}(\underline{X}, 0) + \int_0^t \Psi_{ijkl}(\underline{X}, t-z) \frac{\partial E_{kl}}{\partial z}(\underline{X}, z) dz ,$$

$$\underline{X}, t \in \beta_0 \times \langle 0, \infty \rangle .$$

gdzie:

$$\begin{aligned} \Psi_{ijkk}^{\square}(\underline{E}, \underline{X}, t) &= \Psi_{ijmn}(\underline{X}, t) a_{mnkk}(\underline{E}) , \\ \Psi_{ijkl}^{\square\square}(\underline{E}, \underline{X}, t) &= \Psi_{ijmn}(\underline{X}, t) b_{mnkl}(\underline{E}) . \end{aligned} \quad (2.14)$$

Pierwsze człony we wzorach (2.13) określają efekt zakłócenia początkowego i pojawiają się wskutek skoku \underline{E} lub $\underline{\varepsilon}$, gdy $t \rightarrow 0$ od strony dodatniej.

Zależności między naprężeniami i odkształceniami można także ująć w postaci równań różniczkowych (por. [95, 96]), gdy ε_{kl} i T_{kl} są klasy $H^{1,N}$

$$\begin{aligned} P_1(D) T_{ij}(\underline{X}, t) &= Q_1(D) \varepsilon_{ij}(\underline{X}, t) , \\ P_2(D) T_{kk}(\underline{X}, t) &= Q_2(D) \varepsilon_{kk}(\underline{X}, t) , \end{aligned} \quad (2.15)$$

$$\underline{X}, t \in \beta_0 \times \langle 0, \infty \rangle .$$

Symbole $P(D)$ i $Q(D)$ oznaczają liniowe operatory różniczkowe

$$\begin{aligned}
 P_1(D) &= \sum_{k=0}^N a_k D^k, & Q_1(D) &= \sum_{k=0}^N b_k D^k, \\
 P_2(D) &= \sum_{k=0}^N c_k D^k, & Q_2(D) &= \sum_{k=0}^N d_k D^k,
 \end{aligned}
 \tag{2.16}$$

$$D^k f \equiv \frac{\partial^k f}{\partial t^k},$$

gdzie a_k, b_k, c_k, d_k ($k = 0, 1, \dots, N$) są stałymi materiałowymi, natomiast

$$T_{ij} = T_{ij} - \frac{1}{3} \delta_{ij} T_{kk}, \quad \varepsilon_{ij} = \varepsilon_{ij} - \frac{1}{3} \delta_{ij} \varepsilon_{kk} \tag{2.17}$$

opisują dewiatory naprężenia i odkształcenia.

Jeżeli np. założymy, że przy wszechstronnym rozciąganiu lub ściskaniu ośrodek lepkosprężysty zachowuje się tak, jak ciało sprężyste, to otrzymujemy stałość operatorów P_2 i Q_2

$$P_2(D) = 1, \quad Q_2(D) = 3K', \tag{2.18}$$

gdzie K' oznacza moduł ściśliwości. Operatory różniczkowe P_1 i Q_1 w tym przypadku opisuje się analogicznie, jak dla ciała podlegającego bardzo małym deformacjom [95, 96]; można więc stosować nazwy modeli używanych w liniowej lepkosprężystości (tablica 1).

Tablica 1

| Nazwa modelu | a_0 | a_1 | a_2 | b_0 | b_1 | b_2 |
|---|-------|--|----------------------|-------------------|----------------------------|-----------------------------|
| Hooke'a $n_1 = m_1 = 0$ | 1 | 0 | 0 | $2\mu_1'$ | 0 | 0 |
| Kelvina - Voigta $n_1 = 0; m_1 = 1$ | 1 | 0 | 0 | $2\mu_1'$ | $2\lambda_1\mu_1'$ | 0 |
| Maxwella $n_1 = m_1 = 1$ | 1 | λ_2 | 0 | 0 | $2\lambda_2\mu_2'$ | 0 |
| Zenera I $n_1 = m_1 = 1$ | 1 | $\lambda_3\alpha_1$ | 0 | $2\alpha_1\mu_1'$ | $2\alpha_1\lambda_3\mu_1'$ | 0 |
| Zenera II $n_1 = 1; m_1 = 2$ | 1 | $\lambda_2 + \lambda_3$ | 0 | 0 | $2\lambda_2\mu_2'$ | $2\lambda_2\lambda_3\mu_2'$ |
| Bürgersa $n = m = 2$ | 1 | $\frac{\lambda_4}{\alpha_2} + \lambda_5$ | $\lambda_4\lambda_5$ | 0 | $2\lambda_4\mu_1'$ | $2\lambda_4\lambda_5\mu_1'$ |
| Oznaczenia: | | | | | | |
| $\lambda_1 = \frac{\eta_1}{\mu_1'}, \lambda_2 = \frac{\eta_1}{\mu_2'}, \lambda_3 = \frac{\eta_2}{\mu_2'}, \lambda_4 = \frac{\eta_2}{\mu_1'}, \lambda_5 = \frac{\eta_3}{\mu_3'}, \alpha_1 = \frac{\mu_2'}{\mu_1' + \mu_2'}, \alpha_2 = \frac{\mu_3'}{\mu_1' + \mu_3'}$ | | | | | | |
| μ' - moduł odkształcenia postaciowego [N/m ²]; | | | | | | |
| η' - moduł lepkości [Ns/m ²]. | | | | | | |

Jeżeli prawo naprężenie - odkształcenie dla danego materiału może być wyrażone w postaci całkowej i różniczkowej, wówczas musi istnieć zależność między funkcją relaksacji Ψ (lub pełzania), a operatorami różniczkowymi.

Założmy, że istnieje przekształcenie (transformacja) Laplace'a $\propto [f(t)]$ (względem czasu) wszystkich występujących funkcji $f(t)$

$$\propto [f(t)] \equiv \tilde{f}(p) = \int_0^{\infty} e^{-pt} f(t) dt, \quad \operatorname{Re}(p) > p_0, \quad (2.19)$$

gdzie p_0 jest odcięta zbieżności całki Laplace'a. Dokonując transformacji Laplace'a równań (2.15) mamy

$$\begin{aligned} \tilde{P}_1(p) \tilde{T}_{ij}^i(p) &= \sum_{k=1}^N \frac{\partial^{k-1} T_{ij}^i}{\partial t^{k-1}}(0) \sum_{r=k}^N a_r p^{r-k} = \tilde{Q}_1(p) \tilde{E}_{ij}^i(p) + \\ &+ \sum_{k=1}^N \frac{\partial^{k-1} \varepsilon_{ij}^i}{\partial t^{k-1}}(0) \sum_{r=k}^N b_r p^{r-k}, \\ \tilde{P}_2(p) \tilde{T}_{ii}(p) &= \sum_{k=1}^N \frac{\partial^{k-1} T_{ii}}{\partial t^{k-1}}(0) \sum_{r=k}^N c_r p^{r-k} = \tilde{Q}_2(p) \tilde{E}_{ii}(p) + \\ &+ \sum_{k=1}^N \frac{\partial^{k-1} \varepsilon_{ii}}{\partial t^{k-1}}(0) \sum_{r=k}^N d_r p^{r-k}. \end{aligned} \quad (2.20)$$

gdzie:

$$\begin{aligned} \tilde{P}_1(p) &= \sum_{k=0}^N a_k p^k, & \tilde{Q}_1(p) &= \sum_{k=0}^N b_k p^k, \\ \tilde{P}_2(p) &= \sum_{k=0}^N c_k p^k, & \tilde{Q}_2(p) &= \sum_{k=0}^N d_k p^k. \end{aligned} \quad (2.21)$$

a $T_{ij}^i(0)$, $(\partial T_{ij}^i / \partial t)(0)$ itd. są wartościami początkowymi, gdzie $t \rightarrow 0$ od strony dodatniej. Jeżeli wykonamy transformację Laplace'a prawa całkowego (2.13)₁, to uzyskamy w przestrzeni obrazu (por. [31], str. 315)

$$\begin{aligned} \tilde{T}_{ij}^i(p) &= \tilde{\psi}_{ijkl}(p) \varepsilon_{kl}(0) + \tilde{\varphi}_{ijkl}(p) [p \tilde{E}_{kl}(p) - \varepsilon_{kl}(0)] = \\ &= p \tilde{\psi}_{ijkl}(p) \tilde{E}_{kl}(p). \end{aligned} \quad (2.22)$$

Równania (2.20) będą zgodne z prawem relaksacyjnym (2.22), gdy wartości początkowe w przestrzeni obrazu spełniają następujące warunki

$$\begin{aligned} \sum_{k=1}^N \frac{\partial^{k-1} T_{ij}^i}{\partial t^{k-1}}(0) \sum_{r=k}^N a_r p^{r-k} &= \sum_{k=1}^N \frac{\partial^{k-1} \varepsilon_{ij}^i}{\partial t^{k-1}}(0) \sum_{r=k}^N b_r p^{r-k}, \\ \sum_{k=1}^N \frac{\partial^{k-1} T_{ii}}{\partial t^{k-1}}(0) \sum_{r=k}^N c_r p^{r-k} &= \sum_{k=1}^N \frac{\partial^{k-1} \varepsilon_{ii}}{\partial t^{k-1}}(0) \sum_{r=k}^N d_r p^{r-k}. \end{aligned} \quad (2.23)$$

Warunki początkowe (2.23) są tożsamościami jako wielomian argumentu ρ . Możemy je zapisać w przestrzeni oryginału

$$\sum_{k=r}^N a_k \frac{\partial^{k-r} T_{ij}}{\partial t^{k-r}}(0) = \sum_{k=r}^N b_k \frac{\partial^{k-r} \epsilon_{ij}}{\partial t^{k-r}}(0) \quad (2.24)$$

$$\sum_{k=r}^N c_k \frac{\partial^{k-r} T_{ii}}{\partial t^{k-r}}(0) = \sum_{k=r}^N d_k \frac{\partial^{k-r} \epsilon_{ii}}{\partial t^{k-r}}(0), \quad r = 1, 2, \dots, N.$$

Równania (2.20) przyjmują ostatecznie następującą formę w przestrzeni obrazu

$$\bar{T}_{ij}(\rho) = \rho \bar{\Psi}_1(\rho) \bar{\epsilon}_{ij}(\rho) \quad (2.25)$$

$$\bar{T}_{ii}(\rho) = \rho \bar{\Psi}_2(\rho) \bar{\epsilon}_{ii}(\rho)$$

gdzie:

$$\bar{\Psi}_1(\rho) = \frac{\bar{Q}_1(\rho)}{\rho \bar{P}_1(\rho)} \quad \bar{\Psi}_2(\rho) = \frac{\bar{Q}_2(\rho)}{\rho \bar{P}_2(\rho)} \quad (2.26)$$

są transformacjami funkcji relaksacji odpowiednio przy ścinaniu i wszechstronnym ściskaniu.

Wygodnie będzie wyrazić bezpośrednio składowe stanu naprężenia przez składowe stanu odkształcenia, a nie przez dewiatory i aksjatory tych tensorów (dla ciała izotropowego)

$$\bar{T}_{ij}(\rho) = \rho \bar{\Psi}_{ijkl}(\rho) \bar{\epsilon}_{ij}(\rho) \quad (2.27)$$

gdzie:

$$\bar{\Psi}_{ijkl}(\rho) = \frac{\bar{\Psi}_2(\rho) - \bar{\Psi}_1(\rho)}{3} \delta_{ij} \delta_{kl} + \frac{\bar{\Psi}_1(\rho)}{2} (\delta_{ik} \delta_{jl} + \delta_{il} \delta_{jk}) \quad (2.28)$$

Podobnie wyrażmy warunki początkowe (2.24)

$$\sum_{k=r}^N \Theta_{ijkl}^s \frac{\partial^{k-r} \tau_{kl}}{\partial t^{k-r}}(0) = \sum_{k=r}^N \Phi_{ijkl}^s \frac{\partial^{k-r} \epsilon_{kl}}{\partial t^{k-r}}(0) \quad (2.29)$$

gdzie:

$$\Theta_{ijkl}^s = \frac{c_s - a_s}{3} \delta_{ij} \delta_{kl} + \frac{a_s}{2} (\delta_{ik} \delta_{jl} + \delta_{il} \delta_{jk})$$

$$\Phi_{ijkl}^s = \frac{d_s - b_s}{3} \delta_{ij} \delta_{kl} + \frac{b_s}{2} (\delta_{ik} \delta_{jl} + \delta_{il} \delta_{jk}), \quad s = 1, 2, \dots, N. \quad (2.30)$$

Takie sformułowanie prawa fizycznego umożliwia niezależne modelowanie materiału dla części dewiatorowej i aksjatorowej odkształceń i naprężeń.

Fenomenologiczne modele lepkosprężystości na ogół opisane są równaniami różniczkowymi (2.15); istnieje więc możliwość opisu funkcji relaksacji $\psi_i(\tau)$ innymi wielkościami (tablica 2). Do tego celu wykorzystujemy parametry opisane w tabelicy 1 oraz wzory (2.16), (2.21) i (2.26). Jawny opis funkcji relaksacji (tablica 2) nie ogranicza możliwości innego modelowania ośrodka lepkosprężystego (por. [90], str. 130-185).

Stan naprężenia, w konfiguracji aktualnej i do niej odniesiony, opisuje symetryczny tensor Cauchy'ego σ_{ij} . Odkształcenia ϵ_{ij} odnosimy do początkowego położenia cząsteczek w ośrodku ciągłym, więc naprężenia też należy określić względem pierwotnej konfiguracji. Stan naprężenia w konfiguracji aktualnej, odniesiony do początkowej, reprezentuje symetryczny tensor Kirchhoffa τ_{ij} (II tensor Pioli-Kirchhoffa). Między tymi tensorami zachodzą związki [28]

$$\sigma_{ij} = \frac{\rho}{\rho_0} \left(\delta_{i\alpha} + \frac{\partial u_i}{\partial x_\alpha} \right) \left(\delta_{j\beta} + \frac{\partial u_j}{\partial x_\beta} \right) \tau_{\alpha\beta} \quad (2.31)$$

$$\tau_{ij} = \frac{\rho_0}{\rho} \frac{\epsilon_{\alpha\beta}}{\left(\delta_{\alpha i} + \frac{\partial u_\alpha}{\partial x_i} \right) \left(\delta_{\beta j} + \frac{\partial u_\beta}{\partial x_j} \right)}$$

gdzie:

$$\frac{\rho_0}{\rho} = \det \left| \delta_{ij} + \frac{\partial u_i}{\partial x_j} \right| \quad (2.32)$$

$$\delta_{ij} = \begin{cases} 1 & \text{dla } i = j \\ 0 & \text{dla } i \neq j \end{cases}$$

2.4. Równania równowagi dynamicznej

Równania ruchu we współrzędnych Lagrange'a \underline{x} opisujemy II tensorem Pioli-Kirchhoffa [28]

$$\frac{\partial}{\partial x_j} \left[\tau_{jk} \left(\delta_{ik} + \frac{\partial u_i}{\partial x_k} \right) \right] + \rho_0 (f_{oi} - \ddot{u}_i) = 0 \quad (2.33)$$

$$(\underline{x}, t) \in \beta_0 \times \langle 0, \infty \rangle$$

Przyjmujemy, że wypadkowe siły: masowa i bezwładności są identyczne w konfiguracji początkowej i aktualnej

Tablica 2

| Nazwa modelu | $\psi_1(t)$ | $\psi_2(t)$ |
|-------------------|--|--|
| Hooke'a | $2\mu_j$ | $3K_j$ |
| Kelvina-Voigta *) | $2\mu_j [1 + \lambda_{11} \delta(t)]$ | $3K_j [1 + \lambda_{21} \delta(t)]$ |
| Maxwella | $2\mu_2 e^{-\frac{t}{\lambda_{12}}}$ | $3K_2 e^{-\frac{t}{\lambda_{22}}}$ |
| Zenera I | $2\mu_j \alpha_{11} \left[1 + e^{-\frac{t}{\lambda_{13} \alpha_{11}}} \left(\frac{1}{\alpha_{11}} - 1 \right) \right]$ | $3K_j \alpha_{21} \left[1 + e^{-\frac{t}{\lambda_{23} \alpha_{21}}} \left(\frac{1}{\alpha_{21}} - 1 \right) \right]$ |
| Zenera II | $\frac{2\mu_2 \lambda_{12}}{\lambda_{12} + \lambda_{13}} \left[\lambda_{13} \delta(t) + e^{-\frac{t}{\lambda_{12} + \lambda_{13}}} \left(1 - \frac{\lambda_{13}}{\lambda_{12} + \lambda_{13}} \right) \right]$ | $\frac{3K_2 \lambda_{22}}{\lambda_{22} + \lambda_{23}} \left[\lambda_{23} \delta(t) + e^{-\frac{t}{\lambda_{22} + \lambda_{23}}} \left(1 - \frac{\lambda_{23}}{\lambda_{22} + \lambda_{23}} \right) \right]$ |
| Bürgersa | $\frac{2\mu_j}{\lambda_{15}(\eta_{11} - \eta_{12})} \left[\eta_{11} t \left(1 + \lambda_{15} \eta_{11} \right) - e^{-\eta_{12} t} \left(1 + \lambda_{15} \eta_{12} \right) \right]$ | $\frac{3K_j}{\eta_{21} - \eta_{22}} \left[\eta_{21} t \left(1 + \lambda_{25} \eta_{21} \right) - e^{-\eta_{22} t} \left(1 + \lambda_{25} \eta_{22} \right) \right]$ |

$\lambda_{11} = \frac{\eta_{11}}{\mu_1}, \lambda_{12} = \frac{\eta_{12}}{\mu_2}, \lambda_{13} = \frac{\eta_{13}}{\mu_2}, \lambda_{14} = \frac{\eta_{12}}{\mu_1}, \lambda_{15} = \frac{\eta_{13}}{\mu_3}, \lambda_{21} = \frac{\eta_{21}}{K_1}, \lambda_{22} = \frac{\eta_{22}}{K_2}, \lambda_{23} = \frac{\eta_{22}}{K_2}, \lambda_{24} = \frac{\eta_{22}}{K_1}, \lambda_{25} = \frac{\eta_{23}}{K_3}$;
 $\alpha_{11} = \frac{\mu_2}{\mu_1 + \mu_2}, \alpha_{21} = \frac{K_2}{K_1 + K_2}$ $\delta(t) = \begin{cases} 0 & \text{dla } t \neq 0 \\ \infty & \text{dla } t = 0 \end{cases}$ delta Diraca

μ_j - moduł odkształcenia postaciowego [N/m²], K_j - moduł odkształcenia objętościowego (ściśliwości) [N/m²],
 η_{11} - moduł lepkości postaciowej [Ns/m²], η_{21} - moduł lepkości objętościowej [Ns/m²].

$\eta_{11} = -\frac{\mu_2}{\mu_1 + \mu_2} \left(\frac{1}{\alpha_{12} \lambda_{15}} + \frac{1}{\lambda_{14}} - \Delta \right), \quad \eta_{12} = -\frac{1}{2} \left(\frac{1}{\alpha_{12} \lambda_{15}} + \frac{1}{\lambda_{14}} + \Delta \right), \quad \Delta = \sqrt{\left(\frac{1}{\alpha_{12} \lambda_{15}} + \frac{1}{\lambda_{14}} \right)^2 - \frac{4}{\lambda_{14} \lambda_{15}}}, \quad i = 1, 2$

*) Funkcję relaksacji ψ_i dla chwili $t=0$ są nieokreślone (nieokreślenie duże). Występowanie funkcji Diraca dla modelu Kelvina -Voigta i Zenera II wskazuje, że naprężenie, ze względu na nieskończoność w chwili przyłożenia odkształcenia Przyczyną tego jest tłumik imitujący lepkość, który nie może przegnąć skończonego chwilowego odkształcenia przy skończonej chwilowej zmianie naprężenia (por. [86], str. 14).

$$\int_{\mathcal{B}_0} f_{0i} \xi_0 d\mathcal{B}_0 = \int_{\mathcal{B}} f_i \xi d\mathcal{B} \quad (2.34)$$

$$\int_{\mathcal{B}_0} \xi_0 \dot{u}_i d\mathcal{B}_0 = \int_{\mathcal{B}} \xi \dot{u}_i d\mathcal{B}$$

2.5. Warunki brzegowe

Naprężeniowe warunki brzegowe bazujące na II tensorze Pioli-Kirchhoffa T_{ij} przyjmujemy w postaci [28]

$$T_{jp} \left(\delta_{ip} + \frac{\partial u_i}{\partial x_p} \right) \nu_{0j} = \hat{t}_{0i} \quad (2.35)$$

$$(X, t) \in \partial\mathcal{B}_{0t} \times \langle 0, \infty \rangle,$$

gdzie ν_0 jest wektorem oznaczającym kierunek normalnej zewnętrznej elementu powierzchni $\partial\mathcal{B}_{0t}$.

Sily powierzchniowe określone są w położeniu powierzchni brzegowej w stanie naturalnym (a wielkości ich są odniesione do pierwotnego pola powierzchni $\partial\mathcal{B}_{0t}$). Wypadkowe tych sił są jednakowe w obu konfiguracjach, tzn. pierwotnej i aktualnej

$$\int_{\partial\mathcal{B}_{0t}} \hat{t}_{0i} d(\partial\mathcal{B}_0) = \int_{\partial\mathcal{B}_t} \hat{t}_i d(\partial\mathcal{B}) \quad (2.36)$$

Na części powierzchni brzegowej znane są przemieszczenia

$$u_i = \hat{u}_i, \quad (X, t) \in \partial\mathcal{B}_{0u} \times \langle 0, \infty \rangle. \quad (2.37)$$

2.6. Warunki początkowe

Liczba potrzebnych warunków początkowych wynika z rzędu różniczkowego równania równowagi (2.33) i charakteru funkcji relaksacji użytej do zdefiniowania prawa konstytutywnego (2.13). Równanie równowagi dynamicznej jest drugiego rzędu, należy więc znać dwa warunki początkowe, np.

$$u_i = u_i^0, \quad \dot{u}_i = v_i^0, \quad (2.38)$$

$$(X, t) \in \bar{\mathcal{B}}_0 \times \{0\}$$

Związek konstytutywny (2.13) w ogólnym przypadku (dowolna funkcja relaksacji) wymaga znajomości odkształceń w chwili początkowej

$$\epsilon_{ij} = \epsilon_{ij}^0, \quad (X, t) \in \mathcal{B}_0 \times \{0\} \quad (2.39)$$

W szczególności jednak (por. tablica 2), np. dla ciała Hooke'a i Kelvina-Voigta warunek początkowy (2.39) nie jest konieczny.

2.7. Równanie czteropracy wirtualnej

Wszystkie wielkości występujące w równaniach (2.1), (2.13), (2.33) + (2.39) są funkcjami klasy $H^{M,N}$ ($M, N \geq 2$). Wariację funkcji $u_i(\underline{X}, t)$ oznaczamy symbolem $\delta u_i(\underline{X}, t)$. Rozważamy klasę dowolnych przemieszczeń $u_i + \delta u_i$ zgodnych z więzami ciała (2.37), co prowadzi do zanikania wariacji przemieszczeń δu_i na powierzchni brzegowej $\partial \mathcal{B}_{0U}$.

Na bazie równań równowagi (2.33) możemy utworzyć wyrażenie słuszne dla dowolnej chwili „t”, a więc słuszne także dla interwału $\langle t_{(0)}, t_{(1)} \rangle$ czasowego

$$\int_{t_{(0)}}^{t_{(1)}} \left\{ \int_{\mathcal{B}_0} \delta u_i \frac{\partial}{\partial X_j} \left[T_{jk} \left(\delta_{ik} + \frac{\partial u_i}{\partial X_k} \right) \right] d\mathcal{B}_0 + \int_{\mathcal{B}_0} \delta u_i \varrho_0 f_{oi} d\mathcal{B}_0 + \int_{\mathcal{B}_0} \delta u_i \varrho_0 \ddot{u}_i d\mathcal{B}_0 \right\} dt = 0 \quad (2.40)$$

Następnie przekształcamy pierwszą całkę, wykorzystując twierdzenie Gaussa-Ostrogradskiego i warunku brzegowego (2.35)

$$\begin{aligned} & \int_{t_{(0)}}^{t_{(1)}} \left\{ \int_{\mathcal{B}_0} \delta u_i \frac{\partial}{\partial X_j} \left[T_{jk} \left(\delta_{ik} + \frac{\partial u_i}{\partial X_k} \right) \right] d\mathcal{B}_0 \right\} dt = \\ & = \int_{t_{(0)}}^{t_{(1)}} \left\{ \int_{\mathcal{B}_0} \frac{\partial}{\partial X_j} \left[\delta u_i T_{jk} \left(\delta_{ik} + \frac{\partial u_i}{\partial X_k} \right) \right] d\mathcal{B}_0 - \int_{\mathcal{B}_0} \frac{\partial (\delta u_i)}{\partial X_j} T_{jk} \left(\delta_{ik} + \frac{\partial u_i}{\partial X_k} \right) d\mathcal{B}_0 \right\} dt = \\ & = \int_{t_{(0)}}^{t_{(1)}} \left\{ \int_{\partial \mathcal{B}_{0t}} \delta u_i \hat{t}_{oi} d(\partial \mathcal{B}_{0t}) - \int_{\mathcal{B}_0} \delta E_{ij} T_{ij} d\mathcal{B}_0 \right\} dt \quad (2.41) \end{aligned}$$

oraz trzecią całkę

$$\int_{t_{(0)}}^{t_{(1)}} \int_{\mathcal{B}_0} \delta u_i \varrho_0 \ddot{u}_i d\mathcal{B}_0 dt = \int_{\mathcal{B}_0} \delta u_i \varrho_0 \dot{u}_i d\mathcal{B}_0 \Big|_{t_{(0)}}^{t_{(1)}} - \int_{t_{(0)}}^{t_{(1)}} \int_{\mathcal{B}_0} \dot{\delta u}_i \varrho_0 \dot{u}_i d\mathcal{B}_0 dt \quad (2.42)$$

Po wprowadzeniu tych przekształceń do (2.40) uzyskamy równanie czteropracy wirtualnej

$$\int_{t(0)}^{t(1)} \left\{ \int_{\mathcal{P}_0} g_0 (f_{0i} \delta u_i + \dot{u}_i \delta \dot{u}_i) d\mathcal{P}_0 + \int_{\partial \mathcal{P}_{0t}} \hat{t}_{0i} \delta u_i d(\partial \mathcal{P}_0) + \right. \\ \left. - \int_{\mathcal{P}_0} T_{ij} \delta E_{ij} d\mathcal{P}_0 \right\} dt - \int_{\mathcal{P}_0} g_0 \dot{u}_i \delta u_i \bigg|_{t(0)}^{t(1)} d\mathcal{P}_0 = 0. \quad (2.43)$$

Równanie to odpowiada uogólnionej zasadzie Hamiltona [5, 6, 7, 13]

$$\delta \int_{t(0)}^{t(1)} (T - V) dt + \int_{t(0)}^{t(1)} \left\{ \int_{\mathcal{P}_0} g_0 f_{0i} \delta u_i d\mathcal{P}_0 + \int_{\partial \mathcal{P}_{0t}} \hat{t}_{0i} \delta u_i d(\partial \mathcal{P}_0) \right\} dt + \\ - \frac{\partial T}{\partial \dot{u}_i} \delta u_i \bigg|_{t(0)}^{t(1)} = 0, \quad (2.44)$$

gdzie:

$$T = \frac{1}{2} \int_{\mathcal{P}_0} g_0 \dot{u}_i \dot{u}_i d\mathcal{P}_0, \quad V = \frac{1}{2} \int_{\mathcal{P}_0} T_{ij} E_{ij} d\mathcal{P}_0 \quad (2.45)$$

oznaczają kolejno energie kinetyczną i potencjalną odkształceń.

Gdy obciążenia mają charakter zachowawczy, to zasadę Hamiltona przedstawiamy w postaci

$$\delta \int_{t(0)}^{t(1)} (T - V + W) dt - \frac{\partial T}{\partial \dot{u}_i} \delta u_i \bigg|_{t(0)}^{t(1)} = 0, \quad (2.46)$$

gdzie:

$$W = \int_{\mathcal{P}_0} g_0 f_{0i} u_i d\mathcal{P}_0 + \int_{\partial \mathcal{P}_{0t}} \hat{t}_{0i} u_i d(\partial \mathcal{P}_0) \quad (2.47)$$

jest pracą obciążeń.

Często w wariacyjnych sformułowaniach równań ruchu wprowadza się ograniczenie, że wariacje przemieszczeń na końcach przedziału czasu zanikają, np. [65, 28, 87]

$$\delta \chi(\underline{u}) = \delta \int_{t(0)}^{t(1)} (T - V + W) dt = 0, \quad (2.48)$$

gdzie χ jest minimalizowanym funkcjonałem (funkcja Lagrange'a).

Równanie czteropracy wirtualnej (2.43), a więc także i zasada Hamiltona w postaci (2.44) lub (2.46), nie dadzą się wyrazić prosto jako minimum dobrze określonego funkcjonału. Wiadomo jednak, że takie sformułowania dopuszczają stosowanie metod bezpośrednich (np. [28], str. 340). Łatwo wykażać, że z zasady wariacyjnej (2.43) można otrzymać równania teorii lepkości.

2.8. Istnienie i jednoznaczność rozwiązań

Rozwiązanie dowolnego problemu mechaniki continuum prowadzi do wyników opisujących pola naprężenia, odkształcenia i przemieszczenia w ciele \bar{P}_0 . Wszystkie występujące funkcje w rozpatrywanym obszarze czasoprzestrzennym $\Omega : \{P_0, 0 \leq t < \infty\}$ są klasy $H^{2,2}$.

Założmy, że istnieją dwa różne rozwiązania tego samego zagadnienia brzegowo-początkowego przy takich samych siłach masowych i powierzchniowych oraz funkcjach relaksacji. Obydwa rozwiązania spełniają także te same brzegowe warunki przemieszczeniowe i warunki początkowe. Oznaczmy pierwsze z tych rozwiązań jako zbiór $\{u_i, T_{ij}, \varepsilon_{ij}, E_{ij}\}$, a drugie jako $\{u_i^*, T_{ij}^*, \varepsilon_{ij}^*, E_{ij}^*\}$. Ponieważ z założenia są one różne, muszą zatem istnieć nie równe zeru różnice tych rozwiązań, czyli zbiór $\{u_i^{**}, T_{ij}^{**}, \varepsilon_{ij}^{**}, E_{ij}^{**}\}$

$$u_i^{**} = u_i - u_i^*, \quad T_{ij}^{**} = T_{ij} - T_{ij}^*, \quad \varepsilon_{ij}^{**} = \varepsilon_{ij} - \varepsilon_{ij}^*, \quad E_{ij}^{**} = E_{ij} - E_{ij}^* \quad (2.49)$$

Zbiór rozwiązań (2.49) musi spełniać - podobnie jak poprzednie dwa zbiory - te same równania równowagi, równania geometryczne i konstytutywne oraz warunki początkowo-brzegowe. Pisząc równania równowagi (2.33) dla każdego ze stanów obciążenia (z gwiazdką i bez gwiazdki), a następnie odejmując je od siebie stronami otrzymujemy wyrażenie

$$\frac{\partial S_{ji}^{**}}{\partial x_j} - \rho_0 u_i^{**} = 0, \quad (\underline{x}, t) \in \Omega : (P_0, 0 \leq t < \infty), \quad (2.50)$$

gdzie:

$$S_{ji}^{**} = S_{ji} - S_{ji}^* \quad (2.51)$$

$$S_{ji} = T_{jp} \left(\delta_{ip} + \frac{\partial u_i}{\partial x_p} \right), \quad S_{ji}^* = T_{jp}^* \left(\delta_{ip} + \frac{\partial u_i^*}{\partial x_p} \right)$$

oznacza I tensor Pioli-Kirchhoffa (por. [28], str. 463).

Podobnie postępujemy z warunkami brzegowymi naprężeniowymi (2.35)

$$S_{ji}^{**} \nu_{oj} = 0, \quad (\underline{x}, \tau) \in \partial \Omega_t : (\partial P_{ot}, 0 \leq t < \infty) \quad (2.52)$$

i przemieszczeniowymi (2.37)

$$u_i^{**} = 0, \quad (\underline{X}, t) \in \partial\Omega_U : (\partial\mathcal{P}_{OU} \times 0 \leq t < \infty) \quad (2.53)$$

Stwierdzamy, że rozwiązanie (2.49) odpowiada stanowi, w którym wewnątrz ciała nie występują siły masowe (2.50), a na powierzchni tego ciała zanikają obciążenia (2.52) lub przemieszczenia (2.53). W dalszych rozważaniach wykorzystajmy zasadę zachowania energii (por. [87], str. 29) dla stanu (2.49)

$$\frac{\partial}{\partial t} (V^{**} + T^{**}) = L^{**}, \quad (\underline{X}, t) \in \Omega \quad (2.54)$$

gdzie V^{**} i T^{**} oznaczają energię potencjalną odkształceń i energię kinetyczną (2.45), natomiast L^{**} jest mocą sił zewnętrznych (por. (2.47))

$$L^{**} = \int_{\mathcal{P}_0} g_{0i} f_{0i} \dot{u}_i^{**} d\mathcal{P}_0 + \int_{\partial\mathcal{P}_{ot}} \hat{t}_{0i} \dot{u}_i^{**} d(\partial\mathcal{P}_0) \quad (2.55)$$

Prawa strona równania (2.54) równa się zeru, gdyż dla rozwiązania (2.49) zanikają siły masowe i powierzchniowe, stąd

$$V^{**} + T^{**} = \text{const}, \quad (\underline{X}, t) \in \bar{\Omega} \quad (2.56)$$

Załóżmy warunki początkowe $u_i(0)$, $\dot{u}_i(0)$, $\varepsilon_{ij}(0)$ lub $E_{ij}(0)$, które dla stanu dwugwiazdkowego wynoszą

$$\begin{aligned} u_i^{**}(0) &= 0, \\ \dot{u}_i^{**}(0) &= \bar{0}, \\ \varepsilon_{ij}^{**}(0) = E_{ij}^{**} &= 0, \quad (\underline{X}, t) \in \bar{\Omega}_0 - \{\bar{\mathcal{P}}_0 \times \{0\}\}. \end{aligned} \quad (2.57)$$

Stałość sumy (2.56) w połączeniu z warunkami początkowymi (2.57) oznacza zanikanie energii w całym przedziale czasowym (V, T - funkcje dodatnie)

$$\begin{aligned} V^{**} &= 0, \\ T^{**} &= 0, \quad (\underline{X}, t) \in \bar{\Omega}. \end{aligned} \quad (2.58)$$

Zerowe wartości energii potencjalnej odkształceń i energii kinetycznej implikują następujące rozwiązanie

$$\begin{aligned} u_i^{**} &= 0, \quad \varepsilon_{ij}^{**} = E_{ij}^{**} = 0, \\ \dot{u}_i^{**} &= 0, \quad T_{ij}^{**} = 0, \quad (\underline{X}, t) \in \bar{\Omega} : \{\bar{\mathcal{P}}_0 \times 0 \leq t < \infty\}. \end{aligned} \quad (2.59)$$

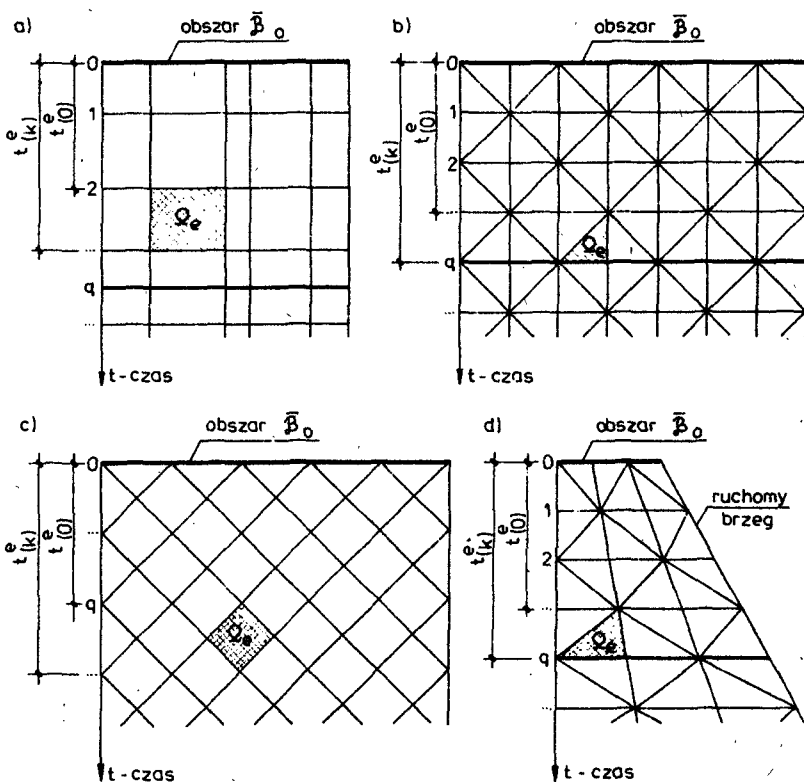
Rozstrzygnięcie (2.59) oznacza, że istnieje tylko jedno rozwiązanie, tzn.

$$\begin{aligned} u_i &= u_i^{\#}, \quad \dot{u}_i = \dot{u}_i^{\#}, \\ \varepsilon_{ij} &= \varepsilon_{ij}^{\#}, \quad E_{ij} = E_{ij}^{\#}, \quad T_{ij} = T_{ij}^{\#}, \quad (\underline{X}, t) \in \bar{\Omega} \end{aligned} \quad (2.60)$$

3. DYSKRETYZACJA OBSZARU CZASOPRZESTRZENI WEDŁUG ZASAD METODY ELEMENTÓW CZASOPRZESTRZENNYCH

3.1. Założenia MECZ

Obszar czasoprzestrzenny $\bar{\Omega} : \{\bar{\beta}_0 \times 0 \leq t = \infty\}$ opisany funkcjami klasy $H^{2,2}$ dzielimy na skończoną liczbę elementów czasoprzestrzennych (SKECZ), czyli skończoną liczbę rozłącznych podobszarów $\Omega_e, e=1,2,\dots,E$ (rys.3.1).



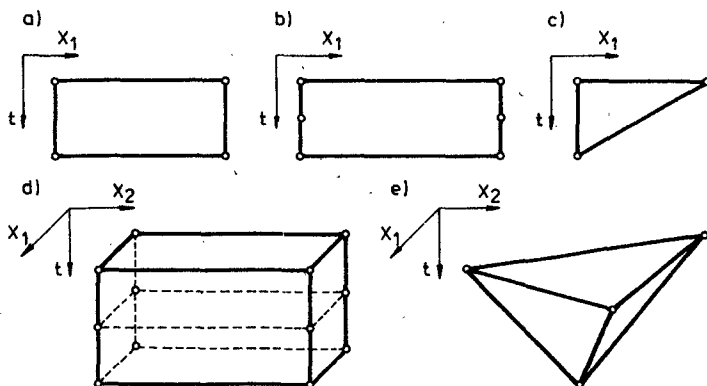
Rys.3.1

Kształt elementu czasoprzestrzennego (SKECZ) i liczba węzłów mogą być różne w zależności od typu zadania itp. Zakłada się, że elementy te są połączone ze sobą w skończonej liczbie punktów, znajdujących się na ich obwodach. Przemieszczenia punktów węzłowych stanowiąc będą podstawowy układ niewiadomych. Elementy czasoprzestrzenne dobierane są w sposób zapewniający ich dogodny i prosty kształt geometryczny oraz tak, aby umożliwić

względnie prosty dobór funkcji aproksymujących rozwiązanie we wnętrzu SKECZ. Odpowiednio gęsty podział zapewnia prawidłowy opis rzeczywistego problemu w całym obszarze Ω . Zasadniczą cechą MECZ (metody elementów skończonych także) jest więc podział na dostatecznie małe elementy (podobszary Ω_e). Podział taki powoduje, że zmiany funkcji wewnątrz obszarów Ω_e będą małe, co z kolei umożliwia aproksymację tych funkcji za pomocą współrzędnych uogólnionych w węzłach SKECZ i prostych, gładkich funkcji wzdłuż brzegów między nimi. Dla dowolnego układu wartości funkcji w węzłach skonstruować można wtedy bez trudności przybliżone rozwiązanie. Zwiększenie całkowitej liczby stopni swobody układu (regulowane liczbą stopni swobody w poszczególnych SKECZ oraz liczbą SKECZ) powoduje, w ogólności, poprawę dokładności rozwiązania. Są to cechy charakteryzujące także klasyczną metodę elementów skończonych (MES). Metoda elementów czasoprzestrzennych (MECZ) jest zatem wariantem MES. Muszą więc w ogólności obowiązywać takie same kryteria zbieżności - dotyczące głównie funkcji kształtu (por. [122], str. 51).

3.2. Bezpośrednie określenie charakterystyk elementu czasoprzestrzennego

Przemieszczenia $u_i(\underline{x}, t)$, prędkości przemieszczeń $\dot{u}_i(\underline{x}, t)$ i ich wariacje wyrażamy przemieszczeniami węzłowymi SKECZ $r_{i\alpha}$ (rys.3.2).



Rys.3.2

$$\begin{aligned}
 u_i^e(\underline{x}, t) &= \Phi_{i\alpha}^e(\underline{x}, t) r_{i\alpha} & \delta u_i^e(\underline{x}, t) &= W_{i\alpha}^e(\underline{x}, t) \delta r_{i\alpha} \\
 \dot{u}_i^e(\underline{x}, t) &= \dot{\Phi}_{i\alpha}^e(\underline{x}, t) r_{i\alpha} & \delta \dot{u}_i^e(\underline{x}, t) &= \dot{W}_{i\alpha}^e(\underline{x}, t) \delta r_{i\alpha} \\
 (\underline{x}, t) &\in \Omega_e & i &= 1, 2, 3, & \alpha &= 1, 2, \dots, A \\
 & & e &= 1, 2, \dots, E
 \end{aligned} \tag{3.1}$$

gdzie $\Phi^e(\underline{x}, t)$ jest macierzą kształtu zawierającą funkcje czasoprzestrzenne o ograniczonej rozległości do obszaru Ω_e i spełniającą warunek

$$\bar{\varphi}_{i\alpha}^e(\underline{x}, t) = \begin{cases} 1 & \text{dla } \underline{x} = \underline{x}_{\alpha} \quad t = t_{\alpha} \\ 0 & \text{dla } \underline{x} \neq \underline{x}_{\alpha} \quad t \neq t_{\alpha} \end{cases} \quad (3.2)$$

Macierz $\underline{W}^e(\underline{x}, t)$ zawiera pewne funkcje wagowe rozkładu czasoprzestrzennego wariacji; w szczególności $\underline{W}^e(\underline{x}, t) = \bar{\varphi}_{i\alpha}^e(\underline{x}, t)$ dla sposobu Galerkinia (por. [122], str. 55).

Przemieszczeniami węzłowymi SKECZ wyrażamy także odkształcenia (2.1) i (2.9)

$$E_{ij}^e(\underline{x}, t) = \frac{1}{2} \left[\frac{\partial u_i^e}{\partial x_j} + \frac{\partial u_j^e}{\partial x_i} + \frac{\partial u_k^e}{\partial x_i} \frac{\partial u_k^e}{\partial x_j} \right] = \left[{}^1B_{ij\alpha}^e + {}^2B_{ij\alpha}^e(r_{\beta}) \right] r_{\alpha} \quad (3.3)$$

$$E_{ij}^e = a_{ijkk}^e E_{kk}^e + b_{ijkl}^e E_{kl}^e = \left[{}^1C_{ij\alpha}^e + {}^2C_{ij\alpha}^e(r_{\beta}) \right] r_{\alpha}$$

i wariację odkształceń

$$\delta E_{ij}^e(\underline{x}, t) = \frac{1}{2} \left[\frac{\partial(\delta u_i^e)}{\partial x_j} + \frac{\partial(\delta u_j^e)}{\partial x_i} + 2 \frac{\partial(\delta u_k^e)}{\partial x_i} \frac{\partial u_k^e}{\partial x_j} \right] = \left[{}^1\bar{B}_{ij\alpha}^e + {}^2\bar{B}_{ij\alpha}^e(r_{\beta}) \right] \delta r_{\alpha} \quad (3.4)$$

gdzie:

$$\begin{aligned} {}^1B_{ij\alpha}^e &= \frac{1}{2} \left(\frac{\partial \bar{\varphi}_{i\alpha}^e}{\partial x_j} + \frac{\partial \bar{\varphi}_{j\alpha}^e}{\partial x_i} \right), \quad {}^2B_{ij\alpha}^e = \frac{1}{2} \left(\frac{\partial W_{i\alpha}^e}{\partial x_j} + \frac{\partial W_{j\alpha}^e}{\partial x_i} \right) \\ {}^2B_{ij\alpha}^e(r_{\beta}) &= \frac{1}{2} \frac{\partial \bar{\varphi}_{k\beta}^e}{\partial x_i} \frac{\partial \bar{\varphi}_{k\alpha}^e}{\partial x_j} r_{\beta}, \quad {}^2\bar{B}_{ij\alpha}^e(r_{\beta}) = \frac{\partial \bar{\varphi}_{k\beta}^e}{\partial x_i} \frac{\partial W_{k\alpha}^e}{\partial x_j} r_{\beta} \\ {}^1C_{ij\alpha}^e &= a_{ijkk}^e {}^1B_{kk\alpha}^e + b_{ijkl}^e {}^1B_{kl\alpha}^e \end{aligned} \quad (3.5)$$

$${}^2C_{ij\alpha}^e(r_{\beta}) = a_{ijkk}^e {}^2B_{kk\alpha}^e(r_{\beta}) + b_{ijkl}^e {}^2B_{kl\alpha}^e(r_{\beta})$$

$$(\underline{x}, t) \in \Omega_0, \quad i, j, k, l = 1, 2, 3,$$

$$\alpha, \beta = 1, 2, \dots, A,$$

$$e = 1, 2, \dots, E$$

Wreszcie przemieszczeniami węzłowymi SKECZ wyrażamy naprężenia (2.14)

$$\begin{aligned} \tau_{ij}^e(\underline{x}, t) &= \psi_{ijkl}^e(\underline{x}, t - t_0^e) \varepsilon_{kl}^e(t_0^e) + \int_{t_0^e}^t \psi_{ijkl}^e(\underline{x}, t - z) \frac{\partial \varepsilon_{kl}^e(\underline{x}, z)}{\partial z} dz = \\ &= J_{ij}^e(\underline{x}, t) + \left[{}^1D_{ij\alpha}^e + {}^2D_{ij\alpha}^e(r_{\beta}) \right] r_{\alpha} \end{aligned} \quad (3.6)$$

gdzie:

$$\begin{aligned}
 J_{ij}^e(X, t) &= \Psi_{ijkl}^e(X, t - t_{(0)}^e) \dot{c}_{kl}^e(t_{(0)}^e), \\
 D_{ij\alpha}^e &= \int_{t_{(0)}^e}^t \Psi_{ijkl}^e(X, t-z) \dot{c}_{kl\alpha}^e(X, z) dz, \\
 {}^*D_{ij\alpha}^e(r_\beta) &= \int_{t_{(0)}^e}^t \Psi_{ijkl}^e(X, t-z) {}^* \dot{c}_{kl\alpha}^e(r_\beta, X, z) dz,
 \end{aligned} \tag{3.7}$$

$$(X, t) \in \Omega_e : \left\{ \beta_0^e \times (t_{(0)}^e \leq t \leq t_{(k)}^e), t_{(0)}^e \geq 0, t_{(k)}^e < \infty \right\},$$

$$i, j, k, l = 1, 2, 3, \quad \alpha, \beta = 1, 2, \dots, A,$$

$$e = 1, 2, \dots, E.$$

Interpretację przedziału czasu $t \in \langle t_{(0)}^e, t_{(k)}^e \rangle$ zawiera rys.3.1.

3.3. Wariacyjne sformułowanie MECZ

Podstawą do wariacyjnego sformułowania równań ruchu MECZ jest zasada czteropracy wirtualnej (2.43), do której wprowadzamy związki aproksymacyjne (3.1) + (3.7)

$$\begin{aligned}
 \sum_{e=1}^E \left\{ \iint_{\Omega_e} \delta r_{\alpha} \varphi_0^e (w_{i\alpha}^e f_{oi}^e + \dot{w}_{i\alpha}^e \dot{\varphi}_{i\beta}^e r_\beta) d\Omega + \iint_{\partial\Omega_e} \delta r_{\alpha} w_{i\alpha}^e \hat{\xi}_{oi} d(\partial\Omega) + \right. \\
 \left. - \iint_{\Omega_e} \delta r_{\alpha} [{}^*B_{ij\alpha}^e + {}^*B_{ij\alpha}^e(r_\eta)] [J_{ij}^e + ({}^*D_{ij\beta}^e + {}^*D_{ij\beta}^e(r_\eta)) r_\beta] d\Omega + \right. \tag{3.8} \\
 \left. - \int_{\beta_0^e} \delta r_{\alpha} w_{i\alpha}^e \varphi_0^e \dot{u}_i \Big|_{t_{(0)}^e}^{t_{(k)}^e} d\beta_0 = 0. \right.
 \end{aligned}$$

Stosując oznaczenia (por. [65], str. 78):

$$\begin{aligned}
 e_{K_{\alpha\beta}}^{(kon)} &= \iint_{\Omega_e} {}^*B_{ij\alpha}^e D_{ij\beta}^e d\Omega \\
 e_{K_{\alpha\beta}}^{(u)} &= \iint_{\Omega_e} {}^*B_{ij\alpha}^e {}^*D_{ij\beta}^e(r_\eta) d\Omega, \\
 e_{K_{\alpha\beta}}^{(G)} &= \iint_{\Omega_e} {}^*B_{ij\alpha}^e(r_\eta) [{}^*D_{ij\beta}^e + {}^*D_{ij\beta}^e(r_\eta)] d\Omega
 \end{aligned} \tag{3.9}$$

$$\begin{aligned}
 e_{M_{\alpha\beta}} &= \iint_{\Omega_e} \dot{W}_{i\alpha}^e \varrho_0^e \dot{\phi}_{i\beta}^e d\Omega \\
 e_{R_{\alpha\beta}} &= \iint_{\Omega_e} W_{i\alpha}^e \varrho_0^e f_{0i}^e d\Omega + \iint_{\partial\Omega_e} W_{i\alpha}^e \hat{t}_{0i}^e d(\partial\Omega) - \int_{\mathcal{P}_0^e} W_{i\alpha}^e \varrho_0^e \dot{u}_i^e \bigg|_{t(0)}^{t(k)} d\mathcal{P}_0 + \\
 &\quad - \iint_{\Omega_e} \mathcal{J}_{ij}^e \left[\mathbb{B}_{ij\alpha}^e + \mathbb{B}_{ij\alpha}^e(r_\eta) \right] d\Omega
 \end{aligned} \quad (3.9)$$

możemy równanie (3.8) napisać w postaci

$$\sum_{e=1}^E \delta_{r_{\alpha\beta}} \Lambda_{\alpha\beta} = \sum_{e=1}^E \left\{ \delta_{r_{\alpha\beta}} \left[\left(e_{K_{\alpha\beta}}(kon) + e_{K_{\alpha\beta}}(u) + e_{K_{\alpha\beta}}(B) - e_{M_{\alpha\beta}} \right) r_{\beta} - e_{R_{\alpha\beta}} \right] \right\} = 0 \quad (3.10)$$

lub

$$\delta_{r_{\alpha\beta}} \Lambda_{\alpha\beta} = \delta_{r_{\alpha\beta}} \left[K_{\alpha\beta}(r_\eta) r_{\beta} - R_{\alpha\beta} \right] = 0 \quad (3.11)$$

$$\alpha, \beta, \eta = 1, 2, \dots, B$$

gdzie:

$$K_{\alpha\beta} = \sum_{e=1}^E \left(e_{K_{\alpha\beta}}(kon) + e_{K_{\alpha\beta}}(u) + e_{K_{\alpha\beta}}(B) - e_{M_{\alpha\beta}} \right) \quad (3.12)$$

jest globalną macierzą sztywności czasoprzestrzennej.

Równanie (3.10) lub (3.11) jest przybliżonym równaniem czteropracy wirtualnej (2.43) i musi być spełnione dla dowolnej wariacji przemieszczeń

$$\Delta_{\alpha}(\underline{r}) = K_{\alpha\beta}(\underline{r}) r_{\beta} - R_{\alpha}(\underline{r}) = 0 \quad (3.13)$$

$$\alpha = 1, 2, \dots, B$$

Uzyskujemy w efekcie „B” nieliniowych równań algebraicznych, które należy rozwiązać ze względu na przemieszczenia węzłowe \underline{r} przy zachowaniu warunków brzegowych (2.37) i początkowych (2.38).

3.4. Ważona metoda residualna podstawą sformułowania MECZ

Ważona metoda residualna jest sposobem przybliżonego rozwiązywania równań różniczkowych, nie jest konieczne więc poszukiwanie funkcjonału [122].

Przepiszmy wpieryw równanie równowagi (2.33) i naprężeniowy warunek brzegowy (2.35) w postaci

$$S_i^* = \frac{\partial}{\partial x_j} \left[T_{jk} \left(\delta_{ik} + \frac{\partial u_i}{\partial x_k} \right) \right] + \varphi_{oi} (f_{oi} - \bar{u}_i) = 0 \quad (\underline{x}, t) \in \mathcal{B}_0 \times \langle 0, \infty \rangle, \quad (3.14)$$

$$\partial S_i^* = \hat{t}_{oi} - T_{jk} \left(\delta_{ik} + \frac{\partial u_i}{\partial x_k} \right) \nu_{oj} = 0 \quad (\underline{x}, t) \in \partial \mathcal{B}_0 \times \langle 0, \infty \rangle,$$

gdzie S_i^* i ∂S_i^* oznaczają pewne reszty (residua), które zanikają przy ścisłych rozwiązaniach. Po dokonaniu dyskretyzacji czasoprzestrzeni, na zasadach (3.1) + (3.7), równania (3.14) przyjmują formę

$$\sum_{e=1}^E S_i^e = \sum_{e=1}^E \left\{ \frac{\partial}{\partial x_j} \left[\left(J_{jk}^e + (D_{jk\beta}^e + {}^{-}D_{jk\beta}^e) r_{\beta} \right) \left(\delta_{ik} + \frac{\partial \Phi_{in}^e}{\partial x_k} r_{\eta} \right) \right] + \varphi_{oi}^e (f_{oi}^e - \bar{\Phi}_{i\beta}^e r_{\beta}) \right\} \quad (3.15)$$

$$\sum_{e=1}^E \partial S_i^e = \sum_{e=1}^E \left\{ \hat{t}_{oi}^e - \left[\left(J_{jk}^e + (D_{jk\beta}^e + {}^{-}D_{jk\beta}^e) r_{\beta} \right) \left(\delta_{ik} + \frac{\partial \Phi_{in}^e}{\partial x_k} r_{\eta} \right) \right] \nu_{oj}^e \right\}$$

Najdokładniejszym rozwiązaniem będzie takie, które redukuje (minimalizuje) reszty S_i i ∂S_i do najmniejszej wartości we wszystkich punktach (węzłach) obszaru czasoprzestrzennego $\bar{\Omega} : \{ \mathcal{B}_0, 0 \leq t < \infty \}$. Najprościej można tego dokonać przez wykorzystanie faktu, że jeśli S_i i ∂S_i są wszędzie (w obszarze $\bar{\Omega}$) tożsamościowo równe zeru, to

$$\sum_{e=1}^E \Lambda_{\omega}^e = \sum_{e=1}^E \left\{ \int_{t_0^e}^{t_{(1)}^e} \int_{\mathcal{B}_0^e} w_{i\alpha}^e S_i^e d\mathcal{B}_0 dt + \int_{t_{(0)}^e}^{t_{(1)}^e} \int_{\partial \mathcal{B}_0^e} w_{i\alpha}^e \partial S_i^e d(\partial \mathcal{B}_0) dt \right\} = 0 \quad (3.16)$$

gdzie $w_{i\alpha}(\underline{x}, t)$ są liniowo niezależnymi funkcjami czasoprzestrzennymi, tzw. funkcjami wagi, które w szczególności pokrywają się z funkcjami kształtu $\bar{\Phi}_{i\alpha}(\underline{x}, t)$.

Podstawiając do (3.16) reszty określone wzorami (3.15), wykonując przekształcenia całek (twierdzenie Gaussa-Ostrogradskiego) całkowanie przez części) uzyskamy w efekcie równania ruchu MECZ w postaci całkowicie zgodnej z (3.13).

3.5. Rekurencyjny charakter równań MECZ

Niezależnie od sposobu dyskretyzacji, zagadnienie brzegowo-początkowe (3.13) sprowadza się do schematu trójwarstwowego (por. rys.3.1)

$$\begin{aligned} \underline{A}^0 \underline{r}^0 + \underline{B}^0 \underline{r}^1 &= \underline{R}^0 \\ \underline{C}^1 \underline{r}^0 + (\underline{A}^1 + \underline{D}^1) \underline{r}^1 + \underline{B}^1 \underline{r}^2 &= \underline{R}^1 \end{aligned} \quad (3.17)$$

$$\underline{C}^q \underline{r}^{q-1} + (\underline{A}^q + \underline{D}^q) \underline{r}^q + \underline{B}^q \underline{r}^{q+1} = \underline{R}^q$$

$$q = 0, 1, 2, \dots$$

gdzie $\underline{A}, \underline{B}, \underline{C}$ i \underline{D} są kwadratowymi macierzami sztywności czasoprzestrzennej po agregacji. Macierze te - dla zagadnień nieliniowych - są funkcjami parametrów węzłowych siatki czasoprzestrzennej \underline{r} . Przy znanych warunkach początkowych (2.38) równania (3.17) przekształcają się w nieliniową formułę rekurencyjną

$$\underline{r}^{q+1} = (\underline{B}^q)^{-1} [\underline{R}^q - \underline{C}^q \underline{r}^{q-1} - (\underline{A}^q + \underline{D}^q) \underline{r}^q] \quad (3.18)$$

$$q = 0, 1, 2, \dots$$

Przy stosowaniu elementów czasoprzestrzennych o kształtach symplektycznych [50, 8, 116, 9, 67, 117] uzyskujemy naturalne odseparowanie poszczególnych równań (3.17) lub (3.18) na mniejsze układy lub pojedyncze równania - z jedną niewiadomą.

Metoda elementów czasoprzestrzennych należy do metod warunkowo stabilnych. Na wymiary elementu czasoprzestrzennego nałożone są więc pewne ograniczenia. Zbadajmy, jak niewielki błąd w chwili początkowej $\underline{\delta}^0$ wpływa na proces rekurencyjny (3.17)

$$\underline{r}^0 = \underline{\delta}^0, \quad \underline{r}^1 = \underline{Q}, \quad \underline{R}^i = \underline{Q} \quad i = 1, 2, 3, \dots \quad (3.19)$$

Wzór rekurencyjny (3.17) zależy od zaburzenia początkowego $\underline{\delta}^0$

$$\underline{r}^k = \underline{Z}^{k-1} \underline{\delta}^0, \quad k = 1, 2, \dots \quad (3.20)$$

gdzie:

$$\begin{aligned} \underline{Z}^0 &= -(\underline{B}^0)^{-1} \underline{A}^0, \\ \underline{Z}^1 &= -(\underline{B}^1)^{-1} [\underline{C}^1 + (\underline{A}^1 + \underline{D}^1) \underline{Z}^0] \end{aligned} \quad (3.21)$$

$$\underline{Z}^j = -(\underline{B}^j)^{-1} [\underline{C}^j \underline{Z}^{j-2} + (\underline{A}^j + \underline{D}^j) \underline{Z}^{j-1}] \quad j = 2, 3, \dots$$

jest macierzą przeniesienia [99]. Istnieją możliwości innego - przybliżonego - formułowania macierzy \underline{Z} [99, 10, 11].

Schemat obliczeniowy (3.20) będzie stabilny, tzn. \underline{r}^n pozostanie ograniczone ($n \rightarrow \infty$), jeżeli wszystkie wartości własne macierzy przeniesienia \underline{Z} spełniają następującą nierówność

$$|\lambda^i| < 1 \quad i = 0, 1, 2, \dots \quad (3.22)$$

Istotną częstość własną λ_{\max}^i można przyjąć, wykorzystując różne oszacowania promienia spektralnego macierzy $\varrho(\underline{z}^i)$

$$\varrho(\underline{z}^i) = \max_k \sum_{j=1}^m |z_{kj}^i|, \quad \varrho(\underline{z}^i) = \sqrt[2m]{\text{tr}[(\underline{z}^i)^{2m}]}$$

(3.23)

$$|\lambda_{\max}^i| \leq \varrho(\underline{z}^i), \quad i = 0, 1, 2, \dots$$

Badanie warunków stabilności może być przeprowadzone na mniejszej macierzy przeniesienia \underline{z} , np. zbudowanej dla kilku lub jednego elementu czasoprzestrzennego [23]. Takie uproszczenia umożliwia uzyskanie oszacowania od góry.

4. PRZYKŁADY ROZWIĄZAŃ DRGAŃ OŚRODKA LEPKOSPĘŻYSTEGO *

4.1. Drgania podłużne pręta

Przy drganiach podłużnych (osiowy stan naprężenia) efekty geometryczne nieliniowe wynikają jedynie z dużych odkształceń. W takim przypadku istotną rolę odgrywa sformułowanie prawa fizycznego [94]. Wygodniej jest tutaj posłużyć się tensorem naprężenia odniesionym do konfiguracji aktualnej, tj. tensorem Cauchy. Równanie konstytutywne dane jest ogólnym przedstawieniem Boltzmann'a (2.13)

$$\sigma_{11}(x_1, t) = \psi(x_1, t) e_{11}(x_1, t) + \int_0^t \Psi(x_1, t-z) \frac{\partial e_{11}}{\partial z}(x_1, t-z) dz \quad (4.1)$$

Wydłużenie względne występujące we wzorze (4.1) opiszemy we współrzędnych Lagrange'a (rys.2.1)

$$e_{11} = e_1 = \frac{\partial u_1}{\partial x_1} = \frac{\epsilon_{11}}{1 + \epsilon_{11}} \quad (4.2)$$

$$\dot{e}_{11} = \dot{e}_1 = \frac{\dot{\epsilon}_{11}}{(1 + \epsilon_{11})^2} \quad \epsilon_{11} = \frac{\partial u_1}{\partial X_1} \quad x_1 = X_1 + u_1$$

Wykorzystując zależność między tensorami Pioli-Kirchhoffa i Cauchy (2.31)

$$T_{11} = \frac{(1 + \epsilon_{22})(1 + \epsilon_{33})}{1 + \epsilon_{11}} \sigma_{11}$$

$$\epsilon_{11} = \epsilon_1 = \frac{\partial u_1}{\partial X_1} \quad (4.3)$$

$$\epsilon_{22} = \epsilon_{33} = -\nu \epsilon_{11} \quad (\nu - \text{współczynnik Poissona})$$

warunki (2.29), które np. dla modelu Maxwella sprowadzają się do jednej tożsamości

$$T_{11}(X_1, 0) = EA_0 \epsilon_{11}(X_1, 0) \quad (E - \text{moduł Younga}) \quad (4.4)$$

oraz wprowadzając przykładowe funkcje relaksacji dla typowych modeli reologicznych (tablica 2), prawo fizyczne zapiszemy w dogodniejszej postaci

* Drgania cięga wiotkiego rozpatruje się w referacie pt. „Dynamics of viscoelastic cable”, który zgłoszono na X Konferencję „Metody Komputerowe w Mechanice”, Szczecin 1991

$$T_{11}(X_1, t) = \frac{(1 - \nu \varepsilon_{11})^2}{(1 + \varepsilon_{11})^2} \left[\beta_1 \varepsilon_{11}(X_1, t) + (\beta_2 + \beta_3 e^{\beta_4 t}) \frac{\dot{\varepsilon}_{11}(X_1, t)}{1 + \varepsilon_{11}(X_1, t)} \right] + \beta_5 e^{\beta_4 t} T_{11}(X_1, 0). \quad (4.5)$$

Współczynniki β_5 charakteryzują model lepkosprężysty (tablica 3).

Tablica 3

| Nazwa modelu | 1 | 2 | 3 | 4 | 5 |
|------------------|---------------|------------------------------------|-------------------------------------|-----------------------------|---|
| Hooke'a | EA_0 | 0 | 0 | 0 | 0 |
| Kelvina - Voigta | EA_0 | $EA_0 \lambda$ | 0 | 0 | 0 |
| Maxwella | 0 | $EA_0 \lambda$ | $-EA_0 \lambda$ | $-\frac{1}{\lambda}$ | 1 |
| Zenera I | $EA_0 \alpha$ | $EA_0 \lambda \alpha (1 - \alpha)$ | $-EA_0 \lambda \alpha (1 - \alpha)$ | $-\frac{1}{\lambda \alpha}$ | 1 |

Równanie czteropracy wirtualnej (2.43) dla osiowego stanu naprężenia przyjmuje postać

$$\int_{t(0)}^{t(1)} \int_{L(0)}^{L(1)} \left\{ \rho_0 \delta u_1 + \rho_0 \dot{u}_1 \delta \dot{u}_1 - T_{11} \delta \varepsilon_{11} \right\} dX_1 dt - \int_{L(0)}^{L(1)} \rho_0 A_0 \dot{u}_1 \delta u_1 \Big|_{t(0)}^{t(1)} dX_1 = 0. \quad (4.6)$$

gdzie:

$$\varepsilon_{11} = \frac{\partial u_1}{\partial X_1} + \frac{1}{2} \left(\frac{\partial u_1}{\partial X_1} \right)^2, \quad \delta \varepsilon_{11} = \frac{\partial (\delta u_1)}{\partial X_1} + \left(\frac{\partial (\delta u_1)}{\partial X_1} \right)^2 \quad (4.7)$$

natomiaś A_0 oznacza pole przekroju poprzecznego pręta w konfiguracji nieodkształconej.

Wielkości występujące w równaniu (4.6) opisujemy w sposób charakterystyczny dla MECZ (3.1) + (3.5):

$$\begin{aligned} u_1(X_1, t) &= \Phi_{1\alpha}(X_1, t) r_{\alpha} \\ \delta u_1(X_1, t) &= \Phi_{1\alpha}(X_1, t) \delta r_{\alpha} \\ \dot{u}_1(X_1, t) &= \dot{\Phi}_{1\alpha}(X_1, t) r_{\alpha} \\ \delta \dot{u}_1(X_1, t) &= \dot{\Phi}_{1\alpha}(X_1, t) \delta r_{\alpha} \\ E_{11}(X_1, t) &= [B_{11\alpha} + B_{11\alpha}(\tau\beta)] r_{\alpha} \\ \delta E_{11}(X_1, t) &= [B_{11\alpha} + 2B_{11\alpha}(\tau\beta)] \delta r_{\alpha} \\ \varepsilon_{11}(X_1, t) &= B_{11\alpha} r_{\alpha} \\ T_{11} &= D_{11\alpha} r_{\alpha} + b T_{11}(t_0^0) \end{aligned} \quad (4.8)$$

gdzie:

$${}^*B_{11\alpha} = \frac{\partial \Phi_{1\alpha}}{\partial X_1} \quad {}^*B_{11\alpha} = \frac{1}{2} \frac{\partial \Phi_{1\alpha}}{\partial X_1} \frac{\partial \Phi_{1\beta}}{\partial X_1} r_\beta$$

$$D_{11} = \frac{(1-\nu) {}^*B_{11\alpha} r_\alpha (1-\nu) {}^*B_{11\alpha} r_\alpha}{(1+{}^*B_{11\alpha} r_\alpha) (1+{}^*B_{11\alpha} r_\alpha)} \left[\beta_1 {}^*B_{11\alpha} + (\beta_2 + \beta_3 e^{\beta_4 t}) \frac{{}^*B_{11\alpha}}{1+{}^*B_{11\alpha} r_\alpha} \right] \quad (4.9)$$

$$b = \beta_5 e^{\beta_4 t}$$

W formule (4.8) przyjęto, że w węźle jest tylko jeden stopień swobody. Nic nie stoi jednak na przeszkodzie, aby zwiększyć liczbę stopni do dwóch lub trzech, np.

$$\Gamma_\alpha = \text{col} \left\{ r_\alpha^u, \varphi_\alpha, \dot{r}_\alpha \right\} \quad (4.10)$$

$$\varphi_\alpha = \frac{\partial r_\alpha}{\partial X_1} \quad \dot{r}_\alpha = \frac{\partial r_\alpha}{\partial t}$$

Po wprowadzeniu formuły dyskretyzacyjnej (4.8) do równania czteropracy wirtualnej (4.6) uzyskujemy równanie ruchu w postaci (3.13), w którym macierze \underline{K} i \underline{R} opisane są wzorami:

$$K_{\alpha\beta}^e = \iint_{\Omega_e} \left[({}^*B_{11\alpha}^e + 2 {}^*B_{11\alpha}^e) D_{11\beta}^e - \Phi_{1\alpha}^e \vartheta_0^e A_0^e \Phi_{1\beta}^e \right] d\Omega$$

$$R^e = \iint_{\Omega_e} \left[N_1^e p_1^e - b^e ({}^*B_{11\alpha}^e + 2 {}^*B_{11\alpha}^e) T_{11}^e (t_{(0)}^e) \right] d\Omega + \quad (4.11)$$

$$- \int_{L_{(0)}^e}^{L_{(1)}^e} \Phi_{1\alpha}^e \vartheta_0^e A_0^e U_1^e \Big|_{t_{(0)}^e}^{t_{(k)}^e} dX_1$$

W celu wykonania przykładowych obliczeń dokonajmy podziału obszaru czteroprzestrzennego w sposób widoczny na rys. 3.1a, b, c. Mamy więc do czynienia z elementami czworokątnymi i trójkątnymi (rys. 4.1).

Wyrazy macierzy kształtu dla poszczególnych elementów czasoprzestrzennych przyjmujemy w postaci funkcji liniowych:

a) element o kształcie prostokąta (rys. 4.1a)

$$\Phi_{1\alpha}(\xi, \tau) = \frac{1}{2} (1 + \xi \xi_\alpha) (1 + \tau \tau_\alpha) \quad (4.12)$$

$$\xi_\alpha = \begin{cases} 1 & \text{dla } \alpha = 2, 4. \\ -1 & \text{dla } \alpha = 1, 3. \end{cases} \quad \tau_\alpha = \begin{cases} 1 & \text{dla } \alpha = 3, 4. \\ -1 & \text{dla } \alpha = 1, 2. \end{cases}$$

$$-1 \leq \xi \leq 1 \quad -1 \leq \tau \leq 1$$

b) element o kształcie trójkąta prostokątnego (rys.4.1b)

$$\Phi_{1\alpha}(\xi, \tau) = \frac{1}{2} \left[1 + \xi_{\alpha} \tau_{\alpha} - (1 + \xi_{\alpha}) \tau_{\alpha} \xi - (1 + \tau_{\alpha}) \xi_{\alpha} \tau \right]$$

$$\xi_{\alpha} = \begin{cases} 1 & \text{dla } \alpha = 1, 2, \\ -1 & \text{dla } \alpha = 3. \end{cases} \quad \tau_{\alpha} = \begin{cases} 1 & \text{dla } \alpha = 1, 3, \\ -1 & \text{dla } \alpha = 2. \end{cases} \quad (4.13)$$

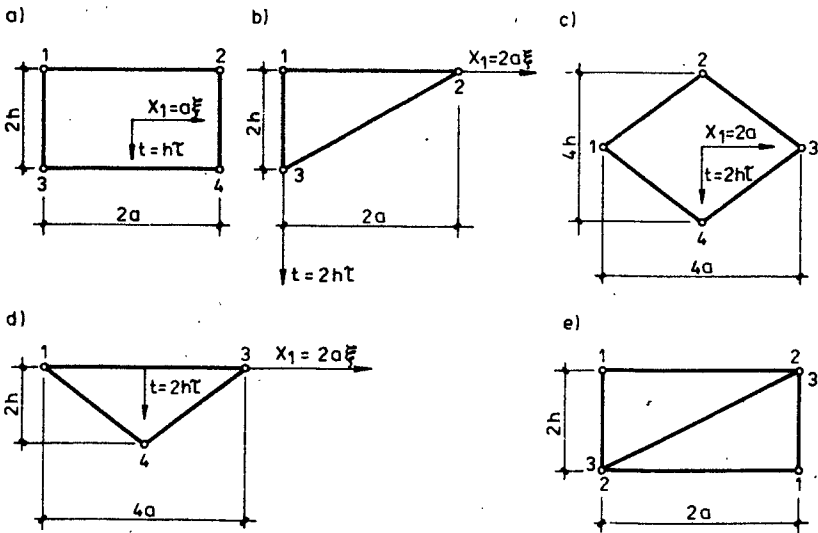
$$0 \leq \xi \leq 1, \quad 0 \leq \tau \leq 1$$

c) element o kształcie romba (rys.4.1c) lub o kształcie trójkąta równoramiennego (rys.4.1d)

$$\Phi_{1\alpha}(\xi, \tau) = \frac{1}{4} \left[1 + \xi_{\alpha} (\xi + \tau) \right] \left[1 + \tau_{\alpha} (-\xi + \tau) \right]$$

$$\xi_{\alpha} = \begin{cases} 1 & \text{dla } \alpha = 3, 4, \\ -1 & \text{dla } \alpha = 1, 2, \end{cases} \quad \tau_{\alpha} = \begin{cases} 1 & \text{dla } \alpha = 1, 4, \\ -1 & \text{dla } \alpha = 2, 3, \end{cases} \quad (4.14)$$

$$\begin{aligned} -1 \leq \xi \leq 1, & \quad -1 \leq \tau \leq 1 & \text{dla rombu,} \\ -1 \leq \xi \leq 1, & \quad 0 \leq \tau \leq 1 & \text{dla trójkąta.} \end{aligned}$$



Rys.4.1

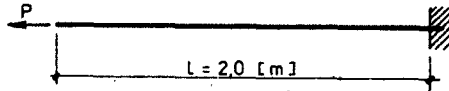
Warunki stabilności (3.22) określono dla drgań sprężystych, geometrycznie liniowych, rozpatrując wydzielony swobodny element czasoprzestrzenny o kształcie prostokątnym (rys.4.1a)

$$\left(\frac{h}{a} \right)^2 \leq 2 \frac{g}{E} \quad (4.15)$$

oraz swobodny superelement czasoprzestrzenny (rys.4.1e)

$$\left(\frac{h}{a} \right)^2 \leq \frac{4g}{(2-\sqrt{2})E} = 6.8284 \frac{g}{E} \quad (4.16)$$

Przykład liczbowy dotyczy drgań podłużnych wspornika (rys.4.2).



$$\rho = 7500 \text{ [kg/m}^3\text{]}$$

$$E = 2 \cdot 10^{11} \text{ [Pa]}$$

$$A = 5 \cdot 10^{-3} \text{ [m}^2\text{]}$$

$$h = 4,8412291 \cdot 10^{-5} \text{ [s]}$$

Rys.4.2

Koniec wspornika został obciążony siłą nagle przyłożoną (Heaviside'a), o wartości $P = 8,33(3) \text{ [MN]}$.

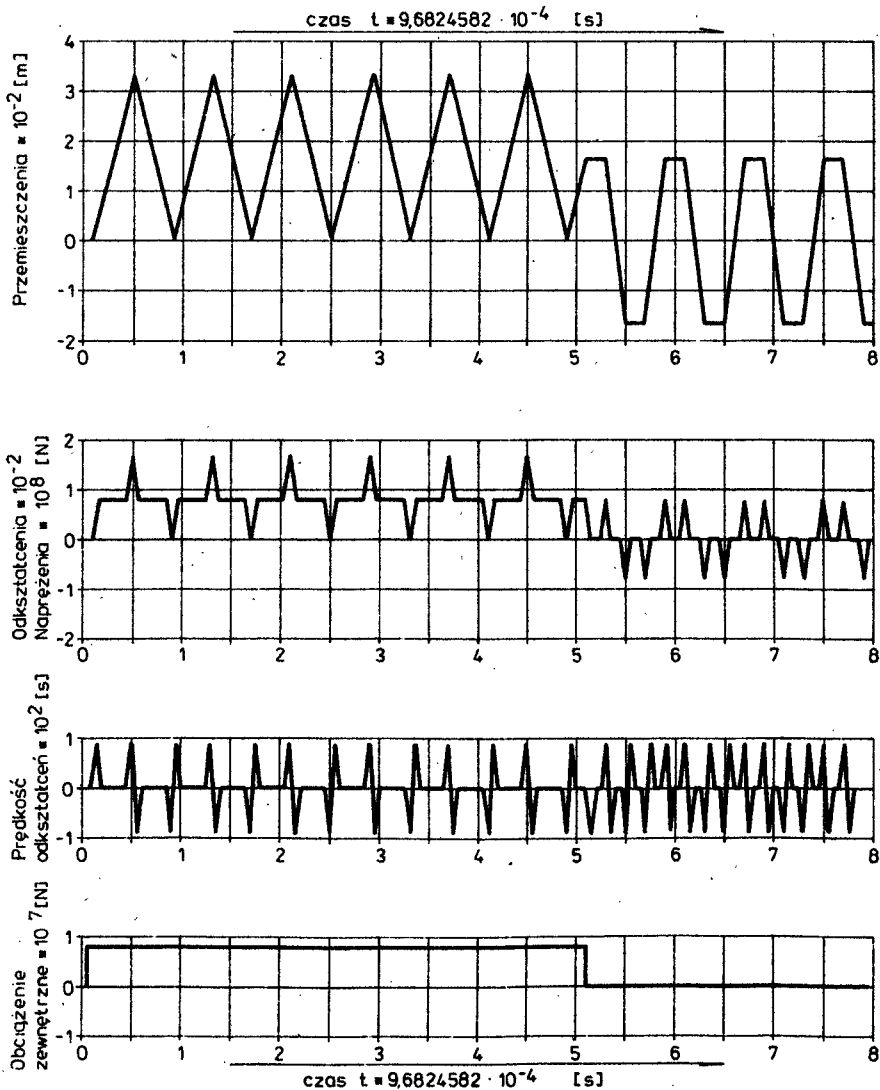
Na rysunkach 4.3 + 4.6 przedstawiono graficznie wybrane wyniki obliczeń numerycznych przy założeniu przemieszczeń i odkształceń nieskończenie małych. Analizując te rezultaty można sformułować kilka uwag ogólnych, świadczących o poprawności obliczeń.

1. Model Hooke'a. Amplitudy przemieszczeń i naprężeń są dokładnie dwa razy większe od przemieszczeń i naprężeń wywołanych siłą $P = 8,33(3) \text{ [MN]}$ działającą statycznie. Okres drgań wynosi $1,6 \cdot 9,6824582 \cdot 10^{-5} = 1,5491933 \cdot 10^{-3} \text{ [s]}$ wobec okresu drgań wynikającego z obliczeń analitycznych [87]:

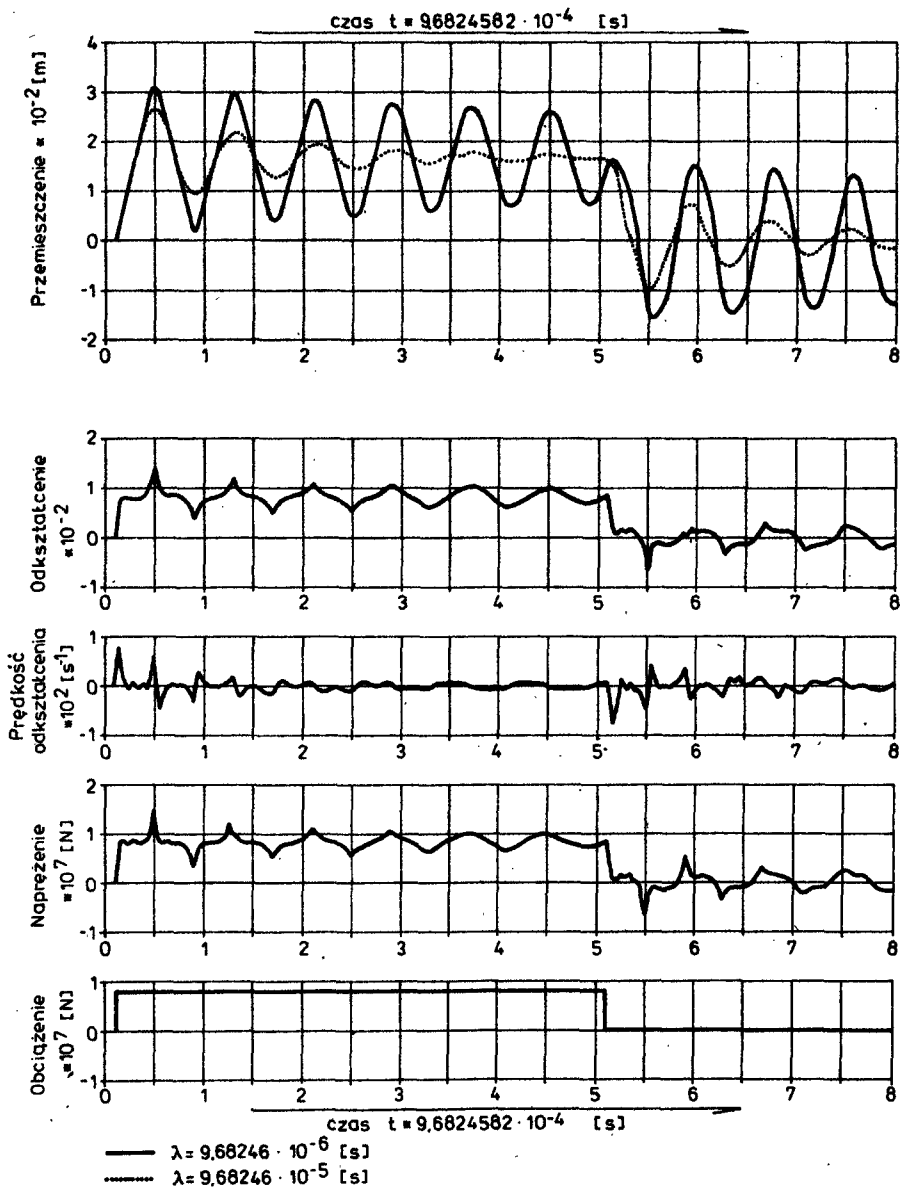
$$\omega = \frac{\pi}{2l} \sqrt{\frac{E}{\rho}} = \frac{\pi}{2 \cdot 2} \sqrt{\frac{2 \cdot 10^{11}}{7500}} = 4055,7787 \text{ [s}^{-1}\text{]} \quad (4.17)$$

$$T = \frac{2\pi}{\omega} = \frac{2\pi}{4055,7787} = 1,5491933 \cdot 10^{-3} \text{ [s]}$$

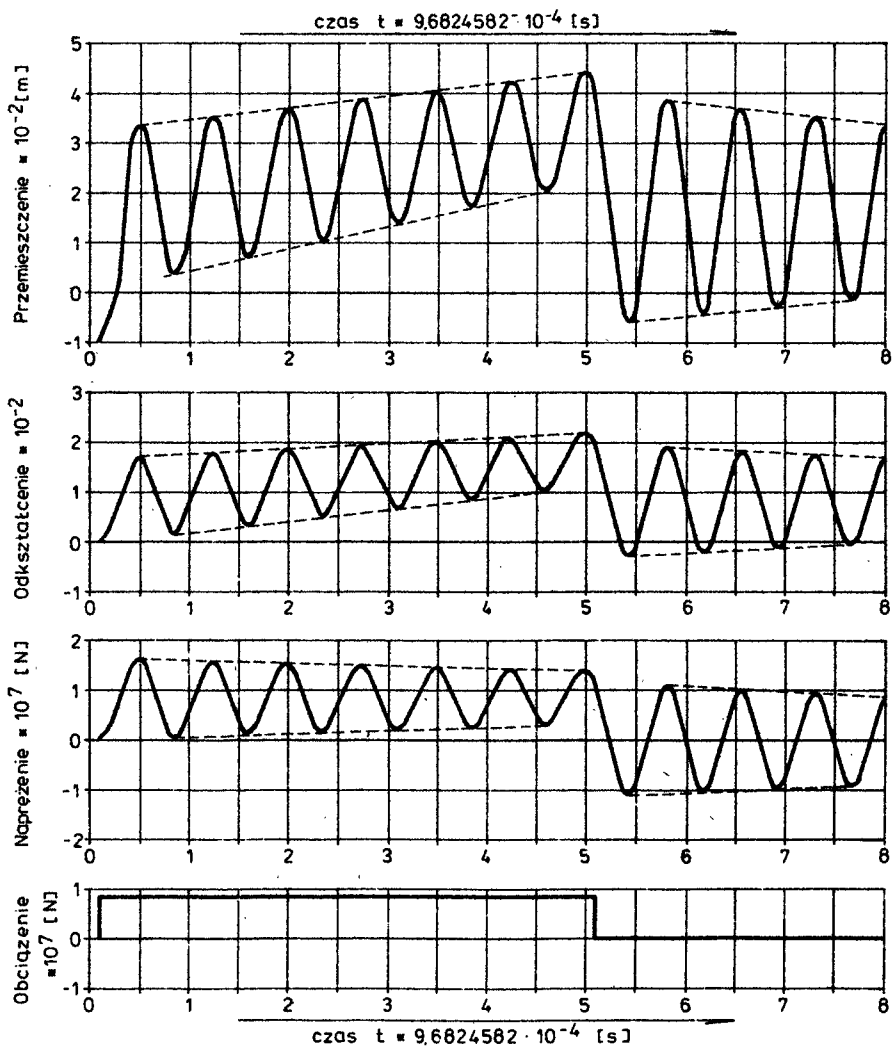
2. Model Kelvina-Voigta. Tłumienie wewnętrzne powoduje, że przemieszczenia, odkształcenia i naprężenia zbiegają asymptotycznie do wartości wynikających ze statycznego działania siły, natomiast prędkości odkształceń asymptotycznie zanikają.
3. Model Maxwella. Następuje tłumienie drgań. Przemieszczenia i odkształcenia przyrastają liniowo w czasie, przy stałym działaniu siły. Po odjęciu obciążenia pozostają trwałe przemieszczenia i odkształcenia. Naprężenia zbiegają do stałej wartości lub do zera - po odjęciu siły.
4. Różny sposób dyskretyzacji czasoprzestrzeni (rys.3.1a, b) nie ma praktycznego wpływu na końcowe rezultaty.
5. Pewne nieciągłości na wykresach odkształceń, prędkości odkształceń, wynikają z przyjętej minimalnej liczby stopni swobody w węzle SKECZ.



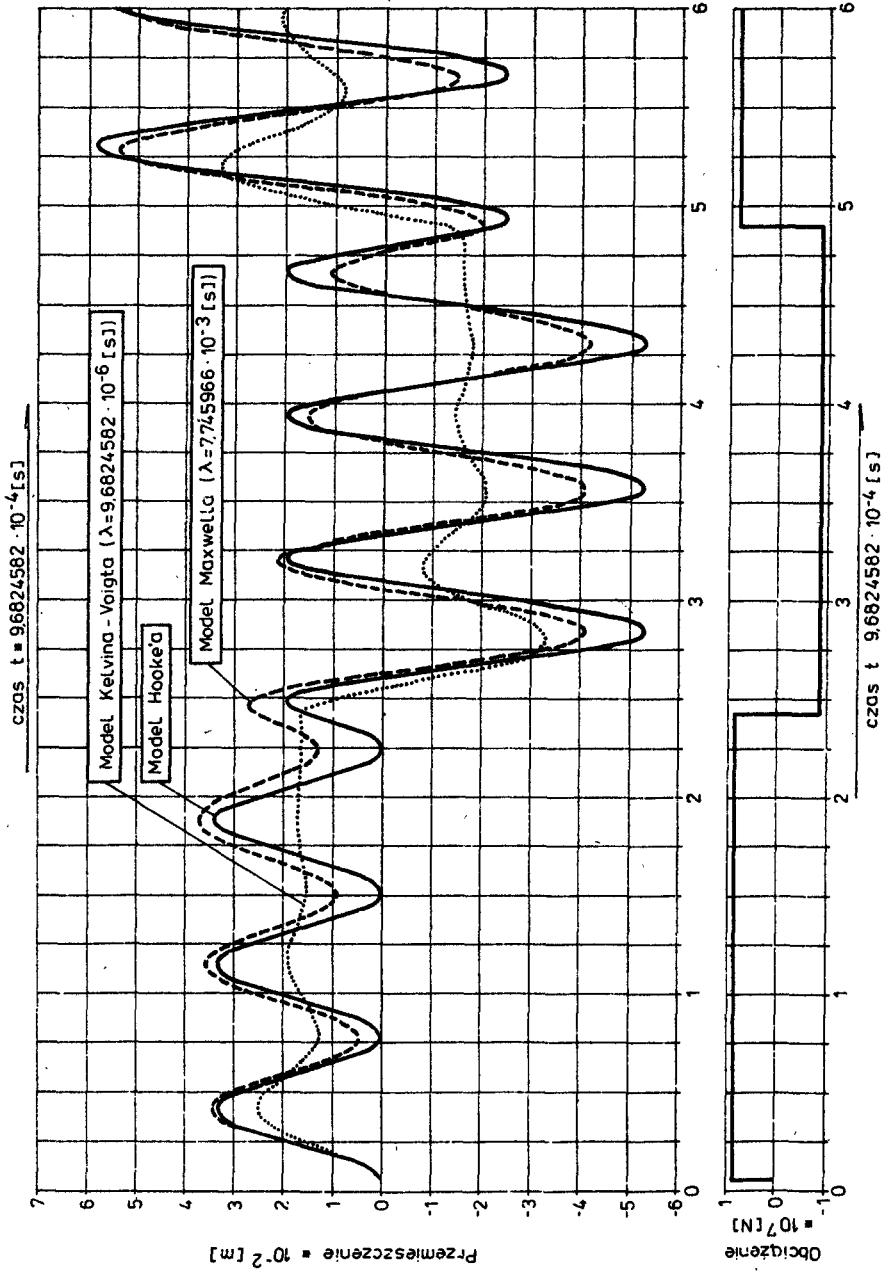
Rys.4.3. Wykresy przemieszczeń, odkształceń i sił końca wspornika w funkcji czasu dla modelu Hooke'a



Rys.4.4. Wykresy przemieszczeń i sił końca wspornika w funkcji czasu dla modelu Kelvina-Voigta

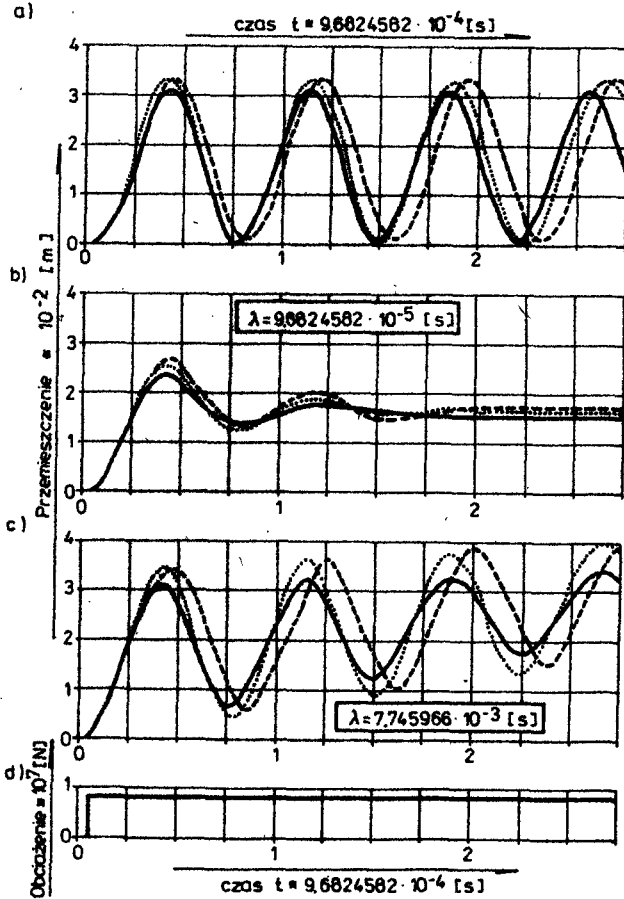


Rys.4.5. Wykresy przemieszczeń i sił końca wspornika
w funkcji czasu dla modelu Maxwella ($\lambda =$
 $= 9,68246 \cdot 10^{-3}$ [s])



Rys. 4.6. Wykresy przemieszczeń końca wspornika w funkcji czasu

Na rys.4.7 przedstawiono graficznie wybrane wyniki, dotyczące końca wspornika, przy założeniu skończonych deformacji.



Oznaczenia: — siła ściskająca } analiza geometrycznie nieliniowa
 --- siła rozciągająca }
 analiza geometrycznie liniowa

Rys.4.7. Wykresy przemieszczeń końca wspornika w funkcji czasu:

- a) model Hooke'a,
- b) model Kelvina-Voigta,
- c) model Maxwella,
- d) obciążenie końca wspornika w funkcji czasu

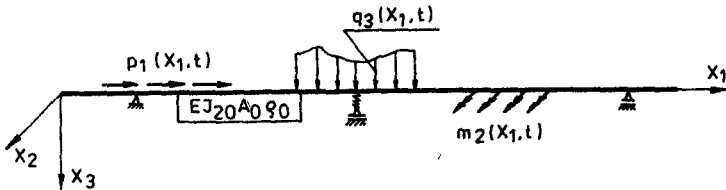
Z analizy tych rezultatów wynikają następujące wnioski:

1. Wartości amplitud i okresu drgań zależą od zwrotu siły obciążającej wspornik, Wyższe wartości uzyskujemy przy rozciąganiu, a niższe - przy ściskaniu. Taki układ wyników jest prawidłowy, gdyż przy

- rozciąganiu następuje zmniejszenie pola przekroju poprzecznego, czyli sztywności, a przy ściskaniu - wzrost.
2. Porównując amplitudy przemieszczeń, dla ciała geometrycznie liniowego i ciała geometrycznie nieliniowego, stwierdzamy rozrzut wyników rzędu 4 + 9 %.
 3. Dla modelu Hooke'a amplitudy są dokładnie dwa razy większe od amplitud wywołanych siłą działającą statycznie (problem statyczny policzono metodą elementów skończonych).
 4. Sposób dyskretyzacji czasoprzestrzeni (rys.3.1a, b) nie ma praktycznego wpływu na końcowe rezultaty.

4.2. Drgania belki

Analizuje się belkę, na którą działa dowolnie zmienne obciążenie (rysunek 4.8).



Rys.4.8

Do sformułowania równań przyjęto następujące założenia: belka jest niekrępa, odkształcenia są dostatecznie małe (ale niekoniecznie infinitesimalne), obowiązuje zasada Bernoulliego o płaskich przekrojach, płaszczyna obciążenia zewnętrznego pokrywa się z główną centralną płaszczyną bezwładności x_1x_3 . Zagadnienie tak sformułowane opisują równania różniczkowe^{1,2}:

$$\frac{\partial N_i}{\partial x_1} + \frac{\partial N_{i1}}{\partial t} + p_i = 0$$

$$\frac{\partial T_3}{\partial x_1} + \frac{\partial T_{t3}}{\partial t} + p_3 = 0$$
(4.18)

- 1/ A. Podhorecka: Obliczenia dynamiczne belek metodą elementów czasoprzestrzennych. Materiały IX Konferencji „Metody Komputerowe w Mechanice Konstrukcji” Kraków - Rytyro 1989, ss. 897 - 903
- 2/ A. Podhorecka: Metoda czasoprzestrzennych elementów skończonych w zagadnieniach geometrycznie nieliniowych. Rozprawa doktorska, Politechnika Warszawska, Warszawa 1990

gdzie:

$$T_3 = \frac{\partial M_2}{\partial X_1} + \frac{\partial u_3}{\partial X_1} N_1$$

$$T_{t3} = \frac{\partial M_{t2}}{\partial X_1} + Q_t$$

$$N_{t1} = \rho_0 A_0 \dot{u}_1$$

$$M_{t2} = \rho_0 J_{20} \frac{\partial \dot{u}_3}{\partial X_1}$$

$$Q_t = -\rho_0 A_0 \dot{u}_3$$

$$p_1 = p_1 + \frac{\partial u_1}{\partial X_1} p_1$$

$$p_3 = q_3 + \frac{\partial u_3}{\partial X_1} p_1$$

(4.19)

Na bazie równań (4.18) tworzymy równanie czteropracy wirtualnej w postaci (por. [46])

$$\begin{aligned} & \int_{t(0)}^{t(1)} \left[\delta u_1 N_1 + \delta u_3 T_3 \right]_0^L dt + \int_0^L \left[\delta u_1 N_{t1} + \delta u_3 T_{t3} \right]_{t(0)}^{t(1)} dX_1 + \\ & + \int_{t(0)0}^{t(1)L} (\delta u_1 p_1 + \delta u_3 p_3) dX_1 dt - \int_{t(0)0}^{t(1)L} \left[\delta \left(\frac{\partial u_1}{\partial X_1} \right) N_1 + \delta \left(\frac{\partial u_3}{\partial X_1} \right) T_3 + \right. \\ & \left. + \delta \dot{u}_1 N_{t1} + \delta \dot{u}_3 T_{t3} \right] dX_1 dt \end{aligned} \quad (4.20)$$

lub po wykorzystaniu zależności (4.19) - w innej równoważnej formie

$$\begin{aligned} & \int_{t(0)}^{t(1)} \left[\delta u_1 N_1 + \delta u_3 T_3 - \delta \left(\frac{\partial u_3}{\partial X_1} \right) M_2 - \delta \dot{u}_3 M_{t2} \right]_{L(0)}^{L(1)} dt + \int_{t(0)0}^{t(1)L(1)} \left[\delta u_1 N_{t1} + \right. \\ & \left. + \delta u_3 T_{t3} \right]_{t(0)}^{t(1)} dX_1 + \int_{t(0)0}^{t(1)L} (\delta u_1 p_1 + \delta u_3 p_3) dX_1 dt - \int_{t(0)0}^{t(1)L(1)} \left[\delta \left(\frac{\partial u_1}{\partial X_1} \right) N_1 + \right. \\ & \left. + \delta \left(\frac{\partial u_3}{\partial X_1} \right) \frac{\partial u_3}{\partial X_1} N_1 - \delta \left(\frac{\partial^2 u_3}{\partial X_1^2} \right) M_2 + \delta \dot{u}_1 N_{t1} + \delta \dot{u}_3 Q_t - \delta \left(\frac{\partial \dot{u}_3}{\partial X_1} \right) M_{t2} \right] dX_1 dt. \end{aligned} \quad (4.21)$$

Siły przekrojowe występujące w równaniu czteropracy wirtualnej (4.21) - dla ciała liniowo sprężystego (małe odkształcenia) - wyrażamy w postaci ^{1,2}:

$$\begin{aligned} N_1^i &= C_{1111} A_0 E_{11} \\ M_2^i &= -C_{1111} J_{20} E_{12} \end{aligned} \quad (4.22)$$

gdzie:

$$\begin{aligned} E_{11} &= \frac{\partial u_1}{\partial x_1} + \frac{1}{2} \left(\frac{\partial u_3}{\partial x_1} \right)^2 \\ E_{12} &= \frac{\partial^2 u_3}{x_1^2} \\ C_{1111} &= 2\mu' + \lambda' \cong E \quad \mu', \lambda' - \text{stałe Lamego} \end{aligned} \quad (4.23)$$

Siła poprzeczna jest wielkością zależną od siły normalnej i momentu zginającego. Wielkość tę można przedstawić w dwojaki sposób: odniesioną do konfiguracji odkształconej T_3 (wg (4.19)₁) lub odniesioną do konfiguracji nieodkształconej ^{1,2}

$$Q_2^i = \frac{\partial M_2^i}{\partial x_1} + \frac{\partial M_{12}^i}{\partial t} + m_2^i \quad (4.24)$$

Równanie konstytutywne dla ciała lepkosprężystego dane jest ogólnym przedstawieniem Boltzmanna (2.13):

$$\begin{aligned} N_{11}^i(x_1, t) &= \psi_1(x_1, t) E_{11}(x_1, 0) + \int_0^t \varphi_1(x_1, t-z) \frac{\partial E_{11}}{\partial z}(x_1, t-z) dz \\ M_2^i(x_1, t) &= \psi_2(x_1, t) \dot{E}_{12}(x_1, 0) + \int_0^t \varphi_2(x_1, t-z) \frac{\partial \dot{E}_{12}}{\partial z}(x_1, t-z) dz \end{aligned} \quad (4.25)$$

gdzie ψ_i ($i=1,2$) są funkcjami relaksacji, które można wyznaczyć doświadczalnie. Można też wyprowadzić funkcje relaksacji opisane innymi stałymi (tablica 2) i wtedy uzyskamy prawo fizyczne zapisane w dogodniejszej postaci

$$\begin{aligned} N_1^i(x_1, t) &= \beta_1 E_{11}(x_1, t) + (\beta_2 + \beta_3 e^{\beta_4 t}) \dot{E}_{11}(x_1, t) + \beta_5 e^{\beta_4 t} N_1^i(x_1, 0) \\ M_2^i(x_1, t) &= -\eta_1 E_{12}(x_1, t) - (\eta_2 + \eta_3 e^{\eta_4 t}) \dot{E}_{12}(x_1, t) + \eta_5 e^{\eta_4 t} M_2^i(x_1, 0) \end{aligned} \quad (4.26)$$

Współczynniki β_i oraz η_i charakteryzują model lepkosprężysty (tablica 3 i 4).

Równania (4.26) muszą być jeszcze uzupełnione warunkami początkowymi (2.29), które np. dla modelu Maxwella wyrażają się następująco:

$$\begin{aligned} N_1^i(x_1, 0) &= E A_0 E_{11}(x_1, 0) \\ M_2^i(x_1, 0) &= -E J_{20} E_{12}(x_1, 0) \end{aligned} \quad (4.27)$$

gdzie J_{20} oznacza główny centralny moment bezwładności przekroju poprzecznego belki.

Tablica 4

| Nazwa modelu | η_1 | η_2 | η_3 | η_4 | η_5 |
|----------------|-------------------|--|---|-------------------------------|--------------|
| Hooke'a | EJ_{20} | | | | |
| Kelvina-Voigta | EJ_{20} | $EJ_{20}\lambda_2$ | | | |
| Maxwella | | $EJ_{20}\lambda_2$ | $-EJ_{20}\lambda_2$ | $\frac{h}{\lambda_2}$ | 1 |
| Zenera I | $EJ_{20}\alpha_2$ | $EJ_{20}\alpha_2(1-\alpha_2)\lambda_2$ | $-EJ_{20}\alpha_2(1-\alpha_2)\lambda_2$ | $\frac{h}{\alpha_2\lambda_2}$ | $1-\alpha_2$ |

Zakładamy, że pole przemieszczeń belki opisują trzy składowe, w przypadku dyskretyzacji czasoprzestrzeni na elementy prostokątne (rys.3.1a)

$$\underline{v}(X_1, t) = \begin{bmatrix} u_1(X_1, t) \\ \varphi_2(X_1, t) \\ u_3(X_1, t) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} v_1(X_1, t) \\ v_2(X_1, t) \\ v_3(X_1, t) \end{bmatrix} \quad (4.28)$$

$$\varphi_2(X_1, t) = -\frac{\partial u_3}{\partial X_1}$$

oraz sześć składowych w przypadku dyskretyzacji na elementy nieprostokątne (rys.3.1b, c)

$$\underline{v}(X_1, t) = \begin{bmatrix} u_1(X_1, t) \\ \varphi_2(X_1, t) \\ u_3(X_1, t) \\ \varkappa_2(X_1, t) \\ \dot{u}_1(X_1, t) \\ \dot{u}_3(X_1, t) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} v_1(X_1, t) \\ v_2(X_2, t) \\ v_3(X_3, t) \\ v_4(X_4, t) \\ v_5(X_5, t) \\ v_6(X_6, t) \end{bmatrix} \quad (4.29)$$

$$\varkappa_2(X_1, t) = -\frac{\partial^2 u_3}{\partial X_1^2}$$

Wielkości występujące w równaniu (4.21) opisujemy według zasad MECZ (3.1) + (3.5):

a) prostokątny element czasoprzestrzenny (rys.4.1a)

$$\begin{aligned} v_i^e(X_1, t) &= \bar{\Phi}_{i\alpha}^e(X_1, t) r_{\alpha}^e \\ \delta v_i^e(X_1, t) &= \bar{\Phi}_{i\alpha}^e(X_1, t) \delta r_{\alpha}^e \\ \dot{v}_i^e(X_1, t) &= \dot{\bar{\Phi}}_{i\alpha}^e(X_1, t) r_{\alpha}^e \\ \delta \dot{v}_i^e(X_1, t) &= \dot{\bar{\Phi}}_{i\alpha}^e(X_1, t) \delta r_{\alpha}^e \\ E_{11}^e(X_1, t) &= (\bar{\Phi}_{1\alpha,1}^e + \frac{1}{2} \dot{\bar{\Phi}}_{2\alpha}^e \bar{\Phi}_{2T}^e) r_{\alpha}^e \\ E_{12}^e(X_1, t) &= -\bar{\Phi}_{2\alpha,1}^e r_{\alpha}^e \end{aligned} \quad (4.30)$$

$$\begin{aligned}
\dot{E}_{11}^e(x_1, t) &= (\dot{\Phi}_{1\alpha,1}^e + \dot{\Phi}_{2T}^e \Phi_{2\alpha}^e r_T^e) r_\alpha^e, \\
\dot{E}_{12}^e(x_1, t) &= -\dot{\Phi}_{2\alpha,1}^e r_\alpha^e, \\
N_1^e(x_1, t) &= \left[\beta_1^e (\dot{\Phi}_{1\alpha,1}^e + \frac{1}{2} \dot{\Phi}_{2\alpha}^e \Phi_{2T}^e r_T^e) + (\beta_2^e + \beta_3^e e^{\beta_4^e t}) (\dot{\Phi}_{1\alpha,1}^e + \right. \\
&\quad \left. + \dot{\Phi}_{2\alpha}^e \Phi_{2T}^e r_T^e) \right] r_\alpha^e + \beta_5^e e^{\beta_4^e t} N_1^e(x_1, t_0), \\
M_2^e(x_1, t) &= \left[\eta_1^e \dot{\Phi}_{2\alpha,1}^e + (\eta_2^e + \eta_3^e e^{\eta_4^e t}) \dot{\Phi}_{2\alpha,1}^e \right] r_\alpha^e + \eta_5^e e^{\eta_4^e t} M_2^e(x_1, t_0), \\
T_M^e(x_1, t) &= \left[\eta_1^e \dot{\Phi}_{2\alpha,1}^e + (\eta_2^e + \eta_3^e e^{\eta_4^e t}) \dot{\Phi}_{2\alpha,1}^e \right] r_\alpha^e + \eta_5^e e^{\eta_4^e t} T_M^e(x_1, t_0), \\
T_N^e(x_1, t) &= -\dot{\Phi}_{2\alpha}^e \left[\beta_1^e (\dot{\Phi}_{1T,1}^e + \frac{1}{2} \dot{\Phi}_{2T}^e \Phi_{2T}^e r_T^e) + (\beta_2^e + \beta_3^e e^{\beta_4^e t}) (\dot{\Phi}_{1T,1}^e + \right. \\
&\quad \left. + \dot{\Phi}_{2T}^e \Phi_{2T}^e r_T^e) \right] r_T^e r_\alpha^e + \beta_5^e e^{\beta_4^e t} T_N^e(x_1, t_0), \\
T_3^e(x_1, t) &= T_M^e + T_N^e, \\
N_{t1}^e &= -g_0^e A_0^e \dot{\Phi}_{1\alpha}^e r_\alpha^e, \\
M_{t2}^e &= -g_0^e J_0^e \dot{\Phi}_{2\alpha}^e r_\alpha^e, \\
Q_t^e &= -g_0^e A_0^e \dot{\Phi}_{3\alpha}^e r_\alpha^e, \\
i &= 1, 2, 3, \quad \alpha, T, T, = 1, 2 \dots 3W_e \quad (W_e - \text{liczba węzłów SKECZ})
\end{aligned} \tag{4.30}$$

b) nieprostokątny element czasoprzestrzenny (rys. 4.1b, c)

$$\begin{aligned}
V_1^e(x_1, t) &= \Phi_{1\alpha}^e(x_1, t) r_\alpha^e, \\
\delta V_1^e(x_1, t) &= \delta \Phi_{1\alpha}^e(x_1, t) \delta r_\alpha^e, \\
E_{11}^e(x_1, t) &= (\Phi_{1\alpha,1}^e + \frac{1}{2} \Phi_{2\alpha}^e \Phi_{2T}^e r_T^e) r_\alpha^e, \\
\dot{E}_{11}^e(x_1, t) &= (\dot{\Phi}_{1\alpha,1}^e + \dot{\Phi}_{2T}^e \Phi_{2\alpha}^e r_T^e) r_\alpha^e, \\
E_{12}^e(x_1, t) &= -\Phi_{4\alpha}^e r_\alpha^e, \\
\dot{E}_{12}^e(x_1, t) &= -\dot{\Phi}_{4\alpha}^e r_\alpha^e, \\
N_1^e(x_1, t) &= \left[\beta_1^e (\Phi_{1\alpha,1}^e + \frac{1}{2} \Phi_{2\alpha}^e \Phi_{2T}^e r_T^e) + (\beta_2^e + \beta_3^e e^{\beta_4^e t}) (\Phi_{1\alpha,1}^e + \right. \\
&\quad \left. + \dot{\Phi}_{2T}^e \Phi_{2\alpha}^e r_T^e) \right] r_\alpha^e + \beta_5^e e^{\beta_4^e t} N_1^e(x_1, t_0), \\
M_2^e(x_1, t) &= \left[\eta_1^e \Phi_{4\alpha}^e + (\eta_2^e + \eta_3^e e^{\eta_4^e t}) \dot{\Phi}_{4\alpha,1}^e \right] r_\alpha^e + \eta_5^e e^{\eta_4^e t} M_2^e(x_1, t_0), \\
T_M^e(x_1, t) &= \left[\eta_1^e \Phi_{4\alpha,1}^e + (\eta_2^e + \eta_3^e e^{\eta_4^e t}) \dot{\Phi}_{4\alpha,1}^e \right] r_\alpha^e + \eta_5^e e^{\eta_4^e t} T_M^e(x_1, t_0), \\
T_N^e(x_1, t) &= -\Phi_{2\alpha}^e \left[\beta_1^e (\Phi_{1T,1}^e + \frac{1}{2} \Phi_{2T}^e \Phi_{2T}^e r_T^e) + (\beta_2^e + \beta_3^e e^{\beta_4^e t}) (\dot{\Phi}_{1T,1}^e + \right. \\
&\quad \left. + \dot{\Phi}_{2T}^e \Phi_{2T}^e r_T^e) \right] r_T^e r_\alpha^e + \beta_5^e e^{\beta_4^e t} T_N^e(x_1, t_0).
\end{aligned} \tag{4.31}$$

$$T_3^e(x_1, t) = T_M^e + T_N^e$$

$$N_{t_1}^e = -\varrho_0^e A_0^e \Phi_{5\alpha}^e r_{\alpha}^e$$

$$M_{t_2}^e = -\varrho_0^e J_{20}^e \Phi_{2\alpha}^e r_{\alpha}^e$$

$$Q_{t_1}^e = -\varrho_0^e A_0^e \Phi_{6\alpha}^e r_{\alpha}^e$$

(4.31)

$$i = 1, 2, \dots, 6, \quad \alpha, \tau, \zeta = 1, 2, \dots, 6W_0, \quad (W_0 - \text{Liczba węzłów SKECZ})$$

Wprowadzając formuły dyskretyzacyjne (4.30) lub (4.31) do równania czteropracy wirtualnej (4.21) uzyskamy równanie ruchu w postaci (3.13), w którym macierze K i R opisane są wzorami:

a) prostokątny element czasoprzestrzenny

$$K_{\alpha\beta}^e = \iint_{\Omega_e} \left\{ \left[\Phi_{1\alpha,1}^e + \Phi_{2\alpha}^e \Phi_{2\tau}^e r_{\tau}^e \right] \left[\beta_1^e \left(\Phi_{1\beta,1}^e + \frac{1}{2} \Phi_{2\beta}^e \Phi_{2\tau}^e r_{\tau}^e \right) + \right. \right. \\ \left. \left. + \left(\beta_2^e + \beta_3^e e^{\beta_4^e t} \right) \left(\Phi_{1\beta,1}^e + \Phi_{2\beta}^e \Phi_{2\tau}^e r_{\tau}^e \right) + \Phi_{2\alpha,1}^e \left[\eta_1^e \Phi_{2\beta,1}^e + \right. \right. \right. \\ \left. \left. \left. + \left(\eta_2^e + \eta_3^e e^{\eta_4^e t} \right) \Phi_{2\beta,1}^e \right] - \varrho_0^e A_0^e \left(\Phi_{1\alpha}^e \Phi_{1\beta}^e + \Phi_{3\alpha}^e \Phi_{3\beta}^e \right) - \varrho_0^e J_{20}^e \Phi_{2\alpha}^e \Phi_{2\beta}^e \right] d\Omega \right.$$

(4.32)

$$R_{\alpha}^e = \iint_{\Omega_e} \left\{ \left[\Phi_{1\alpha}^e + \left(\Phi_{1\alpha}^e \Phi_{1\beta,1}^e - \Phi_{3\alpha}^e \Phi_{2\beta}^e \right) r_{\beta}^e \right] \rho_1^e + \Phi_{3\alpha}^e \rho_3^e \right\} d\Omega + \\ + \iint_{\Omega_e} \left\{ \left[\beta_5^e e^{\beta_4^e t} \left(\Phi_{1\alpha,1}^e + \Phi_{2\alpha}^e \Phi_{2\tau}^e r_{\tau}^e \right) N_1^e(t_0^e) + \eta_5^e e^{\eta_4^e t} \Phi_{2\alpha,1}^e M_2^e(t_0^e) \right] d\Omega + \right. \\ \left. - \int_{t_0^e}^{t_1^e} \left[\Phi_{1\alpha}^e N_1^e + \Phi_{3\alpha}^e r_3^e + \Phi_{2\alpha}^e M_2^e - \Phi_{3\alpha}^e M_{t_2}^e \right]_{L_{(0)}^e}^{L_{(1)}^e} dt - \int_{L_{(0)}^e}^{L_{(1)}^e} \left[\Phi_{1\alpha}^e N_{t_1}^e + \Phi_{3\alpha}^e r_{3\alpha}^e \right]_{L_{(0)}^e}^{L_{(1)}^e} dx_1 \right.$$

b) nieprostokątny element czasoprzestrzenny

$$K_{\alpha\beta}^e = \iint_{\Omega_e} \left\{ \left(\Phi_{1\alpha,1}^e + \Phi_{2\alpha}^e \Phi_{2\tau}^e r_{\tau}^e \right) \left[\beta_1^e \left(\Phi_{1\beta,1}^e + \frac{1}{2} \Phi_{2\beta}^e \Phi_{2\tau}^e r_{\tau}^e \right) + \left(\beta_2^e + \right. \right. \right. \\ \left. \left. \left. + \beta_3^e e^{\beta_4^e t} \right) \left(\Phi_{1\beta,1}^e + \Phi_{2\beta}^e \Phi_{2\tau}^e r_{\tau}^e \right) \right] + \Phi_{2\alpha}^e \left[\eta_1^e \Phi_{2\beta,1}^e + \left(\eta_2^e + \right. \right. \right. \\ \left. \left. \left. + \eta_3^e e^{\eta_4^e t} \right) \Phi_{2\beta,1}^e \right] - \varrho_0^e A_0^e \left(\Phi_{5\alpha}^e \Phi_{5\beta}^e + \Phi_{6\alpha}^e \Phi_{6\beta}^e \right) - \varrho_0^e J_{20}^e \Phi_{2\alpha}^e \Phi_{2\beta}^e \right\} d\Omega \quad (4.33)$$

$$R_{\alpha}^e = - \iint_{\Omega_e} \left\{ \left[\Phi_{1\alpha}^e + \left(\Phi_{1\alpha}^e \Phi_{1\beta,1}^e - \Phi_{3\alpha}^e \Phi_{2\beta}^e \right) r_{\beta}^e \right] \rho_1^e + \Phi_{3\alpha}^e \rho_3^e \right\} d\Omega +$$

$$\begin{aligned}
 & + \iint_{\Omega_e} \left[\eta_5^e e^{\beta_4^e t} (\bar{\varphi}_{1\alpha}^e + \bar{\varphi}_{2\alpha}^e \bar{\varphi}_{21}^e \tau^e) N_1^e(t_{(0)}^e) + \eta_5^e e^{\beta_4^e t} \bar{\varphi}_{4\alpha}^e M_2^e(t_{(0)}^e) \right] d\Omega_e \\
 & - \int_{t_{(0)}^e}^{t_{(1)}^e} \left[\bar{\varphi}_{1\alpha}^e N_1^e + \bar{\varphi}_{3\alpha}^e \tau_3^e + \bar{\varphi}_{2\alpha}^e M_2^e - \bar{\varphi}_{6\alpha}^e M_{t_2}^e \right]_{t_{(0)}^e}^{t_{(1)}^e} dt - \int_{t_{(0)}^e}^{t_{(1)}^e} \bar{\varphi}_{1\alpha}^e N_{t_1}^e + \\
 & + \bar{\varphi}_{3\alpha}^e \tau_{t_3}^e \Big|_{t_{(0)}^e}^{t_{(1)}^e} dx_1
 \end{aligned} \tag{4.33}$$

Macierz kształtu zaproponowano w następującej postaci:
 a) prostokątny element czasoprzestrzenny^{1,2} (rys. 4.1a)

$$\underline{\bar{\varphi}}^e = \begin{array}{|c|c|c|} \hline (u_1) \bar{\varphi}_{1\alpha}^e & & \\ \hline & (\varphi) \bar{\varphi}_{2\alpha}^e & (u_3) \bar{\varphi}_{2\alpha}^e \\ \hline & (\varphi) \bar{\varphi}_{3\alpha}^e & (u_3) \bar{\varphi}_{3\alpha}^e \\ \hline \end{array} \tag{4.34}$$

gdzie:

$$\begin{aligned}
 (u_1) \bar{\varphi}_{1\alpha}^e &= \frac{1}{4} (1 + \bar{\varphi}_{\alpha}^e \bar{\xi}) (1 + \tau_{\alpha}^e \tau) \quad \text{dla } \alpha = 1, 4, 7, 10, \\
 (\varphi) \bar{\varphi}_{2\alpha}^e &= \frac{1}{8} (3\bar{\xi}^2 + 2\bar{\varphi}_{\alpha}^e \bar{\xi} - 1) (1 + \tau_{\alpha}^e \tau) \quad \text{dla } \alpha = 2, 5, 8, 11, \\
 (u_3) \bar{\varphi}_{2\alpha}^e &= \frac{3}{8\alpha} \bar{\xi}_{\alpha} (1 - \bar{\xi}^2) (1 + \tau_{\alpha}^e \tau) \quad \text{dla } \alpha = 3, 6, 9, 12, \\
 (\varphi) \bar{\varphi}_{3\alpha}^e &= \frac{\alpha}{8} (\bar{\xi}^3 + \bar{\varphi}_{\alpha}^e \bar{\xi}^2 - \bar{\xi} - \bar{\varphi}_{\alpha}^e) (1 + \tau_{\alpha}^e \tau) \quad \text{dla } \alpha = 2, 5, 8, 11, \\
 (u_3) \bar{\varphi}_{3\alpha}^e &= \frac{1}{8} (2 + 3\bar{\varphi}_{\alpha}^e \bar{\xi} - \bar{\varphi}_{\alpha}^e \bar{\xi}^3) (1 + \tau_{\alpha}^e \tau) \quad \text{dla } \alpha = 3, 6, 9, 12,
 \end{aligned} \tag{4.35}$$

$$\bar{\xi}_{\alpha}^e = \begin{cases} 1 & \text{dla } \alpha = 4, 5, 6, 10, 11, 12, \\ -1 & \text{dla } \alpha = 1, 2, 3, 7, 8, 9, \end{cases}$$

$$\tau_{\alpha}^e = \begin{cases} 1 & \text{dla } \alpha = 7, 8, 9, 10, 11, 12, \\ -1 & \text{dla } \alpha = 1, 2, 3, 4, 5, 6, \end{cases}$$

$$\bar{\xi} \in \langle -1, 1 \rangle, \quad \tau \in \langle -1, 1 \rangle.$$

b) nieprostokątny element czasoprzestrzenny

$$\underline{\bar{\varphi}}^e = \begin{array}{|c|c|c|c|c|c|} \hline \bar{\varphi}_{1\alpha}^e & & & & & \\ \hline & \bar{\varphi}_{2\alpha}^e & & & & \\ \hline & & \bar{\varphi}_{3\alpha}^e & & & \\ \hline & & & \bar{\varphi}_{4\alpha}^e & & \\ \hline & & & & \bar{\varphi}_{5\alpha}^e & \\ \hline & & & & & \bar{\varphi}_{6\alpha}^e \\ \hline \end{array} \tag{4.36}$$

gdzie:

$$\Phi_{i\alpha}^e = \frac{1}{2} \left[1 + \xi_{\alpha} \tau_{\alpha} - (1 + \xi_{\alpha}) \tau_{\alpha} \xi - (1 + \tau_{\alpha}) \xi_{\alpha} \tau \right]$$

$$\xi_{\alpha} = \begin{cases} 1 & \text{dla } \alpha = 1, 2, 3, 4, 5, 6, \\ -1 & \text{dla } \alpha = 7, 8, 9, \end{cases} \quad \tau_{\alpha} = \begin{cases} 1 & \text{dla } \alpha = 1, 2, 3, 7, 8, 9, \\ -1 & \text{dla } \alpha = 4, 5, 6. \end{cases} \quad (4.37)$$

$$\xi \in \langle 0, 1 \rangle \quad \tau \in \langle 0, 1 \rangle$$

$$i = 1, 2, \dots, 6$$

dla elementu o kształcie trójkąta prostokątnego (rys.4.1b), oraz

$$\Phi_{i\alpha}^e = \frac{1}{4} \left[1 + \xi_{\alpha} (\xi + \tau) \right] \left[1 + \tau_{\alpha} (-\xi + \tau) \right]$$

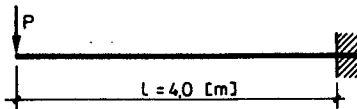
$$\xi_{\alpha} = \begin{cases} 1 & \text{dla } = 7, 8, 9, 10, 11, 12, \\ -1 & \text{dla } = 1, 2, 3, 4, 5, 6, \end{cases} \quad \tau_{\alpha} = \begin{cases} 1 & \text{dla } = 1, 2, 3, 10, 11, 12, \\ -1 & \text{dla } = 4, 5, 6, 7, 8, 9, \end{cases} \quad (4.38)$$

dla elementów o kształcie rombu (rys.4.1c) i o kształcie trójkąta równoramiennego (rys.4.1d), przy czym

$$\xi \in \langle -1, 1 \rangle, \quad \tau \in \langle -1, 1 \rangle \quad \text{dla rombu,}$$

$$\xi \in \langle -1, 1 \rangle, \quad \tau \in \langle 0, 1 \rangle \quad \text{dla trójkąta.} \quad (4.39)$$

Przykład liczbowy dotyczy drgań poprzecznych wspornika (rys.4.9). Rozpatrzono dwa przypadki: małych odkształceń i przemieszczeń oraz małych odkształceń i dużych przemieszczeń. Koniec wspornika został obciążony siłą nagle przyłożoną (Heaviside'a) o wartości $P = 0,1$ [MN].



$$\rho = 7500 \text{ [kg/m}^3\text{]}$$

$$E = 2 \cdot 10^{11} \text{ [Pa]}$$

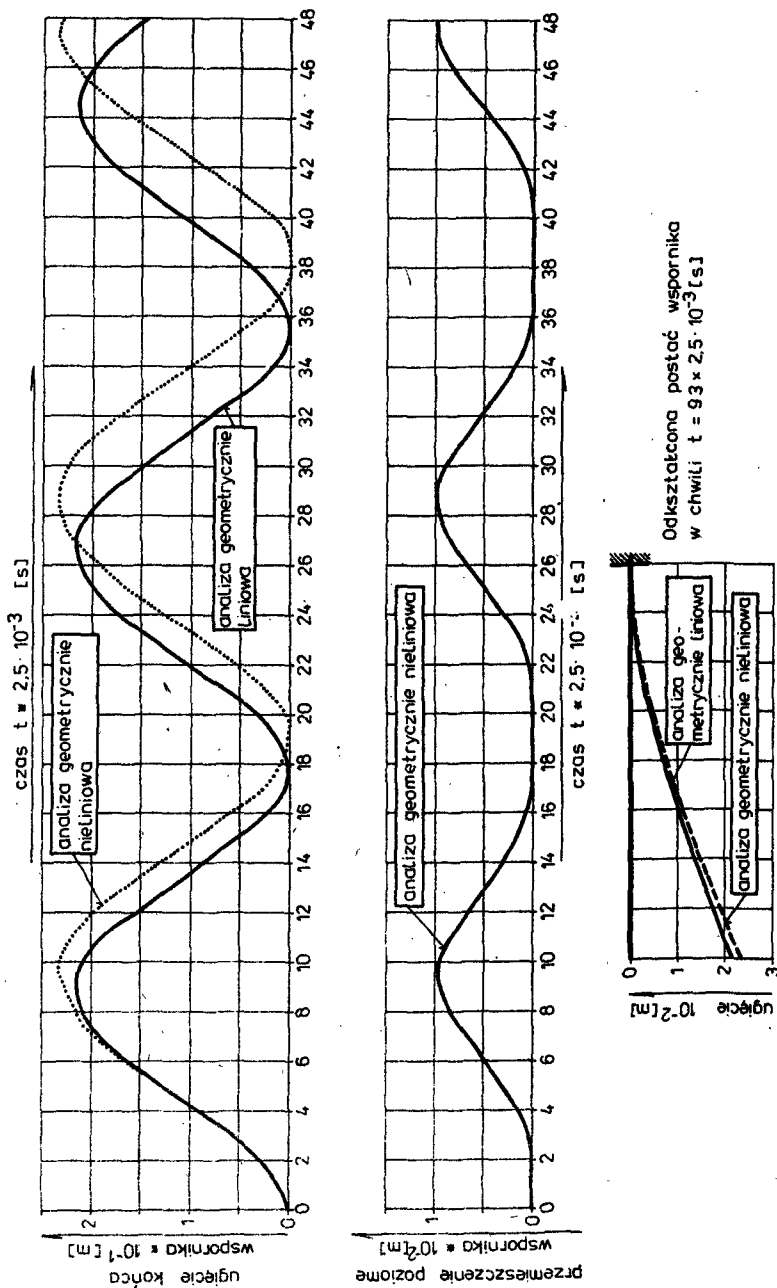
$$h = 1,25 \cdot 10^{-4} \text{ [s]}$$

$$A = 6,31 \cdot 10^{-3} \text{ [m}^2\text{]}$$

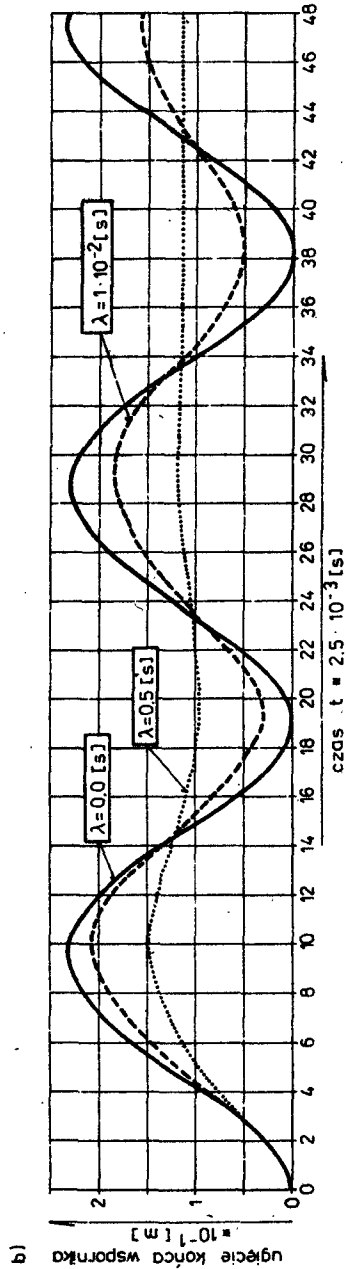
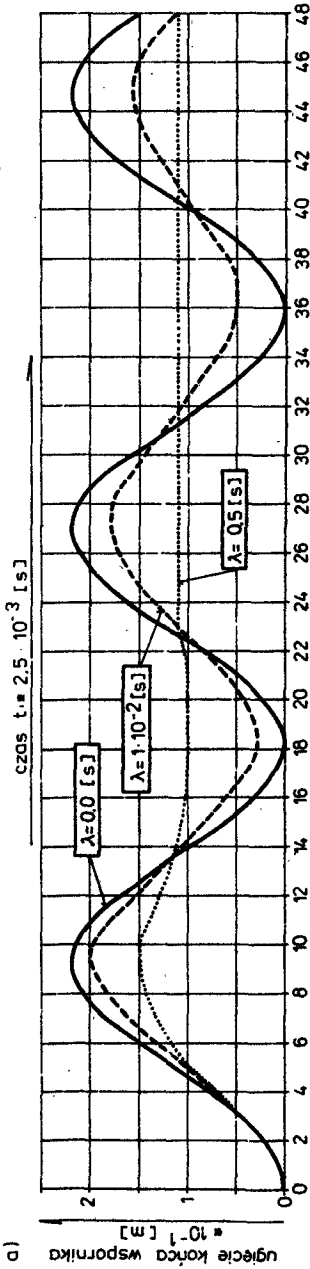
$$J = 9,8 \cdot 10^{-5} \text{ [m}^4\text{]}$$

Rys.4.9

Na rysunkach 4.10 + 4.11 przedstawiono graficznie wybrane wyniki obliczeń numerycznych.



Rys. 4.10. Wykresy przesieszczeń końca wspornika w funkcji czasu dla modelu Hooke'a



Rys. 4.11. Wykresy ugięć końca wspornika w funkcji czasu dla modelu Kelvina-Voigta:
 a) analiza geometrycznie liniowa, b) analiza geometrycznie nieliniowa

Można sformułować kilka uwag ogólnych - świadczących o poprawności obliczeń.

1. Model Hooke'a. Amplitudy przemieszczeń są dokładnie dwa razy większe od przemieszczeń wywołanych siłą $P = 0,1$ MN - działającą statycznie. Okres drgań geometrycznie liniowych wynosi $17,8 \cdot 2,5 \cdot 10^{-3} = 0,9445$ [s] wobec okresu drgań wynikającego z obliczeń analitycznych [87]

$$\omega = \left(\frac{1875}{L} \right)^2 \sqrt{\frac{EJ}{\varphi A}} = \left(\frac{1875}{4} \right)^2 \sqrt{\frac{2 \cdot 10^{11} \cdot 98 \cdot 10^{-5}}{7500 \cdot 6,31 \cdot 10^{-3}}} = 141,4051691 \text{ [s}^{-1}\text{]}.$$

$$T = \frac{2\pi}{\omega} = \frac{2\pi}{141,4051691} = 0,04443391 \text{ [s]}.$$

(błąd okresu wynosi 0,15 %).

Przy analizie modelu geometrycznie nieliniowego nastąpiły przyrosty w stosunku do modelu geometrycznie liniowego: amplitud o około 9 % i okresu drgań o około 7 %.

2. Model Kelvina-Voigta. Tłumienie wewnętrzne powoduje, że przemieszczenia zmierzają asymptotycznie do wartości wynikającej ze statycznego działania siły.



5. UWAGI KOŃCOWE

Przyjęte w pracy ogólne sformułowanie równania konstytutywnego, w postaci prawa całkowego, pozwala na modelowanie ośrodka lepkosprężystego w szerokim zakresie.

Równania teorii lepkosprężystości, uwzględniające nieliniowości geometryczne przedstawiono w ujęciu nieprzyrostowym, stosując opis Lagrange'a. Taka formuła jest bardzo korzystna przy stosowaniu metody elementów czasoprzestrzennych. Charakterystyczne procesy dynamiczne przebiegają w krótkich przedziałach czasowych. Wymiary elementów czasoprzestrzennych w kierunku współrzędnej osi czasu są zatem naturalnie małe (warunek ograniczający wymiary elementów czasoprzestrzennych narzuca kryterium stabilności). Powyższe oznacza w konsekwencji, że nieliniowości geometryczne i fizyczne są niewielkie w przedziale czasowym przejścia z jednej warstwy czasoprzestrzennej do następnej. Nie istnieje więc potrzeba formułowania równań w ujęciu przyrostowym.

Sformułowane, w rozdziale 2, równanie czteropracy wirtualnej - dla ośrodka ciągłego, geometrycznie nieliniowego - uogólnia równanie czteropracy wirtualnej, zdefiniowane przez Kączkowskiego [43] dla ciał geometrycznie liniowych. Pokazano też, jak znaną ważoną metodę residualną (np. [122]) można z powodzeniem wykorzystać do wyprowadzenia równań MECZ, bez potrzeby uciekania się do równania czteropracy wirtualnej. Oznacza to, że równanie czteropracy wirtualnej nie musi stanowić podstawy do otrzymania równań MECZ.

Stosowane ostatnio coraz częściej elementy czasoprzestrzenne o kształtach symplektycznych czynią metodę elementów czasoprzestrzennych bardzo atrakcyjną metodą, zwłaszcza w zastosowaniach do małych maszyn cyfrowych. Wysoka dokładność wyników odpowiada dokładności innych metod całkowania równań ruchu. Istnieją możliwości sformułowania tak macierzy sżywności elementów czasoprzestrzennych, aby w efekcie uzyskać bezwarunkowo stabilne schematy obliczeniowe. W niniejszej pracy macierze sżywności elementów czasoprzestrzennych tak zdefiniowano, aby możliwy był dowolny dobór kształtu SKECZ.

Dalsze prace doprowadzą zapewne do wykorzystania metody elementów czasoprzestrzennych do budowania programów profesjonalnych, umożliwiających rozwiązywanie różnych skomplikowanych zadań z nieliniowościami geometrycznymi i fizycznymi. Interesująco zapowiada się zastosowanie MECZ w zagadnieniach opisywanych równaniami różniczkowymi innymi niż typu hiperbolicznego, np. typu eliptycznego.



LITERATURA

- [1] Argyris J.H., Scharpf D.D., Finite elements in time and space. *Aero. J. RAS*, 73, pp. 1041 - 1044, 1969
- [2] Argyris J.H., Chan A.S.L., Application of finite elements in space and time. *Ing. Archiv*, 41, pp. 235 - 257, 1972.
- [3] Argyris J.H., Dunne P.C., Angelopoulos T., Nonlinear oscillations using the finite element techniques. *Comp. Meth. Appl. Mech. Eng.*, 2, pp. 203 - 250, 1972
- [4] Argyris J.H., Balmer H., Doltsins J.S., Nieliniowość materiału w analizie metodą elementów skończonych. *Metody obliczeniowe w mechanice nieliniowej*, PAN, Wrocław-Warszawa-Kraków-Gdańsk, 1977
- [5] Bailey C.D., A new look at Hamilton's principle. *Foundations of Physics*, 5, 3, pp. 433 - 451, 1975
- [6] Bailey C.D., Application of Hamilton's Law of varying action, *AIAA J.*, 13, pp. 1154 - 1157, 1975
- [7] Bailey C.D., Comment on when Hamilton's principle an extremum principle. *AIAA J.*, 13, pp. 1539 - 1940, 1975
- [8] Bajer Cz., Modelowanie układów dynamicznych za pomocą nieprostokątnych czasoprzestrzennych elementów skończonych. *Prace Naukowe Politechniki Świętokrzyskiej, Budownictwo* 18, ss. 5 - 10, 1984
- [9] Bajer Cz., Triangular and tetrahedral space-time finite elements in vibration analysis. *Int. J. Num. Meth. Eng.*, 23, pp. 2031 - 2048, 1986
- [10] Bajer Cz., Notes on the stability of non-rectangular space-time elements. *Int. J. Num. Meth. Eng.*, 24, pp. 1721 - 1739, 1987
- [11] Bajer Cz., Bezwarunkowo stabilny wariant metody trójkątnych elementów czasoprzestrzennych. *Arch. Inż. Łąd.*, 33, 3, ss. 287 - 295, 1987
- [12] Bajer Cz., Podhorecki A., Space-time element method in structural dynamics. *Arch. Mech. Stos. Teoret.*, 41, 6, pp. 867 - 893, 1989
- [13] Baruch M., Riff R., Hamilton's principle, Hamilton's law- δ^N correct formulations. *AIAA J.*, 20, 5, pp. 687 - 692, 1982
- [14] Bathe K.J., Wilson E.L., Stability and accuracy analysis of direct integration methods. *Int. J. Earth. Eng. Struct. Dyn.*, 1, pp. 283 - 291, 1973

- [15] Bathe K.J., Ramm E., Wilson E.L., Finite element formulations for large deformation dynamic analysis. *Int. J. Num. Meth. Eng.*, 10, pp. 353-386, 1973
- [16] Bathe K.J., Wilson E.W., Numerical methods in finite element analysis. Prentice-Hall, Inc., Englewood Cliffs, New Jersey 1976
- [17] Borkowski A., Metoda sztywno-plastycznych elementów skończonych w analizie i optymalizacji ram. *Mech. Komp. t.1*, ss. 125-138, 1978
- [18] Borkowski A., Statyczna analiza układów prętowych w zakresach sprężystym i plastycznym. *Prace IPPT PAN*, 1985
- [19] Brzeziński J., Pietrzakowski M., Badanie niestacjonarnych drgań prostego układu hybrydowego metodą czasoprzestrzennych elementów skończonych. *Arch. Bud. Maszyn*, 26, 4, ss. 511-526, 1979
- [20] Cella A., Lucchiesi M., Pasquinelli G., Space-time elements for the shock wave propagation problem. *Int. J. Num. Meth. Eng.*, 15, pp. 1457-1488, 1980
- [21] Collatz L., The numerical treatment of differential equations. Springer-Verlag, New York 1966
- [22] Cyganecki W., Kryterium doboru wymiarów elementu czasoprzestrzennego. *Arch. Inż. Łąd.*, 25, 3, ss. 389-397, 1979
- [23] Cyganecki W., O sposobach doboru wymiarów elementu czasoprzestrzennego. *Arch. Inż. Łąd.*, 26, 4, ss. 717-726, 1980
- [24] Dems K., Kleiber M., O systemach programów macierzowej analizy konstrukcji, ASKA jako przykład budowy systemu. *Mech. Komp.*, t.1, ss. 345-378, PWN 1978
- [25] Derski W., Ziemia S., Analiza modeli reologicznych. PWN, Warszawa 1968
- [26] Desai C.S., Abel J.P., Introduction to the finite element method. Van Nostrand Reinhold Co., New York 1972
- [27] Fried I., Finite element analysis of time dependent phenomena. *AIAA J.*, 7, pp. 1170-1172, 1969
- [28] Fung Y.C., Podstawy mechaniki ciała stałego. PWN, Warszawa 1969
- [29] Gallagher R.H., Finite element analysis: fundamentals. Prentice-Hall, Inc., Englewood Cliffs, New Jersey 1975
- [30] Gawroński W., Kruszewski J., Ostachowicz W., Tarnowski J., Wittbrodt E., HESAS - system obliczeń konstrukcji oparty na metodach elementów skończonych. *Mech. Komp.*, t.1, ss. 81-100, 1978
- [31] Gurtin M.E., Sternberg E., On the linear theory of viscoelasticity. *Arch. Rat. Mech. Anal.*, 11, 1, pp. 291-356, 1962

- [32] Hartzman M., Hutchinson J.R., Nonlinear dynamics of solids by the finite element method. *Comp. Struct.*, 2, 1972
- [33] Holand J., Bell H., Finite element methods in stress analysis. *Tapir.*, Trondheim 1969
- [34] Houbolt J.C., A recurrence matrix solution for the dynamic response of elastic aircraft. *J. Aero. Sci.*, 17, pp. 540-550, 1950
- [35] Hughes T.J.R., Hulbert G.H., Space-time element methods for elastodynamics: formulations and error estimates. *Comp. Meth. Appl. Mech. Engng.*, 66, pp. 339-363, 1988
- [36] Husiar B., Świtka R., Quasistatyczne pełzanie ciągnia lepko-sprężystego w ujęciu dyskretnym. *Arch. Inż. Łąd.*, 25, 1, ss. 11-19, 1979
- [37] Iwankiewicz R., Studium dynamiki kratownicy mostowej. *Arch. Inż. Łąd.*, 25, 4, ss. 677-694, 1979
- [38] Kacprzyk Z., Analiza drgań komina przemysłowego obciążonego sejsmicznie. *Arch. Inż. Łąd.*, 27, 3, ss. 507-516, 1981
- [39] Kacprzyk Z., Superelement czasoprzestrzenny. *Arch. Inż. Łąd.*, 28, 1-2, ss. 47-55, 1982
- [40] Kacprzyk Z., Lewiński T., Comparison of some numerical integration methods for the equations of motion of systems with a finite number of degrees of freedom. *Rozp. Inż.*, 31, 2, pp. 213-240, 1983
- [41] Kacprzyk Z., O stosowaniu funkcji wagowych w metodzie czasoprzestrzennych elementów skończonych. *Prace Naukowe Politechniki Warszawskiej, Budownictwo 85*, ss. 83-95, 1984
- [42] Kączkowski Z., The method of finite space-time elements in dynamics of structures. *J. Techn. Phys.*, 16, 1, pp. 69-84, 1975
- [43] Kączkowski Z., Metoda czasoprzestrzennych elementów skończonych. *Arch. Inż. Łąd.*, 22, 3, ss. 365-378, 1976
- [44] Kączkowski Z., Witkowski M., Uwzględnienie tłumienia zewnętrznego w metodzie elementów czasoprzestrzennych. *Arch. Inż. Łąd.*, 23, 3, ss. 243-254, 1977
- [45] Kączkowski Z., Witkowska Z., Macierz przeniesienia w metodzie czasoprzestrzennych elementów skończonych. *Arch. Inż. Łąd.*, 24, 1, ss. 59-66, 1978
- [46] Kączkowski Z., Żyszko M., Drgania giętne pręta metodą czasoprzestrzennych elementów skończonych. *Arch. Inż. Łąd.*, 24, 1, ss. 67-78, 1978
- [47] Kączkowski Z., General formulation of the stiffness matrix for the space-time finite elements. *Arch. Inż. Łąd.*, 25, 3, pp. 351-357, 1979

- [48] Kączkowski Z., Langer J., Synthesis of the space-time finite element method. Arch. Inż. Łąd., 26, 1, pp. 11 - 17, 1980
- [49] Kączkowski Z., On variational principles in thermoelasticity. Bull. Acad. Polon. Sci. Sér. Sci. Techn., XXX, 5-6, pp. 81 - 86, 1982
- [50] Kączkowski Z., O stosowaniu nieprostokątnych elementów czasoprzestrzennych. Mech. Teoret. Stos., 21, 4, ss. 531 - 554, 1983
- [51] Kączkowski Z., O zastosowaniu metody elementów czasoprzestrzennych do zagadnień przewodnictwa cieplnego. Arch. Inż. Łąd., 31, 3, ss. 361 - 373, 1985
- [52] Kączkowski Z., Borkowski A., Zur numerischen stabilität des Verfahrens der Raum-Zeit-Elemente mit schrägen Rändern. ZAMM, 68, 5, ss. 385 - 386, 1988
- [53] Kączkowski Z., O rozwiązaniu pewnego dynamicznego problemu kontaktowego metodą elementów czasoprzestrzennych. Zeszyty Naukowe Politechniki Poznańskiej, Budownictwo 31, ss. 63 - 72, 1988
- [54] Kisiel I., Reologia w budownictwie. Arkady, Warszawa 1967
- [55] Kisiel I., Metoda elementów skończonych. Inż. Bud., 4, 63, ss. 17 - 23, 1970
- [56] Kisiel I., Reologiczne równania stanu ośrodków quasi-liniowych. PAN, Wrocław-Warszawa-Kraków-Gdańsk 1980
- [57] Klasztorny M., Dynamiczne wyteżenie ortotropowych przęseł mostów drogowych. Arch. Inż. Łąd., 24, 4, ss. 539 - 555, 1978
- [58] Kleiber M., Lagrangian and Eulerian finite element formulation for large strain elasto-plasticity. Bull. Acad. Polon. Sci. Sér. Sci. Techn., XXIII, 3, pp. 117 - 126, 1975
- [59] Kleiber M., Duże deformacje ciał sprężysto-plastycznych. Teoria i numeryczna analiza konstrukcji. Prace IPPT PAN, 13, 1978
- [60] Kleiber M., Numeryczne aspekty analizy ciał i konstrukcji sprężysto-plastycznych. Mech. Komp., t.3, ss. 19 - 56, PWN 1980
- [61] Kleiber M., Perturbation approach to the incremental equations of large deformation elasto-plasticity. Bull. Acad. Polon. Sci. Sér. Sci. Techn., XXVIII, pp. 75 - 80, 1980
- [62] Kleiber M., Wieczorek M., Przybliżona metoda nieliniowej analizy ram sprężystych. Rozp. Inż., 30, ss. 269 - 281, 1982
- [63] Kleiber M., Sosnowski W., ASGRAM - sprężysto-plastyczna analiza ram płaskich. Prace IPPT PAN, 5, 1982
- [64] Kleiber M., Metoda elementów skończonych w mechanice kontinuum. Aktualne kierunki badań. Mech. Teoret. Stos., 21, 4, ss. 585 - 598, 1983
- [65] Kleiber M., Metoda elementów skończonych w nieliniowej mechanice kontinuum. PWN, Warszawa-Poznań 1985

- [66] Kohler W., Pitttr J., Calculation of transient temperature fields with finite elements in space and time dimensions. *Int. J. Num. Meth. Engng.*, 8, pp. 625 - 631, 1974
- [67] Kotulecki J., Witkowski M., Tetrahedral space-time elements in the analysis of forced vibrations of plates. *Rozp. Inż.*, 36, 1, pp. 87 - 95, 1988
- [68] Kruszewski J., Gawroński W., Wittbrodt E., Najbor F., Grabowski S., Metoda sztywnych elementów skończonych. *Arkady*, Warszawa 1975
- [69] Kruszewski J., Gawroński W., Ostachowicz W., Tarnowski J., Wittbrodt E., Metoda elementów skończonych w dynamice konstrukcji. *Arkady*, Warszawa 1984
- [70] Langer J., Studium dynamiki przęsła mostowego obciążonego ruchomym pojazdem. *Arch. Inż. Łąd.*, 19, 2, ss. 255 - 262, 1973
- [71] Langer J., Analiza dynamiczna przęsła mostowego obciążonego ruchomym pojazdem. *Arch. Inż. Łąd.*, 20, 4, ss. 591 - 599, 1974
- [72] Langer J., W sprawie numerycznego całkowania równań ruchu kolokacyjną metodą stałego przyspieszenia. *Arch. Inż. Łąd.*, 25, 1, ss. 153 - 157, 1979
- [73] Langer J., Tłumienie pasożytnicze w komputerowych rozwiązaniach równań ruchu. *Arch. Inż. Łąd.*, 25, 3, ss. 359 - 369, 1979
- [74] Langer J., Klasztorny M., Dynamika belki mostowej obciążonej masą ruchomą rozłożoną nierównomiernie. *Arch. Inż. Łąd.*, 26, 4, ss. 657 - 667, 1980
- [75] Langer J., Klasztorny M., Drgania złożonego układu belkowego pod ruchomym inercyjnym obciążeniem cyklicznym. *Arch. Inż. Łąd.*, 27, 2, ss. 261 - 279, 1981
- [76] Langer J., Klasztorny M., Drgania układów kratowo-belkowych pod ruchomym inercyjnym obciążeniem cyklicznym. *Arch. Inż. Łąd.*, 28, 1/2, ss. 17 - 29, 1982
- [77] Langer J., Klasztorny M., Analiza kolokacyjnych metod numerycznego całkowania równań ruchu. *Mech. Komp.*, t.6, 1983
- [78] Malsch H., Zur Berechnung von Durchsenkungen eines Balkens unter Folgen von wandernden Lasten mit finiten Raum-Zeit-Elementen. *Ingenieur-Archiv*, 47, ss. 105 - 115, 1978
- [79] Malsch H., Die Berechnung nichtlinear Schwingungen mit finiten Raum-Zeit-Elementen. *Ingenieur-Archiv*, 47, ss. 349 - 361, 1978
- [80] Martin H.C., Carey G.F., Introduction to finite element analysis. *Mc Graw-Hill Book Co.*, New York 1973
- [81] Newmark N.M., A method of computation for structural dynamics. *J. Eng. Mech. Div., ASCE*, 85, EM 3, pp. 67 - 94, 1959

- [82] Nguyen H., Reynen J., A space-time least square finite element scheme for advection-diffusion equations. *Comp. Meth. Appl. Mech. Engng.*, 42, pp. 331 - 342, 1984
- [83] Nickell R.E., On the stability of approximation operators in problems of structural dynamics. *Int. J. Sol. Struct.*, 7, pp. 301 - 319, 1971
- [84] Nickell R.E., Direct integration in structural dynamics. *J. Eng. Mech. Dir., ASCE*, 99, pp. 303 - 317, 1973
- [85] Norrie D.H., de Uries G., An introduction to finite element analysis. Academic Press Inc., London 1978
- [86] Nowacki W., Teoria pełzania. Arkady, Warszawa 1963
- [87] Nowacki W., Dynamika budowli. Arkady, Warszawa 1972
- [88] Oden J.T., A general theory of finite elements. *Int. J. Num. Meth. Engng.*, 1, pp. 205 - 259, 1969
- [89] Oden J.T., Reddy J.N., Variational methods in theoretical mechanics. Springer-Verlag, Heidelberg 1976
- [90] Osiński Z., Tłumienie drgań mechanicznych. PWN, Warszawa 1986
- [91] Ostachowicz W., Zastosowanie metody sztywnych elementów skończonych do analizy stateczności dynamicznej pręta prostego o dowolnie zmiennym przekroju. *Mech. Komp.*, t.1, ss. 309 - 320, 1978
- [92] Ostachowicz W., Zastosowanie metody sztywnych elementów skończonych do analizy drgań rusztów obciążonych osiowo. *Mech. Komp.*, t.2, ss. 121 - 130, 1980
- [93] Pelc J., Nieliniowe funkcje kształtu w metodzie elementów czasoprzestrzennych. *Arch. Inż. Łąd.*, 30, 1, ss. 53 - 63, 1984
- [94] Podhorecka A., Metoda elementów czasoprzestrzennych w zagadnieniach geometrycznie nieliniowych. *Mech. Teoret. Stos.*, 26, 4, ss. 683 - 699, 1988
- [95] Podhorecki A., Podhorecka A., Lepkosprężysty element czasoprzestrzenny. *Rozp. Inż.*, 33, 1-2, ss. 3 - 22, 1985
- [96] Podhorecki A., The viscoelastic space-time element. *Comp. Struct.*, 23, pp. 535 - 544, 1986
- [97] Podhorecki A., Metoda czasoprzestrzennych elementów w nieliniowej mechanice continuum. *Zeszyty Naukowe ATR w Bydgoszczy*, 154, Budownictwo 24, ss. 21 - 29, 1987
- [98] Podhorecki A., Ogólne sformułowanie równań ruchu ośrodka lepko-sprężystego. *Rozp. Inż.*, 35, 2, ss. 205 - 215, 1987
- [99] Podhorecki A., Stabilność rozwiązań w metodzie elementów czasoprzestrzennych. *Rozp. Inż.*, 37, 1, ss. 41 - 51, 1989

- [100] Przemieniecki J.S., Theory of matrix structural analysis. McGraw-Hill Book Co., New York 1968
- [101] Sadberg I.W., Schickman H., Numerical integration of system of stiff nonlinear differential equations. Bell System Techn. Journ., 47, pp. 511-527, 1968
- [102] Saran M., Borkowski A., Nośność graniczna ram w ujęciu komputerowym. Arch. Inż. Łąd., 24, ss. 645-657, 1978
- [103] Saran M., Borkowski A., On load carrying capacity of sway frames taking into account finite displacements. Comp. Struct., 16, pp. 589-595, 1983
- [104] Segerlind L.J., Applied finite element analysis. J. Wiley and Sons, New York 1976
- [105] Szmelter J., Dacko M., Dobrociński S., Wieczorek M., Programy metody elementów skończonych. Arkady, Warszawa 1973
- [106] Szmelter J., Dacko M., Dobrociński S., Wieczorek M., Metoda elementów skończonych w statyce konstrukcji. Przykłady obliczeń. Arkady, Warszawa 1979
- [107] Świtka R., Husiar B., Dyskretna analiza modeli reologicznych. Mech. Teoret. Stos., 22, 1-2, ss. 209-233, 1984
- [108] Turner M.J., Clough R.W., Martin H.C., Topp L.J., Stiffness and deflection analysis of complex structures. J. Aero. Sci., 23, pp. 805-823, 1956
- [109] Washizu K., Variational methods in elasticity and plasticity. Pergamon Press, 1975
- [110] Waszczyszyn Z., Problemy numeryczne nieliniowej analizy stateczności konstrukcji sprężystych. Współczesne metody analizy stateczności konstrukcji. Ossolineum, ss. 341-380, 1981
- [111] Waszczyszyn Z., Pytel E., Nguyen-Cao-Duong, Numeryczna analiza nieliniowych zagadnień utraty stateczności kratownic sprężystych przy obciążeniach wieloparametrowych. Rozp. Inż., 2, 30, ss. 131-150, 1982
- [112] Waszczyszyn Z., Metoda elementów skończonych w stateczności konstrukcji. Mech. Teoret. Stos., 1, 21, ss. 3-23, 1983
- [113] Weeks G., Temporal operators for nonlinear structural dynamics problems. J. Eng. Mech. Div., ASCE, 98, pp. 1087-1104, 1972
- [114] Witkowski M., Metoda elementów czasoprzestrzennych jako ciąg zadań typu statycznego. Arch. Inż. Łąd., 26, 4, ss. 727-737, 1980
- [115] Witkowski M., O czasoprzestrzeni w dynamice budowli. Prace Naukowe Politechniki Warszawskiej, Budownictwo 80, 1983

- [116] Witkowski M., Trójkątne elementy czasoprzestrzenne w analizie zagadnień falowych. *Rozp. Inż.*, 33, 4, ss. 549 - 564, 1985
- [117] Witkowski M., Dynamics analysis of hoist cable using triangular space-time elements. *Enging. Trans.*, 34, 4, pp. 445 - 456, 1986
- [118] Wittbrodt E., Hybrydowa metoda sztywnych i odkształcalnych elementów skończonych. *Mech. Komp.*, t.1, ss. 101 - 124, 1978
- [119] Wittbrodt E., Obliczanie dynamiki układu poruszającego się po płaszczyźnie, modelowanego za pomocą metody sztywnych elementów skończonych. *Mech. Komp.*, t.2, ss. 97 - 120, 1980
- [120] Yu J.R., Hsu T.R., The solution of diffusion-convection equation by the space-time finite element method. *Int. J. Numb. Meth. Engng.*, 23, pp. 737 - 750, 1986
- [121] Zawadzki J., (red. W. Szczepiński), Metody doświadczalne mechaniki ciała stałego. Cz. 2, ss. 126 - 215, PWN, Warszawa 1984
- [122] Zienkiewicz O.C., Metoda elementów skończonych. Arkady, Warszawa 1972
- [123] Zienkiewicz O.C., A new look at the Newmark, Houbolt and other time stepping formulas. A weighted residual approach. *Int. J. Earth. Eng. Struct. Dyn.*, 5, pp. 413 - 418, 1977

**METODA ELEMENTÓW CZASOPRZESTRZENNYCH
W GEOMETRYCZNIE NIELINIOWEJ TEORII LEPKOSPĘŻYSTOŚCI**

Streszczenie

W pracy analizuje się ciała lepkospężyste, poddane zmiennym obciążeniom, o dowolnie dużych przemieszczeniach i odkształceniach w ujęciu metody elementów czasoprzestrzennych.

Przyjęte ogólne sformułowanie równania konstytutywnego, w postaci prawa całkowego, pozwala na modelowanie ośrodka lepkospężystego w szerokim zakresie. Równania teorii lepkospężystości, uwzględniające nieliniowości geometryczne, przedstawiono w ujęciu nieprzyrostowym, stosując opis Lagrange'a. Macierze sztywności elementów czasoprzestrzennych tak zdefiniowano, aby możliwy był dowolny dobór kształtu skończonego elementu czasoprzestrzennego.

**THE SPACE-TIME ELEMENT METHOD
IN GEOMETRICALLY NON-LINEAR THEORY OF VISCOELASTICITY**

Summary

In this study we analyse viscoelastic objects, being subject to variable loads, with any amount of displacements and deformations according to the space-time element method.

General formulation of essential equation, that was accepted as the integral law, allows to simulate the viscoelastic medium in a wide range. The equations of the theory of viscoelasticity, incorporating geometrical non-linearity, have been shown in a non-incremental expression with the use of Lagrange description. The matrixs of the space-time elements stiffness have been defined in such a way, that the optional choice of the definite space-time element shape has been available.

МЕТОД ВРЕМЯПРОСТРАНСТВЕННЫХ ЭЛЕМЕНТОВ В ГЕОМЕТРИЧЕСКИ НЕЛИНЕЙНОЙ ВЯЗКОУПРУГОЙ ТЕОРИИ

Резюме

В работе анализируются вязкоупругие тела, подверженные переменным нагрузкам, с произвольно большими перемещениями и деформациями в трактовке метода времяпространственных элементов. Моделирование вязкоупругого центра, в широком диапазоне, возможно благодаря обще сформулированному конститутивному уравнению в форме интегрального закона. Уравнения вязкоупругой теории, учитывающие геометрические нелинейности, представлены в непривычном виде, применяя описание Лагранжа. Матрицы жёсткости времяпространственных элементов определили так, чтобы был возможен произвольный подбор формы оконченного времяпространственного элемента.

Biblioteka Główna ATR
w Bydgoszczy

§

1966 7/1

ISSN 0209-0597