

AKADEMIA TECHNICZNO-ROLNICZA
IM. JANA I JĘDRZEJA ŚNIADECKICH
W BYDGOSZCZY

ZESZYTY NAUKOWE NR 221

MECHANIKA 44

Sesja naukowa – DYNAMIKA i WIBRACJE

BYDGOSZCZ - 1999

AKADEMIA TECHNICZNO-ROLNICZA
IM. JANA I JĘDRZEJA ŚNIADECKICH
W BYDGOSZCZY

ZESZYTY NAUKOWE NR 221

MECHANIKA 44

Sesja naukowa – DYNAMIKA i WIBRACJE

BYDGOSZCZ - 1999

PRZEWODNICZĄCY KOMITETU REDAKCYJNEGO
prof. dr hab. Ojcumiła Stefaniak

REDAKTOR NAUKOWY
dr hab. inż. Maciej Woropay, prof. nadzw. ATR

OPRACOWANIE REDAKCYJNE I TECHNICZNE
mgr Michał Górecki, Zbigniew Gackowski

Wydano za zgodą Rektora
Akademii Techniczno-Rolniczej
w Bydgoszczy

ISSN 0208-6395

WYDAWNICTWA UCZELNIANE
AKADEMII TECHNICZNO-ROLNICZEJ W BYDGOSZCZY

Wyd. I. Nakład 150 egz. Ark. aut. 9,0. Ark. druk. 11,0. Papier druk. kl. III.

Oddano do druku i druk ukończono w październiku 1999 r.

Uczelniany Zakład Małej Poligrafii ATR Bydgoszcz, ul. Ks. A. Kordeckiego 20
Zamówienie nr 12/99

Katedra Mechaniki Stosowanej
Akademii Techniczno-Rolniczej w Bydgoszczy
Bydgoski Oddział Polskiego Towarzystwa Mechaniki
Teoretycznej i Stosowanej

Sesja Naukowa

DYNAMIKA I WIBRACJE

zorganizowana

z okazji 30-lecia badań dynamiki maszyn i wibroakustyki
w bydgoskim środowisku naukowym
i 70-lecia

dr. hab. inż. Bronisława SIOŁKOWSKIEGO, prof. nadzw. ATR

Komitet naukowy

prof. dr hab. inż. Józef Nizioł

prof. dr hab. inż. Andrzej Tylikowski

dr hab. inż. Krzysztof Wernerowski, prof. nadzw. ATR - przewodniczący

dr inż. Henryk Holka

Komitet organizacyjny

dr hab. inż. Tomasz Topoliński

dr inż. Jerzy Sawicki - przewodniczący

dr inż. Jan Sadowski

Katarzyna Łaz

Cecylia Sarbinowska



Bronisław Siolkowski
 dr hab. inż., prof. nadzw. ATR

Szanowny Jubilat urodził się 4 września 1929 r. w Busku.

Absolwent Politechniki Gdańskiej. Zatrudniony od 01.09.1962 r. na stanowisku st. asystenta (1962-66), wykładowcy (1966-72), starszego wykładowcy (1972-77), docenta (1977-90) i profesora nadzwyczajnego ATR.

W okresie swej pracy na Uczelni prowadził i prowadzi zajęcia dydaktyczne z zakresu mechaniki technicznej, maszyn cieplnych, mechaniki płynów, wytrzymałości materiałów, dynamiki obrabiarek i podstaw dynamiki maszyn. Pełnił funkcję prodziekana Wydziału Mechanicznego od 1975-81 i od 1987-90, kierownika laboratorium termodynamiki od 1963-64, kierownika Pracowni Wytrzymałości Materiałów od 1967-68 i kierownika Pracowni Mechaniki Technicznej od 1968-75.

Pełnił funkcję kierownika Katedry Mechaniki Stosowanej i prodziekana.

W wyniku intensywnej pracy naukowej uzyskał stopień naukowy doktora habilitowanego w zakresie mechaniki technicznej i dynamiki maszyn.

Ogólny dorobek naukowy to: 2 rozprawy, 31 artykułów naukowych, 9 skryptów, 22 prace naukowo-badawcze (niepublikowane) w większości wdrożone w przemyśle, kilkadziesiąt referatów na konferencjach i sympozjach krajowych.

Był organizatorem i współorganizatorem zaplecza laboratoryjnego dyscyplin wytrzymałości materiałów, dynamiki, drgań i mechaniki płynów. Uczestniczył w wielu organach koleżeńskich Wydziału Mechanicznego i Uczelni. Od wielu lat jest członkiem Rady Wydziału Mechanicznego i Senatu Uczelni. Za aktywną pracę zawodową (dydaktyczną i naukową) oraz organizacyjną m.in. uhonorowany został Medalem Edukacji Narodowej i Złotym Krzyżem Zasługi.

30-LECIE BADAŃ DYNAMIKI MASZYN I WIBROAKUSTYKI

Bronisław Siołkowski, Krzysztof Wernerowski

Większość badań zrealizowano w Zespole Mechaniki Technicznej Wieczorowej Szkoły Inżynierskiej, Wyższej Szkoły Inżynierskiej, Zakładzie Mechaniki Stosowanej i od 1992 r. w Katedrze Mechaniki Stosowanej Akademii Techniczno-Rolniczej im. Jana i Jędrzeja Śniadeckich.

Również inne jednostki Wydziału Mechanicznego zajmują się częścią tematyki dotyczącej dynamiki maszyn i wibroakustyki, np. w zakresie diagnostyki, konstrukcji maszyn i technologii.

Katedra Mechaniki Stosowanej realizowała badania naukowe w następujących dziedzinach:

- kinematyce, dynamice i teorii drgań,
- podstawach dynamiki maszyn,
- mechanice płynów,
- dynamice obrabiarek,
- drganiach i hałasie w eksploatacji maszyn,
- oczywiście również w wspomaganiu komputerowym w mechanice,
- wykonywaniu analiz dynamiczno-wytrzymałościowych elementów nośnych i urządzeń mechanicznych,
- realizacji prac pasywnych i aktywnych metod minimalizacji drgań mechanicznych,
- realizacji prac wibroakustycznych (pasywne i aktywne tłumienie hałasu maszyn, poprawianie klimatu akustycznego w hałach produkcyjnych, w pomieszczeniach towarzyszących i środowisku naturalnym),
- realizacji badań w zakresie modelowania przepływów laminarnych i turbulentnych w wąskich kanałach oraz przepływów i dwufazowych newtonowskich i nienewtonowskich.

Dorobek naukowy jednostek zajmujących się mechaniką stosowaną kolejno pod kierownictwem mgr. inż. Zdzisława Arnolda, dr. hab. inż. Krzysztofa Wernerowskiego, prof. nadzw. ATR i dr. hab. inż. Bronisława Siołkowskiego, prof. nadzw. ATR przedstawiają następujące liczby:

• zrealizowane rozprawy habilitacyjne	3
• zrealizowane przewody doktorskie	12
• opublikowane monografie i rozprawy	18
• opublikowane artykuły naukowe	ok. 235
• wydane podręczniki i skrypty	16
• uzyskane patenty	ok. 67
• zrealizowane prace promocyjne i wdrożeniowe	ok. 100
• zrealizowane staże naukowe zagraniczne	7
• wygłoszone referaty konferencyjne krajowe i zagraniczne	ok. 200 ok. 35

Należy podkreślić osiągnięcia prof. dr. hab. inż. Bogdana Żółtowskiego, kierownika Katedry Maszyn Roboczych i Pojazdów Wydziału Mechanicznego ATR w zakresie diagnostyki wibroakustycznej.

Ciekawe badania w zakresie wytrzymałości zmęczeniowej nawiązujące do ruchu okresowego są realizowane przez Katedry Konstrukcyjne kierowane przez prof. zw. dr. hab. inż. Józefa Szalę i dr. hab. inż. Janusza Semprucha, prof. nadzw. ATR.

Badanie hałasu realizował też w obróbce skrawaniem dr. hab. inż. Hubert Latoś, prof. nadzw. ATR.

Spis treści

1. Józef Nizioł - Tłumienie drgań przewodów i osprzętu linii elektroenerge- tycznych	9
2. Andrzej Tylikowski - Półaktywne i aktywne piezoelektryczne tłumiki drgań płyt kołowych i pierścieniowych	21
3. Jerzy Cabański - Drgania belki Timoshenki-Kelvina	29
4. Henryk Holka - Wybór zmiennych stanu układów dyskretno-ciągłych na podstawie syntezy podatności	39
5. Kazimierz Peszyński, Václav Tesař - Stability boundaries of autonomous non-linear dynamic systems	49
6. Tomasz Piątkowski, Janusz Sempruch - Doświadczalna weryfikacja dynamicznego modelu procesu zgarniania ładunków	61
7. Anna Podhorecka, Adam Podhorecki - Metoda elementów czasoprzestrzennych w zagadnieniu kontaktu ciał stałych	75
8. Eugeniusz Ranatowski - Wybrane aspekty identyfikacji stanu mechanicznego połączeń spajanych	91
9. Eugeniusz Ranatowski, Jan Sadowski - Zastosowanie wspomaganie komputerowego CAI w badaniach procesu pęknięcia w próbie udarowego zginania	109
10. Jan Sadowski - Przystosowanie próby udarowego zginania dla oceny parametrów dynamicznej odporności na pęknięcie i procesu pęknięcia materiałów	121
11. Jerzy Sawicki - Wpływ pola elektromagnetycznego na przepływ gazu lepkiego w szczelinie między nieruchomymi powierzchniami obrotowymi	133
12. Bronisław Siolkowski, Maciej Świtalski - Problemy stabilności osiowego ruchu walczaków obrotowych	141
13. Dariusz Skibicki, Janusz Sempruch - Kryteria wieloosiowego nieproporcjonalnego zmęczenia	153
14. Václav Tesař - Bistability phenomenon in fluid dynamic.....	161
15. Krzysztof Wernerowski - Patenty wibroakustyczne bydgoskiego środowiska naukowego	171

TŁUMIENIE DRGAŃ PRZEWODÓW I OSPRZĘTU LINII ELEKTROENERGETYCZNYCH

Józef Nizioł

Instytut Mechaniki i Podstaw Konstrukcji Maszyn, Wydział Mechaniczny
Politechnika Krakowska
ul. Jana Pawła II 37, 31-864 Kraków

W pracy przeanalizowano drgania przewodów linii elektroenergetycznych z uwzględnieniem ich interakcji z osprzętem, który stanowi układ dyskretno-ciągły. Model matematyczny zbudowano przy pomocy metody przemieszczeniowej. Wymagało to wyznaczenia macierzy sztywności dynamicznej dla elementów osprzętu. W dalszej kolejności podano metodę doboru optymalnych parametrów tłumika drgań Stockbridge'a oraz miejsca jego zawieszenia na przewodzie.

1. WSTĘP

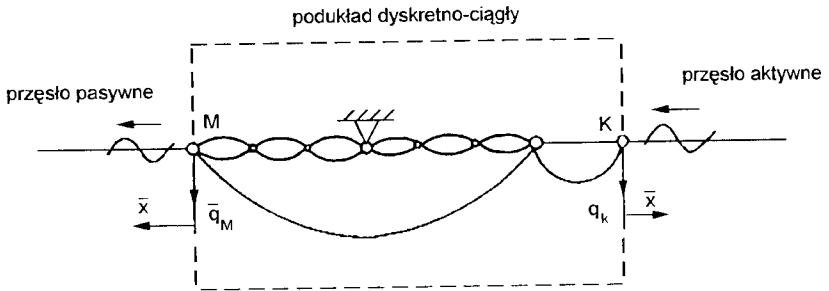
Napowietrzne linie elektroenergetyczne są narażone na różnego typu drgania mechaniczne, wywołane oddziaływaniem wiatru. Drgania te mogą przybierać różne formy (drgania eolskie, galopada przewodów, drgania odcinkowe) charakteryzujące się odmiennym mechanizmem wzbudzenia, różniące się zakresem częstotliwości i wartościami amplitud.

O trwałości linii elektroenergetycznych decydują nie tylko poziomy naprężeń dynamicznych w przewodach lecz również w elementach osprzętu do którego zaliczamy elementy tłumiące drgania (pętle, tłumiki Stockbridge'a) oraz układy łączące przewody bezpośrednio z konstrukcją nośną słupów (łańcuchy izolatorowe, łączniki, mostki prądowe). W wielu przypadkach zachodzi konieczność tłumienia drgań pojedynczych przewodów. Najczęściej czyni się to przy pomocy tłumików typu Stockbridge'a. Przy budowie linii elektroenergetycznych najwyższych napięć stosuje się wiązki przewodów. Doświadczenia wykazują, że wiązki przewodów ze względu na swoją specyficzną konstrukcję, w szczególności niewielką odległość między przewodami są narażone na występowanie wielu typów drgań. Do najbardziej niebezpiecznych wg [2] należą drgania samowzbudne, zwane odcinkowymi. Odbywają się one z niskimi częstotliwościami 0,5-3 Hz, powstają przy prędkości wiatru 6-20 m/s i są zlokalizowane w podprzęsłach, tj. w odcinkach wiązki pomiędzy grupami odstępników. Najczęściej wzbudzenie drgań odcinkowych następuje w płaszczyźnie równoległej do kierunku wiatru. Ze względów konstrukcyjnych ograniczenie drgań odcinkowych może nastąpić tylko przez odpowiednie usytuowanie: odstępników w grupach, grup odstępników wzdłuż przęsła oraz poprzez odpowiedni dobór parametrów odstępników. Chodzi o maksymalne zwiększenie samotłumienności wiązki. Rozważane układy: przewody z osprzętem oraz wiązki przewodów są typowymi układami dyskretno-ciągłymi. Ich równania opisujące ruch są

równaniami różniczkowymi o pochodnych cząstkowych (opis drgań przewodów) sprzężonymi z równaniami różniczkowymi zwyczajnymi (opis drgań osprzętu i odstępników). Celem pracy jest analiza wpływu układów dyskretnych na możliwość powstawania ustalonych w obrębie jednego przęsła, a także wpływu tych elementów na propagację drgań do sąsiednich przęseł. Analizowany będzie układ otwarty złożony z dwóch przęseł o nieskończonej długości oraz z podukładu dyskretno-ciągłego modelującego osprzęt.

2. DRGANIA UKŁADU PRZEWÓD-OSPRZĘT SIECIOWY

W celu zbadania interakcji pomiędzy drgającymi przewodami a układem odciążowym wprowadza się następujący model dynamiczny (rys. 1).



Rys.1. Ogólny model układu otwartego

Układ składa się z dwóch przęseł o nieskończonej długości połączonych w węzłach K i M podukładem dyskretno-ciągłym modelującym układy odciążowe lub przełotowe, które mogą składać się z łańcuchów izolatorowych, mostka prądowego oraz elementów tłumiących drgania. Zakładamy, że rozpraszanie energii drgań w podukładzie dyskretno-ciągłym może wystąpić tylko w elementach tłumiących drgania, a więc w pętach tłumiących lub tłumikach drgań. Przyjmujemy, że wszystkie elementy wykonują małe drgania, a drgania przewodów mogą być opisane równaniem struny. Poszczególne elementy układu połączone są przegubami sprężystymi o charakterystykach liniowych. Zakładamy, że w jednym przęśle nazywanym dalej aktywnym wzbudzone są drgania harmoniczne o zadanej częstotliwości. Biegająca fala drgań o amplitudzie U (fala inicjująca) oddziałuje na pozostałą część układu, przy czym zostaje ona częściowo odbita a częściowo przechodzi do drugiego przęsła – nazwanego dalej pasywnym – wzbudzając jego drgania. Zdolność do transmisji lub odbicia dochodzących fal opisujemy przez współczynnik transmisji T lub odbicia R . W przypadku fal poliharmicznych zdefiniujemy te współczynniki dla każdej harmonicznej $R_i = \frac{a_i}{U}$, $T_i = \frac{b_i}{U}$,

gdzie a_i oraz b_i są odpowiednio amplitudami i -tej harmonicznej fali odbitej i przechodzącej do przęsła biernego.

Biorąc pod uwagę powyższe założenia można wyrazić całkowitą falę biegnącą w przęśle aktywnym jako sumę fali inicjującej o zadanej amplitudzie U i częstotliwości ω oraz fal odbitych o nieznanych składowych harmonicznych

$$U(x, t) = U \sin k_1(x + c_1 t) + \sum_{i=1}^{N_H} [A_i \sin i k_1(x - c_1 t) + B_i \cos i k_1(x - c_1 t)] \quad (2.1)$$

gdzie k_1 , c_1 są odpowiednio liczbą falową i prędkością fazową podstawowej harmonicznej w przeszłe aktywnym a sumowanie ograniczone do skończonej liczby N_H składowych harmonicznych. Należy zauważyć, że wskutek braku dyspersji w przewodach wszystkie składowe fali poruszają się z tą samą prędkością fazową. Prędkość ta związana jest z masą jednostkową $(\rho F)_1$ i napięciem przewodu S_1 następującą zależnością

$$c_1 = \sqrt{S_1 |(\rho F)_1}$$

Fala przepuszczona przez podukład dyskretno-ciągły propagująca się w przeszłe pasywnym opisana jest przez funkcję:

$$\bar{U}(\bar{x}, t) = \sum_{i=1}^{N_H} [\bar{A}_i \sin i k_2(\bar{x} - c_2 t) + \bar{B}_i \cos i k_2(\bar{x} - c_2 t)] \quad (2.2)$$

Prędkości propagacji fali w obu przeszłach mogą być różne jednakże musi zachodzić pierwszy ze związków (2.3).

Dla opisu równowagi dynamicznej węzłów należy napisać związek między wektorem przemieszczeń uogólnionych \bar{q}^e i sił uogólnionych $\bar{F}^{(e)}$. Jest to drugi ze związków (2.3).

$$\begin{cases} k_1 c_1 = k_2 c_2 = \omega \\ \bar{F}^{(e)} = G^{(e)}(\omega) \bar{q}^e \end{cases} \quad (2.3)$$

gdzie:

$G^{(e)}(\omega)$ - macierz sztywności dynamicznej.

Macierz ta może być wyznaczona analitycznie lub na drodze doświadczalnej.

W przypadku, gdy ruch elementu opisany jest równaniami nieliniowymi, wówczas macierz $G^{(e)}$ zależy od przemieszczeń uogólnionych \bar{q}^e i drugi ze związków (2.3) przyjmuje postać:

$$\bar{F}^{(e)} = G^{(e)}\left(\omega, \bar{q}^e\right) \bar{q}^e \quad (2.4)$$

Dla napisania równań ruchu podukładu dyskretno-ciągłego konieczne jest, oprócz wyznaczenia macierzy sztywności dynamicznych elementów, określenie sił F_K i F_M działających na skrajne węzły K i M. Można wyrazić je poprzez przemieszczenia q_K i q_M węzłów K i M oraz amplitudę fali inicjującej U. Przedstawimy je w postaci związków (2.5) i (2.6).

$$\begin{cases} F_K = -S_1 \frac{\partial U(0, t)}{\partial x} = \sum_{i=1}^{N_H} (F_{K_i}^c \cos i\omega t + F_{K_i}^s \sin i\omega t) \\ F_M = -S_2 \frac{\partial U(0, t)}{\partial x} = \sum_{i=1}^{N_h} (F_{M_i}^c \cos i\omega t + F_{M_i}^s \sin i\omega t) \end{cases} \quad (2.5)$$

$$\begin{cases} q_K = U(0, t) = \sum_{i=1}^{N_H} (q_{M_i}^c \cos i\omega t + q_{M_i}^s \sin i\omega t) \\ q_M = \bar{U}(0, t) = \sum_{i=1}^{N_h} (q_{M_i}^c \cos i\omega t + q_{M_i}^s \sin i\omega t) \end{cases} \quad (2.6)$$

Po wykonaniu prostych przekształceń na funkcjach (2.5) i (2.6) uzyskamy następujące wyrażenia na składowe siły w węzłach K i M.

$$\begin{Bmatrix} F_{K_i}^c \\ F_{K_i}^s \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & S_1 k_1 i \\ -S_1 k_1 i & 0 \end{bmatrix} \cdot \begin{Bmatrix} q_{K_i}^c \\ q_{K_i}^s \end{Bmatrix} - \begin{Bmatrix} f_{K_i}^c \\ f_{K_i}^s \end{Bmatrix} \quad (2.7)$$

$$\begin{Bmatrix} F_{M_i}^c \\ F_{M_i}^s \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & S_2 k_2 i \\ -S_2 k_2 i & 0 \end{bmatrix} \cdot \begin{Bmatrix} q_{M_i}^c \\ q_{M_i}^s \end{Bmatrix} \quad (2.8)$$

gdzie:

$$q_{K_i}^c = (1+i)\delta_{ii} S_1 k_1 U, \quad q_{K_i}^s = 0 \quad (2.9)$$

Ponadto uzyskuje się następujące związki pomiędzy stałymi $A_i, B_i, \bar{A}_i, \bar{B}_i$ a składowymi przemieszczeń K i M:

$$A_i = US_{1i} - q_{K_i}^s, \quad B_i = q_{K_i}^c \quad (2.10)$$

$$\bar{A}_i = -q_{M_i}^s, \quad \bar{B}_i = q_{M_i}^c \quad (2.11)$$

gdzie:

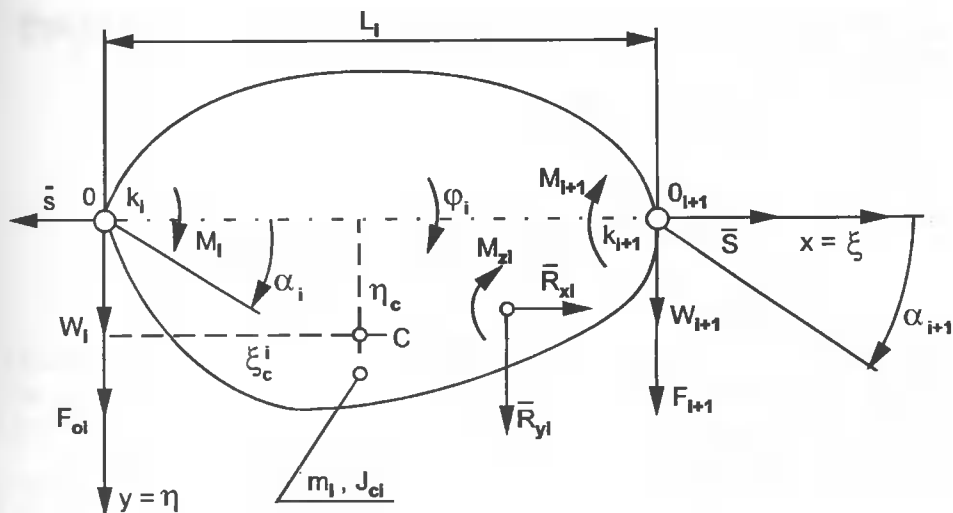
δ_{ii} - delta Kroneckera.

Związki (2.7) i (2.8) należy dołączyć do warunków równowagi węzłów K i M. Za pomocą zależności (2.10) i (2.11) obliczyć możemy współczynniki odbicia $R_i(\omega, U)$ i transmisji $T_i(\omega, U)$

$$R_i(\omega, U) = \sqrt{(\delta_{ii} - q_{K_i}^s / U)^2 + (q_{K_i}^c / U)^2} \quad (2.12)$$

$$T_i(\omega, U) = \sqrt{(q_{M_i}^s / U)^2 + (q_{M_i}^c / U)^2} \quad (2.13)$$

Zdecydowanie największy wpływ na naprężenia dynamiczne występujące w przewodach jak i osprzęcie podczas drgań mają łańcuchy odciągowe lub przelotowe. Łańcuchy te składają się z brył sztywnych połączonych przegubami. Przykładowo pokazemy macierz sztywności dynamicznej elementu typu bryły sztywnej (rys.2).



Rys.2

Na schemacie tym oznaczono:

m_i - masa elementu,

I_{ci} - moment bezwładności względem środka masy,

$(\xi_c^i, \eta_c^i), (x_c^i, y_c^i)$ - współrzędne środka masy w układzie ruchomym i inercyjnym,

$(\xi_A^i, \eta_A^i), (x_A^i, y_A^i)$ - współrzędne punktu przyłożenia dodatkowych obciążeń w układzie ruchomym i inercyjnym.

Element jest połączony z punktami węzłowymi (i) oraz (i+1) poprzez przeguby sprężyste o sztywnościach k_i, k_{i+1} . Dla każdego elementu może być dołączony w punkcie A układ o znanej macierzy impedancji mechanicznej. Oddziaływanie tego układu reprezentowane jest przez wektor sił uogólnionych (R_x^i, R_y^i, M_z^i) . Każdy węzeł elementu ma dwa stopnie swobody (w, α). Odpowiadają im dwie siły uogólnione (F, M). Rozkładając siły zewnętrzne na składowe statyczne F_s^i i dynamiczne F_d^i otrzymujemy dla drgań ustalonych z częstością ω następujący związek pomiędzy siłami i przemieszczeniami uogólnionymi:

$$\begin{Bmatrix} \bar{F}_i \\ \bar{M}_i \\ F_{i+1} \\ M_{i+1} \end{Bmatrix} = G \begin{Bmatrix} w_i \\ \alpha_i \\ w_{i+1} \\ \alpha_{i+1} \end{Bmatrix} + K \begin{Bmatrix} R_{xd}^i \\ R_{yd}^i \\ M_{zd}^i \end{Bmatrix} \quad (2.14)$$

gdzie macierz transformacji K wyraża się związkiem (2.15):

$$K = \begin{bmatrix} (\eta_c^i - \eta_A^i)/l_i & \xi_A^i/l_i - 1 & 1/l_i \\ (\eta_A^i - \eta_c^i)/l_i & -\xi_A^i/l_i & -1/l_i \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \quad (2.15)$$

Elementy symetrycznej macierzy sztywności dynamicznej G wyrażają się następującymi wzorami:

$$\begin{aligned}
 G_{11} &= S/l_i + (k_i + k_{i+1})/l_i^2 - \omega^2 \left[I_{ci}/l_i^2 + \left(1 - \xi_c^1/l_i \right)^2 m_i \right] + C_{si} \\
 G_{12} &= k_i/l_i \\
 G_{13} &= -S/l_i - (k_i + k_{i+1})/l_i^2 + \omega^2 \left[I_{ci}/l_i^2 - \left(1 - \xi_c^i/l_i \right)^2 m_i \right] - C_{si} \\
 G_{14} &= k_{i+1}/l_i \\
 G_{22} &= k_i \\
 G_{23} &= -k_i/l_i \\
 G_{24} &= 0 \\
 G_{33} &= S/l_i + (k_i + k_{i+1})/l_i^2 - \omega^2 \left[I_{ci}/l_i^2 + \left(\xi_c^1/l_i \right)^2 m_i \right] + C_{si} \\
 G_{34} &= -k_{i+1}/l_i \\
 G_{44} &= k_{i+1}
 \end{aligned} \tag{2.16}$$

gdzie oznaczono:

$$C_{si} = R_{xs}^i (\xi_{\Lambda}^i - \xi_c^i)/l_i^2 + R_{ys}^i (\eta_{\Lambda}^i - \eta_c^i)/l_i^2 \tag{2.17}$$

W podobny sposób można wyznaczyć macierze sztywności dynamicznej dla pozostałych elementów osprzętu (pętle tłumiące, mostek napędowy, łączniki itp.) [3].

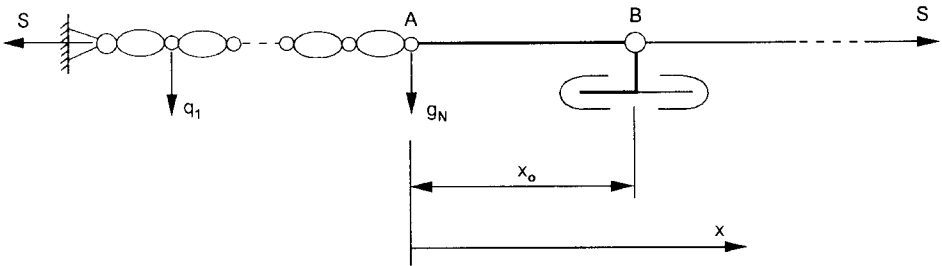
W dalszej kolejności można obliczyć - wykorzystując wzory (2.12) i (2.13) - współczynniki odbicia i transmisji. W zakresach częstotliwości, dla których współczynniki odbicia są bliskie jedności pojawia się duże prawdopodobieństwo drgań ustalonych w przęśle aktywnym. Stwarza to zagrożenie zniszczeń zmęczeniowych przewodu a zatem zachodzi potrzeba stosowania tłumików drgań.

3. DOBÓR OPTYMALNYCH CHARAKTERYSTYK TŁUMIKÓW DRGAŃ EOLSKICH PRZEWODÓW

W rozdziale tym podamy skrótowo metodykę i przykładowe wyniki optymalnego doboru charakterystyk dynamicznych tłumików drgań eolskich przewodów typu Stockbridge'a.

Tłumiki projektowane są w ten sposób, aby ich impedancja mechaniczna była jak najlepiej dopasowana do jego optymalnej impedancji, która wyznaczana jest w zależności od impedancji falowej przewodu. Optymalną impedancję tłumika drgań przewodów można wyznaczyć, analizując propagację fal w układzie otwartym przedstawioną w poprzednim rozdziale.

Przyjmujemy, że tłumik zawieszony jest w przęśle aktywnym w odległości x_0 od punktu A podukładu dyskretno-ciągłego. (rys.3).



Rys.3. Model układu do wyznaczania optymalnej impedancji tłumika drgań colskich przewodów

Za optymalny w sensie maksymalnego rozpraszania energii drgań będziemy uważać taki tłumik, który nie będzie odbijał fal w kierunku przęsta aktywnego dla dowolnej częstotliwości fali biegnącej.

Założmy, że drgający przewód można zmodelować struną o naciągu S i masie jednostkowej ρF_0 . Przyjmując, że tłumik wykonuje drgania pionowe, można wyrazić jego siłę oddziaływania na przewód.

$$R(t) = |Z(i\omega)|v \left(t - \frac{\alpha}{\omega} \right) \quad (3.1)$$

Za pomocą zespolonej impedancji mechanicznej \bar{Z} oraz prędkości v uchwytu tłumika, kąt fazowy α może być wyrażony przez argument impedancji

$$\alpha = -\text{Arg}Z(i\omega) \quad (3.2)$$

Jeżeli falę w przęśle aktywnym przedstawimy w postaci:

$$u(x, t) = U \sin k(x + ct) + G \sin k(x - ct) + H \cos k(x - ct) \quad (3.3)$$

wówczas naszym zadaniem jest wyznaczenie takiej impedancji aby nie było w tym przęśle fali odbitej czyli by stałe G i H były równe zero. Fale biegnące pomiędzy układem odciągowym a punktem zawieszenia tłumika można przedstawić w następujący sposób:

$$\bar{u}(x, t) = \bar{U} \sin k(x + ct) + \bar{V} \cos k(x + ct) + \bar{G} \sin k(x - ct) + \bar{H} \cos k(x - ct) \quad (3.4)$$

Wykorzystując warunki brzegowe w miejscu zamocowania tłumika:

$$\begin{aligned} \bar{u}(x_0, t) &= u(x_0, t) \\ R &= S \left[\frac{\partial \bar{u}}{\partial x} - \frac{\partial \bar{u}}{\partial x} \right] \end{aligned} \quad (3.5)$$

można wyrazić stałe $\bar{U}, \bar{V}, \bar{G}, \bar{H}$ za pomocą bezwymiarowej impedancji $\bar{Z}_{\text{opt}} = Z_{\text{opt}} \sqrt{Sm}$ w następujący sposób:

$$\begin{aligned}
 \bar{U} - \bar{G} = x_1 &= U \left[1 - \operatorname{Re}(z_{\text{opt}}) \sin^2 kx_0 - \frac{1}{2} \operatorname{Im}(z_{\text{opt}}) \sin 2kx_0 \right] \\
 \bar{U} + \bar{G} = x_2 &= U \left[1 - \operatorname{Re}(z_{\text{opt}}) + \cos^2 kx_0 + \frac{1}{2} \operatorname{Im}(z_{\text{opt}}) \sin 2kx_0 \right] \\
 \bar{H} - \bar{V} = x_3 &= U \left[\frac{1}{2} \operatorname{Re}(z_{\text{opt}}) + \operatorname{Im}(z_{\text{opt}}) \cos^2 kx_0 \right] \\
 \bar{H} + \bar{V} = x_4 &= U \left[\frac{1}{2} \operatorname{Re}(z_{\text{opt}}) - \operatorname{Im}(z_{\text{opt}}) \sin^2 kx_0 \right]
 \end{aligned} \tag{3.6}$$

Siła w węźle A jest równa:

$$F_N = F_N^C \cos \omega t + F_N^S \sin \omega t = -Sk(x_2 \cos \omega t + x_3 \sin \omega t) \tag{3.7}$$

a następnie wyrazić poprzez nieznanne składowe przemieszczenia q_N węzła A. Otrzymuje się w ten sposób następującą zależność pomiędzy składowymi siły działającej na węzeł A a jego przemieszczeniem:

$$\begin{bmatrix} F_N^C \\ F_N^S \end{bmatrix} = Sk \begin{bmatrix} \operatorname{ctg} kx_0 & 0 \\ 0 & \operatorname{ctg} kx_0 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} q_N^C \\ q_N^S \end{bmatrix} - Sk \begin{bmatrix} 1 \\ \operatorname{ctg} kx_0 \end{bmatrix} U \tag{3.8}$$

która opisuje wkład podukładu tłumik - przewod do warunku równowagi w punkcie A.

Nieznane funkcje $\operatorname{Re}(z_{\text{opt}})$ i $\operatorname{Im}(z_{\text{opt}})$ zostały zastąpione przez przemieszczenia q_N^C, q_N^S .

Po rozwiązaniu układu równań na współrzędne wektora przemieszczeń węzłowych \bar{q} możemy wyznaczyć impedancję optymalnego tłumika w postaci:

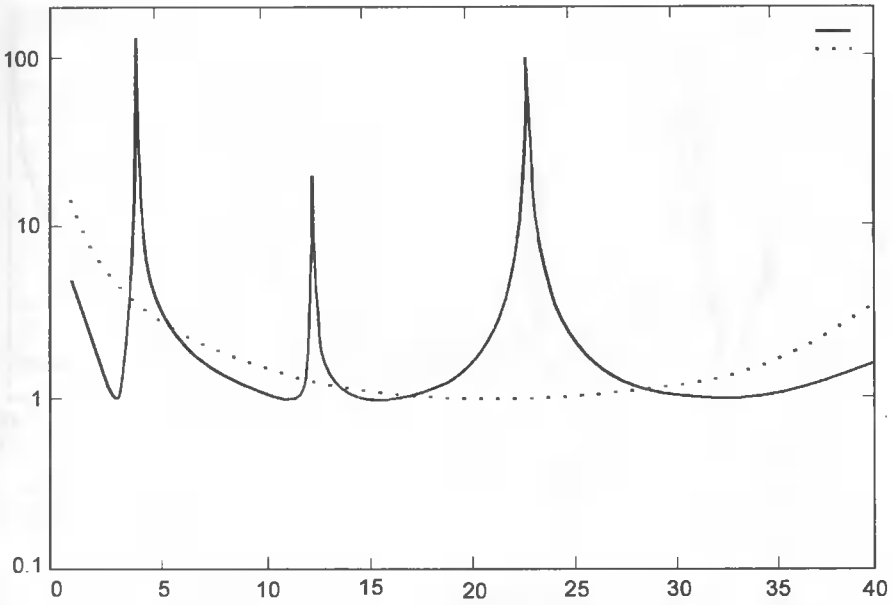
$$z_{\text{opt}} = 1 + i \left[\operatorname{ctg} kx_0 - \frac{\left(\frac{q_N^C}{u} \right)}{\sin^2 kx_0} \right] \tag{3.9}$$

Obliczając q_N dla zmieniającej się częstotliwości fali inicjującej, uzyskamy zależność optymalnej impedancji tłumika od częstotliwości drgań.

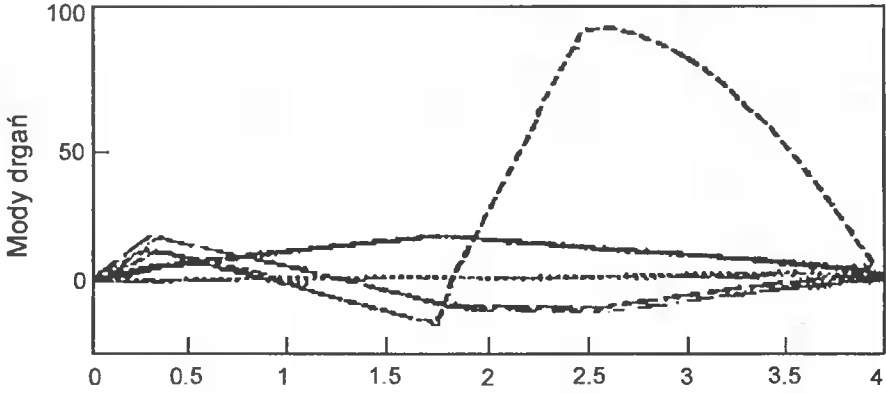
Na rysunku 4 przedstawiono optymalną impedancję dla przęsła odciągowego z łańcuchem izolatorowym L.0 110 kV i obliczoną wg Hagedorna [3] optymalną impedancję, bez uwzględnienia oddziaływania układu odciągowego. Widoczne są trzy charakterystyczne maksima, będące wynikiem wewnętrznych rezonansów łańcucha izolatorowego. Występują one dla częstotliwości $f_1=4,1$ Hz, $f_2=12,5$ Hz i $f_3=22,9$ Hz. Moduł impedancji wyraźnie zależy od miejsca x_0 , w którym tłumik jest zamocowany.

Na rysunku 5 podano moduł drgań przewodu z izolatorem i optymalnym tłumikiem w zależności od odległości x_0 .

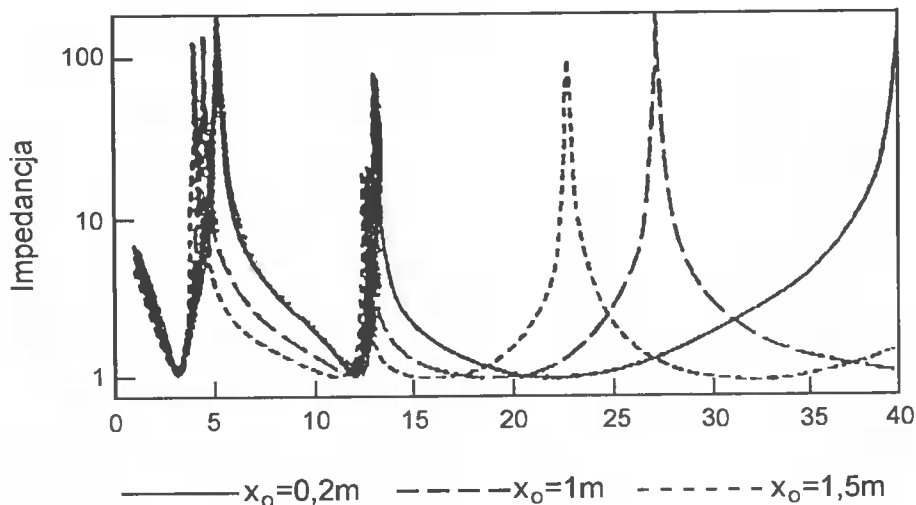
Na rysunku 6 przedstawiono moduł impedancji dla różnych wartości x_0 .



Rys.4. Moduł optymalnej impedancji tłumika dla przęśła odciągowego (linia ciągła) i przelotowego (linia przerywana)



Rys.5. Linia ciągła odpowiada częstotliwości $f_1=4,1$ [Hz], kreskowana $f_2=12,5$ [Hz] i kropkowa $f_3=22,9$ [Hz]



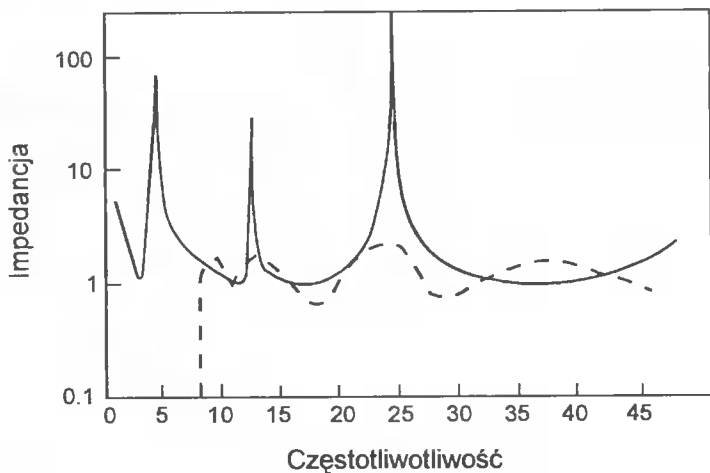
Rys.6

Optymalną odległość x_0 miejsca mocowania tłumika dobieramy z warunku:

$$E(x_0) = \sqrt{\frac{1}{\omega_2 - \omega_1} \int_{\omega_1}^{\omega_2} [\text{Re}(z_{\text{opt}}) - \text{Re}(z)]^2 + [\text{Im}(z_{\text{opt}}) - \text{Im}(z)]^2 d\omega}$$

Dla naszego przypadku otrzymujemy $x_0 = 1,2\text{m}$.

Na rysunku 7 podano zakresy impedancji dla przypadku łańcucha odciągowego (linia ciągła) i przelotowego (linia przerywana).



Rys.7

4. WNIOSKI

1. Badanie drgań przewodów elementów osprzętu linii elektroenergetycznych możliwe jest za pomocą modelu układu otwartego, złożonego z dwóch pręseł o nieskończonej długości i znajdującego się pomiędzy nimi podukładu dykretno-ciągłego. Badając propagację fal mechanicznych w takim układzie, można sformułować również odpowiednie problemy optymalizacji.
2. Model matematyczny układu wygodnie jest zbudować metodą przemieszczeń. Wymaga to wyznaczenia macierzy sztywności dynamicznej elementów tworzących konstrukcję linii elektroenergetycznej.
3. Na optymalny dobór parametrów tłumika drgań i miejsca jego mocowania istotny wpływ mają głównie łańcuchy odciągowe.

LITERATURA

- [1] BS i PE „Energoprojekt” Kraków - Badanie parametrów inercyjnych i charakterystyk dynamicznych elementów łańcucha odciągowego linii 110-400kV. Sprawozdanie X-91279, Kraków, 1989.
- [2] EPRI: Transmission Line Reference Book. Electric Power Research Institute. Palo Alto, California USA, 1979.
- [3] Hadegorn P.: On the computation of damped wind-excited vibrations of overhead transmission lines - *Journal of Sound and Vibration* 83, 1982, pp.253-271.
- [4] Markiewicz M., Nizioł J.: Nowe metody eliminacji drgań przenoszonych na ludzi i konstrukcje. Monografia 185, Mechanika Kraków, 1995, (roz.VI).
- [5] Markiewicz M.: Optimum dynamic characteristics of Stockbridge dampers for dead-end spans. - *Journal of Sound and Vibration* 198, 1995, pp.243-256.

PÓŁAKTYWNE I AKTYWNE PIEZOELEKTRYCZNE TŁUMIKI DRGAŃ PŁYT KOŁOWYCH I PIERŚCIENIOWYCH

Andrzej Tylikowski

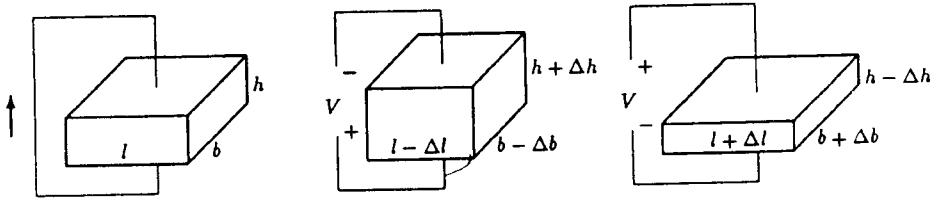
Instytut Podstaw Budowy Maszyn, Politechnika Warszawska
ul. Narbutta 84, 02-524 Warszawa

W pracy zbadano zachowanie się piezoelektrycznych warstw jako tłumików dynamicznych drgań cienkich płyt oraz możliwości dostarczania przez bocznikowanie pojemnościowe. Wyznaczono odpowiedź cienkich płyt kołowych lub pierścieniowych na wymuszenie pochodzące od piezoelektrycznych elementów wykonawczych w kształcie koła, pierścienia lub sektora pierścienia przyklejonych do obu powierzchni płyty. Aktuatory są zasilane odpowiednio zsynchronizowanym napięciem harmonicznie zmiennym. Wyznaczono charakterystyki odpowiedzi dla różnej konfiguracji aktuatorów.

Słowa kluczowe: płyty pierścieniowe, piezoelektryczne aktuatory, tłumienie drgań.

1. WSTĘP

W celu wyjaśnienia zjawiska piezoelektrycznego zajmijmy się kwarcem SiO_2 , którego kryształy o kształcie sześciokątnym składają się z trzech atomów krzemu i trzech cząsteczek tlenu. Atomy krzemu niosą ładunek dodatni, a cząsteczki tlenu ujemny. Bez przyłożenia sił kryształy są elektrycznie obojętne. Po przyłożeniu sił ścisających siatka kryształu ulega deformacji i pojawiają się ładunki dodatnie (od krzemu) na powierzchni górnej oraz ujemne (od cząsteczek tlenu) na powierzchni dolnej. Pod wpływem sił rozciągających obserwujemy odwrotne gromadzenie ładunków. Istotę odwrotnego zjawiska piezoelektrycznego, wykorzystywanego w elementach wykonawczych można opisać, rozpatrując prostopadłościenny element piezoelektryczny o długości szerokości b i grubości h . Jeżeli napięcie między górną i dolną powierzchnią przewodzącą piezoelektryka jest równe zeru to prostopadłościenny element jest w stanie nieodkształconym. Kierunek polaryzacji piezoelektryka jest skierowany pionowo ku górze. Gdy napięcie przyłożone do elektrod jest przeciwne do kierunku polaryzacji, to wskutek odwrotnego wzdłużnego efektu piezoelektrycznego wzrasta grubość do $h+\Delta h$. Poprzeczny odwrotny efekt piezoelektryczny powoduje zmniejszenie szerokości do $b-\Delta b$ oraz długości do $l-\Delta l$. Jeżeli kierunek napięcia U i polaryzacji są zgodne, wówczas grubość maleje do $h-\Delta h$, a wymiary poprzeczne: szerokość i długość odpowiednio rosną.



Rys. 1. Istota zjawiska piezoelektrycznego

Pierwsze próby analizy i doświadczalnej weryfikacji konstrukcji z rozłożonymi tłumikami drgań w postaci folii piezoelektrycznej PVDF zostały opisane przez Baileya i Hubbarda (1985). Wykorzystano prosty i odwrotny poprzeczny efekt piezoelektryczny opisany równaniem:

$$\varepsilon = \frac{d_{13}V}{h} \quad (1)$$

gdzie ε jest odkształceniem względnym, V przyłożonym napięciem w kierunku prostopadłym do obserwowanego odkształcenia, h jest grubością piezoelektryka. Daje to możliwość pomiaru odkształceń na powierzchni płyty, a następnie po przetworzeniu sygnału, wymuszenia (np. na przeciwnej powierzchni konstrukcji pożądanych odkształceń). W szczególności układy inteligentne mogą być stosowane do aktywnego tłumienia drgań. Ze względu na wymagane wymuszenie siłowe na elementy wykonawcze stosowane są materiały piezoceramiczne o symbolach handlowych PZT. Są one znacznie grubsze i w porównaniu z foliami PVDF i mają większą gęstość, co może prowadzić do konieczności uwzględniania ich masy w równaniach ruchu układu. Prostą efekt piezoelektryczny wykorzystany jest w rozłożonych elementach pomiarowych. Jeżeli przyjąć, że przyłożone napięcie jest równe zero, to przesunięcie elektryczne wywołane naprężeniami wymuszonymi przez konstrukcję, do której przyklejono element pomiarowy jest równe. Pełne równanie konstytutywne piezoelektryków jest bardziej złożone, gdyż macierz kolumnowa przesunięć dielektrycznych D (prosty efekt piezoelektryczny opisujący element pomiarowy) zależy nie tylko od macierzy kolumnowej odkształceń mechanicznych, lecz także od pola elektrycznego E :

$$D_i = e_{iq}\varepsilon_q + \epsilon_{ik} E_k \quad (2)$$

gdzie e_{iq} jest macierzą stałych piezoelektrycznych, ϵ_{ik} jest macierzą przenikalności elektrycznej przy stałych odkształceniach, $i, k=1, 2, 3$ oraz $p, q=1, 2, \dots, 6$. Równanie elementu wykonawczego związane z odwrotnym efektem piezoelektrycznym ma postać:

$$\varepsilon_p = s_{pq}\sigma_q + d_{ip}E_i \quad (3)$$

gdzie s_{pq} jest macierzą podatności przy stałym, polu elektrycznym, d_{ip} macierzą odkształceniowych stałych piezoelektrycznych, a σ_q macierzą kolumnową naprężeń. Warto jeszcze przypomnieć, że w równaniach konstytutywnych zastosowano uproszczoną notację, zmniejszając wymiar i liczbę składowych pola naprężeń, odkształceń, przesunięć elektrycznych i pola elektrycznego. Piezoelektryczne elementy już wielokrotnie były używane jako elementy wykonawcze - wzbudniki w układach inteligentnych (adaptacyjnych, aktywnych). Zaletami piezoelektrycznych wzbudników i elementów

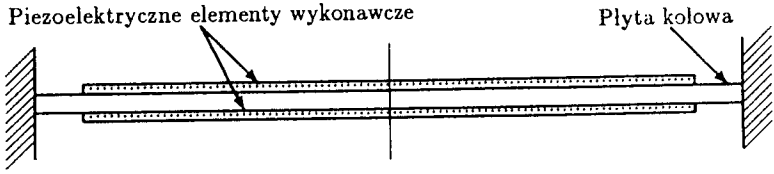
pomiarowych jest szerokopasmowość przenoszonych sygnałów, wysoka sprawność zamiany energii mechanicznej na elektryczną (i odwrotnie), możliwość łatwego kształtowania elementów do potrzeb projektanta i prostota układu. Efekt ten jest wykorzystywany do oddziaływania na układ ciągły. Górną i dolną płytkę lub folię piezoelektryczną o tym samym kierunku przyklejono do belki i poddano działaniu napięcia. Jeżeli przyłożone napięcia mają przeciwne kierunki polaryzacji, to górna warstwa zmniejsza swoją długość, a dolna wydłuża się. Oddziaływanie sił stycznych między belką a warstwami piezoelektryka ustala równowagę. Otrzymane przy różnych założeniach i stopniach uproszczenia wyniki różnią się jedynie czynnikiem C_0 , zależnym od geometrii i stałych materiałowych wskazując, że piezoelektryki odkształcają powierzchnie belki powodując jej zginanie. W ten sposób rozłożone elementy w fazie przeciwnej tylko zginają konstrukcję, do której są przytwierdzone ze względu na brak siły osiowej (czyste zginanie). Związek między wymuszonym na powierzchniach górnej i dolnej belki odkształceniu, a odkształceniem piezoelektrycznego elementu wykonawczego zależy również od modułu ścinania warstwy klejącej G i częstości drgań. Generalnie pomijane są efekty dynamiczne i przyjmuje się proporcjonalność odkształceń powierzchni belki i elementu wykonawczego:

$$\varepsilon_p = C_0 \varepsilon_s \quad (4)$$

Układem równoważnym, zastępującym elementy wykonawcze jest para momentów rozłożonych na linii prostopadłej do osi belki. Na podstawie elementarnej teorii belek, odkształcenia elementu pomiarowego są proporcjonalne do krzywizny belki i odległości od osi obojętnej. Zatem całkując przesunięcie dielektryczne po powierzchni czujnika obliczamy ładunek elektryczny. Wprowadzając pojemność C_s czujnika można wyznaczyć napięcie indukowane pomiędzy elektrodami elementu pomiarowego. Element pomiarowy można dostosować do konkretnej konstrukcji lub jej zadań poprzez dobór położenia i kształtu piezoelektryka. Uzupełnienie elementu pomiarowego i wykonawczego układem sterującym (analogowym lub cyfrowym) sprzęga układ i rozwiązuje ogólną koncepcję konstrukcji inteligentnej. Piezoelektryczny element pomiarowy wyznacza sygnał proporcjonalny do średniej krzywizny, regulator (procesor) generuje odpowiedni wzmocniony sygnał, który stabilizuje drgania poprzez piezoelektryczny element wykonawczy.

2. PÓLAKTYWNY TŁUMIK DYNAMICZNY DRGAŃ PŁYTY KOŁOWEJ

Zbadajmy wpływ dwóch kołowych piezoelektrycznych warstw przyklejonych do płyty kołowej na drgania wymuszone harmonicznym ciśnieniem. Płyta jest spełnia warunki Kirchhoffa, a elementy piezoelektryczne jednakowo spolaryzowane w kierunku prostopadłym do płaszczyzny płyty są idealnie przyklejone do obu powierzchni (rys.2).



Rys.2. Geometria płyty z powierzchniowymi piezoelektrycznymi tłumikami

Osiowosymetryczny problem traktujemy liniowo w ramach teorii płyt cienkich i liniowej teorii piezoelektryczności. Równania konstytutywne (2) i (3) dla kołowych elementów piezoelektrycznych przyklejonych do powierzchni płyty mają postać

$$\sigma_r = \frac{E_a}{1 - \nu_a^2} \left(\frac{du}{dr} + \nu_a \frac{u}{r} \right) - e_{3r} E_3 \quad (5)$$

$$\sigma_t = \frac{E_a}{1 - \nu_a^2} \left(\frac{u}{r} + \nu_a \frac{du}{dr} \right) - e_{3t} E_3 \quad (6)$$

$$D_3 = e_{3r} \frac{du}{dr} + e_{3t} \frac{u}{r} + \epsilon_{33} E_3 \quad (7)$$

gdzie σ_r i σ_t są naprężeniami normalnymi działającymi w elemencie piezoelektrycznym, D_3 jest przemieszczeniem elektrycznym. Z powodu małej grubości elementów piezoelektrycznych założono jednorodny stan naprężeń na grubości. W dalszej części zakładamy, że element piezoelektryczny jest izotropowy w płaszczyźnie prostopadłej do płaszczyzny płyty, czyli że:

$$e_{3r} = e_{3t} = e_{31} \quad (8)$$

Założenie o doskonałym przyklejeniu elementów piezoelektrycznych do płyty daje geometryczny warunek zgodności przemieszczeń poprzecznych w płycie i w płaszczyźnie piezoelektryka:

$$u = -\frac{t_p}{2} \frac{dw}{dr} \quad (9)$$

Podstawienie prowadzi do równań względem przemieszczeń poprzecznych w płycie. Całkując po powierzchni element piezoelektrycznego wyznaczamy ładunek zebrany na powierzchniach metalizowanych elementu piezoelektrycznego, będącego kondensatorem o pojemności C_a :

$$Q = -t_p \pi e_{31} b \frac{dw}{dr} (b) - C_a V \quad (10)$$

gdzie V jest napięciem, b jest promieniem warstwy piezoelektrycznej. Zapisując równanie pojemnościowego obwodu zewnętrznego wyrażamy ładunek przez impedancję kondensatora $Z = 1/i\omega C_b$, gdzie C_b określamy jako pojemność bocznika. Podstawiając napięcie do równania (5) otrzymujemy:

$$\sigma_r = \frac{E_a t_p}{1 - \nu_a^2} \left(\frac{d^2 w}{dr^2} - \frac{\nu_a}{r} \frac{dw}{dr} \right) - \frac{2\pi b e_{31}^2}{(C_a + C_b) t_a} \frac{dw}{dr} \quad (11)$$

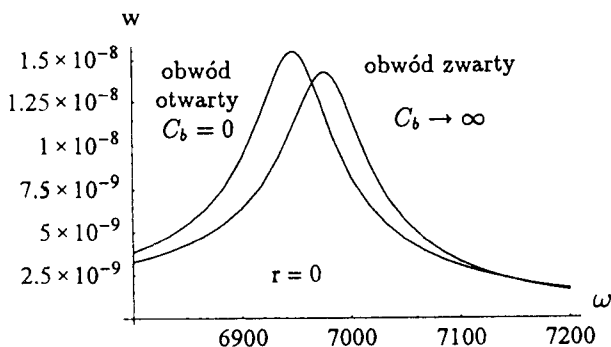
Na podstawie wzoru (11) zapisujemy warunek brzegowy swobodnego brzegu elementu wykonawczego $\sigma_r = 0$. Równania drgań poprzecznych płyty zapisujemy oddzielnie dla koła $0 < r < b$, gdzie uwzględnione jest oddziaływanie elementu wykonawczego:

$$(D_a + D_p) \Delta^2 w + \rho_p^* t_p \frac{\partial^2 w}{\partial t^2} - \frac{\rho_a t_a t_p^2}{2} \Delta \left(\frac{\partial^2 w}{\partial t^2} \right) = q \quad (12)$$

oraz dla płyty pierścieniowej $b < r < R$.

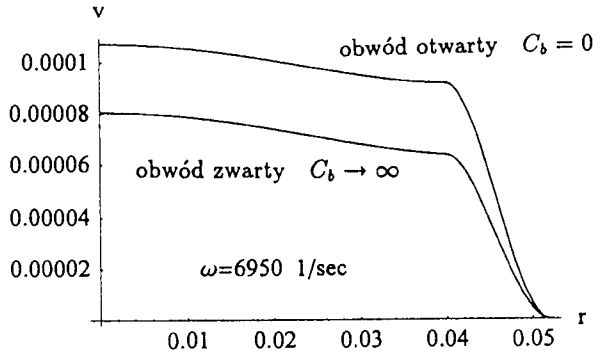
$$D_p \Delta^2 w + \rho_p t_p \frac{\partial^2 w}{\partial t^2} = q \quad (13)$$

gdzie D_p , D_a , t_p , t_a , ρ oznaczają sztywności, grubości i gęstości, indeksy a i p określają odpowiednio warstwę piezoelektryka i płytę, ρ^* oznacza zastępczą gęstość w równaniu drgań poprzecznych w przedziale współpracy z piezoelektrykiem.



Rys.3. Charakterystyki częstotliwościowe przemieszczenia środka płyty

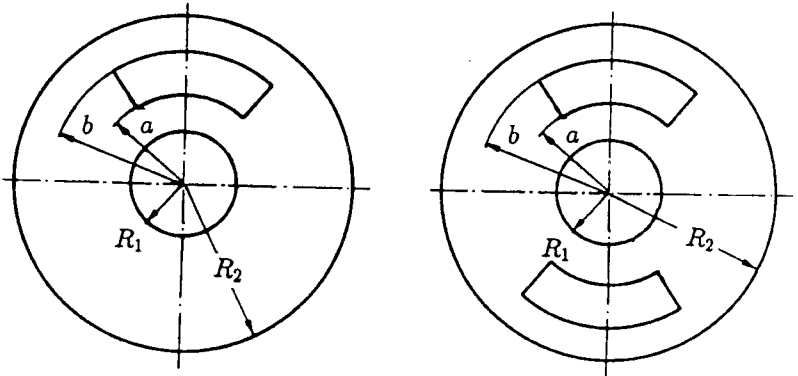
Warunki brzegowe odpowiadające sztywnemu utwierdzeniu w $r = R$ oraz warunki ciągłości w $r = b$ wraz z zerowaniem się naprężeń normalnych w $r = b$ formułują problem brzegowy. Rozwiązano go analitycznie. Na rys.3 i 4 przedstawiono charakterystyki amplitudowo-częstotliwościowe przemieszczenia poprzecznego w środku płyty oraz przestrzenną charakterystykę amplitudy prędkości w pierwszym rezonansie. Rysunki pokazują wpływ pojemności bocznikującego kondensatora na charakterystyki dynamiczne.



Rys.4. Charakterystyki przestrzenne prędkości środka płyty

3. CHARAKTERYSTYKI DYNAMICZNE PIERŚCIENIOWEJ PŁYTY Z PIEZOELEKTRYCZNYMI ELEMENTAMI WYKONAWCZYMI

Rozpatrzmy odpowiedź płyty pierścieniowej na wymuszenie pochodzące od pierścieniowo-sektorowych piezoelektrycznych elementów wykonawczych, przyklejonych do obu powierzchni płyty (rys.5). Elementy piezoelektryczne są jednakowo spolaryzowane w kierunku prostopadłym do powierzchni płyt, natomiast napięcie zasilania jest odpowiednio dobierane, tak aby wzbudzać pożądane postacie drgań.



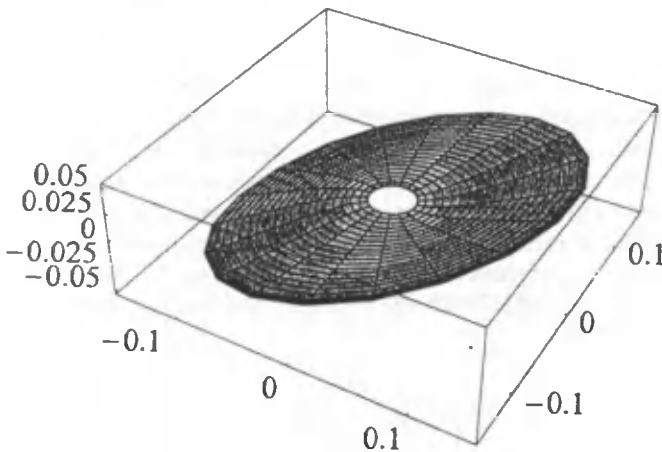
Rys.5. Geometria płyty z pierścieniowo-sektorowymi elementami wykonawczymi

Zakładając idealne połączenie elementu wykonawczego z płytą i korzystając z dystrybucji δ - Diraca i jej pochodnych oddziaływanie jednej pary elementów zamocowanych po jednej stronie płyty zapisujemy jako obciążenie ciągle w postaci:

$$q(r, \varphi, t) = C_0 \Lambda_a(t) \left\{ \left[\delta'(r-a) - \delta'(r-b) + \frac{1}{r} (\delta(r-a) - \delta(r-b)) \right] \times \right. \\ \left. (H(\varphi + \alpha) - H(\varphi - \alpha)) + \frac{1}{r^2} (\delta'(\varphi + \alpha) - \delta'(\varphi - \alpha)) \right\} \times \\ (H(r-a) - H(r-b)) \quad (14)$$

gdzie kąt rozwarcia aktuatorów jest równy 2α . Funkcja $\Lambda_a(t)$ jest określona przez napięcie przyłożone do elementów wykonawczych.

W zagadnieniach tłumienia lub wzbudzania drgań napięcie jest sinusoidalnie zmienne o częstości ω . Oddziaływanie drugiej pary aktuatorów zapisujemy odpowiednio, pamiętając o zmianie kątów o π . Jednocześnie można uwzględnić zgodną lub przeciwną polaryzację przyłożonego napięcia do drugiej pary, tak aby wzbudzać odpowiednią postać.



Rys.6. Dominująca postać odpowiedzi płyty w najniższym rezonansie

Rozwinięcie obciążenia w szereg funkcji własnych, skorzystanie z ortogonalizacji pozwala na wyznaczenie amplitudy drgań określonej postaci drgań. Najniższej częstości wzbudzenia odpowiada dominująca postać odpowiedzi o jednej linii węzłowej i braku okręgu węzłowego pokazana na rys.6.

LITERATURA

- [1] Dimitriadis, E., Fuller, C.R., and Rogers, C.A., Piezoelectric actuators for distributed vibration excitation of thin plates, *JAM*, 113, 1991, pp.100-107.
- [2] Eversman, W., and Dodson, R.O. Jr., Free vibration of a centrally clamped spinning circular disk, *AIAA J.*, 7 (10), 1969, pp.2010-2012.

- [3] Niekerk, J.L., Tongue, B.H., and Packard, A.K., Active control of a circular plate to reduce transient noise transmission, *J. Sound and Vib.*, 183 (4), 1995, pp.643-662.
- [4] Tylikowski, A., Simulation examination of annular plates excited by piezoelectric actuators, J. Holnicki - Szulc, and J. Rodellar (Editors), *Smart Structures*, Kluwer Academic Publishers, 1999, pp.365-372.
- [5] Tylikowski, A., Distributed piezoelectric absorbers, *GAMM Annual Meeting, Book of Abstracts*, Metz, 1999, pp.156.
- [6] Tzou, H. S., and Fu, H. Q., A study on segmentation of distributed piezoelectric sensors and actuators: Part 2 - Parametric study and active vibration controls. *DSC, 38, Active Control of Noise and Vibration*, ASME, 1992, pp.247-253.

SEMIACTIVE AND ACTIVE PIEZOELECTRIC DAMPERS OF VIBRATIONS IN CIRCULAR AND ANNULAR PLATES

Summary

The purpose of this work is to examine the use of piezoelectric distributed elements as a part of a tuned vibration absorber. The effective properties of the structure is adjusted electrically, using a passive capacitive shunt circuit. A general model of the response of thin circular and annular plates to excitation by an actuator made using annular piezoceramics glued to the plate surface is analysed. The actuators are driven by properly synchronized electrical fields. Amplitude frequency characteristics of the plate are shown.. Different configurations of actuators expressed by the inner and outer radii of piezoelectric patches of full annular actuators and by the angle of sector annular actuator are tested.

DRGANIA BELKI TIMOSHENKI-KELVINA

Jerzy Cabański

Katedra Mechaniki Stosowanej, Wydział Mechaniczny ATR
ul. Prof. S. Kaliskiego 7, 85-796 BYDGOSZCZ

W pracy przedstawiono analityczną metodę rozwiązania zagadnienia drgań swobodnych i wymuszonych belki Timoshenki. Założono, że belka jest wykonana z materiału lepko-sprężystego opisanego modelem reologicznym Voigta-Kelvina. W opracowanej metodzie użyto reguł operatorowych przedstawionych w pracy [2]. Istotą tej metody jest rozdzielenie zmiennych w przestrzeni zespolonej oraz własność ortogonalności zespolonych wektorów drgań własnych. Rozwiązania uzyskano w postaci uogólnionych szeregów Fouriera.

Słowa kluczowe: drgania, belka, Timoshenko, lepko-sprężysty, ortogonalność, wektor własny.

1. WSTĘP

Niektóre elementy konstrukcyjne są traktowane jako ustroje jednowymiarowe. Spośród nich wyróżnia się belki. W zależności od stopni złożoności tych belek i stawianych wymagań dotyczących analizy statycznej i dynamicznej stosowane są różne modele belek. Model belki Timoshenki w zasadzie uwzględnia wszystkie cechy fizyczne mające istotny wpływ na wyniki obliczeń rozwiązań problemów statycznych i dynamicznych.

Dotychczas w wielu opracowaniach, między innymi w pracach [1, 3] nie uwzględniono tłumienia wewnętrznego. Celem tej pracy jest rozwiązanie analityczną metodą zagadnienia drgań swobodnych i wymuszonych belki Timoshenki wykonanej z materiału lepko-sprężystego opisanego modelem reologicznym Voigta-Kelvina. W metodzie tej podjęto próbę wykorzystania zasad operatorowych przedstawionych w pracy [2].

2. SFORMUŁOWANIE PROBLEMU

Zjawisko drgań belki Timoshenki z lepkiem tłumieniem wewnętrznym jest opisane następującym układem cząstkowych równań różniczkowych:

$$\rho A \frac{\partial^2 w}{\partial t^2} - \left(1 + \alpha \frac{\partial}{\partial t}\right) kGA \left(\frac{\partial^2 w}{\partial x^2} - \frac{\partial \psi}{\partial x}\right) = q \quad (1)$$
$$\rho J \frac{\partial^2 \psi}{\partial t^2} - \left(1 + \beta \frac{\partial}{\partial t}\right) EI \frac{\partial^2 \psi}{\partial x^2} - \left(1 + \alpha \frac{\partial}{\partial t}\right) kGA \left(\frac{\partial w}{\partial x} - \psi\right) = m$$

oraz następującymi związkami mechanicznymi:

$$\gamma = \frac{\partial w}{\partial x} - \psi; M_x = -EI \frac{\partial \psi}{\partial x}; Q_x = kGA\gamma, \quad (2)$$

gdzie:

- A - pole przekroju poprzecznego belki,
- I - moment bezwładności przekroju poprzecznego belki,
- E - moduł Younga materiału belki,
- G - moduł Kirchhoffa materiału belki,
- ρ - gęstość materiału belki,
- α - względny współczynnik lepkości zginania belki,
- β - względny współczynnik lepkości ścinania belki,
- k - współczynnik ścinania przekroju poprzecznego belki,
- x - współrzędna osi belki,
- t - czas,
- w = w(x,t) - ugięcie belki,
- $\psi = \psi(x,t)$ - kąt obrotu przekroju poprzecznego belki,
- $\gamma = \gamma(x,t)$ - kąt odkształcenia postaciowego belki,
- q = q(x,t) - obciążenie poprzeczne belki,
- m = m(x,t) - obciążenie momentowe belki,
- $M_x = M_x(x,t)$ - moment zginający w belce,
- $Q_x = Q_x(x,t)$ - siła ścinająca w belce.

Układ równań (1) przyjmuje w zapisie operatorowym następującą postać [2]:

$$\mathbf{M} \frac{\partial^2 \mathbf{u}}{\partial t^2} + \mathbf{K} \mathbf{u} + \mathbf{L} \frac{\partial \mathbf{u}}{\partial t} = \mathbf{F} \quad (3)$$

gdzie:

$$\mathbf{u} = \begin{bmatrix} w \\ \psi \end{bmatrix}, \quad \mathbf{F} = \begin{bmatrix} q \\ m \end{bmatrix} \quad (4)$$

jest wektorem odpowiednio przemieszczenia i obciążenia belki, natomiast:

$$\mathbf{M} = \begin{bmatrix} \mu & 0 \\ 0 & \vartheta \end{bmatrix}$$

$$\mathbf{K} = \mathbf{D} \begin{bmatrix} \frac{\partial^2}{\partial x^2} & -\frac{\partial}{\partial x} \\ +\frac{\partial}{\partial x} & -\left(\frac{\mathbf{R}}{\mathbf{D}} \frac{\partial^2}{\partial x^2} - 1\right) \end{bmatrix}, \quad (5)$$

$$\mathbf{L} = \alpha \mathbf{D} \begin{bmatrix} \frac{\partial^2}{\partial x^2} & -\frac{\partial}{\partial x} \\ +\frac{\partial}{\partial x} & -\left(\frac{\beta \mathbf{R}}{\alpha \mathbf{D}} \frac{\partial^2}{\partial x^2} - 1\right) \end{bmatrix}$$

jest operatorem odpowiednio bezwładności, sztywności i tłumienia, przy czym operatory \mathbf{K} i \mathbf{L} są samosprężone, gdzie:

$$\begin{aligned}\mu &= \rho A, \theta = \rho I, \\ D &= kGA, R = EI.\end{aligned}\quad (6)$$

Stale α i β są od siebie zależne, a w szczególności mogą być sobie równe.

Należy zauważyć, że operatory \mathbf{K} i \mathbf{L} są podobne tylko w przypadku, gdy $\alpha = \beta$.

3. ROZDZIELENIE ZMIENNYCH

Przyjmując $\mathbf{F} \equiv 0$ równanie (2) redukuje się do postaci:

$$\mathbf{M} \frac{\partial^2 \mathbf{u}}{\partial t^2} + \mathbf{K} \mathbf{u} + \mathbf{L} \frac{\partial \mathbf{u}}{\partial t} = 0 \quad (7)$$

Ponieważ wektory występujące w (7) są w ogólnym przypadku komplanarne, to rozdzielanie zmiennej przestrzennej i czasowej może istnieć tylko w przestrzeni zespolonej Hilberta [2]. Przestrzeń Hilberta jest uogólnieniem przestrzeni Euklidesa i szczególnym przypadkiem przestrzeni Banacha. Po podstawieniu do (7) następującego iloczynu:

$$\mathbf{u} = \mathbf{U} \mathbf{T} \quad (8)$$

otrzymano jedno równanie operatorowe [2]:

$$(\nu^2 \mathbf{M} - \mathbf{K} - i\nu \mathbf{L}) \mathbf{U} = 0; \quad i = \sqrt{-1} \quad (9)$$

oraz jednorodne zwyczajne równanie różniczkowe ruchu [2]:

$$\dot{\mathbf{T}} - i\nu \mathbf{T} = 0 \quad (10)$$

gdzie:

$$\mathbf{U} = \begin{bmatrix} \mathbf{W} \\ \Psi \end{bmatrix} \quad (11)$$

jest wektorem postaci drgań $\mathbf{W} = \mathbf{W}(x)$ i $\Psi = \Psi(x)$, natomiast $\mathbf{T} = \mathbf{T}(t)$ stanowi skalarną funkcję ruchu, zaś

$$\nu = i\eta \pm \omega \quad (12)$$

jest zespoloną częstością drgań, przy czym η jest odpowiedzialne za tłumienie, a ω - za oscylację ruchu.

4. ROZWIĄZANIA RÓWNAŃ RÓŻNICZKOWYCH

Rozwiązanie równania różniczkowego (10) ma postać:

$$\mathbf{T} = C \exp(i\nu t) \quad (13)$$

gdzie C jest dowolną stałą całkowania.

Równanie (9) w zapisie skalarnym stanowi następujący układ jednorodnych zwyczajnych równań różniczkowych:

$$\begin{aligned} (1 + i\nu\alpha)D\left(\frac{d^2W}{dx^2} - \frac{d\Psi}{dx}\right) + \nu^2\mu W &= 0 \\ (1 + i\nu\beta)R\frac{d^2\Psi}{dx^2} + D\left(\frac{dW}{dx} - \Psi\right) + \nu^2\vartheta\Psi &= 0. \end{aligned} \quad (14)$$

Po podstawieniu do (14) następującej zależności:

$$\begin{bmatrix} W \\ \Psi \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} A \\ B \end{bmatrix} \exp(rx) \quad (15)$$

otrzymano układ liniowych równań algebraicznych, który w zapisie wektorowym ma postać:

$$\mathbf{H}\mathbf{V} = 0 \quad (16)$$

gdzie:

$$\mathbf{H} = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{bmatrix}; \mathbf{V} = \begin{bmatrix} A \\ B \end{bmatrix} \quad (17)$$

przy czym oznaczono:

$$\begin{aligned} a_{11} &= (1 + i\nu\alpha)Dr^2 + \nu^2\mu, \\ a_{12} &= -(1 + i\nu\alpha)Dr, \\ a_{21} &= (1 + i\nu\alpha)Dr, \\ a_{22} &= (1 + i\nu\beta)Rr^2 - (1 + i\nu\alpha)D + \nu^2\vartheta, \end{aligned} \quad (18)$$

Natomiast A i B są dowolnymi stałymi. Warunkiem niezerowego rozwiązania układu równań (16) jest zerowanie się macierzy charakterystycznej tego układu, mianowicie:

$$\det \mathbf{H} = 0, \quad (19)$$

Pierwiastki równania charakterystycznego (19) mają następującą postać:

$$r_j = (-1)^{j-1} i \lambda_s; s = 1, 2; j = (2s - 1), 2s, \quad (20)$$

gdzie:

$$\lambda_s = \sqrt{\Lambda + (-1)^{s-1} \sqrt{\Lambda^2 + \Pi}} \quad (21)$$

przy czym oznaczono:

$$\begin{aligned} \Lambda &= \frac{\nu^2[(1 + i\nu\beta)\mu R + (1 + i\nu\alpha)\vartheta D]}{2(1 + i\nu\alpha)(1 + i\nu\beta)DR}, \\ \Pi &= \frac{\nu^2\mu[(1 + i\nu\alpha)D - \nu^2\vartheta]}{(1 + i\nu\alpha)(1 + i\nu\beta)DR}. \end{aligned} \quad (22)$$

Wielkości r_j będą wyznaczone w problemie brzegowym.

Uwzględniając (20) w (15) otrzymano fundamentalny układ liniowo niezależnych rozwiązań szczególnych:

$$\begin{bmatrix} W_j \\ \Psi_j \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} A_j \\ B_j \end{bmatrix} \exp(r_j x) \quad (23)$$

Ogólne rozwiązanie układu równań (14) jest kombinacją liniową rozwiązań szczególnych (23)

$$\begin{aligned} W &= \sum_{s=1}^2 (A_s^* \sin \lambda_s x + A_s^{**} \cos \lambda_s x) \\ \Psi &= \sum_{s=1}^2 (B_s^* \cos \lambda_s x + B_s^{**} \sin \lambda_s x) \end{aligned} \quad (24)$$

gdzie: A_s^* , A_s^{**} , B_s^* i B_s^{**} są dowolnymi stałymi całkowania.

Relacje między stałymi występującymi w (24) tj.:

$$c_s^* = \frac{B_s^*}{A_s^*}, c_s^{**} = \frac{B_s^{**}}{A_s^{**}} \quad (25)$$

określono na podstawie (16) następującymi wzorami:

$$c_s^* = \frac{(1 + i\nu\alpha)D\lambda_s^2 - \nu^2\mu}{(1 + i\nu\alpha)D\lambda_s}; c_s^{**} = -c_s^* \quad (26)$$

Znając relacje (25) pozostają do wyznaczenia jeszcze cztery stałe całkowania.

5. PROBLEM BRZEGOWY

Dowolne jednorodne warunki brzegowe prowadzą do układu liniowych jednorodnych równań algebraicznych, który w zapisie wektorowym ma następującą postać:

$$\mathbf{A}\mathbf{X} = 0 \quad (27)$$

gdzie \mathbf{A} jest macierzą charakterystyczną tego układu, zaś \mathbf{X} jest wektorem stałych całkowania.

Warunkiem nietrywialnego rozwiązania układu równań (27) jest zerowanie się wyznacznika macierzy charakterystycznej tego układu równań:

$$\det \mathbf{A} = 0 \quad (28)$$

Z równania charakterystycznego (28) wyznacza się ciąg zespolonych częstości drgań własnych $\{v_n\}$, a następnie z równania (27) ciąg wektorów $\{X_n\}$; $n=1,2,\dots$. Po podstawieniu tych ciągów do (24) otrzymuje się ciąg wektorów własnych $\{U_n\}$, gdzie:

$$U_n = \begin{bmatrix} W_n \\ \Psi_n \end{bmatrix}, n = 1, 2, \dots \quad (29)$$

przy czym:

$$W_n = \sum_{s=1}^2 (A_{sn}^* \sin \lambda_{sn} x + A_{sn}^{**} \cos \lambda_{sn} x) \quad (30)$$

$$\Psi_n = \sum_{s=1}^n (c_{sn}^* A_{sn}^* \cos \lambda_{sn} x + c_{sc}^* A_{sn}^{**} \sin \lambda_{sn} x)$$

Rozwiązanie problemu brzegowego przy dowolnych warunkach brzegowych oraz następująca własność ortogonalności wektorów własnych [2]:

$$(v_n - v_m) \lambda [(v_n + v_m) i \mathbf{M} + \mathbf{L}] U_n, U_m = 0, \text{ dla } v_n \neq v_m \quad (31)$$

stanowią podstawę do rozwiązania zagadnienia drgań swobodnych przy dowolnych warunkach początkowych i zagadnienia drgań wymuszonych dowolnym obciążeniem.

6. DRGANIA SWOBODNE

Wektor drgań swobodnych jest rozwiązaniem ogólnym równania (7). Rozwiązanie to jest kombinacją liniową rozwiązań szczególnych:

$$\mathbf{u} = \sum_{n=1}^{\infty} U_n T_n \quad (32)$$

Rozwiązanie (32) w zapisie skalarnym przyjmuje postać:

$$\begin{bmatrix} w \\ \psi \end{bmatrix} = \sum_{n=1}^{\infty} C_n \begin{bmatrix} W_n \\ \Psi_n \end{bmatrix} \exp(iv_n) \quad (33)$$

Z uwagi na zespolone sprzężone składniki występujące w (33) znikają ich części urojone, co w konsekwencji prowadzi do przedstawienia rozwiązania (33) w dziedzinie rzeczywistej:

$$w = \sum_{n=1}^{\infty} |C_n| |W_n| e^{-\eta_n t} \cos(\omega t + \Theta_n + \Phi_n) \quad (34)$$

$$\psi = \sum_{n=1}^{\infty} |C_n| |\Psi_n| e^{-\eta_n t} \cos(\omega t + \Theta_n + \Omega_n)$$

gdzie:

$$\Theta_n = \text{Arg} C_n; \Phi_n = \text{Arg} W_n; \Omega_n = \text{Arg} \Psi_n. \quad (35)$$

Stałe C_n wyznacza się z następującego wzoru [2]:

$$C_n = \frac{([\mathbf{M}(iv_n \mathbf{u}_o + \dot{\mathbf{u}}_o) + \mathbf{L} \mathbf{u}_o] U_n)}{([2v_n i \mathbf{M} + \mathbf{L}] U_n, U_n)} \quad (36)$$

wyprowadzonego z wykorzystaniem warunku ortogonalności wektorów własnych i warunków początkowych, gdzie:

$$\mathbf{u}_o = \begin{bmatrix} \mathbf{w}_o \\ \Psi_o \end{bmatrix}, \quad \dot{\mathbf{u}}_o = \begin{bmatrix} \dot{\mathbf{w}}_o \\ \dot{\Psi}_o \end{bmatrix} \quad (37)$$

jest wektorem początkowym odpowiednio przemieszczeń i prędkości, przy czym:

$$\begin{aligned} \mathbf{w}_o &= \mathbf{W}(x, 0), & \Psi_o &= \psi(x, 0) \\ \dot{\mathbf{w}}_o &= \left. \frac{\partial \mathbf{w}}{\partial t} \right|_{t=0}, & \dot{\Psi}_o &= \left. \frac{\partial \psi}{\partial t} \right|_{t=0} \end{aligned} \quad (38)$$

Wzór (36) w zapisie skalarnym ma postać:

$$\mathbf{C}_n = \frac{\mathbf{J}_n}{\mathbf{N}_n} \quad (39)$$

gdzie:

$$\begin{aligned} \mathbf{J}_n &= \int_0^l \left[\mu \left(i\nu_n \mathbf{w}_o + \dot{\mathbf{w}}_o \right) \mathbf{W}_n + \vartheta \left(i\nu_n \Psi_o + \dot{\Psi}_o \right) \Psi_n + \right. \\ &+ \alpha D \left(\frac{\partial \mathbf{w}_o}{\partial x} - \Psi_o \right) \left(\frac{d\mathbf{W}_n}{dx} - \Psi_n \right) + \beta R \frac{\partial \Psi_o}{\partial x} \frac{d\Psi_n}{dx} \Big] dx \\ \mathbf{N}_n &= \int_0^l \left[2i\nu_n \left(\mu \mathbf{W}_n^2 + \vartheta \Psi_n^2 \right) + \alpha D \left(\frac{d\mathbf{W}_n}{dx} - \Psi_n \right)^2 + \beta R \left(\frac{d\Psi_n}{dx} \right)^2 \right] dx \end{aligned} \quad (40)$$

7. DRGANIA WYMUSZONE

Wektor drgań wymuszonych stanowiący ogólne rozwiązanie równania (2) jest poszukiwany w postaci następującego uogólnionego szeregu Fouriera:

$$\mathbf{u}^* = \sum_{n=1}^{\infty} \mathbf{U}_n S_n \quad (41)$$

Rozwiązanie (41) w zapisie skalarnym ma postać

$$\begin{bmatrix} \mathbf{w}^* \\ \Psi^* \end{bmatrix} = \sum_{n=1}^{\infty} S_n \begin{bmatrix} \mathbf{W}_n \\ \Psi_n \end{bmatrix}, \quad (42)$$

gdzie:

S_n - skalarna funkcja ruchu drgań wymuszonych.

Rozwijając wektor obciążenia w uogólniony szereg Fouriera:

$$\mathbf{F} = \sum_{n=1}^{\infty} \mathbf{M} \mathbf{U}_n f_n \quad (43)$$

a następnie podstawiając (43) i (41) do (2) otrzymano równanie różniczkowe ruchu [2]:

$$\ddot{S}_n - iv_n \dot{S}_n - f_n = 0; \quad n = 1, 2, \dots \quad (44)$$

gdzie:

f_n są współczynnikami rozwinięcia wektora obciążenia w szereg (43).

Wykorzystując własność ortogonalności wektorów własnych (31) określono współczynniki f_n wzorem przedstawionym w postaci operatorowej [2]:

$$f_n = \frac{([iv_n U_n] F)}{([2iv_n M + L] U_n, U_n)} \quad (45)$$

Wzór (45) w zapisie skalarnym ma następującą postać:

$$f_n = \frac{P_n}{N_n} \quad (46)$$

gdzie:

N_n jest określone wzorem (40)₂, natomiast

$$P_n = iv_n \int_0^l W_n q + \Psi_n m dx \quad (47)$$

Rozwiązanie równania różniczkowego (44) ma postać:

$$S_n = C_{1n} + C_{2n} \exp(iv_n t) + \frac{1}{iv_n} \int_0^t [\exp iv_n (t - \tau) - 1] f_n(\tau) d\tau \quad (48)$$

gdzie C_{1n} , i C_{2n} są stałymi całkowania wyznaczanymi z warunków początkowych.

W przypadku zerowych warunków początkowych jest równość: $C_{1n} = C_{2n} = 0$.

Rozwiązanie (42) przekształcono ostatecznie do następującej postaci:

$$w^* = \sum_{n=1}^{\infty} |S_n| |W_n| \cos(\Theta_n^* + \Phi_n) \quad (49)$$

$$\psi^* = \sum_{n=1}^{\infty} |S_n| |\Psi_n| \cos(\Theta_n^* + \Omega_n)$$

gdzie:

$$\Theta_n^* = \text{Arg} S_n; \Phi_n = \text{Arg} W_n; \Omega_n = \text{Arg} \Psi_n, \quad (50)$$

przy czym: $S_n = S_n(t)$ oraz $\Theta_n^* = \Theta_n^*(t)$

LITERATURA

- [1] Cabański J.: Drgania belki Timoshenki z przegubem sprężystym. Zeszyty Naukowe Katedry Mechaniki Stosowanej Politechniki Śląskiej, Z.4, Gliwice, 1997, s.87-92.
- [2] Cabański J.: Operatorowe ujęcie metod stosowanych w analizie drgań swobodnych i wymuszonych. Zeszyty Naukowe Katedry Mechaniki Stosowanej Politechniki Śląskiej, Z.9, Gliwice, 1999, s.29-34.
- [3] Szcześniak W.: Wybrane zagadnienia kolejowe. Prace Naukowe Politechniki Warszawskiej, Budownictwo, Z.129, Warszawa, 1995, s.88-89.

VIBRATION OF TIMOSHENKO-KELVIN'S BEAM

Summary

In this paper an analytical method of solving the free and forced vibration problems of Timoshenko beam is presented. It's assumed, that the beam is carried out from a viscoelastic material, which is described by the rheology Voigt-Kelvin model. The basis of the elaborate method are the operator principles [2]. The essence of this method is separation of variables in the conjugate space and the property of orthogonality of complex eigenvector of free vibration. The solution in the generalize form of the Fourier's series is obtained.

Key words: vibration, beam, Timoshenko, visco-elastic, orthogonality, eigenvector

WYBÓR ZMIENNYCH STANU UKŁADÓW DYSKRETNO-CIĄGLYCH NA PODSTAWIE SYNTEZY PODATNOŚCI

Henryk Holka

Katedra Mechaniki Stosowanej, Wydział Mechaniczny ATR
ul. Prof. S. Kaliskiego 7, 85-796 Bydgoszcz

W pracy przedstawiono syntezę podatności metodą strukturalną. Metoda posiada szereg zalet. Każdy z podukładów pojawia się w strukturze samodzielnie i jeżeli podukład jest trudny do opisu analitycznego można go wyznaczyć doświadczalnie. Metoda może być również zastosowana do aktywnych układów kontroli drgań ponieważ na podstawie znajomości macierzy podatności można wyznaczyć równania stanu układu.

W celu przedstawienia proponowanej metody proces zakończono przykładem.

Słowa kluczowe: synteza podatności, macierz podatności, kontrola drgań, równania stanu.

1. WSTĘP

Podstawą każdej analizy układu dynamicznego jest model matematyczny, który powinien wiernie opisywać model rzeczywisty. Często nie jest to zadanie łatwe. Szczególnie dotyczy to układów dyskretno-ciągłych, w których układ ciągły jest bardzo skomplikowany, np. pokład statku z posadowionymi tam urządzeniami, strop hal z maszynami, itp.

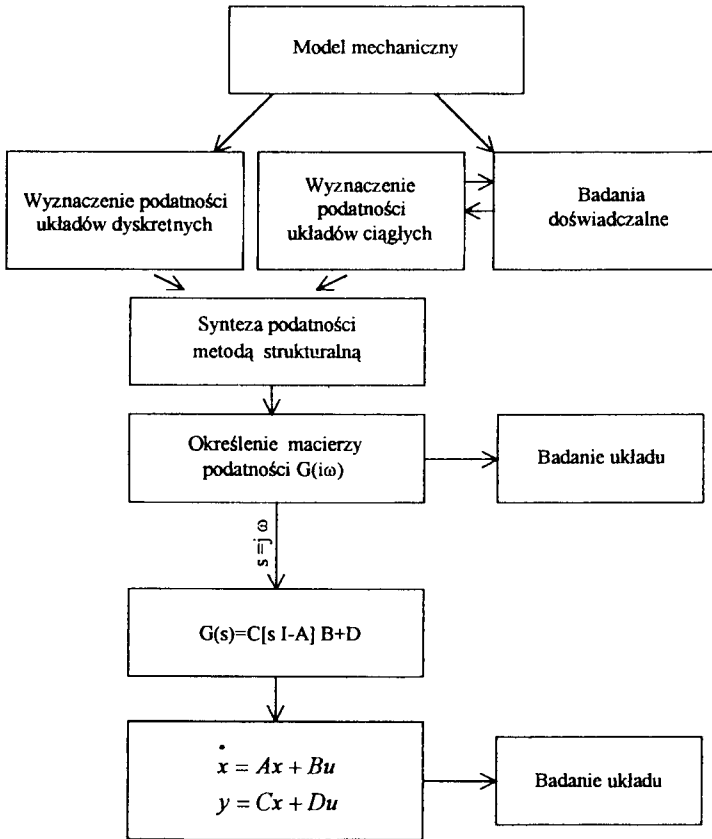
Dogodną metodą analizy takich układów jest metoda oparta na strukturalnej syntezie podatności poszczególnych podukładów.

Zastosowanie metody syntezy podatności dynamicznych znacznie upraszcza opis układu, gdyż nieznanymi i trudnymi do wyznaczenia analitycznego układ ciągły zastępujemy jego podatnościami, wyznaczonymi doświadczalnie w punktach połączenia z układami dyskretnymi.

Tak zbudowany schemat połączeń jest w pełni przystosowany do analizy jaką stosuje się w automatyce za pomocą macierzy transmitancji [1]. Ponadto w tak otrzymany schemat strukturalny łatwo wpisać człon aktywny realizujący zadanie aktywnej kontroli drgań.

Często jednak dogodniejszą formą projektowania układu dynamicznego jest opis obiektu za pomocą równań stanu, które również otrzymuje się za pomocą proponowanej metody [2].

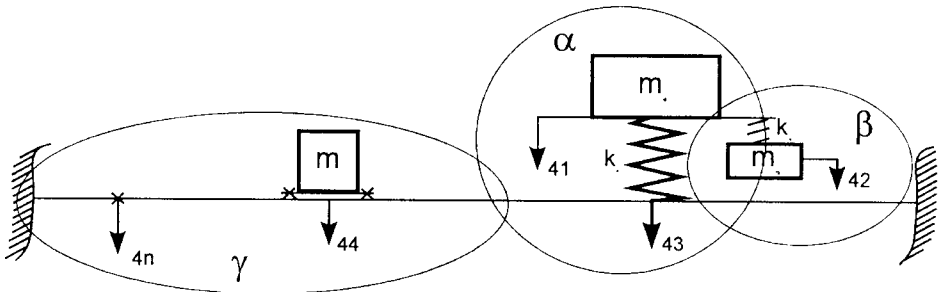
Procedura badania przedstawionych pokazano na rys. 1.



Rys.1. Procedura badania układów dyskretno-ciągłych

2. SYNTEZA PODATNOŚCI

Po opracowaniu model mechaniczny - zgodnie z procedurą przedstawioną na rys.1 - dzieli się go na poszczególne podukłady opisane ich podatnościami, a następnie przeprowadza się syntezę strukturalną podatności [3]. Rozpatrzmy model przedstawiony na rys.2.



Rys.2. Układ dyskretno-ciągły

Układ podzielono na trzy podukłady α , β , γ . Należy zauważyć, że detalizacja modelu zależy od celu zadania i w wielu przypadkach podukłady α i β można traktować jak jeden.

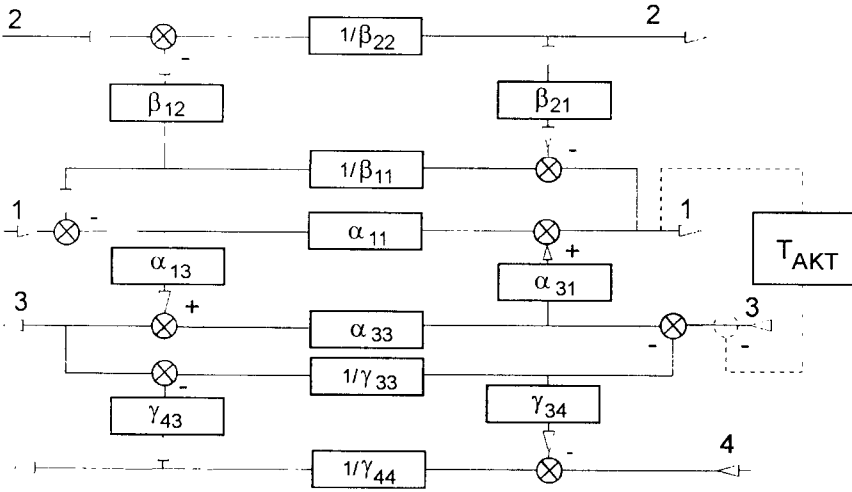
Jak powiedziano, metoda jest szczególnie przydatna dla układów, w którym podukład ciągły jest złożony i trudny do określenia analitycznie.

Układ ten opisany jest macierzą podatności, w którym jej elementami są podatności pomierzone w interesujących nas punktach:

$$\gamma(i\omega) = \begin{bmatrix} \gamma_{33} & \gamma_{34} & \gamma_{35} & \dots & \gamma_{3n} \\ \gamma_{43} & \bullet & \bullet & \dots & \gamma_{4n} \\ \bullet & \bullet & \bullet & \dots & \bullet \\ \gamma_{n3} & \gamma_{n4} & \bullet & \dots & \gamma_{nn} \end{bmatrix} \quad (1)$$

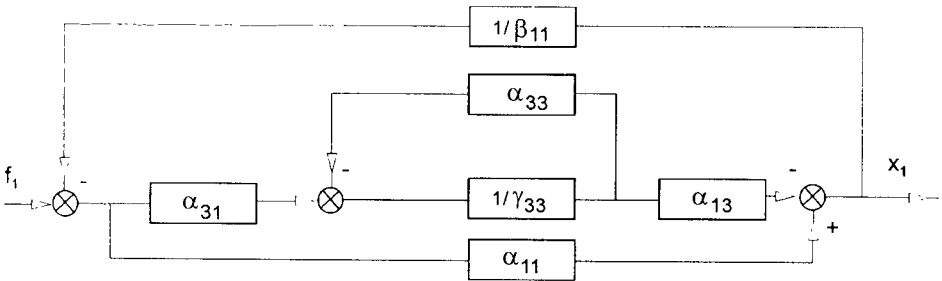
Zachodzi oczywiście odpowiedniość $\gamma_{ij} = \gamma_{ji}$.

Schemat strukturalny powiązań pomiędzy poszczególnymi blokami podatności przedstawiono na rys.3.



Rys.3. Synteza strukturalna podatności z rys.2.

Obliczamy dla przykładu podatność $G_{11}(i\omega)$



Rys.4. Schemat blokowy podatności $G_{11}(i\omega)$

Redukując wymieniony schemat zgodnie z zasadami przekształceń schematów blokowych otrzymujemy:

$$G_{11}(i\omega) = \frac{[\alpha_{11}(\gamma_{33} + \alpha_{33}) - \alpha_{13}^2] \beta_{11}}{(\alpha_{33} + \gamma_{33})(\alpha_{11} + \beta_{11}) - \alpha_{13}^2} = \frac{L_{11}(i\omega)}{M(i\omega)} \quad (2)$$

Podobnie otrzymano:

$$G_{13}(i\omega) = G_{31}(i\omega) = \frac{\alpha_{31} \cdot \beta_{11} \cdot \gamma_{33}}{M(i\omega)} = \frac{L_{13}(i\omega)}{M(i\omega)} \quad (3)$$

Należy zauważyć, że mianownik jest równy dla wszystkich podatności i po przyrównaniu go do zera wyznacza się częstości własne układu.

Wzór (3) możemy przedstawić w innej formie:

$$G_{31}(i\omega) = \frac{\alpha_{31} \cdot \beta_{11}}{M(i\omega)} \cdot \gamma_{33} = K_{13}(i\omega) \cdot \gamma_{33}(i\omega) \quad (4)$$

gdzie $K_{13}(i\omega)$ oznacza podatność układu dyskretnego od współrzędnej pierwszej do podłoża.

Można udowodnić, że zależność ta jest ważna dla wszystkich innych współrzędnych leżących na układzie ciągłym.

Ze schematu głównego otrzymujemy bowiem:

$$G_{41}(i\omega) = K_{13}(i\omega) \cdot \gamma_{34}(i\omega) \quad (5)$$

i ogólnie:

$$G_{n1}(i\omega) = K_{13}(i\omega) \cdot \gamma_{3n}(i\omega) \quad (6)$$

Powyższy wzór pozwala w łatwy sposób analizować drgania np. stropu od posadowionych tam maszyn, gdzie podatność $K(i\omega)$ jest wartością stałą, reprezentującą podatność maszyny w miejscu jej posadowienia.

3. MACIERZ PODATNOŚCI

Na podstawie schematu strukturalnego przedstawionego na rys.3 można wyznaczyć wszystkie interesujące nas podatności tworzące w całości macierz podatności $G(i\omega)$

$$G(i\omega) = \begin{bmatrix} G_{11} & G_{12} & G_{12} & G_{14} \\ \bullet & \bullet & \bullet & G_{24} \\ \bullet & \bullet & \bullet & \bullet \\ G_{41} & \bullet & \bullet & G_{44} \end{bmatrix} = \frac{1}{M(i\omega)} \begin{bmatrix} L_{11} & L_{12} & L_1 & L_{14} \\ \bullet & \bullet & \bullet & \bullet \\ \bullet & \bullet & \bullet & \bullet \\ L_{41} & \bullet & \bullet & L_{44} \end{bmatrix} \quad (7)$$

Ponadto oznaczamy:

$$\alpha_{ij} = \frac{a_{ij}}{A}; \quad \beta_{ij} = \frac{b_{ij}}{B}; \quad \gamma_{ij} = \frac{g_{ij}}{\Gamma} \quad (8)$$

Wzory (8) podstawiamy do (2) i (3) i pozostałych podatności tworzących macierz podatności (7).

Po wymnożeniu otrzymujemy:

$$M(i\omega) = (a_{33} \cdot G + g_{33} \cdot A)(a_{11}B + b_{11}A) - a_{13}^2 \Gamma B \quad (9)$$

$$L_{11}(i\omega) = [a_{11}(g_{33} \cdot A) + a_{33}\Gamma - a_{13}^2 \Gamma] b_{11} \quad (10)$$

$$L_{13}(i\omega) = a_{13} \cdot b_{13} \cdot g_{33} \cdot A \quad \text{itd.} \quad (11)$$

Nieznaną podatność układu ciągłego zastępujemy modelem drugiego rzędu opisanym wzorem (12)

$$\gamma_{33} = \frac{g_{33}}{\Gamma} = \frac{b_1 s + b_0}{s^2 + a_1 s + a_0} \quad (12)$$

Pozostałe elementy macierzy (7) wyznaczamy również w funkcji s , gdzie:

$$\alpha_{13} = \frac{a_{13}}{A} = \frac{K_1^*}{K_1^* \cdot m_1 s^2}; \quad \alpha_{33} = \frac{a_{33}}{A} = \frac{k_1^* + m_1 s^2}{A} \quad (13)$$

$$\beta_{11} = \frac{k_2^* + m_2 s^2}{k_2^* \cdot m_2 s^2} = \frac{b_{11}}{B} \quad (14)$$

gdzie:

$$k_1^* = k_1 + c_1 s$$

W wymienionych zależnościach przeszliśmy od opisu transmitancji z dziedziny częstotliwościowej do opisu w dziedzinie zmiennej zespolonej s , co można zapisać:

$$G(i\omega) = G(s)|_{s=i\omega} \quad (15)$$

Zachodzi zależność:

$$y(s) = G(s) \cdot U(s) \quad (16)$$

Transmitancja opisana równaniem (16) wiąże dowolny sygnał wejścia z wyjściem w dziedzinie zmiennej zespolonej s przy zerowych warunkach początkowych.

Mając określoną macierz transmitancji możemy określić odpowiedź układu, jak również realizować różne inne zagadnienia analizy.

W wielu przypadkach metoda transmitancji jest jednak ograniczona. Cechują ją jednak prostota interpretacji i łatwość określania na drodze pomiarowej.

Równania stanu są trudniejsze do interpretacji fizycznej i trudne do bezpośrednio określenia na drodze pomiarowej, jednak forma opisu matematycznego jest bardzo dogodna dla celów modelowania i projektowania układów wielowymiarowych.

4. WYBÓR ZMIENNYCH STANU

Równanie stanu i równanie wyjścia mają postać:

$$\dot{x}(t) = A \cdot x(t) + Bu(t) \quad (17)$$

$$y(t) = C \cdot x(t) + D u(t) \quad (18)$$

gdzie:

- x - n wymiarowy wektor stanu,
- A - macierz obiektu o wymiarach $n \times n$,
- B - macierz wejścia o wymiarach $n \times p$,
- u - p wymiarowy wektor wymuszenia,
- y - g wymiarowy wektor odpowiedzi,
- C - macierz wyjścia o wymiarach $g \times n$,
- D - macierz transmitancyjna o wymiarach $g \times p$.

Zadanie polega na wyznaczeniu macierzy A , B , C i D na podstawie danej macierzy transmitancji $G(s)$.

Problem taki powstaje wówczas, gdy cała macierz lub poszczególne jej elementy uzyskane są na drodze pomiarów obiektu rzeczywistego. W rozpatrywanym w pracy przykładzie pomierzono doświadczalnie podatność układu ciągłego γ .

Przekształcając odpowiednio (17), (18) i porównując z (16) otrzymujemy:

$$G(s) = C[sI - A]^{-1}B = \frac{c[sI - A]_{\text{adj}} B}{\det[sI - A]} \quad (19)$$

Wzór ten pozwala wyznaczyć macierz $G(s)$ na podstawie danych macierzy A , B , C , D lub odwrotnie, na podstawie znajomości $G(s)$ wyznaczyć macierze A , B , C i D .

Czwórkę poszukiwanych macierzy A, B, C, D na podstawie znajomości $G(s)$ spełniających (19) nazywamy realizacją macierzy $G(s)$. Zależność (19) nie jest jednoznaczna, tzn. znaleźć można wiele macierzy spełniających ten warunek. Dlatego wprowadza się pojęcie tzw. realizacji minimalnej, dla której liczba współrzędnych „ n ” jest minimalna.

W celu ułatwienia poszukiwania realizacji minimalnej autor wykorzystał pewne własności znamienne dla układów mechanicznych

- $D = \lim_{s \rightarrow \infty} G(s) = 0$ zachodzi gdy stopień licznika jest niższy od stopnia wielomiana mianownika transmitancji operatorowej $G(s)$,
- macierz $G(s)$ jest wymiarem $g \times p$. Dla układów mechanicznych zachodzi $G_{ii}(s) = G_{ii}(s)$ stąd $p=g$
- mianownik transmitancji jest ten sam dla wszystkich elementów macierzy $G(s)$ i z (19) otrzymujemy $M(s) = [sI - A]$
- minimalna liczba zmiennych stanu n jest równa stopniowi wielomianu w mianowniku $M(s)$.

5. PRZYKŁAD OBLICZEŃ

Rozpatrzmy model z rys.2, w którym dla uproszczenia pominięto podukład β .

Obliczamy drgania podłoża od wymuszeń działających wzdłuż współrzędnej y .

Macierz podatności tak przyjętego układu ma postać:

$$G(i\omega) = \begin{bmatrix} G_{33} & G_{31} \\ G_{13} & G_{11} \end{bmatrix} \quad (20)$$

Rozwiązując schemat strukturalny z rys.3 otrzymujemy:

$$G_{13}(i\omega) = \frac{\alpha_{13} \cdot \gamma_{33}}{\alpha_{33} + \gamma_{33}} \quad (21)$$

$$G_{33}(i\omega) = \frac{\alpha_{33} \cdot \gamma_{33}}{\alpha_{33} + \gamma_{33}} \quad (22)$$

$$G_{11}(i\omega) = \frac{\alpha_{11}(\alpha_{33} + \gamma_{33}) - \alpha_{13}^2}{\alpha_{33} + \gamma_{33}} \quad (23)$$

Dla modelu z rys.2 poszczególne podatności mają postać:

$$\alpha_{13}(s) = \alpha_{31}(s) = \frac{a_{13}}{A} = \frac{k_1^*}{k_1^* \cdot m_1 s^2} \quad (24)$$

$$\alpha_{33}(s) = \frac{a_{33}}{A} = \frac{k_1^* + m_1 s^2}{k_1^* \cdot m_1 s^2} \quad (25)$$

gdzie:

$$k_1^* = k_1 + c_1 s.$$

Układ α reprezentuje masa $m_1=0.1$ kg, podparta na sprężynie o sztywności

$$k_1 = 40 \frac{\text{N}}{\text{m}}.$$

Dla układu ciągłego wyznaczono doświadczalnie charakterystykę amplitudowo-częstotliwościową i na jej podstawie określono wzór opisujący podatność γ_{33} :

$$\gamma_{33} = \frac{l}{0,21(s^2 + 40^8)} = \frac{q_{33}}{\Gamma} \quad (26)$$

Macierz transmitancji $G(s)$ otrzymamy podstawiając (24,25,26) do (21,22,23):

$$G(s) = \frac{1}{M(s)} \begin{bmatrix} a_{33} & a_{31} \\ a_{13} & \frac{a_{11}}{A} (a_{33}\Gamma + A) - \frac{a_{31}^2\Gamma}{A} \end{bmatrix} \quad (27)$$

gdzie:

$$M(s) = a_{33}\Gamma + q_{33}A.$$

Ostatecznie po podstawieniu danych otrzymujemy:

$$G(s) = \frac{1}{M(s)} \begin{bmatrix} 10s^2 + 18000 & 2000 \\ 2000 & 5s^2 + 2000 \end{bmatrix} \quad (28)$$

$$\text{i } M(s) = s^4 + 2200s^2 + 64000$$

a) stopień mianownika wynosi cztery, stąd $n=4$,

b) $D=0$, gdyż $\lim_{s \rightarrow \infty} G(s) = 0$,

c) stosując wariant 1 metody bezpośredniej otrzymujemy [2]:

$$A = \left[\begin{array}{cccc|cccc} 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ -64 \cdot 10^3 & 0 & 2,2 \cdot 10^3 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ \hline 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & -64 \cdot 10^3 & 0 & 2,2 \cdot 10^3 & 0 \end{array} \right] B = \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \\ 0 & 0 \\ 1 & 0 \\ 0 & 0 \\ 0 & 0 \\ 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$$

$$C = \begin{bmatrix} 18 \cdot 10^3 & 0 & 10 & 0 & 2 \cdot 10^3 & 0 & 0 & 0 \\ 2 \cdot 10^3 & 0 & 0 & 0 & 2 \cdot 10^3 & 0 & 5 & 0 \end{bmatrix}$$

d) przekształcamy macierz $\begin{bmatrix} A & B \\ C & D \end{bmatrix}$

$$\text{do postaci } \begin{bmatrix} A_{11} & 0 & 0 \\ A_{21} & A_{22} & B_2 \\ C_1 & C_2 & 0 \end{bmatrix}$$

gdzie poszukiwaną realizacją minimalną jest realizacja A_{22} , B_2 , C_2 .

e) po przekształceniach otrzymujemy,

$$A_{22} = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 \\ -400 & 0 & 400 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 200 & 0 & -1800 & 0 \end{bmatrix} \quad B_2 = \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 10 & 0 \\ 0 & 0 \\ 0 & 5 \end{bmatrix}$$

$$C_2 = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \end{bmatrix}$$

f) sprawdzamy podstawiając A_{22} do zależności:

$$M(s) = [s I - A_2] = s^4 + 2200s^2 + 640000$$

6. WNIOSKI

1. Metoda strukturalnej syntezy podatności jest szczególnie przydatna dla układów dyskretno-ciągłych, w którym układ ciągły jest złożony i trudny do opisu analitycznego. Unikając skomplikowanych procedur identyfikacyjnych, określamy doświadczalnie charakterystyki dynamiczne tylko w punktach połączenia z układami dyskretnymi. Otrzymana w efekcie połączenia macierz podatności pozwala na pełną analizę jak i badanie rozważanego obiektu.
2. W struktury otrzymanego połączenia można łatwo wpisać człony aktywne realizujące aktywną kontrolę drgań.
3. Otrzymana macierz podatności pozwala przejść do opisu układu za pomocą równań stanu dających jeszcze inne narzędzie badania układu.

LITERATURA

- [1] Niderliński A.: Układy wielowymiarowe automatyki. WNT, Warszawa, 1974.
- [2] Kaczorek K.: Teoria sterowania i systemów. WNT, Warszawa, 1999.
- [3] Holka H.: Receptance Synthesis by Means of Block Diagrams. VIIth World Congress on IFT₀MM Sevilla, 1987.

THE CHOISE OF STATE VARIABLES OF A DISCRETE AND FLEXIBLE SYSTEMS BY MEANS OF THE RECEPTANCE SYNTHESIS

Summary

The paper presents the synthesis of the receptance by using the block diagrams. This method has some advantages. Each sub-system is described by its receptance and occurs in the formulas separately and the second, if the sub-system is so complicated its receptance can be obtained by experiments. It can be applied also to the active method of vibration control by formulation the state space equations from the receptance matrix. In order to illustrate the connection of the receptance and transformation to the state-space equations the example was presented.

Key words: receptance synthesis, receptance matrix, vibration control, state-space method.

STABILITY BOUNDARIES OF AUTONOMOUS NON-LINEAR DYNAMIC SYSTEMS

Kazimierz Peszyński¹, Václav Tesař²

¹Katedra Sterowania i Konstrukcji, Wydział Mechaniczny ATR
ul. Prof. S. Kaliskiego 7, 85-796 Bydgoszcz

²Department of Chemical & Process Engineering, University of Sheffield
Mappin Street, Sheffield – S1 3JD, United Kingdom
(on leave from ČVUT Praha)

The paper discusses general behaviour of nonlinear dynamic systems without external excitation. Their vector of state quantities gradually evolves in time, reaching either a stable equilibrium state or, in an unstable case, exceeds physical limits. In higher-order nonlinear systems, there may be many equilibrium states and it is important to determine the extent of stability region for the stable ones. The approach to this problem is explained using the hypervector notation and basing the system classification on the analogy with potential in fluid mechanics.

Key words: Dynamic systems, stability, state space, hypervector, potential

1. INTRODUCTION

The specific property of dynamic systems is their evolution in the course of time. The autonomous systems, of interest in the present paper, evolve without any external forcing action. The fundamental question is then their stability: if the system is stable, its evolution leads to an equilibrium state.

There are also unstable equilibrium states – which are unlikely to be observable, since any disturbance, however small, causes the state parameters to increase until reaching some physical limits. The system stalls, bursts or deteriorates. To avoid such unpleasant consequences, it is necessary to study the character of evolution. This is relatively simple in linear systems – stable or unstable everywhere. However, in the non-linear dynamic systems – which recently become more and more important – the question may become rather difficult.

There are many equilibrium states and it may be not easy to determine the boundaries of the stability region. Fortunately, because of the one-directional character of changes, the study of evolution may be based simply on the basic geometric properties of the differential equations that describe the system.

2. STATE VECTOR AND ITS VARIATION IN TIME

Very instructive insight into the problem may be gained by using the hypervector notation. A single variable quantity - which is an object of interest in a study of a first

order dynamic system - is a scalar, Fig.1. The problems become more complicated whenever there are more variables (such as simultaneously varying position, pressure, temperature, ...) or the behaviour of the system is of a higher order.

The description of the behaviour may be expressed in the form of a system of several simultaneous first-order ordinary differential equations (in a higher order system, a decomposition is possible by formally introducing additional variables equal to time derivatives). It is then useful to describe the state of the system by a first-order tensor - the state vector X , Fig.1 - that encompasses all quantities required for unique description of the state.

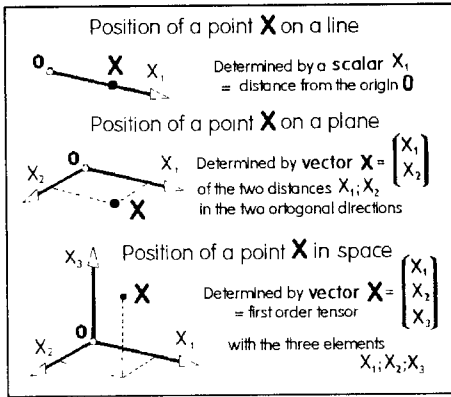


Fig.1. Geometrical interpretation of a scalar valued quantity as a position of a point on a line. A vector valued quantity may be thought of as indicating the position on a plane or in space

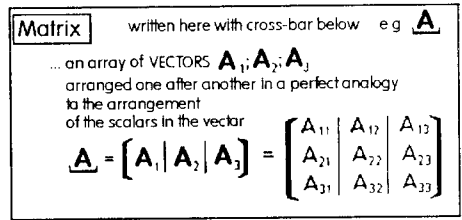



Fig.2. Matrix is an array of vector in an analogy to a vector being an array of scalars

Linear relations between vectors are very instructively expressed by means of traditional concept of a matrix, Fig.2 - which is basically a scheme for writing down a second-order tensor. In the linear relation it is necessary to operate with second-order multiplicative tensors, because the simple scalar multiplication in the scalar function is replaced by the contracted product Fig.8. If we wish to use a quadratic vector-to vector dependence, we find that also the square of the state vector - Fig.5 - is a second-order tensor.

The limitation of matrix calculus towards the higher power expressions is due to the fact that for the quadratic function we then need as a tensor of the multiplicative constants an object of a higher dimension than matrix - the third-order multiplicative hypervector Fig.6. One of the advantages of the hypervector notation is that it makes possible expressing the higher powers (Fig.16) - and this means the possibility of working with polynomials and power series (which, for continuous functions, permit expressing any non-linear behaviour).

An important fact is that using the hypervectors, it is possible to transfer directly - unchanged - formal expressions as we know them from scalar functions of a scalar variable into the realm of vector function of vector variable (Fig.17). This, of course, is exactly what we need for the study of non-linear higher-order dynamic systems. Perhaps equally important is that even the expressions for the derivatives and integrals (Fig.16) of these functions are formally identical to the corresponding scalar cases.

Symmetrisation of a matrix \underline{A}

$$\text{sym } \underline{A} = \frac{1}{2} (\underline{A} + \text{iso } \underline{A})$$


this operation generates a matrix with equal elements on locations positioned symmetrically with respect to the main diagonal

Matrix \underline{B} is a symmetric one if there is $\underline{B} = \text{sym } \underline{B}$
 so that there is e.g.: $B_{12} = B_{21}$

All matrices may be decomposed into a symmetric and an **alternating** component, defined

$$\text{alt } \underline{A} = \underline{A} - \text{sym } \underline{A}$$

If for some matrix \underline{C}
 $\underline{C} = \text{alt } \underline{C}$ then $C_{11} = C_{22} = 0$
 $C_{12} = -C_{21}$

Fig.3. An important fact about matrices is the possibility to split them into their symmetric and alternating components

Important unitary matrices used in this paper:

$$\underline{I} = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \quad \underline{ae} = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{bmatrix} \quad \underline{k} = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{bmatrix}$$

Fig.4. Important unitary 2D matrices used in this paper: Identity matrix, unit alternating matrix, and a matrix with different signs on the main diagonal

Square of a vector

$$\underline{X}^2 = \underline{X}\underline{X} = \begin{bmatrix} X_1 X_1 & X_1 X_2 \\ X_2 X_1 & X_2 X_2 \end{bmatrix}$$

is a second order tensor
 which may be written as a **matrix**

Fig.5. A matrix is required to write down a square of a vector

Third-order hypervector
 written here with double cross-bar below .. e.g. $\underline{\underline{A}}$

... an array of MATRICES $\underline{A}_1, \underline{A}_2, \underline{A}_3$
 arranged one after another in a perfect analogy to the arrangement of the scalars in the vector

$$\underline{\underline{A}} = [\underline{A}_1 \parallel \underline{A}_2 \parallel \underline{A}_3] = \begin{bmatrix} A_{111} & A_{121} \\ A_{211} & A_{221} \\ A_{112} & A_{122} \\ A_{212} & A_{222} \end{bmatrix}$$

Fig.6. Third-order hypervectors are generalisations of the second-order matrices

Third power of a vector

$$\underline{X}^3 = \begin{bmatrix} X_1 X_1 X_1 & X_1 X_2 X_1 \\ X_2 X_1 X_1 & X_2 X_2 X_1 \\ X_1 X_1 X_2 & X_1 X_2 X_2 \\ X_2 X_1 X_2 & X_2 X_2 X_2 \end{bmatrix}$$

requires a third-order hypervector to be written down

Fig.7. Third-order hypervector is required to write down the third power of a vector

Contracted product of a matrix and a vector

- the result is a vector

$$\underline{A}\underline{X} = \begin{bmatrix} A_{11}X_1 + A_{12}X_2 + A_{13}X_3 \\ A_{21}X_1 + A_{22}X_2 + A_{23}X_3 \\ A_{31}X_1 + A_{32}X_2 + A_{33}X_3 \end{bmatrix}$$

or written in the index notation:

$$\sum_j A_{ij} X_j$$

Fig.8. The contracted product is an essential operation of the matrix calculus. used to express (see Fig.12) the linear vector function of a vector variable

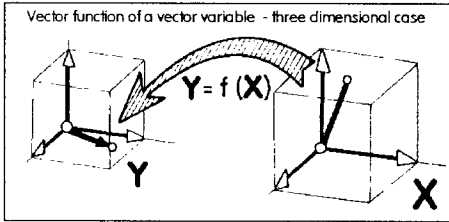


Fig.9. Association between two spaces expressed by the vector function of a vector variable

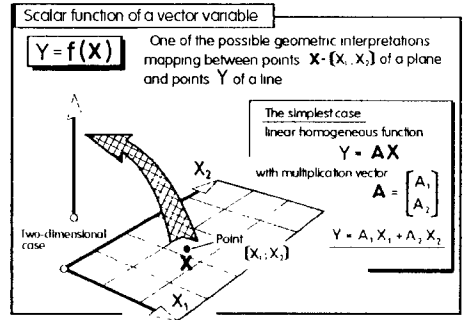


Fig.10. Association of a line to a plane: geometrical interpretation of the scalar function of a vector variable

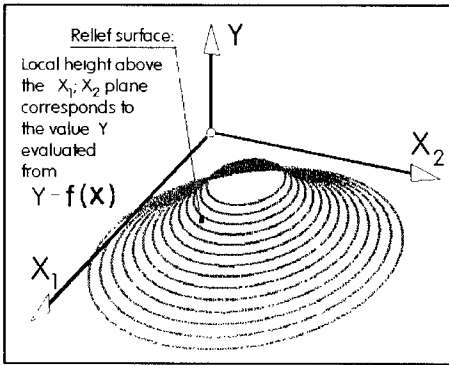


Fig.11. Association of a scalar (Y) to points of a plane may be interpreted and viewed upon as a relief surface

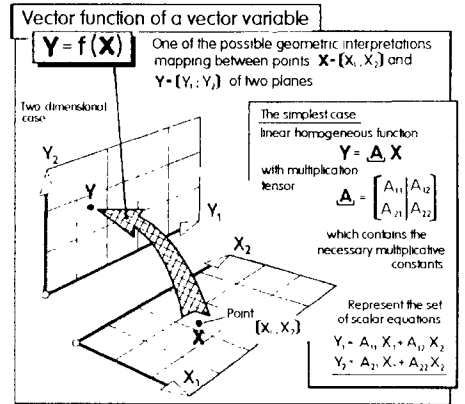


Fig.12. Association between two surfaces (planes): a geometrical interpretation of the vector function of a vector variable

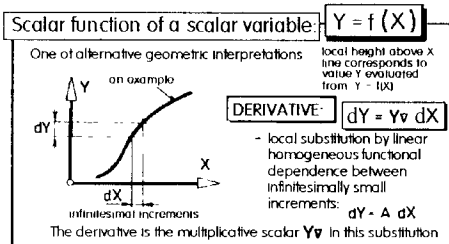


Fig.13. Standard geometrical interpretation of a scalar function of a scalar variable and of the derivative of this function

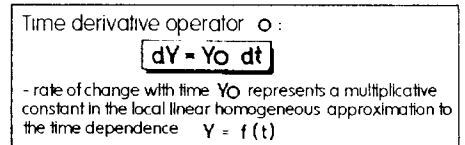


Fig.14. Derivation with respect to time is essential for differential equations of dynamic systems

Derivative of the function $Y = f(X)$
 is a second order tensor - may be written as a matrix

$$\underline{Y}_{\nabla} = \begin{pmatrix} Y_1 \nabla_1 & Y_1 \nabla_2 \\ Y_2 \nabla_1 & Y_2 \nabla_2 \end{pmatrix}$$

DEFINITION: local substitution of the actual function by a linear homogeneous substitution valid between small (infinitesimal) increments

$$dY = \underline{Y}_{\nabla} dX$$

$$= \begin{pmatrix} Y_1 \nabla_1 dX_1 + Y_1 \nabla_2 dX_2 \\ Y_2 \nabla_1 dX_1 + Y_2 \nabla_2 dX_2 \end{pmatrix}$$

Fig.15. Spatial derivative of the vector function of a vector variable from Fig.12

Power series
 representation of vector functions of a vector variable

$$Y = A + \underline{A}X + \underline{\underline{A}}X^2 + \underline{\underline{\underline{A}}}X^3 + \dots$$

$$Y = \sum_n \underline{\underline{\underline{A}}}_{n+1} X^n$$

DERIVATIVE: $\underline{Y}_{\nabla} = \sum_n \underline{\underline{\underline{A}}}_{n+1} X^n$

Fig.16. Easily differentiable power vector functions of a vector variable make possible to introduce the concept of power series by which it may be possible to describe any continuous nonlinear vector-to vector function

Integral
 of a vector power $\underline{\underline{\underline{A}}}_{n+1} X^n$

$$\Phi = \int (\underline{\underline{\underline{A}}}_{n+1} X^n) dX = \frac{1}{n+1} \text{sym}_{>1} \underline{\underline{\underline{A}}}_{n+1} X^{n+1} + C$$

the result is scalar-valued
 Note that derivating the integral leads to only the symmetric (noncirculatory) component of the original function: $\underline{\Phi}_{\nabla} = \text{sym}_{>1} \underline{\underline{\underline{A}}}_{n+1} X^n$

Fig.17. The inverse operation to differentiation is integration: the integration constant K is irrelevant in the present context

3. FIRST ORDER SYSTEMS

In the simple case of the first order system (Fig.18) the geometrical interpretation of the differential equation that describes its behaviour is that of a scalar-to-scalar mapping. In the linear case there is only one equilibrium state in which the system stops evolving.

Nonlinear systems (Fig.20) possess several equilibrium states. The position of equilibria is found by solving of the algebraic relation obtained from the requirement of zero left-hand side (no change in time). Character of the equilibrium state in the linear case is determined by the sign of the multiplicative scalar (Fig.19). In the nonlinear cases, the character is determined by the sign of the derivative, which substitutes the behaviour by a linear homogeneous relation valid for small changes in the vicinity of

the equilibrium. The boundaries of the stability region are best found by the very instructive procedure of evaluating the integral and assuming that the evolution of the system proceeds by the state climbing everywhere up the integral curve (Fig.22). It is obvious, that the most distant position from which this development will climb to a particular stable equilibrium is the nearest local minimum of the potential - which corresponds to the location of the neighbouring unstable equilibrium state.

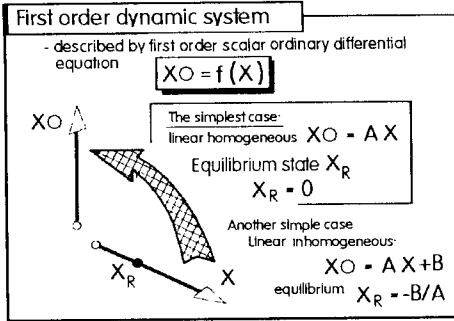


Fig.18. The simplest autonomous dynamic system is geometrically interpreted as a one-dimensional problem described by a scalar equation

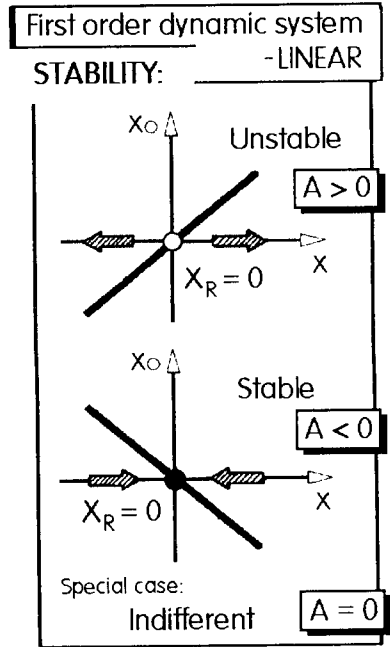


Fig.19. If the system according to Fig.18 is linear, it is easy to evaluate stability of its single equilibrium point

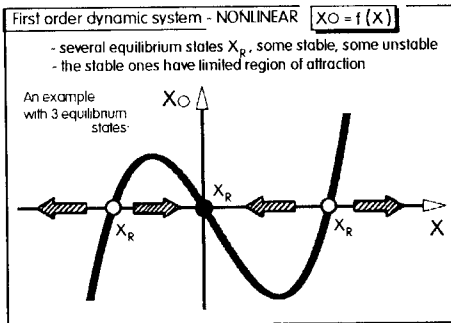


Fig.20. If the system according to Fig.18 is nonlinear, the situation is complicated by there being, in principle, several equilibrium states - the stable ones have a limited region of stability

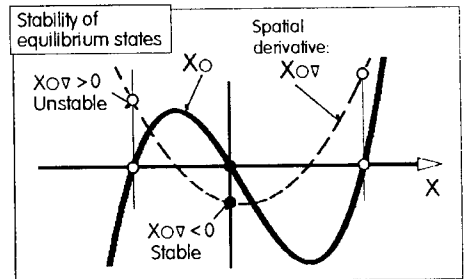


Fig.21. The sign of the spatial derivative of a nonlinear first-order system used to determine stability of equilibrium points

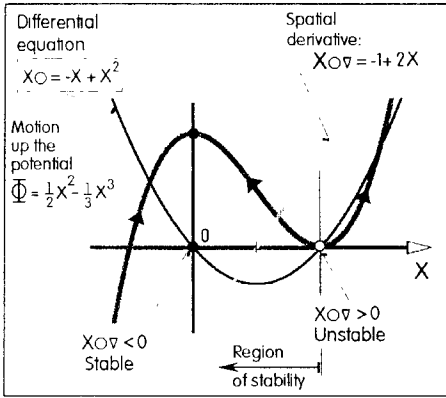


Fig.22. Another example of a simple nonlinear system with the distribution of its spatial derivative and integral (= potential). The notion of the time development climbing up the potential curve makes possible to determine the boundaries of their stability region

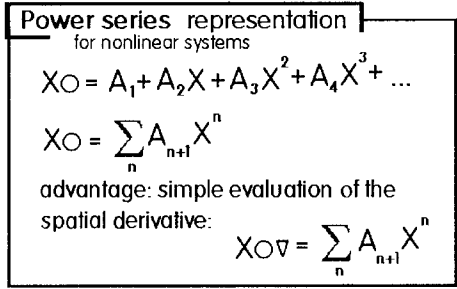


Fig.23. The functions appearing on the right-hand side of the differential equations describing the first-order system may be very complicate. If the dependence is continuous, however, it is possible to represent them by easily differentiable and integrable power series

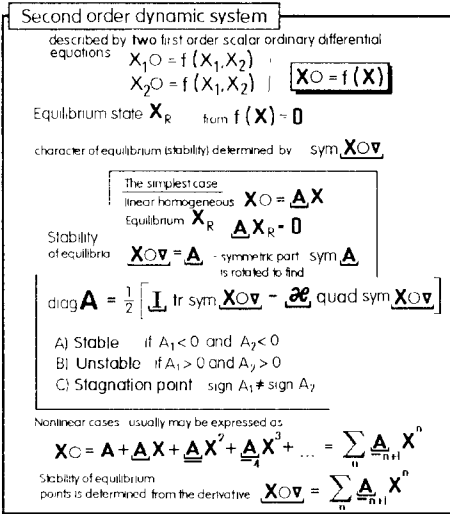


Fig.24. Autonomous second order dynamic systems are geometrically interpreted as a two-dimensional problem described by a vector function of vector variable from Fig.12

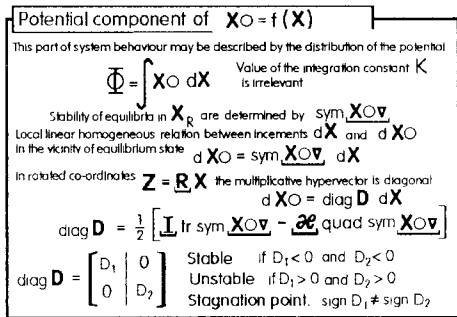


Fig.25. Representation of a system from Fig.24 by the scalar potential makes possible particularly instructive geometric characterisation by equipotential lines in the state plane (Fig.11). Unfortunately, this neglects the circulatory component of system behaviour

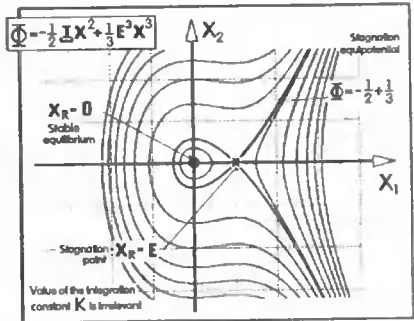
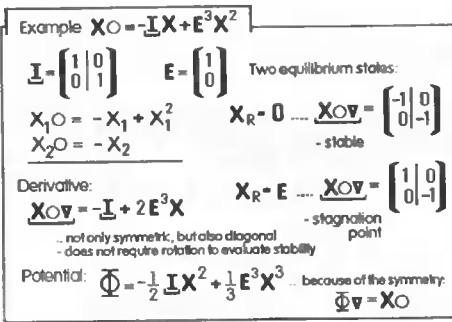


Fig.26. An example of a dynamic system with purely potential (no circulation) behaviour

Fig.27. Equipotential lines in state plane representation of the system from Fig.26

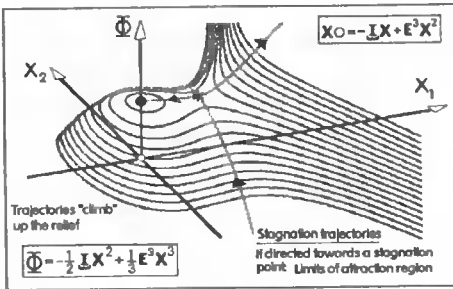


Fig.28. Axonometric representation of the relief (according to Fig.11) for the system from Fig.26. The notion of the time development climbing up the potential relief makes possible to determine the boundaries of stability region

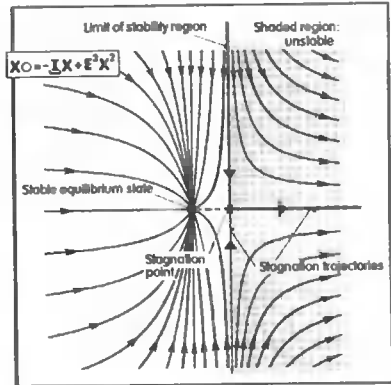


Fig.29. Trajectories in the state plane computed for the system from Fig.26

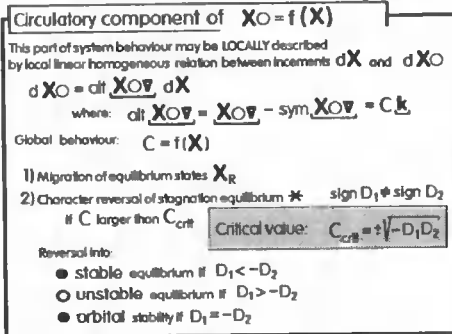


Fig.30. Apart from the potential component, dynamic systems may exhibit also a circulatory component of their behaviour

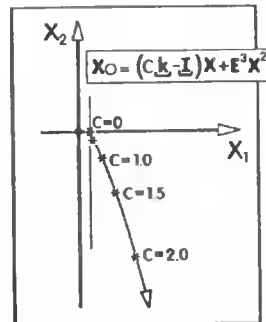


Fig.31. Migration trajectories of the stagnation point of the dynamic system from Fig.26 with superimposed linear circulatory component of increasing intensity

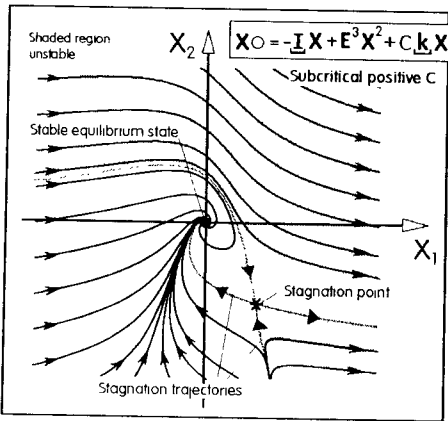


Fig.32. Trajectories in the state plane computed for the system from Fig.26 with superimposed linear circulatory component. Here the circulation is of subcritical intensity – and the behaviour is topologically equivalent to that from Fig.29

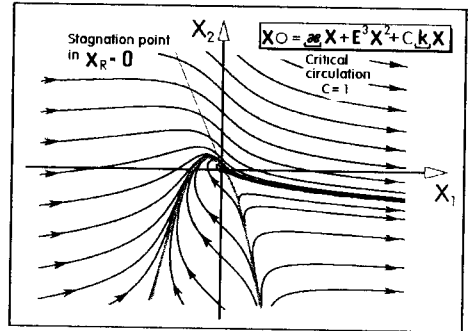


Fig.33. The system from Fig.26 with the origin translated into the stagnation point and then superimposed linear circulatory behaviour component of exactly critical intensity

4. HIGHER ORDER SYSTEMS – POTENTIAL AND CIRCULATORY BEHAVIOUR

The geometrical interpretation of relations in higher order systems – e.g. the second order one as discussed in Fig.24 – is complicated by the difficulty of an instructive diagrammatic presentation. Even in the two-dimensional case (Fig.24) it is not possible or, anyway, really instructive to plot simultaneously the two components of the rate of change. An interesting possibility is to use the idea successfully used in a similar situation in fluid mechanics, which faces an analogous problem that it is not instructive or even possible to plot simultaneously the two components of the velocity vector. One solution used there is to work with the integral, potential of the velocity distribution.

The spatial distribution of the integral (Fig.17) is a scalar function of a vector variable (Fig.10). As such, is in fact quite easy to plot -Fig.11. Unfortunately, not all velocity fields may be completely described by potential, but those for which such a description is possible the plotted distribution of equipotential lines (or, in third-order systems, equipotential surfaces) is very instructive. A similar illustrative presentation of properties of a dynamic system by means of a potential integral. The example presented is shown in Figs.25 to Fig.29 is a quadratic second-order dynamic system with symmetric multiplicative matrices - which means that it can be described completely by its potential. The boundaries of the region of stability are trajectories passing towards the stagnation equilibrium states. In Figs.25 to Fig.29 it is immediately seen how the sates to the left of the stagnation trajectories (which, rather exceptionally, are here straight lines) finish in the stable equilibrium state. Of course, potential can represent only the irrotational part of velocity field. This is the part corresponding to the symmetric (Fig.3) component of the derivative hypervector.

The remaining circulatory component (Fig.30) corresponds to the alternating part of the derivative. Apart from deforming the trajectories into a more or less spiral form, the important effect of the circulatory (alternating) component of behaviour is the fact it moves the equilibrium position. It may be interesting to watch the migration of these equilibria with gradually increasing intensity of circulation (example in Fig.31). If the circulation component intensity is weak, it does not change the overall topological character of the field of trajectories - this is seen in the example Fig.31. In spite of changes (deformed trajectories, migrated stagnation point) the basic features if this case is the same as in the zero circulation case in Fig.29. If, however, its intensity is higher than the critical value (indicated in Fig.30) the presence of circulation may cause reversal in character of the equilibrium points of stagnation character – Fig.30.

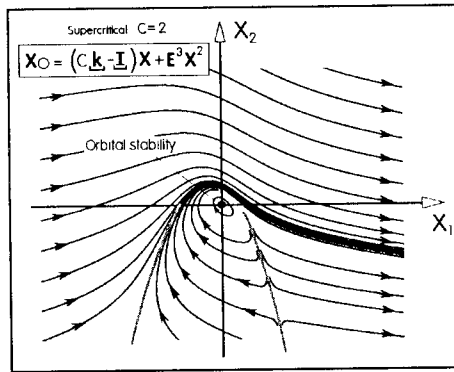


Fig.34. An example of orbital stability: it is obtained in the system from Fig.33 (which corresponds to Fig.26 with the origin translated into the stagnation point and then superimposed linear circulatory behaviour) with circulation of supercritical magnitude

CONCLUSIONS

Even though study of dynamics of nonlinear systems does not depend upon hypervector notation used in the present paper, we have found this particular approach very effective. It makes possible to express the complicated spatial relations in a particularly simple way, instructive and easy to use - because of the direct analogy with scalar expression. In this paper the hypervector approach is used to investigate location of stability boundaries. It made possible to study this quite old problem from a new point of view. Equipotential lines, stagnation trajectories, vortex motion and another concepts as used successfully for understanding fluid flow fields could be here applied to the study of system dynamics under the conditions of an autonomous, nonexcited temporal development.

Recent experience has shown that the method presented here may be easily further developed to incorporate the effects of periodic excitations. It was e.g. applied to study of harmonically excited bistable vortex flows [3], where the results tend to indicate that bifurcation into the bistability – described by third-power two-dimensional hypervector

equation with circulatory components – seems to be an important step in the scenario leading to chaotic behaviour and fluid flow turbulence.

REFERENCES

- [1] Tesař V.: "Metoda vyšetřování stability nelineárních systémů založená na hydro-mechanické analogii", Proc. of Sci. Conf. ČVUT, p.108, Praha, July 1971
- [2] Nusse H.E., Yorke J.A.: "Dynamics: Numerical Explorations", Springer-Verlag, New York, 1994
- [3] Tesař V., Jilek M., Reisenberger E., Randa Z.: "Bistabilní proudění se stojatým viovým prstencem" (Bistable Flow with Captive Vortex Ring - in Czech), Fluid Mechanics and Thermodynamics, Proceedings of XVIIIth International Conference of Departments of Fluid Mechanics and Thermomechanics, page 141, Prague, 1999, ISBN 80-902714-1-3

GRANICE OBSZARÓW STABILNOŚCI W AUTONOMICZNYCH NIELINIOWYCH SYSTEMACH DYNAMICZNYCH

Streszczenie

W artykule omawiane jest ogólne zachowanie nieliniowych systemów dynamicznych bez zewnętrznego wzbudzenia. Wektor ich wielkości stanu stopniowo rozwija się w czasie, osiągając albo stan równowagi stabilnej, lub w przypadku niestabilnym przekracza fizyczne granice. W systemach nieliniowych wyższego rzędu może istnieć wiele stanów niestabilnych wobec czego istotne jest określenie zakresu ich obszarów stabilności. Problematyka jest wyjaśniona na bazie zapisu przy pomocy hiperwektorów¹, przy czym punktem wyjścia jest analogia do pojęcia potencjału w mechanice płynów.

Słowa kluczowe: system dynamiczny, stabilność, przestrzeń stanów, hiperwektor, potencjał.

¹ Najogólniej mówiąc hiperwektor jest to odpowiednik wektora zawierający macierze zamiast wielkości skalarnych. Pojęcie „hypervector” jest stosowane w literaturze anglosaskiej.

DOŚWIADCZALNA WERYFIKACJA DYNAMICZNEGO MODELU PROCESU ZGARNIANIA ŁADUNKÓW

Tomasz Piątkowski, Janusz Sempruch

Katedra Sterowania i Konstrukcji, Wydział Mechaniczny ATR
ul. Prof. S. Kaliskiego 7, 85-796 Bydgoszcz

W celu prowadzenia badań optymalizacyjnych procesu zgarniania na maszynie rozdzielczej zbudowano model teoretyczny procesu zgarniania. Ciągły proces zgarniania poddano dyskretyzacji wyodrębniając z niego etapy, które wyznaczają różne stany kinematyczno-dynamiczne ładunku w jakich może się on znaleźć podczas zgarniania. O przydatności tego modelu zdecydować może tylko badanie doświadczalne. Wykonane badania potwierdziły wartość modelu teoretycznego.

Słowa kluczowe: proces zgarniania, zgarniak, modelowanie.

1. WSTĘP

Dotychczasowym mankamentem maszyn do automatycznego sortowania ładunków jednostkowych na kierunku był dobór przez obsługę odpowiednich parametrów zgarniania (prędkości taśmy, cyklu pracy zgarniaka, opóźnienia zadziałania zgarniaka) [4]. Dobierane były one przypadkowo na zasadzie prób i błędów, przy braku informacji o poziomie pojawiających się przy zgarnianiu przeciążeń ładunków oraz o przyczynach niepoprawnego ich zgarniania. Do rozwiązania tego problemu potrzebny jest teoretyczny model procesu zgarniania. Przeprowadzenie badań modelu pod względem: symulacji zgarniania ładunków, optymalizacji parametrów zgarniania uwzględniającego ograniczenia, pozwolą na świadome sterowanie pracą maszyn rozdzielczych. W celu zaspokojenia wymienionych potrzeb zbudowano taki teoretyczny model [2, 3]. Ciągły proces zgarniania podzielono na fazy:

- 1) uderzenie ukośne narożem paczki o zgarniak,
- 2) ruch płaski paczki przy odskoku po udarze,
- 3) powtórne ukośne uderzenie o zgarniak,
- 4) obrót paczki wokół naroża ocierającego się o ramię zgarniaka,
- 5) ruch paczki wzdłuż ramienia zgarniaka,
- 6) poślizg narożnikami paczki o ramię zgarniaka i burtę taśmociągu.

Wyznaczają one odmienne stany kinematyczno-dynamiczne ładunku i opisane są odrębnymi równaniami dynamicznymi. Superpozycja tych stanów tworzy matematyczny model procesu zgarniania. O przydatności tego modelu zdecydować może jednak sprawdzenie go podczas badań doświadczalnych.

2. DOŚWIADCZALNE WYZNACZANIE WSPÓŁCZYNNIKA RESTYTUCJI PACZKI PRZY UDARZE

2.1. Metoda i program badań

Jedną z danych wejściowych teoretycznego modelu procesu zgarniania jest współczynnik restytucji paczki przy udarze. Jego wyznaczenie przeprowadzono doświadczalnie, metodą swobodnego spadku. Paczki zrzucano z wysokości H_0 i obserwowano wysokość ich odbicia po udarze H_1 . W celu uzyskania powtarzalności badań, paczki przed spadkiem pozycjonowano przy pomocy przyrządu. Kwadrat współczynnika restytucji k^2 wyznaczono, jako stosunek energii potencjalnej ciężkości odzyskanej przez paczkę po zderzeniu z nieodkształcalnym podłożem do energii potencjalnej ciężkości jaką paczka posiadała przed zderzeniem [5]:

$$k^2 = \frac{mgH_1}{mgH_0} \quad (1)$$

czyli

$$k = \sqrt{\frac{H_1}{H_0}} \quad (2)$$

gdzie:

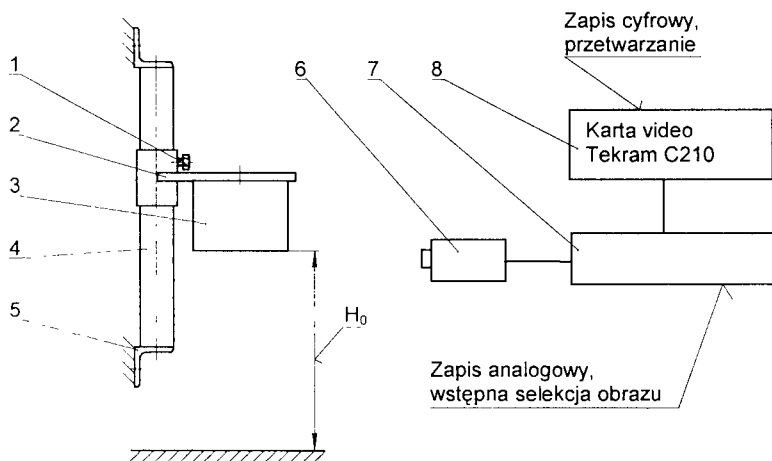
- m - masa ładunku,
- g - przyspieszenie ziemskie.

Do badań użyto paczek o trzech różnych masach i wymiarach: 1 kg (0.2x0.1x0.1 m), 5 kg (0.4x0.26x0.15 m) i 15 kg (0.4x0.4x0.2 m). Przygotowano po dwie paczki o wymienionych masach. Każdą z nich poddawano swobodnemu spadkowi z wysokości H_0 : 0.1 m, 0.2 m, 0.3 m oraz 0.4 m. Próby spadku dla poszczególnych wysokości i paczek wykonywano trzykrotnie na jeden wybrany bok i dwukrotnie - na krawędź (za każdym razem inną). Na podstawie prowadzonych badań wstępnych stwierdzono, że kolejne spadki na tę samą krawędź powodują obniżanie jej właściwości tłumiących przy uderzeniu (wzrost współczynnika restytucji do poziomu osiąganego przy spadku na bok), zaś kilkakrotny spadek na ten sam bok nie powoduje zasadniczych zmian mechanicznych paczki. Paczki wykonane były zgodnie z zaleceniami PN [7] z jednego arkusza trzywarstwowej tektury falistej [6]. Do uzyskania odpowiedniej masy je wypełniano uporządkowanymi (powiązаныmi w paczki) warstwami papieru.

2.2. Opis i warunki badań

Badania współczynnika restytucji metodą swobodnego spadku przeprowadzono z wykorzystaniem przyrządu do pozycjonowania paczek (rys.1). Przebieg eksperymentu swobodnego spadku paczek rejestrowano kamerą monochromatyczną CCD K-45R Elemis (z elektroniczną migawką 1/2000 s) ustawioną naprzeciwko stanowiska badań oraz nagrywano na magnetowidzie S-VHS Panasonic. Przyrząd do pozycjonowania paczek posiada przesuwną wzdłuż pionowej prowadnicy 4 półkę 2, z możliwością blokowania jej położenia śrubą 1. Przyrząd po wypoziomowaniu półki mocowany jest uchwytem 5 do ściany budynku. W półce 2 wykonany jest otwór, przez który podczas prób spadku paczki 3 przewlekano cięgną.

W przypadku próby spadku paczki na bok, jeden koniec ciężna utwierdzano w jej środku ciężkości, a drugim podciągano paczkę, opierając jej bok o wypoziomowaną powierzchnię półki (rys.1). Przy próbie spadku paczki na krawędź, ciężno mocowano do narożnika paczki, a paczkę podciągano pod półkę, aż do oparcia krawędzią. W takim ułożeniu środek ciężkości paczki ustawiał się na normalnej uderzenia. Położenie półki podczas prób blokowano w taki sposób, aby dno paczki (lub krawędź) znajdowało się na żądanej wysokości spadku H_0 . Paczka posiadała na powierzchni biały znacznik w kształcie krzyża na czarnym tle (kontrastowe zestawienie kolorów, czarne tło nie powoduje odbić oświetlenia). Na krzyżu znajdował się ciemny punkt kontrolny o średnicy 1 mm. Na czarnym tle ściany, na której umocowano przyrząd umieszczono podziałkę liniową w postaci białych pasków służącą do wyskalowania odczytów z prób zapisanych na taśmie video. Po przeprowadzeniu serii badań swobodnego spadku odtworzano zarejestrowany magnetowidem zapis, przeglądając go klatka po klatce. Najważniejszym i najtrudniejszym elementem badań było ustalenie wysokości, na jaką paczka wznosi się po odbiciu od podłoża po spadku. W tym celu kilka ostatnich klatek odpowiadających najwyższemu położeniu paczki po odbiciu zapisywano w postaci pliku mapy bitowej, korzystając z oprogramowania multimedialnego VideoCAP-C210 i karty video C210 firmy Tekram współpracującej z magnetowidem. Utworzone pliki importowano do edytora graficznego MS Paint i z dokładnością do jednego piksela odczytywano położenie znacznika paczki. Najwyższe z położen znacznika z poszczególnych klatek jednej próby spadku przyjmowano za wysokość odbicia paczki H_1 po swobodnym spadku. Obraz bitowy zapisywano z rozdzielczością 640x480 punktów. Przestrzeń 0.3 m oznaczona liniałem obok przyrządu odpowiadała 305 punktom na zarejestrowanym obrazie.



Rys.1. Układ rejestracji i odczytu wysokości odbicia ładunku: 1 - śruba, 2 - nastawna półka, 3 - zrzucana paczka, 4 - prowadnica, 5 - uchwyty mocujące, 6 - kamera, 7 - magnetowid, 8 - komputer

2.3. Wyznaczanie współczynnika restytucji

W tabelach 1 i 2 przedstawiono pomiary badań wysokości odbicia paczek H_1 z zarejestrowanych badań doświadczalnych wysokości odbicia paczek przy swobodnym spadku na bok i na krawędź. Przykładowy kadr z zapisanych badań przedstawiono na rysunku 2. Współczynniki restytucji (rys.3) wyznaczono na podstawie danych z tabel 1 i 2 po poddaniu ich aproksymacji wielomianem kwadratowym. Dodatkowo, dla paczki o masie 5 kg przy spadku na bok zaznaczono pasma rozrzutów wyników. Dla pozostałych paczek pasma rozrzutów mają podobne wartości (nie zaznaczono ich na wykresie).

Tabela 1

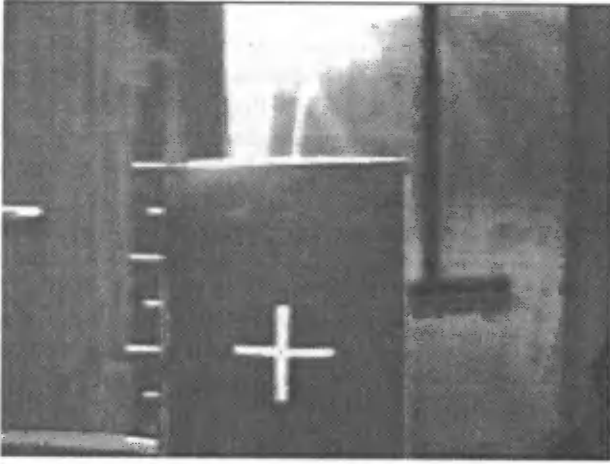
m [kg]	H_0 [m]	H_1 [m]					
		Paczka I			Paczka II		
		I próba	II próba	III próba	I próba	II próba	III próba
1	0,1	0,006	0,005	0,007	0,007	0,005	0,005
	0,2	0,010	0,009	0,011	0,009	0,009	0,011
	0,3	0,013	0,011	0,013	0,011	0,011	0,012
	0,4	0,016	0,015	0,017	0,016	0,015	0,015
5	0,1	0,005	0,004	0,006	0,005	0,005	0,004
	0,2	0,008	0,007	0,009	0,008	0,009	0,007
	0,3	0,012	0,011	0,013	0,013	0,011	0,012
	0,4	0,015	0,014	0,016	0,016	0,015	0,014
15	0,1	0,004	0,003	0,005	0,003	0,004	0,005
	0,2	0,008	0,007	0,009	0,008	0,009	0,007
	0,3	0,011	0,010	0,012	0,011	0,012	0,010
	0,4	0,014	0,013	0,015	0,013	0,015	0,014

Tabela 2

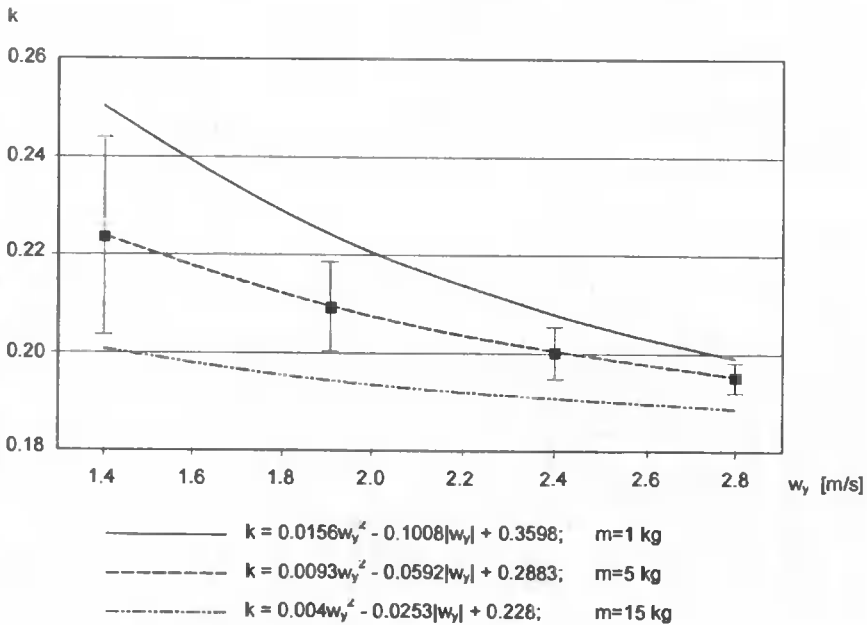
m [kg]	H_0 [m]	H_1 [m]			
		Paczka I		Paczka II	
		I próba	II próba	I próba	II próba
1	0,1	0,006	0,005	0,004	0,005
	0,2	0,010	0,007	0,009	0,009
	0,3	0,013	0,012	0,011	0,012
	0,4	0,016	0,016	0,016	0,015
5	0,1	0,004	0,003	0,005	0,005
	0,2	0,008	0,008	0,008	0,008
	0,3	0,012	0,010	0,013	0,011
	0,4	0,015	0,015	0,015	0,015
15	0,1	0,004	0,004	0,003	0,004
	0,2	0,008	0,006	0,008	0,007
	0,3	0,011	0,010	0,010	0,012
	0,4	0,014	0,015	0,013	0,014

Większy rozrzut wyników obliczonego współczynnika restytucji występuje przy spadku z niższej wysokości H_0 (niższej prędkości paczki w kierunku normalnym w_n , uzyskane przed uderzeniem), a mniejszy - przy spadku z wyższej wysokości. Rozrzuty wyników jednej paczki są na tyle duże, że „zachodzą” na wyniki obliczeń współczynnika restytucji paczek o innych masach. Wyznaczony współczynnik restytucji paczki przy spadku na krawędź jest nieco mniejszy niż przy spadku na bok, jest także mniej zależny od

prędkości uderzenia (wysokości swobodnego spadku H_0). Uzyskane wyniki spełniają oczekiwania autorów. Właściwości mechaniczne paczek (w tym właściwości sprężyste i tłumiące) mieszczą się w szerokich granicach i posiadają cechy statystyczne (prawdopodobieństwa).



Rys.2. Kadr z zapisanych badań swobodnego spadku



Rys.3. Współczynnik restytucji wyznaczony doświadczalnie

3. BADANIE DOŚWIADCZALNE PRZECIĄŻEŃ PACZKI PODCZAS ZGARNIANIA NA PMR I PRZY SWOBODNYM SPADKU

3.1. Metoda i program badań

Dla celów weryfikacji teoretycznej analizy procesu zgarniania paczek z maszyny rozdzielczej przeprowadzono badania doświadczalne zgarniania paczek i ich swobodnego spadku na nieodkształcalne podłoże. Przeciążenie jakiemu poddawana jest paczka w procesie sortowania nie powinno przekraczać przeciążenia osiąganego przez tę paczkę przy swobodnym spadku na nieodkształcalne podłoże z wysokości 0,3 m [1]. Do rejestracji przeciążeń jakim poddawana jest paczka wykorzystano czujnik sejsmiczny wbudowany w paczkę. Wprowadzone uproszczenia w modelowaniu teoretycznym traktujące paczkę jako ciało sztywne, a zgarniak jako mechanizm o nieodkształcalnych członach i nieskończenie wielkiej bezwładności wymagają, aby wyznaczyć rzeczywiste wartości przeciążeń w procesie zgarniania w odniesieniu do przeciążeń dopuszczalnych.

W badaniach wykorzystano dwie paczki o masie 15 kg i wymiarach 0,4x0,4x0,2 m. Próby zgarniania na maszynie rozdzielczej prowadzono dla następujących parametrów zgarniania:

- $V=0,65$ m/s, $t_c=1,36$ s, $R_s=0,35$ m,
- $V=1,10$ m/s, $t_c=1,36$ s, $R_s=0,15$ m,
- $V=1,87$ m/s, $t_c=1,36$ s, $R_s=-0,05$ m,
- $V=2,05$ m/s, $t_c=1,36$ s, $R_s=-0,22$ m.

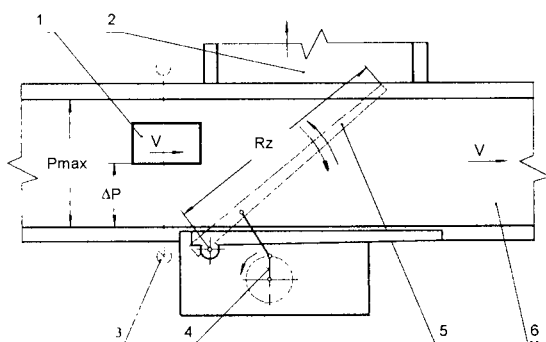
Podczas prób swobodnego spadku paczki zrzucano z wysokości H_0 : 0,2 m, 0,3 m i 0,4 m. Paczki przed spadkiem pozycjonowano przy pomocy przyrządu (rys.1). Badania prowadzono trzykrotnie dla każdej paczki, parametrów zgarniania i wysokości swobodnego spadku. Dodatkowo podczas badań zgarnięcia paczki na maszynie rozdzielczej przy danych parametrach zgarniania koniecznym było wykonanie prób przy dwóch położeniach czujnika sejsmicznego, obracanego o kąt 90° (wewnątrz paczki).

3.2. Opis i warunki badań

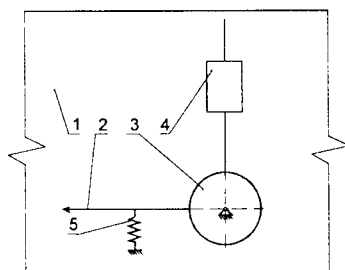
Badania zgarniania prowadzono na stanowisku będącego fragmentem maszyny rozdzielczej ze zgarniakiem wychyłowym naturalnej wielkości (rys.4). Zgarniak wykonany jest w formie ramienia 5, które połączone jest z układem napędowym 4 za pośrednictwem czworoboku przegubowego. Zadziałanie zgarniaka następuje z pewnym opóźnieniem po przecięciu przez ładunek 1 bariery świetlnej 3. W trakcie zgarniania ramię wykonuje ruch wahadłowy. Podczas otwierania się ramienia zgarniaka paczka zostaje zgarnięta do ześlizgu 2 umieszczonego po przeciwnej stronie taśmy przenośnika rozdzielczego 6 względem zamocowania urządzenia zgarniającego. Ruch jałowy wykonywany jest w trakcie zamykania się ramienia do pozycji wyjściowej.

Dla oszacowania przeciążeń, jakim poddawany jest ładunek w czasie zgarniania, czy podczas spadku na nieodkształcalne podłoże, zamontowano w paczce specjalnie skonstruowany przetwornik sejsmiczny (rys.5) umieszczony wraz z układem rejestrującym wewnątrz zgarnianej paczki. Urządzenie składa się z wahadła 3, które połączone jest sprężyną 5 z korpusem przyrządu. Bezwładność wahadła regulowana jest przy pomocy obciążnika 4 o nastawnym położeniu względem osi obrotu. W trakcie pojawienia się udaru wahadło wychyla się z położenia równowagi, a jego położenie rejestrowane jest na taśmie papieru 1. Urządzenie pozwala na rejestrację impulsu siły tylko

wzdłuż jednego kierunku. Próbę zgnięcia (dla danych parametrów zgniatania) należy przeprowadzić dwukrotnie, aby określić impuls siły wypadkowy powstały po zderzeniu paczki ze zgarniakiem w płaszczyźnie taśmociągu.



Rys.4. Zgarniak wychyłowy jednostronnego działania: 1 - zgarniany ładunek, 2 - ześlizg zbiorczy, 3 - bariera świetlna, 4 - mechanizm napędowy, 5 - ramię zgarniaka, 6 - taśma przenośnika rozdzielczego



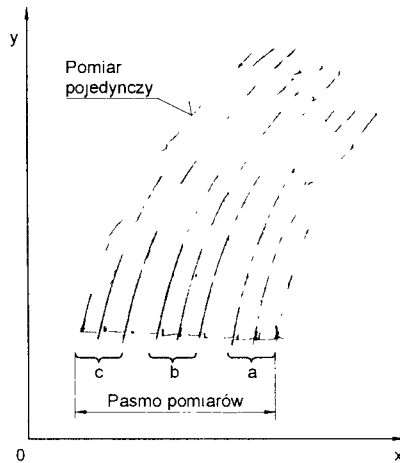
Rys.5. Przetwornik sejsmiczny: 1 - taśma papieru, 2 - pisak, 3 - wahadło, 4 - obciążnik, 5 - sprężyna

Przy każdej próbie czujnik przekładany jest w paczce o kąt 90° . Uzyskane wyniki pomiarów z wzajemnie prostopadłych kierunków po zsumowaniu wektorowym dają obraz pojawiającego się impulsu siły przy zderzeniu. Podczas badań na maszynie rozdzielczej zderzenie paczki ze zgarniakiem aranżowano tak, aby uzyskać jak największe oddziaływanie dynamiczne na ładunek. Powodowano aby uderzenie następowało w paczkę o dopuszczalnej masie 15 kg końcem zgarniaka i przy największej prędkości kątowej. W eksperymencie na maszynie rozdzielczej i przy próbie spadku na nieodkształcalne podłoże używano tej samej paczki, a udarowi poddawano jedną wybraną powierzchnię.

3.3. Wyniki badań

W tabeli 3 przedstawiono odczyty z badań doświadczalnych przeciążeń paczki zarejestrowanych podczas zgniatania na maszynie rozdzielczej a w tabeli 4 przy swobod-

nym spadku paczki. Ślad, jaki pozostawia pisak w czujniku sejsmicznym podczas badań swobodnego spadku przedstawia rysunek 6.



Rys.6. Ślady pozostawione przez pisak czujnika sejsmicznego podczas badań swobodnego spadku ładunku z wysokości H_0 : a) 0.2 m, b) 0.3 m, c) 0.4 m

Tabela 3

V [m/s]	Amplituda wychylenia masy sejsmicznej [mm]					
	I próba		II próba		III próba	
	0^0	90^0	0^0	90^0	90^0	90^0
0.65	50	11	48	10	52	13
1.10	59	11	61	10	57	11
1.87	73	12	72	12	70	10
2.05	76	15	75	13	73	13

Tabela 4

H_0 [m]	Amplituda wychylenia masy sejsmicznej [mm]		
	I próba	II próba	III próba
0.2	63	62	64
0.3	80	81	78
0.4	92	91	90

4. WYZNACZANIE RZECZYWISTEGO TORU RUCHU PACZKI

4.1. Metoda i program badań

Doświadczalne wyznaczenie toru ruchu paczki ma na celu zweryfikowanie przemieszczeń paczki osiągane drogą symulacji komputerowej. Sprawdzeniu wymaga, czy dla założonych parametrów sortowania zachodzi zgarnięcie paczki do ześlizgu. Wiadomo, że najtrudniejszymi przypadkami do zgarnięcia są sytuacje, gdy paczka:

- 1) minimalnych rozmiarów (200x100 mm) ułożona jest skrajnie na taśmociągu w największej odległości od osi obrotu zgarniaka,
- 2) granicznych wymiarów (700x100 mm) ułożona jest skrajnie na taśmociągu najbliżej osi obrotu zgarniaka.

Warunek niezawodnego zgarnięcia zostaje spełniony, jeśli nastąpi zgarnięcie paczki z drugiego przypadku przy zastosowaniu parametrów zgarniania zapewniających zgarnięcie z pierwszego przypadku niekorzystnego ułożenia przy zgarnianiu. Uproszczenia wprowadzone w modelowaniu teoretycznym nie mają wpływu na kontrolowanie warunków zgarnięcia z pierwszego przypadku. W tych obliczeniach wykorzystuje się tylko czynniki geometryczne, kinematyczne i niedynamiczne. Podczas badań doświadczalnych wystarczy skoncentrować się na wyznaczeniu toru ruchu paczki z drugiego przypadku niekorzystnego ułożenia na taśmociągu o wymiarach 700x100.

Wyznaczanie rzeczywistego toru ruchu geometrycznego środka paczki ułożonej przy burcie taśmociągu po stronie zamocowania zgarniaka $\Delta P=0$ przeprowadzono dwoma sposobami:

- rejestrując kamerą wideo proces zgarniania paczki,
- wykreślając tor ruchu paczki bezpośrednio na taśmie przenośnika rozdzielczego rysikiem umieszczonym wewnątrz paczki.

Próbowo zgarniania poddawano paczkę o wymiarze 700x100 mm i masie 3,5 kg (wg PN [6, 7]). Eksperyment wykonywano dla dwóch wartości parametrów zgarniania:

- obecnie stosowanych na maszynach rozdzielczych ($t_c=1,36$ s, $V=0,65$ m/s, $R_s=0.8$ m),
- zmodyfikowanych o podwyższonej prędkości taśmy ($t_c=1,36$ s, $V=2$ m/s, $R_s=0$ m).

4.2. Opis i warunki badań

Rejestrację procesu zgarniania kamerą video CCD K-45 R Elemis prowadzono podobnie, jak podczas wyznaczania współczynnika restytucji metodą swobodnego spadku. Kamera podwieszona była pod sufitem pomieszczenia, w którym zainstalowany był fragment maszyny rozdzielczej przygotowanej do prób zgarniania. Powierzchnia paczki obserwowana kamerą video pokryta była czarnym nieodblaskowym papierem, a na nim umieszczono biały kontrastowy znak w kształcie krzyża. Na krzyżu znajdował się kontrastowy punkt kontrolny o średnicy 2 mm. Na burcie taśmociągu, także na ciemnym tle - umieszczono podziałkę liniową pozwalającą na późniejsze, podczas odczytu zapisów video określenie rzeczywistych przemieszczeń paczki. Utworzone zapisy z procesu zgarniania przeglądano klatkę po klatce i zapisywano obrazy w formacie plików bmp. Pliki importowano do edytora graficznego Ms Paint, a następnie odczytywano położenie współrzędnych położenia znaku charakterystycznego paczki z dokładnością do jednego punktu. Kolejne położenia znaku paczki z poszczególnych klatek zapisu wyznaczają tor ruchu paczki podczas zgarniania. Obraz bitowy zapisano z rozdzielczością 640x480 punktów. Odległość 0,6 m oznaczona liniałem na burcie taśmociągu odpowiadała 304 punktom na obrazie edytora graficznego.

Wyznaczenie rzeczywistego toru ruchu geometrycznego środka paczki na taśmie przenośnika rozdzielczego prowadzono także bezpośrednio na taśmociągu. Do wnętrza paczki wmontowano przyrząd piszący z końcówką wystającą na zewnątrz na przecięciu przekątnych podstawy paczki. Po wykonaniu próby zgarnięcia „spreparowanej” paczki na taśmociągu pozostawał ślad – tor ruchu paczki. Po opomiarowaniu wykreślonego na taśmociągu toru, przenoszono go do arkusza kalkulacyjnego Ms Excel 97.

4.3. Wyniki badań

Wyniki obserwacji położenia geometrycznego środka paczki na podstawie odczytów obrazów zapisanych podczas jej zgarniania przedstawiono w tabeli 5 i 6 (odpowiednio dla parametrów: $t_c=1,36$ s, $V=0,65$ m/s, $R_s=0,8$ m oraz $t_c=1,36$ s, $V=2$ m/s, $R_s=0$ m). Odtworzony kadr z badań zgarniania ładunku z taśmociągu umieszczono na rysunku 7. Współrzędne torów ruchu paczki (dla parametrów: $t_c=1,36$ s, $V=0,65$ m/s, $R_s=0,8$ m oraz $t_c=1,36$ s, $V=2$ m/s, $R_s=0$ m) odczytane bezpośrednio ze śladu wykreślonego przez paczkę na taśmie przenośnika rozdzielczego przedstawiono w tabelach 7 i 8.

Tabela 5

Nr	P [m]	T [m]
1	0,050	0
2	0,059	0,034
3	0,085	0,066
4	0,122	0,089
5	0,173	0,100
6	0,229	0,107
7	0,279	0,102
8	0,364	0,091
9	0,427	0,080
10	0,480	0,064
11	0,515	0,066

Tabela 6

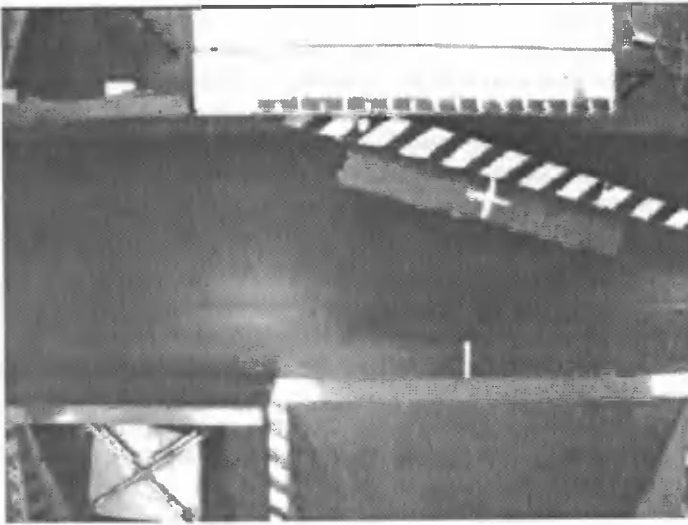
Nr	P [m]	T [m]
1	0,050	0
2	0,050	0,095
3	0,050	0,200
4	0,050	0,307
5	0,050	0,414
6	0,059	0,516
7	0,090	0,611
8	0,124	0,698
9	0,197	0,766
10	0,276	0,820
11	0,364	0,857
12	0,435	0,875
13	0,541	0,895
14	0,643	0,934
15	0,702	0,995

Tabela 7

Nr	P [m]	T [m]
1	0,05	0
2	0,18	0,05
3	0,28	0,10
4	0,36	0,15
5	0,43	0,20
6	0,49	0,25
7	0,55	0,30

Tabela 8

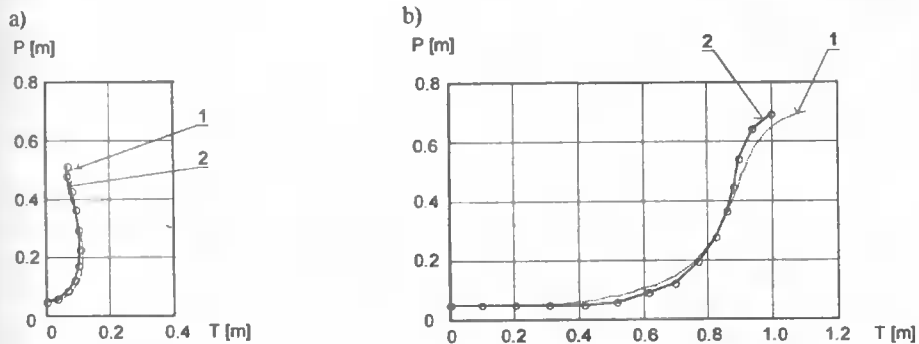
Nr	P [m]	T [m]
1	0,05	0
2	0,16	0,05
3	0,25	0,10
4	0,33	0,15
5	0,40	0,20
6	0,46	0,25
7	0,52	0,30
8	0,57	0,35
9	0,62	0,40
10	0,68	0,45
11	0,70	0,47



Rys.7. Kadr pochodzący z badań zgarniania ładunku na maszynie rozdzielczej

5. ANALIZA UZYSKANYCH WYNIKÓW I WNIOSKI

Na rysunku 8 wykreślono obok siebie toru ruchu paczki względem ramy przenośnika rozdzielczego – uzyskane drogą symulacji komputerowej (1) i zarejestrowane kamerą video (2). Uzyskano wysoką zgodność torów (teoretycznego i rzeczywistego) przy niskiej prędkości taśmy, zaś nieco mniejszą zgodność przy wyższej prędkości przenośnika. Rozbieżność torów ruchu paczki wynika z różnego przemieszczania się paczki wzdłuż osi taśmociągu.



Rys.8. Toru ruchu paczki (700x100x100 mm, $\Delta P=0$) względem ramy przenośnika rozdzielczego, 1 - modelowanie teoretyczne, 2 - zarejestrowany kamerą video; parametry zgarniania: a) $t_c=1,36$ s, $V=0,65$ m/s, $R_s=0,8$ m, b) $t_c=1,36$ s, $V=2$ m/s, $R_s=0$ m

W przypadku toru ruchu zarejestrowanego bezpośrednio na przenośniku taśmowym maszyny rozdzielczej, porównanie go z torem wyznaczonym analitycznie wymaga

przekształceń toru. Punkty tworzące wykres symulacji matematycznej odzwierciedlają położenie paczki względem konstrukcji maszyny rozdzielczej w odstępach czasowych co $\Delta t = 1/100$ s. Dla rozważań przyjęto prostokątny układ współrzędnych Oxy z osią x skierowaną w kierunku ruchu taśmy, leżącą na skraju taśmociągu i osią y, przechodzącą przez punkt rozpoczęcia poślizgu paczki na taśmie. Traktując ruch taśmy $V = \text{const}$ jako prędkość unoszenia paczki w kierunku osi x można ustalić, że droga przebyta przez paczkę spowodowana ruchem unoszenia w równych odstępach czasowych Δt , to:

$$\Delta x^u = V \Delta t \quad (3)$$

a od początku układu współrzędnych Oxy

$$x^u_{j+1} = x^u_j + \Delta x^u \quad (4)$$

Współrzędne teoretycznego toru ruchu paczki w kierunku osi x na taśmociągu, mając do dyspozycji tor ruchu paczki względem ramy maszyny rozdzielczej, daje się wyznaczyć wg następującej zależności:

$$x^w_j = x_j - x^u_j \quad (5)$$

gdzie:

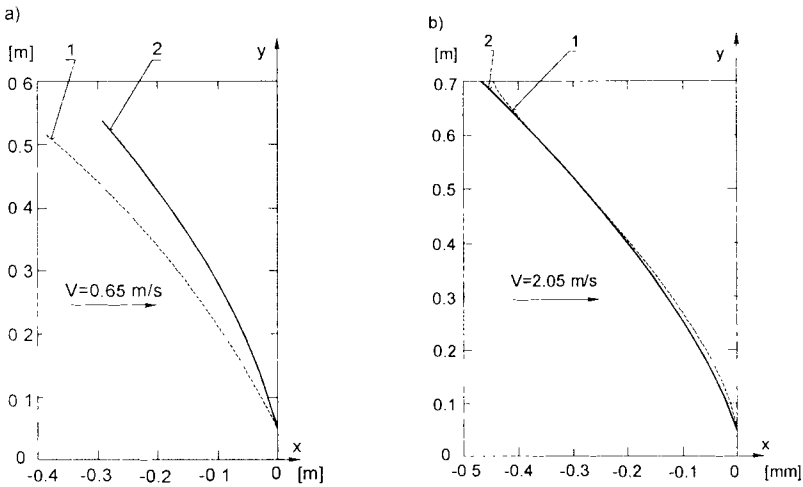
- x^u - droga przebyta przez paczkę spowodowana ruchem unoszenia z prędkością V w kierunku osi x,
- x^w - droga przebyta przez paczkę względem taśmociągu w kierunku osi x,
- x - droga przebyta przez paczkę względem ramy maszyny rozdzielczej w kierunku osi x,
- j - numer kolejny współrzędnej wykresu teoretycznego toru ruchu paczki.

Przemieszczenie paczki w kierunku osi y nie wymaga przekształceń, gdyż przesunięcie paczki w poprzek konstrukcji maszyny rozdzielczej w ruchu względem ramy przenośnika jest jednocześnie przesunięciem paczki w poprzek taśmy w ruchu względem taśmy przenośnika.

Posługując się opisanym algorytmem utworzono wykresy teoretyczne toru ruchu paczki po taśmociągu (1), które wykreślono na rysunku 9, obok rzeczywistych torów ruchu wyznaczonych w doświadczeniu (2). Większą zgodność przebiegów teoretycznego i rzeczywistego toru ruchu cechują parametry zgarniania przy większych prędkościach ruchu taśmy – rysunek 9b, inaczej niż na rysunku 8.

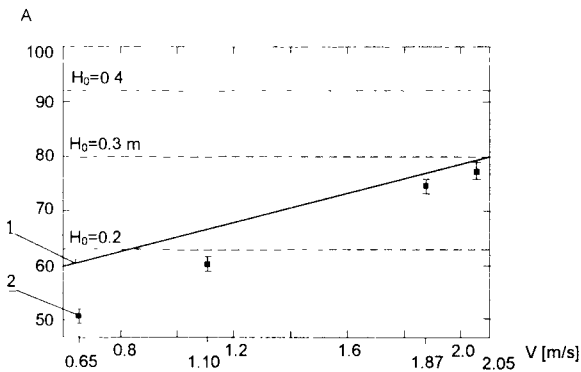
Porównując przebiegi krzywych doświadczalnych (2) i teoretycznych (1) (także z rys.8) można stwierdzić, że przyjęte założenia w modelowaniu teoretycznym pozwalają określić, czy dane parametry zgarniania zapewnią zgarnięcie paczki do ześlizgu. Zgarnięcie następuje, gdy tor ruchu paczki pokonuje przenośnik na całą jego szerokość, tj. odległość 0,7 m. Mimo iż na rysunku 9a, przy niższych prędkościach taśmy obserwuje się niepełne pokrywanie torów, teoretycznego i doświadczalnego, a na rysunku 8b przy wyższych prędkościach, to jednak przemieszczenie paczki w poprzek taśmociągu w kierunku osi y jest w rozpatrywanych przypadkach bardzo zbliżone. Rozbieżność torów wynika z odmiennego przemieszczenia się geometrycznego środka ładunku wzdłuż osi taśmociągu, w kierunku ruchu taśmy. Wykorzystując model matematyczny procesu zgarniania prawidłowo oceniono, że obecnie stosowane parametry zgarniania na maszynie rozdzielczej ($V=0,65$ m/s, $t_c=1,36$ s, $R_s=0,8$ m) nie pozwalają na prawidłowe zgarnięcie paczki granicznych wymiarów 700x100 mm. Zwiększając zaś prędkości

taśmy do 2 m/s i przyspieszając reakcję zgarniaka ($R_s=0$ m) następuje zgarnięcie tej paczki - co poparto badaniami doświadczalnymi.



Rys.9. Tor ruchu paczki względem przenośnika rozdzielczego podczas zgarniania zgarniakiem wychyłowym, 1 - modelowanie teoretyczne, 2 - badania doświadczalne; parametry zgarniania: a) $t_c=1,36$ s; $V=0,65$ m/s; $R_s=0,8$ m, b) $t_c=1,36$ s; $V=2,05$ m/s; $R_s=0$ m.

Na rysunku 10 przedstawiono wyniki badań doświadczalnych przeciążeń paczki podczas zgarniania na maszynie rozdzielczej (pasma rozrzutu 2) i przy swobodnym spadku (poziome linie przerywane). Umieszczono na nim także krzywą (1) obrazującą wyniki obliczeń teoretycznych oddziaływania dynamicznego zgarniaka na paczkę. Naniesiono ją tak, że na rysunku 10 osiąga wartości przeciążeń odpowiadających wysokości swobodnego spadku $H_0=0,2$ m i $H_0=0,3$ m dla takich samych prędkości taśmy V jak uzyskanych drogą obliczeń matematycznych. Analizując rysunek 10 okazuje się, że podczas badań rejestrowano przeciążenia paczki mniejsze niż te, które uzyskiwano z obliczeń matematycznych.



Rys.10. Przeciążenia osiągane przy swobodnym spadku i przy zgarnianiu na maszynie sortującej dla cyklu pracy zgarniaka $t_c=1,36$ s: 1 - modelowanie teoretyczne, 2 - badania doświadczalne; A - amplituda wychylenia masy sejsmicznej

Dla niższych prędkości taśmy rzeczywiste oddziaływanie dynamiczne zgarniaka na paczkę bardziej odbiegało od teoretycznego, a dla prędkości dochodzącej do 2 m/s osiągnięto wyższą zgodność wyników. Wykorzystując model matematyczny do oceny powstałych przeciążeń paczki w zakresie przebadanych prędkości taśmy nie istnieje groźba, że zostaną przekroczone rzeczywiste przeciążenia dopuszczalne. Rozbieżność wyników znajduje się w obszarze bezpiecznym dla paczki niedopuszczając do jej uszkodzenia.

Zbudowany model teoretyczny zgarniania spełnia postawione przed nim oczekiwania. Zadowolająco ocenia przeciążenia paczki, powstające w procesie zgarniania w odniesieniu do dopuszczalnych i poprawnie określa jej przemieszczenie w poprzek taśmociągu dla danych parametrów zgarniania.

LITERATURA

- [1] Informacja o dopuszczeniu do obrotu pocztowego paczek pocztowych w typowych opakowaniach i kartonach. Technika i Eksploatacja Poczty 4'93, s.22-28.
- [2] Piątkowski T., Sempruch J.: Analiza procesu zgarniania na przykładzie paczkowej maszyny rozdzielczej, XVI Ogólnopolska Konferencja Naukowo-Dydaktyczna TMM, Rzeszów-Jawor, 1998, s.175-182.
- [3] Piątkowski T., Sempruch J.: Uderzenie ukośne ciał szorstkich jako element procesu zgarniania, XVI Ogólnopolska Konferencja Naukowo-Dydaktyczna TMM, Rzeszów-Jawor, 1998, s.167-175.
- [4] Rawłuszko J.: O problemach mechanicznych przy dystrybucji paczek, Zeszyty naukowe ATR Nr 192 Mechanika 37, Bydgoszcz, 1995, s.139-144.
- [5] Stronge W. J.: Unraveling paradoxical theories for rigid body collisions, ASME Journal of Applied Mechanics, Vol.58, 1991, pp.1049-1055.
- [6] PN-P-50527:1968, Tektury faliste.
- [7] PN-T-85000:1998, Typowe opakowania do paczek pocztowych.

EXPERIMENTAL VERIFICATION OF THE DYNAMIC SCRAPING PROCESS OF LOADS

Summary

In order to realise of research optimization of scraping process on separating machine, build theoretical model of scraping process. The continuous process has been divided into number of stages present different kinematic and dynamic conditions acting on package during the sorting procedure. About usefulness this model must decide only experimental research. Magnitude of the theoretical model was confirmed by realized research.

Key words: scraping process, scrapers arm, modelling.

METODA ELEMENTÓW CZASOPRZESTRZENNYCH W ZAGADNIENIU KONTAKTU CIAŁ STAŁYCH

Anna Podhorecka, Adam Podhorecki

Katedra Mechaniki Budowli, Wydział Budownictwa i Inżynierii Środowiska ATR
ul. Prof. S. Kaliskiego 7, 85-796 Bydgoszcz

W pracy rozpatruje się zagadnienie dynamiczne kontaktu ciał stałych opisanym modelem lepkosprężystym. Na styku ciał uwzględnia się tarcie suche opisanym prawem Coulomba. Zagadnienie początkowo-brzegowe, opisane w pierwszym równaniami różniczkowymi cząstkowymi, sprowadzono do sformułowania globalnego w postaci równań czteropracy wirtualnej. Ostatecznie rozwiązany problem rozwiązuje się metodą elementów czasoprzestrzennych (MECZ). Przy znanych warunkach początkowych rozwiązanie, przy zastosowaniu MECZ, sprowadza się do formuły rekurencyjnej.

Słowa kluczowe: mechanika ciała stałego, lepkosprężystość, zagadnienie kontaktowe, metoda elementów czasoprzestrzennych.

1. WSTĘP

Podstawy metody elementów czasoprzestrzennych (MECZ) opracował KĄCZKOWSKI [1,2]. Idea metody polega na dyskretyzacji continuum czasoprzestrzennego w wyniku czego przejście od równań różniczkowych cząstkowych do równań algebraicznych odbywa się w jednym etapie. Takie przejście jest charakterystyczne dla wszystkich metod bezpośredniego całkowania równań ruchu. Cechą wyróżniającą MECZ jest charakterystyczna aproksymacja pól przemieszczeń, odkształceń i naprężeń w całym analizowanym obszarze czasoprzestrzennym. Nieskrępowana dyskretyzacja stwarza możliwość dostosowania podziału obszaru czasoprzestrzennego do przebiegu obciążenia, rozwiązywania takich zadań, w których zachowania ustroju spełniają różne równania oraz różniczkowe w przesuwającym się czasie.

Zagadnienie kontaktu jest jednym z głównych problemów mechaniki odkształcalnego ciała stałego i ważnym problemem inżynierskim (np. praca HUBERA [3]). Oryginalny dorobek w przystosowaniu metody elementów skończonych do rozwiązywania nieliniowych zagadnień spoczynkowego kontaktu wniosły, m.in. prace CHANA i TUBY [4], KALKERA [5,6]. Zagadnienie kontaktu w warunkach ruchu podejmowało w ostatnich latach kilku badaczy, np. [7,8,9].

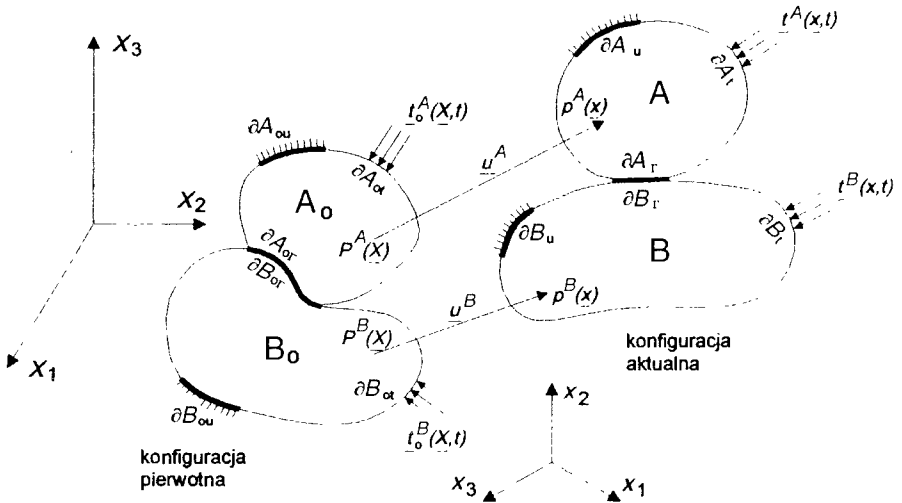
Zadaniem autorów tej pracy jest analiza dynamiczna kontaktu ciał lepkosprężystych. Praca ta stanowi próbę zastosowania MECZ do zadań kontaktowych.

2. PODSTAWOWE RÓWNANIA LEPKOSPĘŻYSTOŚCI

2.1. Założenia i oznaczenia

Rozpatrujemy dwa ciała lepkospężyste zajmujące w naturalnej (początkowej) konfiguracji obszary $\overline{A_0}$ i $\overline{B_0}$, które są podzbiórmi przestrzeni euklidesowej trójwymiarowej R_0 . Przez A_0 i B_0 oznaczamy wnętrze tych obszarów a przez ∂A_0 i ∂B_0 ich brzegi, które są sumą następujących zbiorów (rys. 1):

$$\partial A = \partial A_{ot} \cup \partial A_{or} \cup \partial A_{ou}, \quad \partial B = \partial B_{ot} \cup \partial B_{or} \cup \partial B_{ou}. \quad (2.1)$$



Rys.1. Analizowany problem i stosowane oznaczenia

Ruch ciała będziemy badali w przedziale czasu $t \in (-\infty, \infty)$. Do określenia deformacji użyjemy stacjonarnego opisu Lagrange'a \underline{X} . Zmienne dynamiczne są funkcjami ciągłymi i gładkimi. Funkcja $f(\underline{X}, t)$, $\underline{X}, t \in C \times (a, b)$ jest klasy $C^{M, N}$, jeżeli $f(\underline{X}, t)$ istnieje w obszarze $\underline{X}, t \in C \times (a, b)$ a pochodne cząstkowe

$$f_{i_1 \dots i_m}^{(n)}(\underline{X}, t) = \frac{\partial^{m+n} f(\underline{X}, t)}{\partial X_{i_1} \dots \partial X_{i_m} \partial t^n} \quad (2.2)$$

gdzie:

m – liczba indeksów, $m = 0, 1, 2, \dots, M$, $n = 0, 1, 2, \dots, N$
istnieją i są ciągłe w obszarze $\underline{X}, t \in C \times (a, b)$.

Funkcja $f(\underline{X}, t)$, $\underline{X}, t \in (-\infty, \infty)$ jest klasy $H^{M, N}$ (Heaviside'a) jeżeli:

$$\begin{aligned} f(\underline{X}, t) &= 0 \quad \text{dla} \quad \underline{X}, t \in C(-\infty, 0) \\ f(\underline{X}, t) &\text{ jest klasy } C^{M, N} \quad \text{dla} \quad \underline{X}, t \in C \times < 0, \infty > \end{aligned} \quad (2.3)$$

2.2. RÓWNANIA GEOMETRYCZNE

Jeśli korzystamy z tego samego kartezjańskiego układu współrzędnych do opisu konfiguracji pierwotnej i aktualnej (tzn. $\underline{X}=\underline{x}$), wówczas odkształcenia opisujemy tensorem Greena [10,11]

$$E_{ij} = \frac{1}{2} \left(\frac{\partial u_i}{\partial X_j} + \frac{\partial u_j}{\partial X_i} + \frac{\partial u_k}{\partial X_i} \frac{\partial u_k}{\partial X_j} \right) \quad (2.4)$$

gdzie:

$$u_i = x_i - X_i, \quad \underline{X}_i, t \in (\overline{B}_0 \wedge \overline{A}_0) \times \langle 0, \infty \rangle, \quad i, j, k=1,2,3 \quad (2.5)$$

opisuje składowe wektora przemieszczenia.

2.1. RÓWNANIA KONSTITUTYWNE

Stan naprężenia w konfiguracji aktualnej i do niej odniesiony opisuje tensor Cauchy'ego σ_{ij} . Odkształcenia E_{ij} odnosimy do początkowego położenia cząstek w ośrodku ciągłym, więc naprężenia też należy określić względem pierwotnej konfiguracji. Stan naprężenia w konfiguracji aktualnej, odniesiony do początkowej, reprezentują niesymetryczny tensor Lagrange'a S_{ij} (I tensor Pioli-Kirchhoffa) lub symetryczny tensor Kirchhoffa T_{ij} (II tensor Pioli-Kirchhoffa). Między tymi tensorami zachodzą następujące związki [10]:

$$\sigma_{ij} = \frac{\rho}{\rho_0} \left(\delta_{ip} + \frac{\partial u_i}{\partial X_p} \right) S_{pj}, \quad S_{ij} = T_{ip} \left(\delta_{ip} + \frac{\partial u_i}{\partial X_p} \right) \quad (2.6)$$

$$\sigma_{ij} = \frac{\rho}{\rho_0} \left(\delta_{i\alpha} + \frac{\partial u_i}{\partial X_\alpha} \right) \left(\delta_{j\beta} + \frac{\partial u_j}{\partial X_\beta} \right) T_{\beta\alpha}, \quad \frac{\rho}{\rho_0} = \det \left| \delta_{ij} + \frac{\partial u_i}{\partial X_j} \right|$$

Związek między symetrycznymi tensorami naprężenia $T_{ij}(\underline{X}, t)$ i odkształcenia $E_{ij}(\underline{X}, t)$ lub $\varepsilon_{ij}(\underline{X}, t)$ przyjmujemy w postaci całkowej:

$$T_{ij}(\underline{X}, t) = \int_{-\infty}^t \Psi_{ijkl}(\underline{E}, \underline{X}, t-z) \frac{\partial E_{kl}}{\partial z}(\underline{X}, t) dz \quad (2.7)$$

$$T_{ij}(\underline{X}, t) = \int_{-\infty}^t \Psi_{ijkl}^*(\underline{\varepsilon}, \underline{X}, t-z) \frac{\partial \varepsilon_{kl}}{\partial z}(\underline{X}, t) dz$$

gdzie:

Ψ_{ijkl} , Ψ_{ijkl}^* - tensorowymi funkcjami relaksacji materiału, które można wyznaczyć doświadczalnie. Miarami odkształcenia mogą być też: wydłużenie względne ε_{kk} i odkształcenie postaciowe γ_{ik} , które w odróżnieniu od składowych tensora Greena \underline{E} mają interpretację geometryczną [10, 11]

$$\varepsilon_{kk} = \sqrt{1 + 3E_{kk}} - 1 \quad (2.8)$$

$$\cos \varphi_{ik} = \cos(\pi/2 - \gamma_{ik}) = \sin \gamma_{ik} = \frac{2E_{ik}}{\sqrt{(1 + 2E_{ii})(1 + 2E_{kk})}}$$

Wyrażenia (2.8) można rozwinąć w szeregi potęgowe [12,13]

$$\begin{aligned} \varepsilon_{kk} &= E_{kk} \left(1 - \frac{1}{2} E_{kk} + \frac{1}{2} E_{kk} E_{kk} - \dots \right) \\ &\quad |2E_{kk}| \leq 1, \\ \gamma_{ik} &= \arcsin \frac{2E_{ik}}{\sqrt{(1 + 2E_{ii})(1 + 2E_{kk})}} = \frac{2E_{ik}}{\sqrt{(1 + 2E_{ii})(1 + 2E_{kk})}} \left(\frac{2E_{ik} E_{ik}}{3(1 + 2E_{ii})(1 + 2E_{kk})} + \dots \right) \\ &\quad \left| \frac{2E_{ik}}{\sqrt{(1 + 2E_{ii})(1 + 2E_{kk})}} \right| \leq 1 \end{aligned} \quad (2.9)$$

Zapiszmy odkształcenia ε_{ij} w formie skondensowanej

$$\varepsilon_{ij} = \delta_{ik} \delta_{jk} \varepsilon_{kk} + \frac{1}{2} (\delta_{kk} \delta_{ik} \delta_{jl} - \delta_{kl} \delta_{ik} \delta_{jk}) \gamma_{kl} \quad (2.10)$$

które po wprowadzeniu rozwinięć (2.9) przyjmują postać:

$$\varepsilon_{ij} = a_{ijkl}(\underline{E}) E_{kk} + b_{ijkl}(\underline{E}) E_{kl} \quad (2.11)$$

gdzie:

$$a_{ijkk}(\underline{E}) = \delta_{ik} \delta_{jk} \left(1 - \frac{1}{2} E_{kk} + \frac{1}{2} E_{kk} E_{kk} - \dots \right) \quad (2.12)$$

$$b_{ijkl}(\underline{E}) = (\delta_{kk} \delta_{ik} \delta_{jl} - \delta_{kl} \delta_{ik} \delta_{jk}) \frac{1}{\sqrt{(1 + 2E_{kk})(1 + 2E_{ll})}} \left[1 + \frac{2E_{kl} E_{kl}}{(1 + 2E_{kk})(1 + 2E_{ll})} + \dots \right]$$

W przypadku małych odkształceń zanika różnica między prezentowanymi miarami odkształcenia (tzn. $\underline{\varepsilon} \cong \underline{E}$), gdyż

$$a_{ijkk} \cong \delta_{ik} \delta_{jk}, \quad b_{ijkl} \cong \delta_{kk} \delta_{ik} \delta_{jl} - \delta_{kl} \delta_{ik} \delta_{jk} \quad (2.13)$$

Jeżeli ruch rozpoczyna się od czasu $t=0$ i ponadto przyjmiemy, że dla $t < 0$

$$T_{ij} = 0, \quad E_{ij} = 0 \quad (2.14)$$

to równanie (2.7) można sprowadzić do innej równoważnej postaci

$$T_{ij} = \Psi_{ijkl}^*(\underline{E}, \underline{X}, t) E_{kl}(\underline{X}, 0^+) + \int_0^t \Psi_{ijkl}^*(\underline{E}, \underline{X}, t-z) \frac{\partial E_{kl}}{\partial z}(\underline{X}, z) dz \quad (2.15)$$

$$T_{ij} = \Psi_{ijkl}(\underline{\varepsilon}, \underline{X}, t) \varepsilon_{kl}(\underline{X}, 0^+) + \int_0^t \Psi_{ijkl}(\underline{\varepsilon}, \underline{X}, t-z) \frac{\partial \varepsilon_{kl}}{\partial z}(\underline{X}, z) dz$$

Zależności między naprężeniami i odkształceniami można ująć także w postaci równań różniczkowych (por. [10, 11])

$$P_1(D)T_{ij} = Q_1(D)\varepsilon_{ij}', \quad P_2(D)T_{kk} = Q_2(D)\varepsilon_{kk}, \quad (2.16)$$

gdzie:

$$P_1(D) = \sum_{k=0}^{n_1} a_k D^k, \quad Q_1(D) = \sum_{k=0}^{m_1} b_k D^k, \quad (2.17)$$

$$P_2(D) = \sum_{k=0}^{n_2} c_k D^k, \quad Q_2(D) = \sum_{k=0}^{m_2} d_k D^k, \quad D^k = \frac{\partial}{\partial t}$$

są liniowymi operatorami różniczkowymi względem czasu t , natomiast:

$$T_{ij} = T_{ij} - \frac{1}{3}\delta_{ij}T_{kk}, \quad \varepsilon_{ij}' = \varepsilon_{ij} - \frac{1}{3}\delta_{ij}\varepsilon_{kk} \quad (2.18)$$

oznaczają dewiatory naprężenia i odkształcenia. Współczynniki a, b, c, d ujmują własności lepkosprężyste materiału i wyznaczone są doświadczalnie. Sformułowanie (2.16) oznacza liniową zależność naprężeń Pioli-Kirchhoffa T_{ij} i odkształceń ε_{ij} . Jeśli prawo naprężenie-odkształcenie dla danego materiału może być wyrażone w postaci różniczkowej (2.16) i całkowej (2.15), wówczas musi istnieć zależność między funkcją relaksacji a operatorami różniczkowymi. Z rozwikłania równań (2.16) z wykorzystaniem transformacji Laplace'a uzyskamy następujące równanie fizyczne:

$$T_{ij}'(\underline{X}, t) = \int_0^t \Psi_1(\underline{X}, t-z) \frac{\partial \varepsilon_{ij}}{\partial z}(\underline{X}, z) dz + \sum_{k=1}^{n_1} \Phi_{1k}(\underline{X}, t) \frac{\partial^{k-1} T_{ij}'}{\partial t^{k-1}}(\underline{X}, 0) - \sum_{k=1}^{m_1} \Theta_{1k}(\underline{X}, t) \frac{\partial^{k-1} \varepsilon_{ij}'}{\partial t^{k-1}}(\underline{X}, 0) \quad (2.19)$$

$$T_{ii}(\underline{X}, t) = \int_0^t \Psi_2(\underline{X}, t-z) \frac{\partial \varepsilon_{ii}}{\partial z}(\underline{X}, z) dz + \sum_{k=1}^{n_2} \Phi_{2k}(\underline{X}, t) \frac{\partial^{k-1} T_{ii}}{\partial t^{k-1}}(\underline{X}, 0) - \sum_{k=1}^{m_2} \Theta_{2k}(\underline{X}, t) \frac{\partial^{k-1} \varepsilon_{ii}}{\partial t^{k-1}}(\underline{X}, 0)$$

gdzie:

Ψ_1, Ψ_2 - są kolejno funkcjami relaksacji przy ścinaniu i wszechstronnym ścisnaniu. Funkcjami relaksacji początkowych naprężeń i odkształceń są także funkcje Φ_{ik} oraz Θ_{ik} . Wymienione funkcje relaksacji otrzymamy z następujących transformat Laplace'a

$$\tilde{\Psi}_1(p) = \frac{\tilde{Q}_1(p)}{p\tilde{P}_1(p)}, \quad \tilde{\Phi}_{ik}(p) = \frac{\tilde{P}_{ik}(p)}{\tilde{P}_1(p)}, \quad \tilde{\Theta}_{ik}(p) = \frac{\tilde{\Theta}_{ik}(p)}{\tilde{P}_1(p)}$$

$$\tilde{P}_{1k}(p) = \sum_{r=k}^{n_1} a_r p^{r-k}, \quad \tilde{P}_{2k}(p) = \sum_{r=k}^{n_2} c_r p^{r-k} \quad (2.20)$$

$$\tilde{Q}_{1k}(p) = \sum_{r=k}^{m_1} b_r p^{r-k}, \quad \tilde{Q}_{2k}(p) = \sum_{r=k}^{m_2} d_r p^{r-k}, \quad k > 0$$

Transformację Laplace'a dla funkcji $f(t)$ oznaczamy przez nadkreślenie:

$$\tilde{f}(p) = \int_0^{\infty} e^{-pt} f(t) dt, \quad R_e(p) > p_0, \quad t \in \mathbb{R}, \quad (2.21)$$

gdzie:

p_0 - rzędna zbieżności całki Laplace'a.

Definicja naprężeń T_{ij} przy użyciu składowych odkształceń ε_{ij} umożliwia w prosty sposób zaadaptowanie znanych modeli liniowej lepkośćprężystości (słusznych dla infinytezymalnych deformacji) [12]. Istnieje zatem możliwość jawnego opisanie w pierw operatorów różniczkowych $P(D)$ i $Q(D)$ a następnie funkcji relaksacji $\underline{\Psi}$, $\underline{\Phi}$ i $\underline{\Theta}$. Wiele funkcji relaksacji dla różnych modeli lepkośćprężystych przedstawiono w pracach [11,12,14]. Wygodnie będzie wyrazić bezpośrednio składowe stanu naprężenia przez składowe stanu odkształcenia, a nie przez dewiatory i aksjatory tych tensorów:

$$\begin{aligned} T_{ij}(\underline{X}, t) = & \int_0^t \Psi_{ijkl}(\underline{X}, t-z) \frac{\partial \varepsilon_{kl}}{\partial z}(\underline{X}, z) dz + \sum_{s=1}^n \Phi_{ijkl}^s(\underline{X}, t) \frac{\partial^{s-1} T_{ij}}{\partial t^{s-1}}(\underline{X}, 0) - \\ & - \sum_{s=1}^m \Theta_{ijkl}^s(\underline{X}, t) \frac{\partial^{s-1} \varepsilon_{kl}}{\partial t^{s-1}}(\underline{X}, 0) \end{aligned} \quad (2.22)$$

$$n = \begin{cases} n_1 & \text{dla } n_1 \geq n_2 \\ n_2 & \text{dla } n_1 < n_2 \end{cases}, \quad m = \begin{cases} m_1 & \text{dla } m_1 \geq m_2 \\ m_2 & \text{dla } m_1 < m_2 \end{cases}$$

$$\underline{X}, t \in (A_0 \wedge B_0) \times < 0, \infty).$$

Gdy materiał jest izotropowy, to wtedy tensory relaksacji mogą być przedstawione w następującej postaci:

$$\begin{aligned} \Psi_{ijkl} &= \frac{\Psi_2 - \Psi_1}{3} \delta_{ij} \delta_{kl} + \frac{\Psi_1}{2} (\delta_{ik} \delta_{jl} + \delta_{il} \delta_{jk}) \\ \Phi_{ijkl}^s &= \frac{\Phi_{2s} - \Phi_{1s}}{3} \delta_{ij} \delta_{kl} + \frac{\Phi_{1s}}{2} (\delta_{ik} \delta_{jl} + \delta_{il} \delta_{jk}) \\ \Theta_{ijkl}^s &= \frac{\Theta_{2s} - \Theta_{1s}}{3} \delta_{ij} \delta_{kl} + \frac{\Theta_{1s}}{2} (\delta_{ik} \delta_{jl} + \delta_{il} \delta_{jk}) \end{aligned} \quad (2.23)$$

2.4. Równania równowagi dynamicznej

Równania ruchu we współrzędnych Lagrange'a \underline{X} opisujemy II tensorem Pioli-Kirchhoffa T_y [10]

$$\frac{\partial}{\partial X_j} \left[T_{jk} \left(\delta_{ik} + \frac{\partial u_i}{\partial X_k} \right) \right] + \rho_0 (f_{oi} - \ddot{u}_i) = 0 \quad (2.24)$$

$$\underline{X}, t \in (A_0 \wedge B_0) \times < 0, \infty)$$

Przyjmujemy, że siły masowe i bezwładności są identyczne w konfiguracji pierwotnej i aktualnej

$$\int_{C_0} f_o \rho_o dV_o = \int_C f_i \rho dV, \quad \int_{C_0} \rho_o \ddot{u}_i dV_o = \int_C \rho \ddot{u}_i dV \quad (2.25)$$

$$C_o \in (A_o \wedge B_o), \quad C \in (A \wedge B)$$

2.5. Warunki brzegowe

Statyczne warunki brzegowe bazujące na II tensorze Pioli-Kirchhoffa T_{ij} przyjmujemy w postaci

$$T_{jp} \left(\delta_{ip} + \frac{\partial u_i}{\partial X_p} \right) v_{oj} = t_{oi}, \quad \underline{X}, t \in (\partial A_{ot} \wedge \partial B_{ot}) \times < 0, \infty \quad (2.26)$$

gdzie:

v_o - wektor oznaczający kierunek normalnej zewnętrznej elementu powierzchni ∂A_{ot} lub ∂B_{ot} .

Siły powierzchniowe określone są w położeniu powierzchni brzegowej w stanie naturalnym a wielkości ich są odniesione do pierwotnych pól powierzchni ∂A_{ot} i ∂B_{ot} , działają w tym samym kierunku co siły powierzchniowe na powierzchniach ∂A_t i ∂B_t w konfiguracji aktualnej

$$\int_{C_{ot}} t_{oi} d(\partial V_o) = \int_{C_t} t_i d(\partial V), \quad C \in (A \wedge B) \quad (2.27)$$

Na części powierzchni brzegowej znane są kinematyczne warunki brzegowe

$$u_i = \hat{u}_i, \quad \underline{X}, t \in (\partial A_{ou} \wedge \partial B_{ou}) \times < 0, \infty \quad (2.28)$$

2.6. Warunki kontaktowe

Wypadkowe siły kontaktowe są odpowiednio jednakowe w konfiguracjach pierwotnej i aktualnej

$$\int_{\partial A_{o\Gamma}} p_{oi} d(\partial V_o) = \int_{\partial A_{\Gamma}} p_i d(\partial V) = P_i^A, \quad \int_{\partial B_{o\Gamma}} p_{oi} d(\partial V_o) = \int_{\partial B_{\Gamma}} p_i d(\partial V) = P_i^B \quad (2.29)$$

W celu wymodelowania rozkładu obciążenia na powierzchniach kontaktowych $\partial A_{o\Gamma}$ i $\partial B_{o\Gamma}$ rozłożmy obciążenie p_{oi} na siły normalne ${}_N F_o$ i styczne ${}_r F_o$

$${}_N F_o = p_{oi} v_{oi} = T_{jp} \left(\delta_{ip} + \frac{\partial u_i}{\partial X_p} \right) v_{oi} v_{oj}$$

$${}_r F_o = p_{oi} \tau_{oi} = T_{jp} \left(\delta_{ip} + \frac{\partial u_i}{\partial X_p} \right) \tau_{oi} v_{oj} \quad (2.30)$$

$$\underline{X}, t \in (\partial A_{o\Gamma} \wedge \partial B_{o\Gamma}) \times < 0, \infty$$

gdzie:

$\underline{\tau}_o$ - wektor oznaczający kierunek stycznej elementu powierzchni ∂A_{oi} i ∂B_{oi} .
Następnie siłę styczną ${}_r F_o$ zastępujemy siłą tarcia Coulomba [7]

$${}_r F_o = \mu {}_N F_o = \mu T_{jp} \left(\delta_{ip} + \frac{\partial u_i}{\partial X_p} \right) v_{oi} v_{oj}, \quad (2.31)$$

gdzie:

μ - współczynnik tarcia. Ostatecznie wypadkowe siły kontaktu opiszemy w postaci:

$$\int_{\partial A_{o\Gamma}} p_{oi} d(\partial V_o) = \int_{\partial A_{o\Gamma}} ({}_r F_o \tau_{oi} + {}_N F_o v_{oi}) d(\partial V_o) = \int_{\partial A_{o\Gamma}} {}_N F_o (\mu \tau_{oi} + v_{oi}) d(\partial V_o) = P_1^A \quad (2.32)$$

$$\int_{\partial B_{o\Gamma}} p_{oi} d(\partial V_o) = \int_{\partial B_{o\Gamma}} ({}_r F_o \tau_{oi} + {}_N F_o v_{oi}) d(\partial V_o) = \int_{\partial B_{o\Gamma}} {}_N F_o (\mu \tau_{oi} + v_{oi}) d(\partial V_o) = P_1^B$$

Na powierzchni kontaktowej muszą być spełnione następujące obciążeniowe warunki brzegowe:

$$P_1^A + P_1^B = 0, \quad {}_N F_o^A < 0, \quad {}_N F_o^B < 0 \quad (2.33)$$

$$\underline{X}, t \in (\partial A_{oi} \wedge \partial B_{oi}) \times < 0, \infty$$

i geometryczne (kinematyczne)

$$x_i^A(\underline{X}, t) = x_i^B(\underline{X}, t), \quad \underline{X}, t \in (\partial A_{oi} \wedge \partial B_{oi}) \times < 0, \infty \quad (2.34)$$

gdzie:

$$x_i^A(\underline{X}, t) = X_i^A(0) + u_i^A(t), \quad \underline{X}, t \in \partial A_{o\Gamma} \times < 0, \infty \quad (2.35)$$

$$x_i^B(\underline{X}, t) = X_i^B(0) + u_i^B(t), \quad \underline{X}, t \in \partial B_{oi} \times < 0, \infty$$

oznaczają współrzędne punktów ciał A i B w konfiguracji aktualnej.

2.7. Warunki początkowe

Liczba potrzebnych warunków początkowych wynika z rzędu różniczkowego równania równowagi (2.24) i charakteru prawa konstytutywnego. Równanie równowagi dynamicznej jest zawsze drugiego rzędu, więc należy znać warunki początkowe, np.:

$$u_i(0) = u_i^0, \quad \dot{u}_i(0) = \dot{u}_i^0, \quad \underline{X}, t \in (\overline{A_o} \wedge \overline{B_o}) \times \{0\} \quad (2.36)$$

Jeżeli ciała lepkosprężyste opiszemy związkiem konstytutywnym (2.22) a funkcje relaksacyjne wynikać będą z równań różniczkowych (2.16), to dla przykładowych modeli fenomenologicznych należy znać następującą liczbę warunków początkowych (niezależnie od warunków (2.36) [12]:

- model Kelvina-Voigta

$$\varepsilon_{ij}(0) = \varepsilon_{ij}^0 \quad (2.37)$$

- model Maxwella i Zenera I

$$T_{ij}(0) = T_{ij}^0, \quad \varepsilon_{ij}(0) = \varepsilon_{ij}^0 \quad (2.38)$$

-model Bürgersa

$$T_{ij}(0) = T_{ij}^0, \quad \varepsilon_{ij}(0) = \varepsilon_{ij}^0, \quad \dot{T}_{ij}(0) = \dot{T}_{ij}^0, \quad \dot{\varepsilon}_{ij}(0) = \dot{\varepsilon}_{ij}^0 \quad (2.39)$$

3. WARIACYJNE SFORMUŁOWANIE RÓWNAŃ RUCHU

3.1. Założenia

Rozpatrujemy zagadnienie początkowo-brzegowe, które opisują następujące równania:

- równania geometryczne (2.4),
- równania fizyczne (2.22),
- równania równowagi dynamicznej (2.24),
- statyczne warunki brzegowe (2.26),
- kinematyczne warunki brzegowe (2.28),
- warunki kontaktowe (2.33), (2.34),
- warunki początkowe (2.36)÷(2.39).

Wszystkie występujące wielkości w tych równaniach są odpowiednio gładkimi funkcjami współrzędnych przestrzennych \underline{X} i współrzędnej czasowej t . Rozpatrzmy wirtualną wariację funkcji $\underline{u}(\underline{X}, t)$, którą oznaczamy symbolem $\delta \underline{u}(\underline{X}, t)$. Zakładamy, że istnieje układ przemieszczeń $\underline{u}(\underline{X}, t)$ odpowiadający równaniom równowagi (2.24), warunkom brzegowym (2.26) i warunkom kontaktowym (2.33) i (2.34). Rozważamy klasę dowolnych przemieszczeń $\underline{u} + \delta \underline{u}$ zgodnych z więzami ciała, co powoduje, że $\delta \underline{u}$ musi zanikać na ∂A_{ou} i ∂B_{ou} a jest dowolne na ∂A_{ot} i ∂B_{ot} oraz $\partial A_{o\Gamma}$ i $\partial B_{o\Gamma}$

$$\delta \underline{u}(\underline{X}, t) = \underline{0}, \quad \underline{X}, t \in (\partial A_{ou} \wedge \partial B_{ou}) \times \langle 0, \infty \rangle \quad (3.1)$$

3.2. Równanie czteropracy wirtualnej

Na bazie równań (2.24) możemy utworzyć wyrażenia słuszne dla ciała A i B:

$$\int_{t_0}^{t_1} \left\{ \int_{\Lambda_0} \delta u_i \frac{\partial}{\partial X_j} \left[T_{jk} \left(\delta_{ik} + \frac{\partial u_i}{\partial X_k} \right) \right] dV_0 + \int_{\Lambda_0} \delta u_i \rho_0 f_{oi} dV_0 - \int_{\Lambda_0} \delta u_i \rho_0 \ddot{u}_i dV_0 \right\} dt = 0$$

$$\underline{X}, t \in A_o \times < 0, \infty)$$

(3.2)

$$\int_{t_0}^{t_1} \left\{ \int_{B_o} \delta u_i \frac{\partial}{\partial X_j} \left[T_{jk} \left(\delta_{ik} + \frac{\partial u_i}{\partial X_k} \right) \right] dV_o + \int_{B_o} \delta u_i \rho_o f_{oi} dV_o - \int_{B_o} \delta u_i \rho_o \ddot{u}_i dV_o \right\} dt = 0$$

$$\underline{X}, t \in B_o \times < 0, \infty)$$

Stosując przekształcenie Gaussa-Ostrogradskiego i całkowanie przez części uzyskujemy

$$\int_{t_0}^{t_1} \left\{ \int_{A_o} \rho_o (f_{oi} \delta u_i + \dot{u}_i \delta \dot{u}_i) dV_o + \int_{\partial A_{ot}} t_{oi} \delta u_i d(\partial V_o) + \int_{\partial A_{o\Gamma}} F_o (\mu \tau_{oi} + \nu_{oi}) \delta u_i d(\partial V_o) + \right. \\ \left. - \int_{A_o} T_{ij} \delta E_{ij} dV_o \right\} dt + \int_{A_o} \rho_o \dot{u}_i \delta u_i dV_o \Big|_{t_0}^{t_1} = 0 \quad (3.3)$$

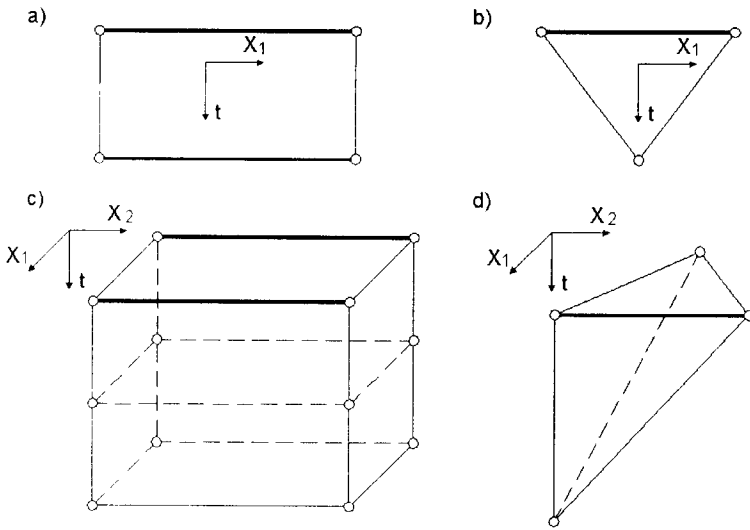
$$\int_{t_0}^{t_1} \left\{ \int_{B_o} \rho_o (f_{oi} \delta u_i + \dot{u}_i \delta \dot{u}_i) dV_o + \int_{\partial B_{ot}} t_{oi} \delta u_i d(\partial V_o) + \int_{\partial B_{o\Gamma}} F_o (\mu \tau_{oi} + \nu_{oi}) \delta u_i d(\partial V_o) + \right. \\ \left. - \int_{B_o} T_{ij} \delta E_{ij} dV_o \right\} dt + \int_{B_o} \rho_o \dot{u}_i \delta u_i dV_o \Big|_{t_0}^{t_1} = 0$$

które nazywamy równaniami czteropracy wirtualnej (por. [2]). Muszą one zachodzić dla dowolnych wariacji przemieszczeń $\delta \underline{u}$ spełniając jednocześnie związki geometryczne (2.4) i konstytutywne (2.22) oraz warunki początkowe (2.36)÷(2.39). Warunki kontaktowe (2.30) wiążą ze sobą oba równania (3.3).

4. METODA ELEMENTÓW CZASOPRZESTRZENNYCH

4.1. ZAŁOŻENIA

Metoda elementów czasoprzestrzennych (MECZ) jest wariantem metody elementów skończonych (MES). Czas w MECZ traktuje się jako czwarty wymiar na równi z pozostałymi trzema, co umożliwi wprowadzenie pojęcia tzw. elementu czasoprzestrzennego. Kształt takiego elementu oraz liczba węzłów mogą być różne (rys.2).



Rys.2. Przykłady elementów czasoprzestrzennych

4.2. Opisy pól przemieszczeń, odkształceń i naprężeń elementu czasoprzestrzennego

Obszar czasoprzestrzenny dzielimy na skończoną liczbę elementów czasoprzestrzennych. Funkcje przemieszczeń $\underline{u}(\underline{X},t)$, prędkości przemieszczeń $\dot{\underline{u}}(\underline{X},t)$ i ich wariacje opisujemy przemieszczeniami węzłowymi elementu czasoprzestrzennego:

$$\begin{aligned} u_i(\underline{X}, t) &= N_{i\alpha}(\underline{X}, t)r_{\alpha}, & \delta u_i(\underline{X}, t) &= N_{i\alpha}(\underline{X}, t)\delta r_{\alpha} \\ \dot{u}_i(\underline{X}, t) &= \dot{N}_{i\alpha}(\underline{X}, t)r_{\alpha}, & \delta \dot{u}_i(\underline{X}, t) &= \dot{N}_{i\alpha}(\underline{X}, t)\delta r_{\alpha} \end{aligned} \quad (4.1)$$

gdzie:

\underline{N} - macierz kształtu zależna od współrzędnych przestrzennych \underline{X} i czasu t .

Analogicznie opisujemy odkształcenia Greena E_{ij} (2.4)

$$\begin{aligned} E_{ij} &= \frac{1}{2} \left[\frac{\partial}{\partial X_j} (N_{i\alpha} r_{\alpha}) + \frac{\partial}{\partial X_i} (N_{j\alpha} r_{\alpha}) + \frac{\partial}{\partial X_i} (N_{k\alpha} r_{\alpha}) + \frac{\partial}{\partial X_j} (N_{k\beta} r_{\beta}) \right] = \\ &= \frac{1}{2} [N_{i\alpha, j} + N_{j\alpha, i} + N_{k\alpha, i} N_{k\beta, j} r_{\beta}] r_{\alpha} = [{}^i B_{j\alpha} + {}^j B_{i\alpha}(r_{\beta})] r_{\beta} \end{aligned} \quad (4.2)$$

gdzie:

$${}^i B_{j\alpha} = \frac{1}{2} (N_{i\alpha, j} + N_{j\alpha, i}), \quad {}^j B_{i\alpha}(r_{\beta}) = \frac{1}{2} N_{k\alpha, i} N_{k\beta, j} r_{\beta} \quad (4.3)$$

Wariację odkształceń δE_{ij} ustalamy na podstawie wzoru (4.2)

$$\delta E_{ij} = \left[\dot{B}_{ij\alpha} + {}''B_{ij\alpha}(r_\beta) \right] \delta r_\alpha + \delta \left[{}''B_{ij\alpha}(r_\beta) \right] r_\alpha = \left[\dot{B}_{ij\alpha} + 2 {}''B_{ij\alpha}(r_\beta) \right] \delta r_\alpha, \quad (4.4)$$

gdz:

$$\delta \left[{}''B_{ij\alpha}(r_\beta) \right] r_\alpha \equiv {}''B_{ij\alpha}(r_\beta) \delta r_\alpha \quad (4.5)$$

Od przemieszczeń węzłowych uzależniamy także odkształcenia ε_{ij} (2.11)

$$\varepsilon_{ij} = \left\{ a_{ijkk}(\underline{E}) \left[\dot{B}_{kk\alpha} + {}''B_{kk\alpha}(r_\beta) \right] + b_{ijkl}(\underline{E}) \left[\dot{B}_{kl\alpha} + {}''B_{kl\alpha}(r_\beta) \right] \right\} r_\alpha \quad (4.6)$$

gdzie macierze tensory a_{ijkk} i b_{ijkl} zależą od odkształceń (2.12).

Podobnie wyrażamy naprężenia (2.22)

$$T_{ij} = \left[C_{ij\alpha}(r_\beta) + {}''C_{ij\alpha}(r_\beta, r_\xi) \right] r_\alpha + \sum_{s=1}^n \Phi_{ijkl}^s \frac{\partial^{s-1} T_{kl}}{\partial t^{s-1}}(t_0) - \sum_{s=1}^m \Theta_{ijkl}^s \frac{\partial^{s-1} \varepsilon_{kl}}{\partial t^{s-1}}(t_0) \quad (4.7)$$

gdzie:

$$\begin{aligned} \dot{C}_{ij\alpha}(r_\beta) = & \int_{t_0}^{t_1} \Psi_{ijkl}(t-z) \left[\dot{a}_{klmn}(r_\beta, z) \dot{B}_{mn\alpha}(z) + \dot{b}_{klmn}(r_\beta, z) \dot{B}_{mn\alpha}(z) + \right. \\ & \left. + a_{klmn}(r_\beta, z) \dot{B}_{mn\alpha}(z) + b_{klmn}(r_\beta, z) \dot{B}_{mn\alpha}(z) \right] dz \end{aligned} \quad (4.8)$$

$$\begin{aligned} {}''C_{ij\alpha}(r_\beta, r_\xi) = & \int_{t_0}^{t_1} \Psi_{ijkl}(t-z) \left[\dot{a}_{klmn}(r_\beta, z) \dot{B}_{mn\alpha}(r_\xi, z) + \dot{b}_{klmn}(r_\beta, z) \dot{B}_{mn\alpha}(r_\xi, z) + \right. \\ & \left. + a_{klmn}(r_\beta, z) \dot{B}_{mn\alpha}(r_\xi, z) + b_{klmn}(r_\beta, z) \dot{B}_{mn\alpha}(r_\xi, z) \right] dz \end{aligned}$$

4.2. Równania ruchu zdyskretyzowanej czaso-przestrzeni

Wprowadzając związki (4.1)-(4.7) do równań czteropracy wirtualnej (3.3) uzyskamy równania ważne dla całej zdyskretyzowanej czasoprzestrzeni, które muszą być spełnione dla dowolnych wariacji δr_α

$$\sum_{e=1}^{E(A)} \left\{ \left[{}^e K_{\alpha\beta}^{(kon)} + {}^e K_{\alpha\beta}^{(u)} + {}^e K_{\alpha\beta}^{(\sigma)} - {}^e M_{\alpha\beta} \right] r_{\beta-(A)} {}^e R_{\alpha-(A)} - {}^e \Gamma_{\alpha} \right\} = 0 \quad (4.9)$$

$$\sum_{e=1}^{E(B)} \left\{ \left[{}^e K_{\alpha\beta}^{(kon)} + {}^e K_{\alpha\beta}^{(u)} + {}^e K_{\alpha\beta}^{(\sigma)} - {}^e M_{\alpha\beta} \right] r_{\beta-(B)} {}^e R_{\alpha-(B)} - {}^e \Gamma_{\alpha} \right\} = 0$$

Wprowadzono oznaczenia analogiczne do stosowanych w metodzie elementów skończonych [15,16]

$${}^e K_{\alpha\beta}^{(kon)}(r_\xi) = \iint_{\Omega_c^{(C)}} B_{ij\alpha}^e \dot{C}_{ij\beta}^e(r_\xi) d\dot{U}$$

$$\begin{aligned}
{}^{(c)}K_{\alpha\beta}^{(u)}(r_\xi, r_\eta) &= \iint_{\Omega_e^{(C)}} B_{ij\alpha}^e {}^n C_{ij\beta}^e(r_\xi, r_\eta) d\tilde{U} \\
{}^{(c)}K_{\alpha\beta}^{(\sigma)}(r_\xi, r_\eta, r_\varphi) &= 2 \iint_{\Omega_e^{(C)}} B_{ij\alpha}^e(r_\varphi) \left[{}^i C_{ij\beta}^e(r_\xi) + {}^n C_{ij\beta}^e(r_\xi, r_\eta) \right] d\tilde{U} \quad (4.10) \\
{}^{(c)}M_{\alpha\beta} &= \iint_{\Omega_e^{(C)}} \dot{N}_{i\alpha}^e \rho_o^e \dot{N}_{i\beta}^e d\tilde{U} \\
{}^{(c)}R_\alpha &= \iint_{\Omega_e^{(C)}} N_{i\alpha}^e \rho_o^e f_{oi}^e d\tilde{U} + \iint_{\partial\Omega_{ie}^{(C)}} N_{i\alpha}^e t_{oi}^e d(\partial\tilde{U}) + \iint_{\Omega_e^{(C)}} \left[B_{ij\alpha}^e + \right. \\
&\quad \left. + 2 {}^n B_{ij\alpha}^e(r_\xi) \right] \left[\sum_{s=1}^{n_c} \Phi_{ijkl}^{es} \frac{\partial^{s-1} T_{kl}^e}{\partial t^{s-1}}(t_o^e) - \sum_{s=1}^{m_c} \Theta_{ijkl}^{es} \frac{\partial^{s-1} \epsilon_{kl}^e}{\partial t^{s-1}}(t_o^e) + \int_{C_{oe}} N_{i\alpha}^e \rho_o^e \dot{u}_i^e dV_o \right] \begin{bmatrix} t_o^e \\ \epsilon_{ij}^e \end{bmatrix} \\
{}^{(c)}\Gamma_\alpha &= \iint_{\partial\Omega_{ie}^{(C)}} N_{i\alpha}^e N_{i\beta}^e (\mu^e \tau_{oi}^e + \nu_{oi}^e) d(\partial\tilde{U})
\end{aligned}$$

$$C = A, B$$

które kolejno nazywamy:

$K_{\alpha\beta}^{(kon)}$ - macierz sztywności konstytutywnej,

$K_{\alpha\beta}^{(u)}$ - macierz sztywności przemieszczeniowej (obrotowej),

$K_{\alpha\beta}^{(\sigma)}$ - macierz sztywności naprężeniowej (geometrycznej),

$M_{\alpha\beta}$ - macierz bezwładności mas,

R_α - macierz-kolumna zawierająca impulsy węzłowe od obciążenia zewnętrznego,

Γ_α - macierz-kolumna zawierająca impulsy węzłowe od obciążenia kontaktowego.

Całkowita macierz sztywności

$${}^{(C)}\underline{\mathbf{K}} = {}^{(C)}K_{\alpha\beta} = \sum_{e=1}^{E(C)} \left[{}^{(A)}K_{\alpha\beta}^{(kon)} + {}^{(A)}K_{\alpha\beta}^{(u)} + {}^{(A)}K_{\alpha\beta}^{(\sigma)} - {}^{(A)}M_{\alpha\beta} \right] \quad (4.11)$$

$$C = A, B$$

ma charakter macierzy sieciowej.

4.4. Stacjonarna siatka elementów czasoprzestrzennych

Do dalszych rozważań przyjęto podział obszaru czasoprzestrzennego na prostokątne elementy czasoprzestrzenne (rys.3).

Struktura równań (4.9) będzie w tym wypadku następująca:

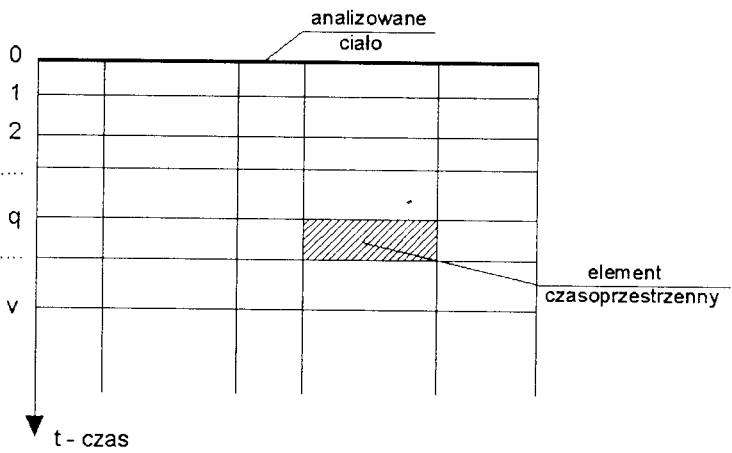
$${}^{(C)}\underline{\mathbf{K}} {}^{(C)}\underline{\mathbf{r}} = {}^{(C)}\underline{\mathbf{R}} + {}^{(C)}\underline{\mathbf{\Gamma}}, \quad C = A, B \quad (4.12)$$

gdzie:

$${}_{(C)}\underline{\mathbf{K}} = \begin{bmatrix} \underline{A}^0 & \underline{B}^0 & & & & \\ \underline{C}^1 & \underline{D}^1 + \underline{A}^1 & \underline{B}^1 & & & \\ & & \dots & & & \\ & & & \underline{C}^q & \underline{D}^q + \underline{A}^q & \underline{B}^q \\ & & & & \dots & \dots \\ & & & & & \dots \\ & & & & & \underline{C}^{v-1} & \underline{D}^{v-1} + \underline{A}^{v-1} & \underline{B}^{v-1} \\ & & & & & & \underline{C}^v & \underline{D}^v \end{bmatrix} \quad (4.13)$$

$${}_{(C)}\underline{\mathbf{r}} = \begin{bmatrix} \underline{\Gamma}^0 \\ \underline{\Gamma}^1 \\ \dots \\ \underline{\Gamma}^q \\ \dots \\ \underline{\Gamma}^{v-1} \\ \underline{\Gamma}^v \end{bmatrix}, \quad {}_{(C)}\underline{\mathbf{R}} = \begin{bmatrix} \underline{R}^0 \\ \underline{R}^1 \\ \dots \\ \underline{R}^q \\ \dots \\ \underline{R}^{v-1} \\ \underline{R}^v \end{bmatrix}, \quad {}_{(C)}\underline{\mathbf{\Gamma}} = \begin{bmatrix} \underline{\Gamma}^0 \\ \underline{\Gamma}^1 \\ \dots \\ \underline{\Gamma}^q \\ \dots \\ \underline{\Gamma}^{v-1} \\ \underline{\Gamma}^v \end{bmatrix},$$

przy czym np.: $\underline{\Gamma}^q$ jest wektorem zawierającym przemieszczenia węzłowe ciała C w chwili „q”, \underline{A}^q to macierz sztywności \underline{A} ciała C sformułowana w chwili „q”.



Rys.3. Dyskretyzacja obszaru czasoprzestrzennego siatką prostokątnych elementów czasoprzestrzennych

Wymiary macierzy \underline{A} , \underline{B} , \underline{C} i \underline{D} zależą wyłącznie od dyskretyzacji przestrzennej. Przy znanych warunkach początkowych (2.36), układ równań (4.12) przekształca się w formułę rekurencyjną dla ciała A

- [4] Chan S. H., Tuba I. S., A Finite Element Method for Contact Problems of Solid Bodies, *Int. Jurnal of Mech. Science*, 1971, p. 13÷19.
- [5] Kalker J. J., Renden Y., A Minimum Principle for Frictionless Elastic Contact with Application to Non-Hertzian Half Space Contact Problems, *I. Engng. Math.*, 6, 1972.
- [6] Kalker J. J., Allaert H. J. C., de Mul J., The numerical calculation of the contact problem in the theory of elasticity, *Nonlinear Finite Element Analysis in Structural Mechanics*, Springer Verlag Berlin Heidelberg New York, p. 637÷653.
- [7] Zeid I., Padovan J., Finite element modeling of rolling contact, *Comput. Structures*, 14, 1÷2., 1981, p. 163÷170.
- [8] Rońda J., Bogacz R., Brzozowski M., Infinitesimal and large strain in rolling contact problems, *Ingen. Archiv.*, 56, 1986, p.241÷253.
- [9] Witkowski J., Zagadnienia kontaktu ciał odkształcalnych, *Prace Naukowe PW*, 53, WPW Warszawa 1978.
- [10] Fung Y. C., *Foundations of Solid Mechanics*, Prentice-Hall, Englewood Cliffs, New Jersey 1965.
- [11] Nowacki W., *Teoria pełzania*, Arkady, Warszawa 1963.
- [12] Podhorecki A., *Metoda elementów czasoprzestrzennych w geometrycznie nieliniowej teorii lepkosprężystości*, Zesz. Nauk. ATR w Bydgoszczy, Rozprawy 45, Bydgoszcz 1991.
- [13] Podhorecka A., *Metoda elementów czasoprzestrzennych w zagadnieniach geometrycznie nieliniowych*, *Mech. Teoret. Stos.*, 26, 4, 1988, s. 683÷699.
- [14] Podhorecki A., The viscoelastic space-time element, *Comp. Struct.*, 23, 1986, p. 544÷555.
- [15] Kleiber M., *Metoda elementów skończonych w nieliniowej mechanice kontinuum*, PWN, Warszawa-Poznań 1985.
- [16] Zienkiewicz O. C., *Metoda elementów skończonych*, Arkady, Warszawa 1972.

SPACE-TIME ELEMENT METHOD IN THE PROBLEM OF SOLID CONTACT

Summary

In the present work, we consider the dynamic problem of solids contact described by the viscoelastic model. At the point of contact, dry friction described by Coulomb's law is taken into account. Initial-boundary value problem, at first described by partial differential equation, has been brought to the global formula represented as equations of virtual four-work. Finally, the considered problem is solved by means of the Space-Time Elements Method (STEM). In the known initial conditions, the solutions, if STEM is applied, is reduced to the recursion formula.

Key words: mechanics of a solid, viscoelasticity, contact problem, the Space-Time Elements Method.

WYBRANE ASPEKTY IDENTYFIKACJI STANU MECHANICZNEGO POŁĄCZEŃ SPAJANYCH

Eugeniusz Ranatowski

Katedra Materiałoznawstwa i Technologii Metali, Wydział Mechaniczny ATR
ul. Kaliskiego 7, 85-796 Bydgoszcz

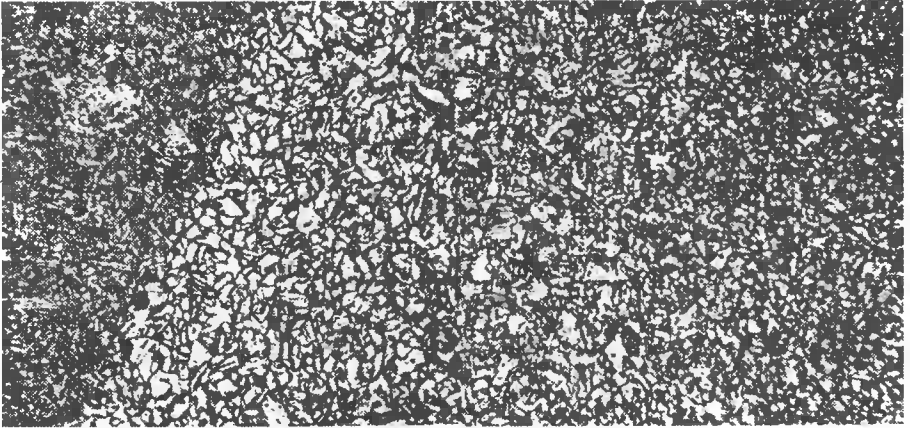
W artykule przedstawiono relację: struktura - własności mechaniczne, dla heterogenicznych połączeń spajanych w oparciu o zmodyfikowane rozwiązanie Prandtla. Wykonano ocenę stanu naprężenia $\sigma_{ik}^{un/ov}$ dla $i, k = x, y$ w sąsiedztwie powierzchni kontaktowej dla stref o obniżonej i podwyższonej wytrzymałości. Dokonano również oceny parametru S_p , jako fizycznej miary deformacji i wyężenia niejednorodnego złącza oraz parametru K_w , jako skutku oddziaływania więzów mechanicznych. W dalszej kolejności wykorzystano parametr K_w do oceny parametrów procesu pęknięcia, określając $\delta_R = \delta_W^{un/ov} / \delta_B$.

Słowa kluczowe: niejednorodność struktury, stan naprężenia, parametry pęknięcia.

1. WSTĘP

Wysoka jakość działań inżynierskich na etapie projektowania, konstruowania oraz przygotowania technologicznego i wdrożenia produkcyjnego ma decydujący wpływ na koszty wytwarzania, nowoczesność oraz jakość wyrobów i w pełnym zakresie dotyczy również konstrukcji spajanych. W zakresie technologii, jednym ze środków umożliwiających realizację tak postawionych zadań jest konieczność odejścia od bardzo powierzchownych opracowań technologicznych i oparcie ich na możliwie szerokich ustaleniach, wynikających ze znajomości fizyki procesów technologicznych. W zakresie stosowania metod spajania, szczególnie trudne są relacje pomiędzy lokalnymi zmianami strukturalnymi a własnościami mechanicznymi połączeń, a zwłaszcza procesu uwrażliwienia materiałów łączonych na proces spawania i zgrzewania. Praktycznie, za miarę stopnia wrażliwości materiału przyjmuje się odporność na pęknięcie w różnych fazach powstawania złącza i w warunkach ekstrapolacyjnych. W związku z powyższym, naturalną rzeczą jest dążność do aplikacji parametrów i kryteriów mechaniki pęknięcia do oceny tego procesu. Zasadnicza trudność pojawiająca się w bezpośrednim zastosowaniu bogatego aparatu mechaniki pęknięcia, wynika z rozbieżności pomiędzy przyjętym modelem fizycznym, będącym podstawą określenia, np. kryterium bazującym na współczynniku intensywności naprężenia $K_I = K_{IC}$, a rzeczywistą sytuacją występującą w obrębie połączenia spajanego. Proces spajania wymaga rozpatrzenia relacji modułów: pole termiczne - ewolucja mikrostruktury - pole mechaniczne i może prowadzić, między innymi do:

- lokalnych zmian struktury o znacznym stopniu heterogeniczności, co zasadniczo prowadzi do lokalnej zmiany cech wytrzymałościowych - rysunek 1,
- niestabilności własności mechanicznych spowodowanych, np. obecnością wodoru itp.



Rys.1. Struktura w obrębie połączenia spawanego ze stali 18G2A

2. CHARAKTERYSTYKA WPLYWU LOKALNYCH ZMIAN STRUKTURY NA WŁASNOŚCI MECHANICZNE POŁĄCZEŃ

Podstawowe własności mechaniczne w odniesieniu do połączeń spawanych materiałów o budowie polimorficznej (np. stale niskowęglowe, niskostopowe, wysokostopowe stale ferrytyczne itp.) z punktu widzenia cech mikrostruktury można określić w postaci [1]:

$$s = \sum X_i \cdot s_i = X_\gamma \cdot s_\gamma + X_\alpha \cdot s_\alpha + X_P \cdot s_P + X_M \cdot s_M \quad (1)$$

gdzie:

- s_i - parametr określający cechy wytrzymałościowe struktury i - tej fazy,
- X_i - udział objętościowy fazy $i = \alpha, P, B, M$ (α - ferryt, P - perlit, B - bainit, M - martenzyt).

Z powyższych ustaleń wynika, iż własności mechaniczne mikrostruktury są funkcją: własności poszczególnych składników osnowy materiału oraz ich cech geometrycznych. O własnościach mechanicznych spoiny decydują zarówno warunki krystalizacji, jak i przemiany i rozpadu austenitu, a wartość granicy plastyczności spoiny R_e^{SP} wynosi [2]:

$$R_e^{SP} = V_p \cdot R_e^P + V_s \cdot R_e^S \quad (2)$$

gdzie:

- R_e^P - granica plastyczności struktury pierwotnej, R_e^S - granica plastyczności dla obszaru reaustenitizacji bądź strefy odpuszczonej, V_p - objętościowa część struktury pierwotnej, $V_s = 1 - V_p$ - objętościowa część struktury wtórnej.

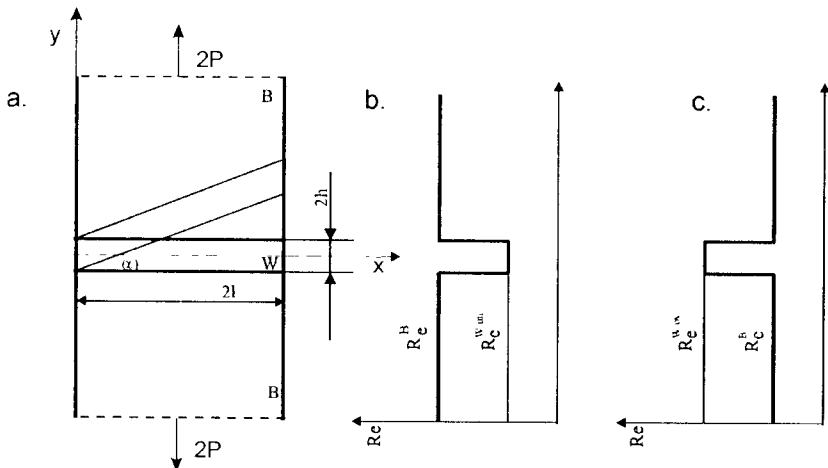
Stosowana zwykle procedura, wiążąca bezpośrednio wytrzymałość złącza ze składem chemicznym spoiny jest więc zbyt dużym uproszczeniem. Ponadto należy podkreślić, iż w przypadku znacznego zróżnicowania cech własności mechanicznych poszczególnych składników mikrostruktury, globalna ocena cech własności mechanicznych wg zależności (1), (2) obarczona jest znacznym błędem. Główną przyczyną tego stanu jest nieuwzględnienie wpływu oddziaływania więzów mechanicznych pomiędzy i - tymi składnikami mikrostruktury [1]. W celu nadania powyższemu stwierdzeniu konkretnych kształtów możemy przedstawić, jako przykład charakterystykę zmiany wytrzymałości bainitu, w zależności od jego udziału objętościowego V_b w osnowie martenzytycznej - jako rezultatu wpływu więzów mechanicznych - w formie następującej empirycznej zależności:

$$\sigma_b \cong \sigma_{b0} [0,65 \exp(-3,3 V_b) + 0,98] \leq \sigma_M \quad (3)$$

gdzie:

- σ_b - wytrzymałość bainitu z uwzględnieniem wpływu węzłów mechanicznych, MPa,
- σ_{b0} - wytrzymałość bainitu, bez wpływu więzów mechanicznych, MPa,
- σ_M - wytrzymałość martenzytu, MPa,
- V_b - udział objętościowy bainitu w osnowie martenzytycznej.

Ten sam problem rozpatrywany w skali makroskopowej całego złącza spawanego i uwzględniający jego zróżnicowaną budowę, w którym makroskopowe własności mikrostruktury są wyrażone poprzez rozkład twardości, bądź odpowiadające mu cechy mechaniczne (np. granicę plastyczności R_e) przedstawiono na rysunku 2.

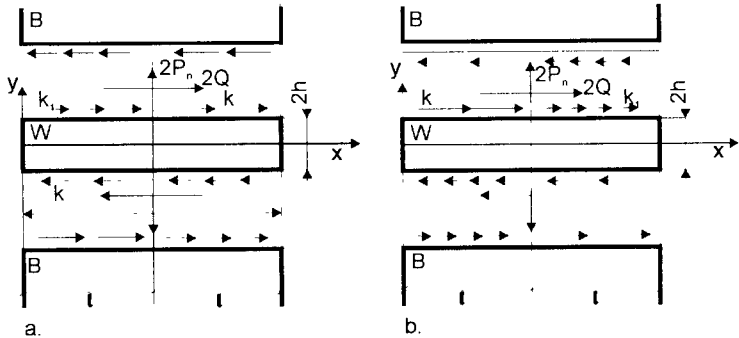


Rys.2. Schemat modelu niejednorodnego złącza spawanego: a. geometryczna konfiguracja, b. lokalna zmiana R_e^{wun} w obrębie złącza $R_e^{wun} < R_e^B$, c. lokalna zmiana R_e^{wov} w obrębie złącza $R_e^{wov} > R_e^B$

Wobec powyższego, charakterystyka oddziaływania więzów mechanicznych, przy określonej strukturze obszaru (W) i (B) zależy od [5]:

- kształtu i cech geometrycznych układu,
- rodzaju i wielkości pola siłowego,
- charakterystyki własności mechanicznych stref (B) i (W),
- wpływu zjawisk fizycznych w obszarze powierzchni kontaktowej stref (W) i (B).

Określenie zmiany stanu naprężenia, jako rezultatu oddziaływania więzów mechanicznych w wyniku lokalnych zmian strukturalnych w obszarze powierzchni kontaktowych stref (B) i (W) posiada fundamentalne znaczenie do właściwej interpretacji i oceny własności mechanicznych analizowanego układu - rysunek 2, zarówno na poziomie mikroskopowym, jak i makroskopowym. Chcąc więc uzyskać ilościową ocenę wyżej wymienionego zjawiska, dla sytuacji przedstawionej na rysunku 2 b i c, przyjęto uproszczony model obliczeniowy - zgodnie z warunkiem de Saint - Venanta - pokazany na rysunku 3.



Rys.3. Model obliczeniowy niejednorodnego złącza spajanego:

$$\text{a. } R_e^{Wun} < R_e^B, \quad \text{b. } R_e^{Wov} > R_e^B.$$

Przedstawiony model stanowi modyfikację klasycznego modelu Prandtla, z uwagi na niejednorodny stan naprężeń stycznych wzdłuż powierzchni kontaktowych. W stosunku do materiału stref (W) i (B) założono idealne własności sprężysto - plastyczne. Rezultatem tego jest również zmiana stanu naprężenia w sąsiedztwie styku stref B i W. Rozpatrzmy w dalszym ciągu analityczne związki określające wartość naprężeń, które wystąpią w warstwie o obniżonej lub podwyższonej wytrzymałości w stosunku do materiału podstawowego (strefa B). Podstawą obliczeń stanu naprężenia są więc równania równowagi przy założeniu jednostkowej grubości w kierunku normalnym do płaszczyzny Oxy oraz warunek plastyczności [3] wraz z ograniczeniami wynikającymi z przyjętego modelu obliczeniowego, przedstawionego na rysunku 3. Wobec tego, charakterystyka stanu naprężenia w obrębie powierzchni kontaktowej stref (B) i (W) przedstawia się następująco [4]:

- dla strefy (W) o obniżonej wartości $R_e^{Wun} (R_e^{Wun} < R_e^B)$:

$$\sigma_{x(rel)}^{un} = \frac{\sigma_{xx}^{un}}{k} = \frac{1}{1-\gamma} \left(\frac{\pi}{2} - \gamma \sqrt{1-\gamma^2} - \arcsin \gamma \right) + \frac{1-\gamma}{2} \frac{\xi}{\kappa}$$

$$-2\sqrt{1-\left(\frac{1+\gamma}{2}+\frac{1-\gamma}{2}\frac{\eta}{\kappa}\right)^2} \quad (4)$$

$$\sigma_{y(\text{rel})}^{\text{un}} = \frac{\sigma_y^{\text{un}}}{k} = \frac{1}{1-\gamma} \left(\frac{\pi}{2} - \gamma\sqrt{1-\gamma^2} - \arcsin \gamma \right) + \frac{1-\gamma}{2} \frac{\xi}{\kappa} \quad (5)$$

$$\sigma_{xy(\text{rel})}^{\text{un}} = \frac{\sigma_{xy}^{\text{un}}}{k} = \frac{1+\gamma}{2} + \frac{1-\gamma}{2} \frac{\eta}{\kappa} \quad (6)$$

$$\gamma = \frac{k_1}{k} \quad , \quad |\gamma| \leq 1 \quad , \quad k = \frac{R_e^{W(\text{un})}}{\sqrt{3}} \quad , \quad -k \leq k_1 \leq k \quad , \quad R_e^{W(\text{un})} \leq R_e^B$$

- dla strefy (W) o podwyższonej wartości R_e^{Wov} ($R_e^{Wov} > R_e^B$):

$$\sigma_{xx(\text{rel})}^{\text{ov}} = \frac{\sigma_{xx}^{\text{ov}}}{k} = - \left[\frac{1}{1-\gamma} \left(-\frac{\pi}{2} + \gamma\sqrt{1-\gamma^2} + \arcsin \gamma \right) + \frac{1-\gamma}{2} \frac{\xi}{\kappa} + \right. \\ \left. + 2\sqrt{1-\left(\frac{1+\gamma}{2}+\frac{1-\gamma}{2}\frac{\eta}{\kappa}\right)^2} \right] \quad (7)$$

$$\sigma_{yy(\text{rel})}^{\text{ov}} = \frac{\sigma_{yy}^{\text{ov}}}{k} = \frac{1}{1-\gamma} \left(-\frac{\pi}{2} + \gamma\sqrt{1-\gamma^2} + \arcsin \gamma \right) + \frac{1-\gamma}{2} \frac{\xi}{\kappa} \quad (8)$$

$$\sigma_{xy(\text{rel})}^{\text{ov}} = \frac{\sigma_{xy}^{\text{ov}}}{k} = \frac{1+\gamma}{2} + \frac{1-\gamma}{2} \frac{\eta}{\kappa} \quad (9)$$

$$\gamma = k_1/k \quad ; \quad |\gamma| \leq 1 \quad ; \quad k = R_e^{W(\text{ov})}/\sqrt{3} \quad ; \quad -k \leq k_1 \leq k \quad ; \quad R_e^{W(\text{ov})} \geq R_e^B$$

Cechy geometryczne charakteryzują parametry:

$$\kappa = \frac{h}{l} \quad ; \quad \eta = \frac{y}{l} \quad ; \quad \xi = \frac{x}{l} \quad ; \quad \kappa \geq \eta$$

Pozwala to ocenić normalizowany stan naprężenia w sąsiedztwie powierzchni kontaktowej stref W i B, jako funkcję parametru γ oraz cech geometrycznych κ , η , ξ . Wartością graniczną dla naprężeń σ_{xy} jest parametr k :

$$|\sigma_{xy}| \leq k \quad (10)$$

co jest zgodne z założeniem Treski. Wartość k może być osiągnięta tylko na części powierzchni kontaktowej stref W i B - rysunek 3. Ponadto, wyrażenie pod pierwiastkiem kwadratowym w równaniach (4) i (7) musi spełniać warunek:

$$-1 \leq \frac{1+\gamma}{2} + \frac{1-\gamma}{2} \frac{\eta}{\kappa} \leq 1 \quad (11)$$

Wobec tego relacja pomiędzy η i κ wynosi:

$$\kappa \geq \eta \quad (12)$$

Wartość γ zmienia się w przedziale $-1 \leq \gamma \leq 1$.

Jeżeli $\gamma = -1$, otrzymamy sytuację adekwatną do modelu Prandtla, natomiast dla $\gamma = 1$; $\sigma_{xx}^{un/ov} = 0$; $\sigma_{yy}^{un/ov} = 0$; $\sigma_{xy}^{un/ov} = k$, co odpowiada sytuacji czystego ścinania obszaru W. W przedziale $-1 \leq \gamma \leq 1$, w zależności od wartości κ , η , ξ naprężenia σ_{ij}^{un} , σ_{ij}^{ov} ($i, j = x, y$) zmieniają się w sposób monotoniczny przy braku punktów osobliwych, o czym świadczą między innymi ich charakterystyki przedstawione na rysunkach 4 ÷ 7 dla wybranych przykładów.

Zgodnie z uprzednio określonym analitycznym modelem - rysunek 3, naprężenia $\sigma_{yy}^{un/ov}$ oraz $\sigma_{xy}^{un/ov}$ są jednakowe po obu stronach powierzchni styku stref W i B i zależą odpowiednio od parametrów ξ i κ oraz η i κ . Natomiast naprężenia $\sigma_{xx}^{un/ov}$ zależą od parametrów κ , η , ξ i mogą się zmieniać skokowo po obu stronach powierzchni styku stref W i B lub nawet posiadać przeciwne znaki, bez zakłócenia warunków równowagi.

Skutki zmiany stanu naprężenia możemy ocenić wprowadzając parametr S_p w postaci:

- dla $R_e^{W(un)} \leq R_e^B$

$$S_p^{un} = \frac{\sigma_m^{un}}{\sigma_H^{un}} = \frac{\sigma_{xx}^{un} + \sigma_{yy}^{un}}{3\sqrt{(\sigma_{xx}^{un} - \sigma_{yy}^{un})^2 + \sigma_{xx}^{un} \cdot \sigma_{yy}^{un} + 3\sigma_{xy}^{2(un)}}} \quad (13a)$$

- dla $R_e^{W(ov)} \geq R_e^B$

$$S_p^{ov} = \frac{\sigma_m^{ov}}{\sigma_H^{ov}} = \frac{\sigma_{xx}^{ov} + \sigma_{yy}^{ov}}{3\sqrt{(\sigma_{xx}^{ov} - \sigma_{yy}^{ov})^2 + \sigma_{xx}^{ov} \cdot \sigma_{yy}^{ov} + 3\sigma_{xy}^{2(ov)}}} \quad (13b)$$

gdzie:

σ_m - naprężenie średnie,

σ_H - ekwiwalent naprężeń wg Hubera - Misesa.

Wobec tego, uwzględniając stan naprężenia, zgodnie z zależnościami (4) ÷ (6) i (7) ÷ (9) otrzymamy:

- dla $R_e^{W(un)} \leq R_e^B$:

$$S_p^{un} = \frac{2 \left[\frac{1}{1-\gamma} \left(\frac{\pi}{2} - \gamma \sqrt{1-\gamma^2} - \arcsin \gamma \right) + \frac{1-\gamma \xi}{2 \kappa} \right] - \sqrt{1 - \left(\frac{1+\gamma}{2} + \frac{1-\gamma \eta}{2 \kappa} \right)^2}}{3 \left\{ \left[-2 \cdot \sqrt{1 - \left(\frac{1+\gamma}{2} + \frac{1-\gamma \eta}{2 \kappa} \right)^2} \right]^2 + \left[\frac{1}{1-\gamma} \left(\frac{\pi}{2} - \gamma \sqrt{1-\gamma^2} - \arcsin \gamma \right) + \frac{1-\gamma \xi}{2 \kappa} \right]^2 \right.}$$

$$\left. - 2 \cdot \sqrt{1 - \left(\frac{1+\gamma}{2} + \frac{1-\gamma \eta}{2 \kappa} \right)^2} \right\} \cdot \left[\frac{1}{1-\gamma} \left(\frac{\pi}{2} - \gamma \sqrt{1-\gamma^2} - \arcsin \gamma \right) + \frac{1-\gamma \xi}{2 \kappa} \right] +$$

$$\left. + 3 \left(\frac{1+\gamma}{2} + \frac{1-\gamma \eta}{2 \kappa} \right)^2 \right\}^{\frac{1}{2}} \quad (14)$$

- dla $R_e^{W(ov)} \geq R_e^B$:

$$S_p^{ov} = \frac{-2 + \sqrt{1 - \left(\frac{1+\gamma}{2} + \frac{1-\gamma \eta}{2 \kappa} \right)^2}}{3 \left\{ 4 \cdot \left[\left[\frac{-1}{1-\gamma} \left(\frac{\pi}{2} - \gamma \sqrt{1-\gamma^2} - \arcsin \gamma \right) \right] + \frac{1-\gamma \xi}{2 \kappa} \right] + \sqrt{1 - \left(\frac{1+\gamma}{2} + \frac{1-\gamma \eta}{2 \kappa} \right)^2} \right\}^2 -$$

$$\left[\left[\frac{-1}{1-\gamma} \left(\frac{\pi}{2} - \gamma \sqrt{1-\gamma^2} - \arcsin(\gamma) \right) \right] + \frac{1-\gamma \xi}{2 \kappa} \right] + 2 \sqrt{1 - \left(\frac{1+\gamma}{2} + \frac{1-\gamma \eta}{2 \kappa} \right)^2} \right] \cdot$$

$$\left. \left[\frac{-1}{1-\gamma} \left(\frac{\pi}{2} - \gamma \sqrt{1-\gamma^2} - \arcsin \gamma \right) \right] + \frac{1-\gamma \xi}{2 \kappa} \right\} + 3 \left(\frac{1+\gamma}{2} + \frac{1-\gamma \eta}{2 \kappa} \right)^2 \right\}^{\frac{1}{2}} \quad (15)$$

Na rysunkach 4 ÷ 7 przedstawiono odpowiednio charakterystykę zmian: $\sigma_{x(rel)}^{un}$, $\sigma_{y(rel)}^{un}$, $\sigma_{xy(rel)}^{un}$, σ_{ev}^{un} , σ_H^{un} , S_p^{un} oraz $\sigma_{x(rel)}^{ov}$, $\sigma_{y(rel)}^{ov}$, $\sigma_{xy(rel)}^{ov}$, σ_{ev}^{ov} , σ_H^{ov} , S_p^{ov} jako funkcję parametru γ .

Ocena stanu naprężenia wskazuje na zupełnie odmienną charakterystykę stanu naprężenia w obszarze (W), dla modeli przedstawionych na rysunkach 2 a, c i 2a, b oraz na zupełnie odmienną tendencję S_p^{un} i S_p^{ov} . Prowadzi to w konsekwencji do zmiany wskaźników wytrzymałościowych oraz odporności na pękanie układu heterogenicznego, przedstawionego na rysunkach 2b, c i 3a, b. I tak, uwzględniając uwarunkowania przyjętego uprzednio modelu, nowa wartość granicy plastyczności dla strefy (W) wynosi [5]:

$$\text{- dla } R_e^{W(un)} < R_e^B$$

$$R_{en}^{W(un)} = R_e^{W(un)} \cdot K_W^{un} \quad (16)$$

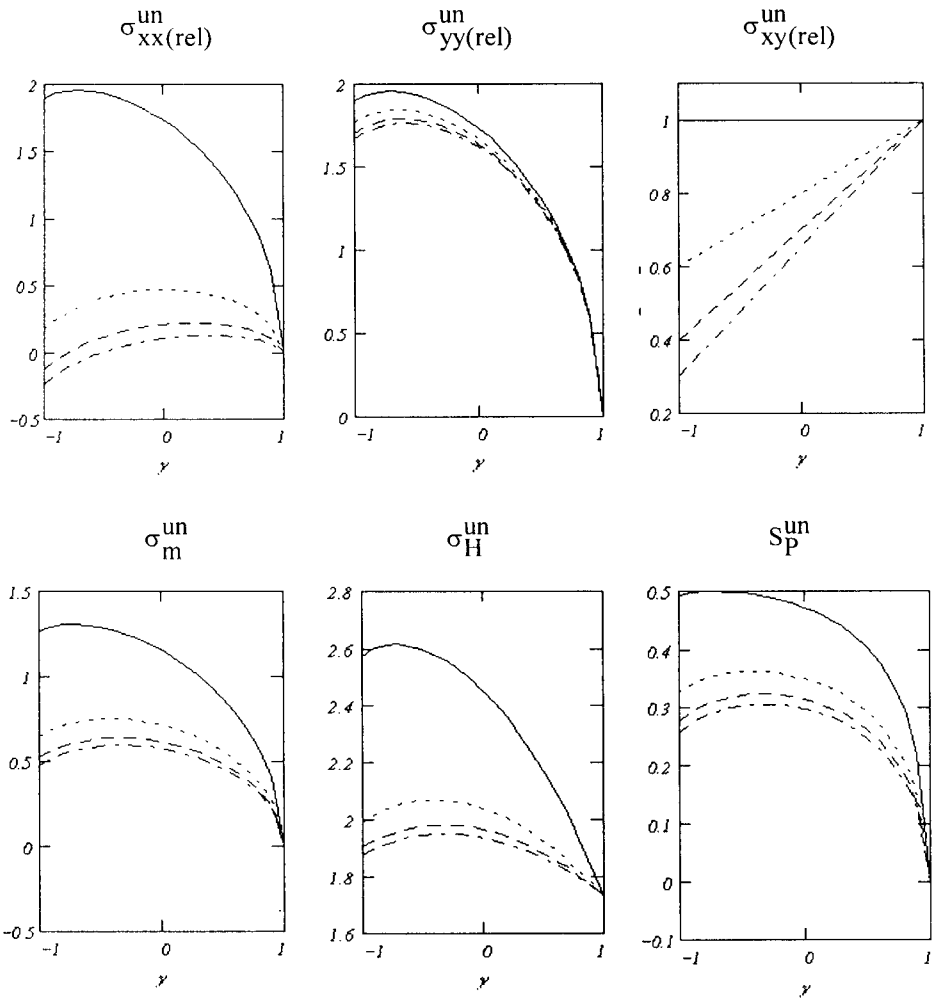
$$\text{- dla } R_e^{W(ov)} > R_e^B$$

$$R_{en}^{W(ov)} = R_e^{W(ov)} \cdot K_W^{ov} \quad (17)$$

gdzie:

- K_W^{un} - współczynnik uwzględniający wpływ więzów mechanicznych i zmianę stanu naprężenia dla modelu przedstawionego na rysunku 2b, $R_e^{W(un)} < R_e^B$,
- K_W^{ov} - jak wyżej, dla modelu przedstawionego na rysunku 2c, $R_e^{W(ov)} > R_e^B$,
- $R_e^{W(un)}$ - granica plastyczności strefy W o obniżonej wartości w stosunku do strefy B, bez uwzględnienia wpływu więzów mechanicznych i wynikającej stąd zmiany stanu naprężenia,
- $R_e^{W(ov)}$ - granica plastyczności strefy W o podwyższonej wartości w stosunku do strefy B, bez uwzględnienia wpływu więzów mechanicznych i wynikającej stąd zmiany stanu naprężenia,
- R_e^B - granica plastyczności materiału podstawowego, strefa B - rysunek 2 a, b, c.

W powyższym kontekście $R_{en}^{W(un)}$, $R_{en}^{W(ov)}$ odzwierciedlają nową wartość granicy plastyczności strefy W - rysunek 2 b, c, jako rezultatu wpływu więzów mechanicznych oddziałujących na poziomie makroskopolowym złącza - analogicznie jak na poziomie mikroskopowym - wzór (3), dając bardziej poprawną interpretację fizyczną.



Rys.4. Charakterystyka stanu naprężenia, $\sigma_{xx}^{un}(\text{rel})$, $\sigma_{yy}^{un}(\text{rel})$, $\sigma_{xy}^{un}(\text{rel})$ oraz σ_m^{un} , σ_H^{un} , S_p^{un} dla $\kappa = 0,3; 0,5; 0,75; 0,99$ i $\eta = 0,3; \xi = 0,1$

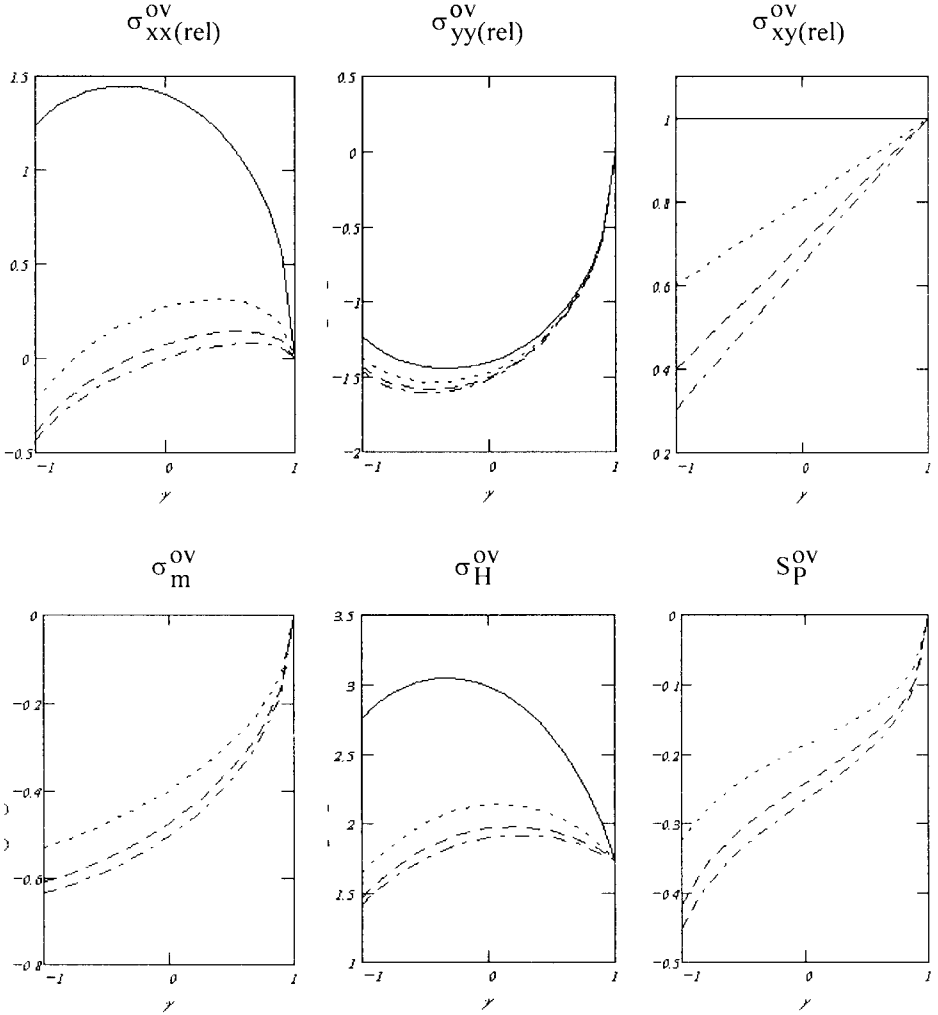
Zgodnie z opracowaniem [5] wartość K_W^{un} i K_W^{ov} wynosi odpowiednio:

$$K_W^{un} = \frac{2}{\sqrt{3}} \left(\frac{1}{4(1-q)} \left[\frac{\pi}{2} + 2(1-2q)\sqrt{q(1-q)} - \arcsin(2q-1) \right] + (1-q)\frac{1}{4\kappa} \right) \quad (18)$$

$$K_W^{ov} = \frac{2}{\sqrt{3}} \left(\frac{1}{4(1-q)} \left[-\frac{\pi}{2} - 2(1-2q)\sqrt{q(1-q)} - \arcsin(2q-1) \right] + (1-q)\frac{1}{4\kappa} \right) \quad (19)$$

$$0 \leq q < 1$$

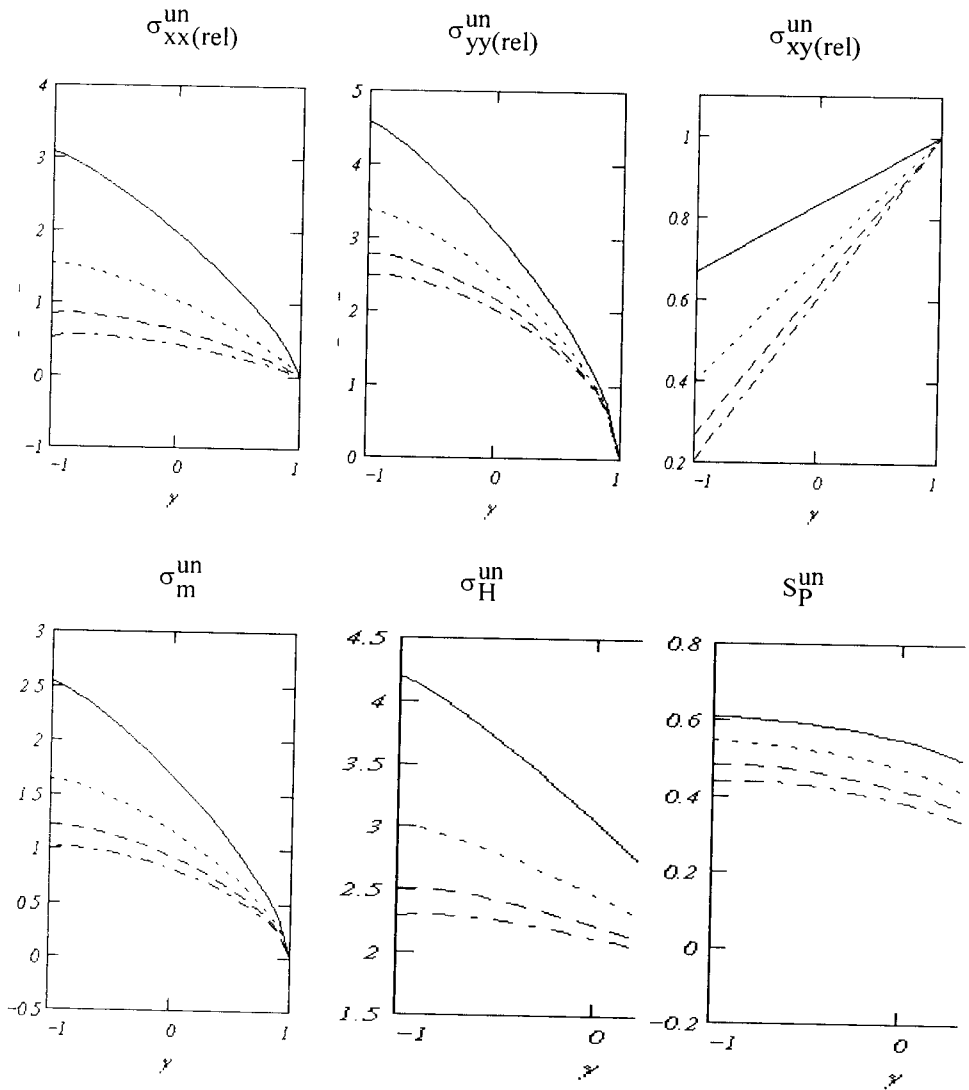
W sensie fizycznym, parametr q odzwierciedla wpływ stopnia odchylenia strefy W od prostopadłego ułożenia względem działającego obciążenia 2P i wynikający z tego poziom naprężeń stycznych na powierzchni styku stref W i B.



Rys.5. Charakterystyka stanu naprężenia. $\sigma_{xx}^{ov}(\text{rel})$, $\sigma_{yy}^{ov}(\text{rel})$, $\sigma_{xy}^{ov}(\text{rel})$ oraz

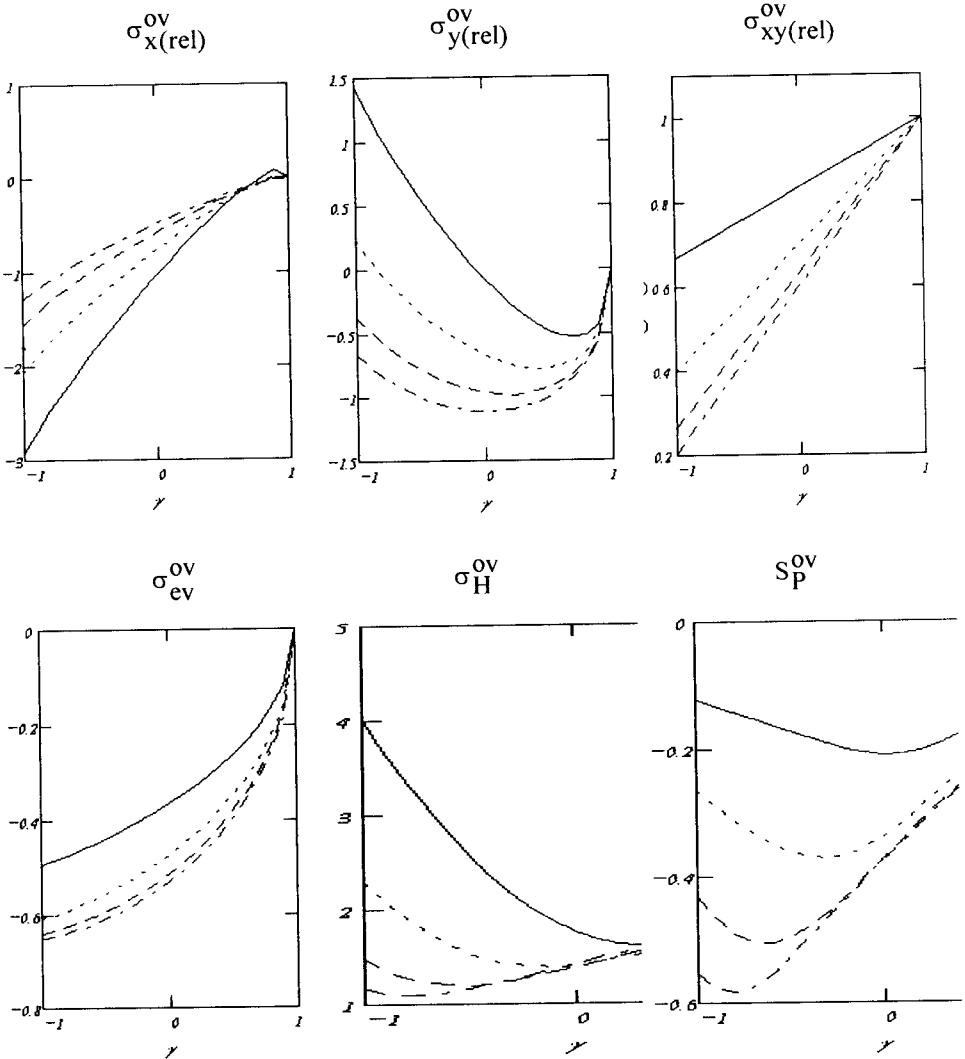
$$\sigma_m^{ov}, \sigma_H^{ov}, S_p^{ov} \text{ dla } \kappa = 0,3 ; 0,5 ; 0,75 ; 0,99 \text{ i } \eta = 0,3 ; \xi = 0,1$$

Istnieje ściśle określona relacja naprężeń stycznych na powierzchni styku stref W i B od oddziaływania więzów mechanicznych oraz obciążenia 2Q w postaci $1 + \gamma = 2q$, co pozwala - po uwzględnieniu przedziału zmienności γ oraz uwarunkowań fizycznych, wskazujących na brak możliwości czystego ścinania w strefie W ($q = 1$) - określić parametr q w przedziale: $0 \leq q < 1$. Dla warstwy prostopadłej względem obciążenia 2P - rysunek 2a, wartość $q = 0$, ponieważ $2Q = 0$.



Rys.6. Charakterystyka stanu naprężenia, $\sigma_{xx}^{un}(\text{rel})$, $\sigma_{yy}^{un}(\text{rel})$, $\sigma_{xy}^{un}(\text{rel})$ oraz

σ_m^{un} , σ_H^{un} , S_p^{un} dla $\kappa = 0.3 ; 0.5 ; 0.7 ; 0.99$ i $\eta = 0.2 ; \xi = 0.9$



Rys.7. Charakterystyka stanu $\sigma_{x(rel)}^{ov}$, $\sigma_{y(rel)}^{ov}$, $\sigma_{xy(rel)}^{ov}$ oraz σ_m^{ov} , σ_H^{ov} , S_p^{ov}
dla $\kappa = 0,3$; $0,5$; $0,7$; $0,99$ i $\eta = 0,2$; $\xi = 0,9$

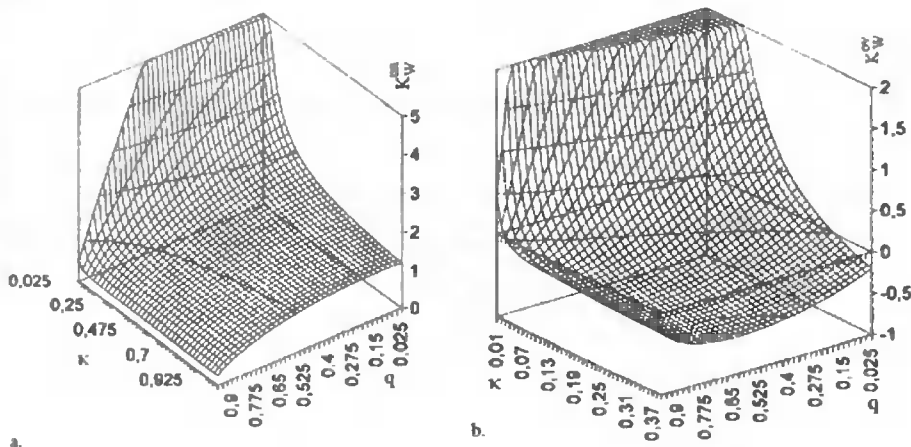
Na rysunku 8 przedstawiono wykresy parametrów K_W^{un} i K_W^{ov} dla różnej wartości κ i q , wskazując na odmienne tendencje oddziaływania więzów mechanicznych strefy o obniżonych lub podwyższonych własnościach mechanicznych. W praktyce strefa (W) reprezentuje spoinę lub strefę wpływu ciepła.

Jak wynika z rysunku 8 intensywność wzrostu parametru $K_W^{un/ov}$ jest najwyższa dla $q = 0$ przy jednocześnie malejącej względnej grubości strefy W - κ , co oznacza prostopadłe ułożenie strefy W w stosunku do działającego obciążenia $2P$ (rysunek 2).

Wzrost wartości parametru q powoduje znaczące obniżenie intensywności wzrostu parametru $K_W^{un/ov}$. Należy również zwrócić uwagę na fakt, iż dla modelu, dla którego

$R_e^{W(ov)} > R_e^B$, wartość K_W^{ov} może osiągać wartość mniejszą od jedności: $K_W^{ov} < 1$.

Może to mieć bardzo istotny wpływ, między innymi, na odporność na pęknięcie dla tego obszaru złącza. W tej sytuacji obszar ten nie musi wcale stanowić strefy o mniejszej odporności na pęknięcie, chociaż potencjalnie stanowi on największe zagrożenie, gdyż może ją tworzyć np. strefa podhartowana, występująca w strefie wpływu ciepła złączy spawanych ze stali ulepszonych cieplnie - np. 14HNMBCu. Rozważmy więc ten problem w aspekcie mechaniki pęknięcia. W praktyce strefa (W) reprezentuje spoinę lub strefę wpływu ciepła.



Rys.8. Wykresy K_W^{un} , K_W^{ov} dla a. $R_e^{W(un)} \leq R_e^B$, b. $R_e^{W(ov)} \geq R_e^B$

3. OCENA WŁASNOŚCI MECHANICZNYCH POŁĄCZEŃ SPAJANYCH W ASPEKTCIE MECHANIKI PĘKANIA

Według danych, jakie podaje Toyoda [5] zmiana parametru $M = R_e^{Wun/ov} / R_e^B$ w przedziale od 0,8 do 1,2 oznacza 20% zmianę rzeczywistych parametrów określających odporność na pęknięcie złącza. Rozpatrzmy więc w dalszej konsekwencji, sytuację wynikającą z obecności w centralnej części strefy W szczeliny o długości $2a$, przyjmując jako miarę odporności na pęknięcie parametr δ -CTOD. Wobec powyższego miarą zmiany odporności na pęknięcie strefy (W) - δ_W w stosunku do obszaru (B) - δ_B , może być parametr δ_R :

$$\delta_R = \frac{\delta_W}{\delta_B} \quad (20)$$

gdzie: $\delta_W = \delta_R \cdot \delta_B$.

Dla sytuacji przedstawionej na rysunku 2 a, b wartość δ_R wynosi [5]:

- dla $K_S^{un} = R_e^B / R_e^{un} > 1$

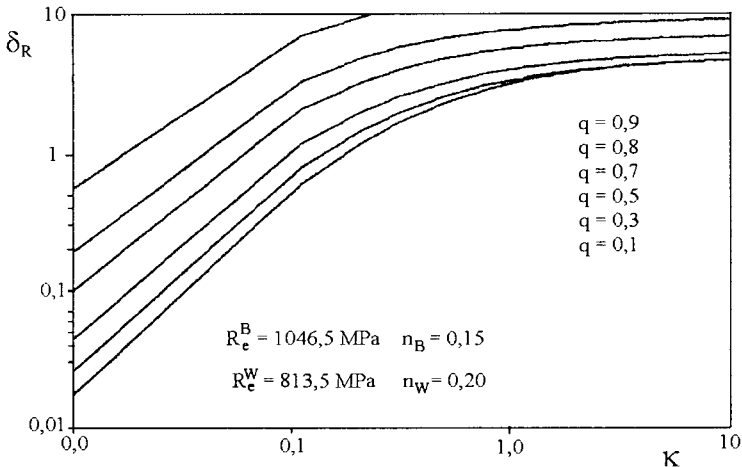
$$\delta_R^{un} = \left(\frac{1}{K_S^{un}} \right)^{(1-1/n_W)} \left(\frac{K_W^{un}}{K_S^{un}} \right)^{\left(\frac{1}{n_W} - \frac{1}{n_B} \right)} \quad (21)$$

- dla $K_S^{ov} = R_e^B / R_e^{ov} > 1$

$$\delta_R^{ov} = \left(\frac{1}{K_S^{ov}} \right)^{(1-1/n_W)} \left(\frac{K_W^{ov}}{K_S^{ov}} \right)^{\left(\frac{1}{n_W} - \frac{1}{n_B} \right)} \quad (22)$$

gdzie:

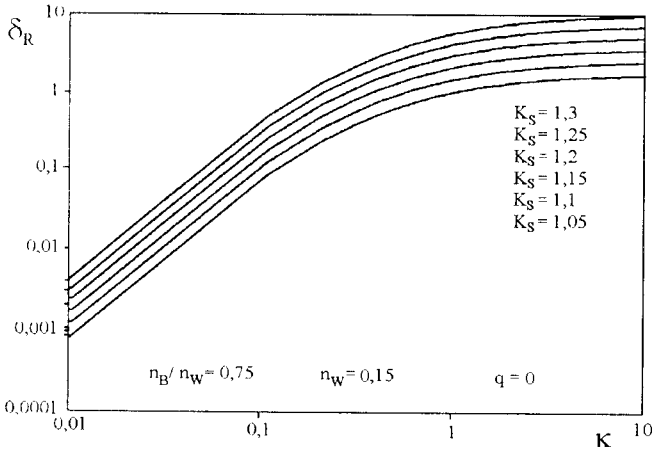
n_W, n_B - współczynniki umocnienia materiału odpowiednio dla stref (W) i (B).



Rys.9. Wykres δ_R^{un} jako funkcji κ dla $q = 0,1 \div 0,9$ i $K_S^{un} = 1,3$ i o wartościach

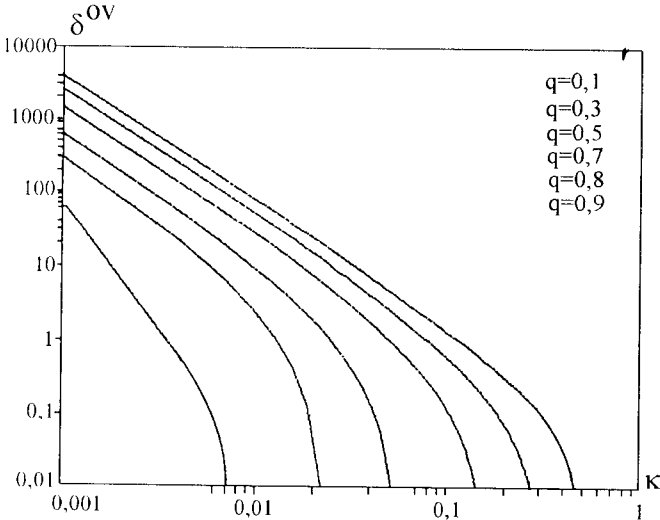
$R_e^B = 1046,5$ MPa, $R_e^{un} = 813,5$ MPa oraz $n_B = 0,15$, $n_W = 0,20$

Jako przykład wykorzystania w/w zależności, na rysunku 9 przedstawiono zmianę parametru δ_R^{un} jako funkcję κ dla $q = 0,1 \div 0,9$, zgodnie ze wzorem (21) dla wysokowytrzymałej stali o własnościach $R_e^{Wun} = 813,5$ MPa i $R_e^B = 1046,5$ MPa. Ponadto na rysunku 10 przedstawiono zmianę parametru δ_R^{un} , jako funkcję κ dla $q = 0$ oraz $K_S^{un} = 1,05 \div 1,30$.



Rys.10. Wykres δ_R^{un} , jako funkcji κ dla $q=0$ i $K_S = 1.05 \div 1.30$

Na rysunku 11 przedstawiono zmianę wartości $\delta_R = \delta_W^{ov} / \delta_B$, zgodnie ze wzorem (22) dla następujących własności stref W i B: $R_e^{Wov} = 1046,5$ MPa, $R_e^B = 813,5$ MPa, $n_B = 0,2$, $n_W = 0,15$, $K_S = 0,77$, $q = 0,1 \div 0,9$.



Rys.11. Wykres δ_R^{ov} , jako funkcji κ dla $q = 0,1 \div 0,9$ oraz $K_S = 0,77$.

Powyższe przykłady wyraźnie wskazują na istotny wpływ zróżnicowania własności mechanicznych stref W i B na odporność na pękanie złączy spawanych. Parametr $\delta_R^{un/ov} = \delta_W^{un/ov} / \delta_B$ stanowi również w praktyce miarę uwrażliwienia złącza na

proces spawania, stając się istotnym czynnikiem w ocenie spawalności. Powyższe rozważania są w swojej istocie rezultatem analizy stanu naprężenia, jako rezultatu oddziaływania więzów mechanicznych w układzie heterogenicznym [5], posiadając fundamentalne znaczenie w zakresie właściwej interpretacji i oceny analizowanego układu spajanego.

WNIOSKI

Lokalne zróżnicowanie struktury w obrębie połączeń spajanych wywołuje istotną zmianę cech własności mechanicznych dla tego obszaru. Wykazano, iż zarówno na poziomie mikroskopowym, jak i makroskopowym relacja mikrostruktura - własności mechaniczne jest funkcją parametrów fizycznych, jak i cech geometrycznych układu. W odniesieniu do modelu heterogenicznego połączenia spajanego, stosując zmodyfikowany model Prandtla, ustalono charakterystykę zmiany stanu naprężenia i jej skutków poprzez ocenę S_p i K_w , uwzględniając wpływ więzów mechanicznych, wynikających z lokalnych zmian mikrostruktury. Przedstawiona w końcowej fazie ocena wpływu parametrów K_W^{un} i K_W^{ov} wykazała równie istotną zmianę odporności na pękanie dla obszaru (W) - obniżenie odporności na pękanie dla strefy (W), spełniającej $R_e^{W(un)} \leq R_e^B$ i podwyższenie odporności na pękanie dla strefy (W), spełniającej warunek $R_e^{W(ov)} \geq R_e^B$.

LITERATURA

- [1] Bhadeshia H. K. D. H.: „Modelling of steel welds”. Materials Science and Technology, Vol.8, pp. 128 ÷ 133, February, 1992.
- [2] Pan R., Watt D.F.: Simulating microstructure development in high - carbon steel cross - wire welding”. Welding Journal, Nr 12, 1995.
- [3] Ranatowski E.: Analiza własności mechanicznych. Rozprawy, Nr 3, ATR Bydgoszcz, 1980.
- [4] Ranatowski E.: „Some remarks on stress state at interface of the mismatched weld joints”. 2nd International Symposium on Mis - Matching of Welds, Reinstorf - Lüneburg, Germany, 1996.
- [5] Ranatowski E.: „Influence of the constraint effect on fracture resistance of mismatched weld joints”. ECF 11. Mechanisms and Mechanics of Damage and Failure. Vol.III. Published by EMAS. London, UK, 1996.
- [6] Toyoda M.: Problems with relation to strength mismatching and future works. Osaka university, Japan, 1994.

SOME ASPECTS OF IDENTIFICATION THE MECHANICAL PROPERTIES OF WELD JOINTS

Summary

In this paper was presented the relation between structure and mechanical properties of the heterogeneous weld joints with used a modified Prandtl solution. An analysis was made of stress σ_{ik} , $i, k = x, y$ at interface for the cases of perpendicular and non-perpendicular orientation of the zones relative to the load action direction under tension. Conclusion from stress analysis form a stress state parameter S_p as a physical measure of the deformation and effort of the mismatched weld joint and constraint factor K_W . Furthermore, form some basic for application of the constraint factor K_W , to an assessment of the fracture parameter $\delta_R = \delta_W^{un/ov} / \delta_B$.

Key words: heterogeneous of structure, stress state, fracture parameters.

ZASTOSOWANIE WSPOMAGANIA KOMPUTEROWEGO CAI W BADANIACH PROCESU PEKANIA W PRÓBIE UDAROWEGO ZGINANIA

Eugeniusz Ranatowski¹, Jan Sadowski²

¹Katedra Materiałoznawstwa i Technologii Metali, Wydział Mechaniczny ATR
ul. Prof. S. Kaliskiego 7, 85-796 Bydgoszcz

²Katedra Mechaniki Stosowanej, Wydział Mechaniczny ATR
ul. Prof. S. Kaliskiego 7, 85-796 Bydgoszcz

W pracy przedstawiono problemy związane z właściwą interpretacją wykresów $F(t)$, $F(f)$ zdejmowanych w próbie udarowego zginania, niezbędnych dla dokładnej oceny parametrów dynamicznej odporności materiałów na pękanie np. K_I^d, J_I^d . Podano możliwości wykorzystania matematycznych metod obróbki zarejestrowanych szybkozmiennych przebiegów dynamicznych w próbie udarowego zginania, wykorzystując komputerowe wspomaganie. Pokazano przykładowe algorytmy obróbki wykresów w zakresie matematycznej filtracji opartej na uśrednianiu zmiennej losowej i oscylacji w dziedzinie czasu i częstotliwości. Określono procedurę wyznaczania punktów charakterystycznych procesu łamania udarowego próbki na przykładzie konkretnej obróbki wykresu $F(t)$ dla próbki Charpy V ze stali 18G2A.

Słowa kluczowe: próba udarowego zginania, wspomaganie komputerowe.

1. WSTĘP

Zgodnie z obowiązującą w kraju procedurą badania udarności materiałów według PN-79/H-04370 energia kinetyczna wahadła młota udarowego zostaje częściowo zamieniona na pracę uderzenia K , odpowiadającą energii zużytej na złamanie próbki:

$$K = mgR(\cos\beta - \cos\alpha)[J] \quad (1)$$

gdzie:

- m - masa wahadła młota, kg,
- R - odległość od osi wahadła młota do środka próbki ustawionej na podporach, m,
- g - przyspieszenie ziemskie, m/s^2 ,
- α - kąt spadania wahadła młota, deg,
- β - kąt wychylenia wahadła młota po złamaniu próbki, deg.

Wartość pracy uderzenia K odniesiona do powierzchni początkowej przekroju próbki S_0 w miejscu karbu określa parametr KC , zwany udarnością:

$$KC = K \cdot S_0^{-1} \quad [J/cm^2] \quad (2)$$

Wartość zużytej pracy K lub udarności KC określona zostaje globalnie, co w aspekcie fizyki procesu łamania próbki może prowadzić do bardzo subiektywnej oceny tychże parametrów.

Próbie test usiłuje się nadać bardziej precyzyjny charakter poprzez określenie parametrów i kryteriów wynikających z dynamicznej mechaniki pękania np. K_{ld} , J_{ld} . Zasadnicze trudności związane z prawidłową oceną próby udarowego zginania, przy wykorzystaniu parametrów mechaniki pękania, wynikają z dynamicznego charakteru próby i niedoskonałości metodyki badawczej. Dynamiczny charakter przebiegu próby wyzwala szereg zjawisk, prowadzących do znacznej dyssypacji energii:

- absorbowanej przez młot udarowy,
- absorbowanej przez próbkę,
- bezpośrednio zużytej na proces pękania próbki.

Ponadto występują zakłócenia przebiegu zdejmowanych charakterystyk: $F(t)$, $f(t)$, $F(t)$ (F -siła, f -ugięcie, t -czas), które stanowią podstawę analizy i oceny procesu udarowego zginania. W powyższym aspekcie ocena tego procesu nie jest możliwa, bez uwzględnienia podstaw fizyki tego procesu. Powinno to doprowadzić do ustalenia właściwych kroków do zarejestrowania charakterystyk $F(t)$, $F(f)$, $f(t)$, ich obróbki matematycznej, a w dalszej kolejności określenia punktów charakterystycznych procesu zginania próbki i ocenę właściwych parametrów opisujących to zjawisko, np. K_{ld} , J_{ld} , w zależności od kruchego bądź ciągliwego przebiegu procesu pękania materiału.

2. PODSTAWY FIZYCZNE PROCESU UDAROWEGO ZGINANIA

Charakteryzując z fizycznego punktu widzenia, przebieg próby udarowego zginania należy stwierdzić, że oddziaływanie pomiędzy nożem wahadła młota, podporami a próbką ma charakter falowy. Energia dostarczona poprzez fale naprężeniowe wywołuje:

- a) oscylacje stanu naprężenia wokół szczeliny i fluktuację odbitych fal naprężeń, wywołującą oscylację układu młot-próbka w wyniku impulsu $\int_0^t F dt$,
- b) przyspieszenie masy próbki, z którym związany jest również efekt inercyjny a odgrywający zasadniczą rolę w początkowym okresie zginania,
- c) mechaniczne zginanie próbki.

Zjawiska wyszczególnione w punktach a, b, są bezpośrednim skutkiem dynamicznego charakteru próby. Równocześnie nakładanie się w/w zjawisk powoduje zasadnicze trudności w ocenie parametrów charakteryzujących proces pękania i właściwą interpretację wyników próby udarowego zginania.

W próbkach typu Charpy V z uwagi na ograniczone rozmiary próbki, fale odbite od powierzchni ograniczających oraz ich dyfrakcja na końcu szczeliny dodatkowo nadaje procesowi temu charakter stochastyczny, wpływający na przebieg siły $F(t)$, $F(f)$ i $f(t)$, a w konsekwencji na stan naprężenia wokół wierzchołka szczeliny. W rezultacie tego, po osiągnięciu przez falę naprężenia szczeliny o wartości początkowej amplitudy σ_0 i okresie T_0 , stan naprężenia wokół wierzchołka szczeliny ma charakter oscylacyjny, co w powiązaniu z fluktuacją odbitych fal naprężeniowych oraz nagromadzoną energią sprężystą w badanym układzie prowadzi do drgań własnych próbki, podpór i wahadła.

Z uwagi na małe wymiary próbki zjawisko to wykorzystuje się do pomiaru siły łamiącej próbkę poprzez usytuowanie czujników pomiarowych na nożu wahadła lub podporach. Tak więc, zasadniczo problem oceny zjawisk zachodzących bezpośrednio w próbce dokonuje się na podstawie analizy zjawisk zachodzących poza próbką i stopień wiarygodności zależy od podobieństwa zjawisk w próbce oraz nożu wahadła i podpór.

Ocena podstawowych parametrów mechaniki pękania: K_{Id} , J_{Id} wymaga więc uwzględnienia i wyselekcjonowania wpływu czynników dynamicznych w czasie przebiegu pomiaru sił w układzie $F(t)$ lub $F(f)$ i określenia punktów charakterystycznych związanych z poszczególnymi etapami łamania próbki. W praktyce oznacza to znaczącą eliminację zakłóceń i deformację sygnału pomiarowego w czasie badań eksperymentalnych oraz możliwość jego analitycznej weryfikacji z uwzględnieniem zasad modelowania i aplikacji metod matematycznych, opartych na metodach komputerowych. Realizacja tak postawionego celu jest możliwa dzięki systemowi wspomaganie komputerowego CAI (Computer Aided Instrumented Charpy Impact Testing).

3. NIEKTÓRE ASPEKTY MODELOWANIA PRÓBY UDAROWEGO ZGINANIA

Rozważmy w dalszej kolejności w jakim stopniu są spełnione kryteria modelowania zjawisk fizycznych zachodzących w próbce i elementach pomiarowych, którymi są nóż wahadła i podpory.

Warunkiem koniecznym i dostatecznym występowania podobieństwa pomiędzy modelem a rzeczywistym obiektem jest formalizacja opisu zachodzących w nich procesów [1]:

- za pomocą tych samych związków fizycznych, opisujących wewnętrzne prawidłowości procesu i określonych za pomocą tych samych równań różniczkowych, tworząc matematyczny model procesu,
- zgodność kryteriów podobieństwa.

Model matematyczny formalizuje opis modelu fizycznego a rozwiązanie równań różniczkowych prowadzi do prawidłowej analizy wymiarowej procesu dla określonej przestrzeni fizycznej, którą w tym przypadku stanowi:

- próbka Charpy V ze wstępnym pęknięciem jako obiekt rzeczywisty,
- nóż wahadła i podpory jako modele obiektu rzeczywistego

Jeżeli weźmiemy próbkę Charpy V ze wstępnym pęknięciem, poddanej działaniu dynamicznego obciążenia $F(t)$, wówczas problem oceny stanu wyężenia materiału można sprowadzić do określenia stanu naprężenia σ_{ij} w sąsiedztwie wierzchołka szczeliny, który w ramach dynamicznej liniowej mechaniki pękania można określić jako [1,2,9]:

$$\sigma_{ij} = K_1^d g_{ij}(\Theta, v) / \sqrt{2\pi r} \quad (3)$$

gdzie:

K_1^d - dynamiczny współczynnik intensywności naprężenia,

t - czas działania siły $F(t)$,

$g_{ij}(\Theta, v)$ - uniwersalna funkcja kąta Θ i prędkości wierzchołka szczeliny v z, którym związany jest ruchomy układ współrzędnych Θ, r przy czym $i, j = x, y$ a $r \rightarrow 0$

Z uwagi na to, że stan naprężenia charakteryzuje jednoznacznie dynamiczny współczynnik intensywności naprężenia $K_I(t)$, ocenę wyteżenia materiału można uprościć i modelowe warunki rozwoju szczeliny określić podobnie jak w metodach statycznych, jako:

$$K_I^d = K_{Icr}^d \quad (4)$$

gdzie:

K_{Icr}^d - odporność na rozwój pęknięcia w warunkach dynamicznych.

Rozwiązanie problemu określonego przez równanie (4) prowadzi do wymiarowania przestrzeni fizycznej poprzez parametry K_I^d oraz K_{Icr}^d [9,10]:

$$K_I^d = \phi_1 [l(t), \dot{l}(t), t, \text{obciążenie}] \quad (5a)$$

gdzie:

$l(t)$ - długość szczeliny,

t - czas,

$\dot{l}(t)$ - prędkość wierzchołka szczeliny

$$K_{Icr}^d = \phi_2 [l(t), T, B, W] \quad (5b)$$

gdzie:

T - temperatura,

B, W - wymiary charakterystyczne próbki,

$\dot{l}(t)$ - prędkość wierzchołka szczeliny.

Ogólne spostrzeżenia dotyczące przebiegu zmiany sił pomierzonych $F(t)$, stanowiących podstawę oceny K_I^d na nożu wahadła, próbce i podporach możemy ocenić następująco [3, 4]:

- przebiegi sił $F(t)$ rejestrowane na nożu wahadła, próbce i podporach są względem siebie przemieszczone w czasie t ,
- określenie siły uśrednionej $F\Sigma$ pozwala częściowo skompensować przesunięcia fazowe i oscylacje mierzonych sił na bijaku i podporach w stosunku do siły łamiącej próbkę zdjętej bezpośrednio z próbki.

Powyższa sytuacja jest w głównej mierze rezultatem nie spełnienia kryterium podobieństwa poprzez wymiary geometryczne próbki oraz nóż wahadła i podpory. Jeżeli oznaczymy podstawowe wymiary próbki przez: A - grubość, B - szerokość, L - długość, a odpowiadające wymiary podpór i noża wahadła przez: A', B', L' i A'', B'', L'' , to:

$$\frac{A}{A'} \neq \frac{A}{A''} \neq \frac{B}{B'} \neq \frac{B}{B''} \neq \frac{L}{L'} \neq \frac{L}{L''} \quad (6)$$

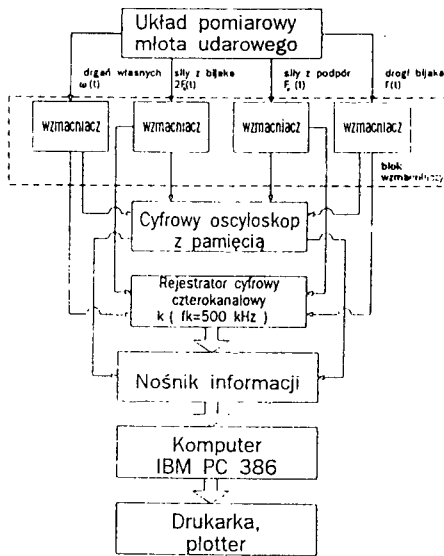
co prowadzi do innych relacji ilościowych tych samych procesów. Wobec powyższego uzyskane rezultaty oceny przebiegu sił z noża wahadła lub podpór uznać można za pierwszą generację wyników pomiarowych, które w dalszej kolejności powinny podlegać dalszej korekcie i obróbce, co jest możliwe dzięki aplikacji systemu CAI. Przyjęty w pracy ramowy program postępowania polega na:

- rejestracji przebiegów sił F poprzez układ pomiarowy młota uderowego,
- filtracji zakłóceń na rejestrowanych przebiegach (smoothing),
- wyznaczeniu siły uśrednionej $F\Sigma$,
- uwzględnieniu wpływu drgań u podstaw podpór na $F\Sigma$,
- końcowej filtracji i korekcji siły uśrednionej $F\Sigma$,
- normowaniu i obliczeniu parametrów charakteryzujących proces pęknięcia próbki Charpy V.

4. CHARAKTERYSTYKA GŁÓWNYCH KROKÓW MATEMATYCZNEJ OBRÓBKI WYKRESÓW W PRZYJĘTYM SYSTEMIE CAI

Na rysunku 1 przedstawiono w sposób schematyczny funkcjonowanie przyjętego systemu CAI. Zastosowany w niniejszej pracy układ pomiarowy realizuje:

- pomiar siły z podpór,
- pomiar siły z noża wahadła,
- pomiar drogi wahadła,
- pomiar drgań własnych,



Rys.1. Schemat blokowy konfiguracji przyjętego systemu CAI

Powyższy system bliżej scharakteryzowano w opracowaniach [3, 4]. Może on być stosowany przy równoczesnym zdejmowaniu sygnałów pomierzonych wg schematu blokowego – rysunek 1 w opcji optymalnej lub tylko z osobnych punktów pomiarowych np. noża wahadła lub podpór itp. Co najczęściej spotyka się w praktyce. Stanowi on podstawę do dalszej analizy, obróbki i opracowania wykresów podstawowych związanych z określeniem siły łamiącej próbkę. Pierwszą czynnością związaną z opracowa-

niem wykresów stanowi operacja uśredniania, przeprowadzana w sposób ciągły (smoothing). Jest ona wykonana przez zamianę wartości chwilowych każdego przebiegu filtrowanego $f_i(t)$: $F_p(t)$ -z czujników na podporach, $F_b(t)$ -z czujników na nożu wahadła na wartości tzw. momentów rzędu zerowego $m_o(t)$, czyli na wartości średnie [3].

Wartość $m_o(t)$ dla czasu dyskretnego $k = t/\Delta t$, gdzie $\Delta t \cong 2\mu s$ określamy na podstawie zależności:

$$m_o(k) = \frac{1}{I+1} \sum_{i=k-1/2}^{k+1/2} f(i) = m_o(k-1) - \frac{1}{I+1} [f(k-1-1/2) - f(k+1/2)] \quad (7)$$

gdzie:

$I+1 = T/\Delta t + 1$ - liczba uśrednionych danych oceniana w przybliżeniu z nierówności $I \leq M/50$.

$M+1$ - ogólna liczba danych pomiarowych,

Δt - okres dyskretyzacji.

T - długość przedziału uśredniania.

Otrzymane w ten sposób wykresy i oczyszczone z szybkozmiennych zakłóceń przebiegi $F(k)$, $F_p(k)$ oznaczony dalej jako $F'_\Sigma(k)$; $F'_b(k)$.

Następny krok polega na wyznaczeniu siły uśrednionej $F'_\Sigma(k)$ zgodnie ze wzorem:

$$F'_\Sigma(k) = \frac{1}{2} [a_w 2F'_p(k) + (2 - a_w) F'_b(k)] \quad (8)$$

gdzie:

a_w - funkcja wagi, uwzględniająca nierównomierny wpływ składowych $F'_p(k)$ i $F'_b(k)$ na skutek ich przesunięcia.

Ocena $F'_\Sigma(k)$ odbywa się w wydzielonym module programowym a wartość a_w określimy zgodnie z zależnością

$$a_w = 2 \sum_{k=0}^M F'_b(k) / \sum_{k=0}^M 2F'_p(k) + F'_b(k) \quad (9)$$

Jeżeli po wykonaniu tej operacji, na podstawie $F'_\Sigma(k)$ nadal jest niemożliwa jednoznaczna interpretacja rezultatów badań, wtedy prowadzimy końcową filtrację związaną z korektą siły uśrednionej. Taką filtrację będzie można dokonać zarówno w dziedzinie:

- dyskretnego czasu,
- dyskretniej częstotliwości.

O tym jaką opcję obróbki wybrać decyduje operator programu i jego doświadczenie.

Kończona filtracja $F'_\Sigma(k)$ w dziedzinie czasu dyskretnego jest przeprowadzona zgodnie ze wzorem (7), lecz dla większej liczby danych. Rezultat tej filtracji – przebieg $F''_{\Sigma 1}(k)$ - może być jednak w dużym stopniu subiektywny. Utrudnione może być w dalszej kolejności rozdzielenie charakterystycznych obszarów i punktów przebiegu siły $F''_{\Sigma 1}(k)$. Pomocny w opracowaniu przebiegu siły $F''_{\Sigma 1}(k)$ jest proces różniczkowania takiego przebiegu.

Końcowa filtracja $F'_\Sigma(k)$ w zakresie dyskretnej częstotliwości przebiega zgodnie ze wzorem:

$$F'_\Sigma(jm\Delta\omega) = \sum_{k=0}^M F'_\Sigma(k) \exp(-jm\Delta\omega \Delta_1) \quad (10)$$

gdzie:

$\Delta\omega = 2\pi/(M+1)$ - przedział próbkowania w dziedzinie częstotliwości,
 m - numer kolejnego próbkowania w dziedzinie częstotliwości.

Przebieg $F'_{\Sigma_2}(k)$ otrzymany w wyniku filtracji w dziedzinie częstotliwości będzie porównywany z rezultatem końcowym filtracji w dziedzinie czasu - przebiegiem $F''_{\Sigma_1}(k)$. Pozwoli to przyjąć jeden z nich, jako końcowy rezultat filtracji o czym: decyduje operator programu. Przyjęty w ten sposób przebieg siły oznaczono przez $2F'_x(k)$.

Obróbka końcowa odfiltrowanego przebiegu $2F'_x(k)$ będzie obejmowała [3]:

- wyznaczenie zależności siły $2F'_x(k)$ od przemieszczenia noża wahadła f ,
- normowanie-skalowanie przebiegu siły $2F'_x(k)$ w wartościach bezwzględnych,
- aproksymację przebiegu $F'_x(k)$, liniową funkcją sklejaną o swobodnych węzłach,
- obliczanie parametrów, charakteryzujących odporność na pękanie badanej próbki Charpy: K_{Id} , J_{Id} .

Zmiana argumentów funkcji $2F'_x(k)$ na $2F'_x(f)$ jest przeprowadzona:

- w celu określenia obszaru odkształceń sprężystych i plastycznych oraz oceny momentu inicjacji procesu pękania i niestabilnego rozwoju szczeliny w próbce, w zależności od jej ugięcia f ,
- ponieważ normowanie-skalowanie siły $2F'_x(k)$ w wartościach bezwzględnych jest prowadzone na podstawie wychyleń wskaźnika wyskalowanego w jednostkach pracy łamania próbki.

Stosowany w tym celu moduł programowy wykorzystuje procedurę przyporządkowania sobie wartości przebiegu $2F'_x(k)$ i przemieszczenia liniowego noża wahadła:

$$f = PL(k) \quad (11)$$

gdzie:

$PL(k)$ - funkcja przemieszczenia noża wahadła w czasie dyskretnym, mierzona przez czujniki i rejestrowana w chwili uderzenia noża wahadła w próbkę.

Wobec tego zamiana argumentów „ k ” na „ f ” sprowadza się do wyznaczenia związku:

$$2F'_x(f) = 2F'_x(PL^{-1}(f)) \quad (12)$$

Proces normowania polega więc na obliczeniu współczynnika K_N :

$$K_N = K / \sum_{k=1}^M \frac{1}{2} [2F'_x(f_k) + 2F'_x(f_{k-1})] (f_k - f_{k-1}) \quad (13)$$

gdzie:

K - całkowita praca łamania próbki, odczytywana wg wskazań młota,

f_k - przemieszczenie noża wahadła dla k -tego czasu dyskretnego, równoważne ugięciu próbki,

oraz przemnożeniu przez niego przebiegów sił $2F'_x(k)$ i $2F'_x(f)$.

W rezultacie otrzymamy wartości bezwzględne odfiltrowanych przebiegów sił. Obliczona na ich podstawie całkowita praca K równa się wskazaniu bezpośrednio odczytanym z podziałki. Charakteryzując proces pęknięcia zginanej próbki, należy to jednak zrobić po przeprowadzeniu aproksymacji uzyskanych przebiegów. Aproksymacja $2F'_x(k)$, $2F'_x(f)$ może być przeprowadzona zarówno przed, jak i po normowaniu, a nawet z pominięciem etapu filtracji końcowej ze względu na swoje dobre własności filtrujące.

Analizowane przebiegi $2F'_x(k)$ i $2F'_x(f)$ mogą być przybliżane funkcjami sklejanymi F_s o swobodnych węzłach [5], w danym przypadku odcinkami liniowymi mającymi postać:

- dla $2F'_x(k)$

$$F_s(k) = a_{n-1} \left(k - k_{n-1} \right) \frac{(a_n - a_{n-1})}{(k_n - k_{n-1})} \quad (14)$$

- dla $2F'_x(f)$

$$F_s(f) = a_{n-1} \left(f - f_{n-1} \right) \frac{(a_n - a_{n-1})}{(f_n - f_{n-1})} \quad (15)$$

gdzie:

k_n, f_n - dyskretny czas i przemieszczenie noża wahadła, odpowiadające końcowi n -tego i początkowi $n+1$ przedziału aproksymacji (punkty sklejanania),
 $k_0 = 0; k_N = M$,

a_n - wartość funkcji F_s w punktach sklejanania, przy czym $a_0 = 0; a_N = 0$,

N - ilość przedziałów aproksymacji.

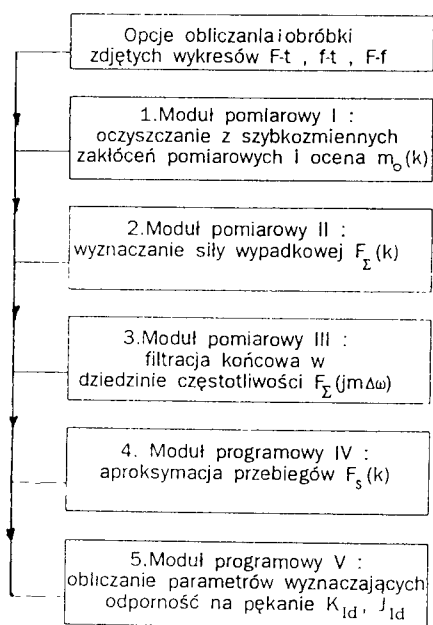
W modelu realizującym powyższą aproksymację parametry a_1, a_2, \dots, a_{N-1} oraz k_1, k_2, \dots, k_{N-1} funkcji (14), (15) są wyznaczane w wyniku minimalizacji błędu kwadratowego z wagą $1/(k_n - k_{n-1})^2$ lub $1/(f_n - f_{n-1})^2$ w n -tym przedziale aproksymacji [3]. W tym celu został wykorzystany samouczący się, optymalizujący algorytm poszukiwań przypadkowych [6].

Normowanie i obliczanie parametrów, charakteryzujących proces pęknięcia próbki realizowane jest w oparciu o moduł programowy, w którym nastąpi ocena podstawowych parametrów, wynikających z dynamicznej mechaniki pęknięcia: K_{ld} , J_{ld} oraz podział pracy K na składowe odpowiadające poszczególnym etapom procesu pęknięcia próbki.

Na rysunku 2 przedstawiono schematycznie program obróbki danych pomiarowych z uwzględnieniem opisaną procedury matematycznej.

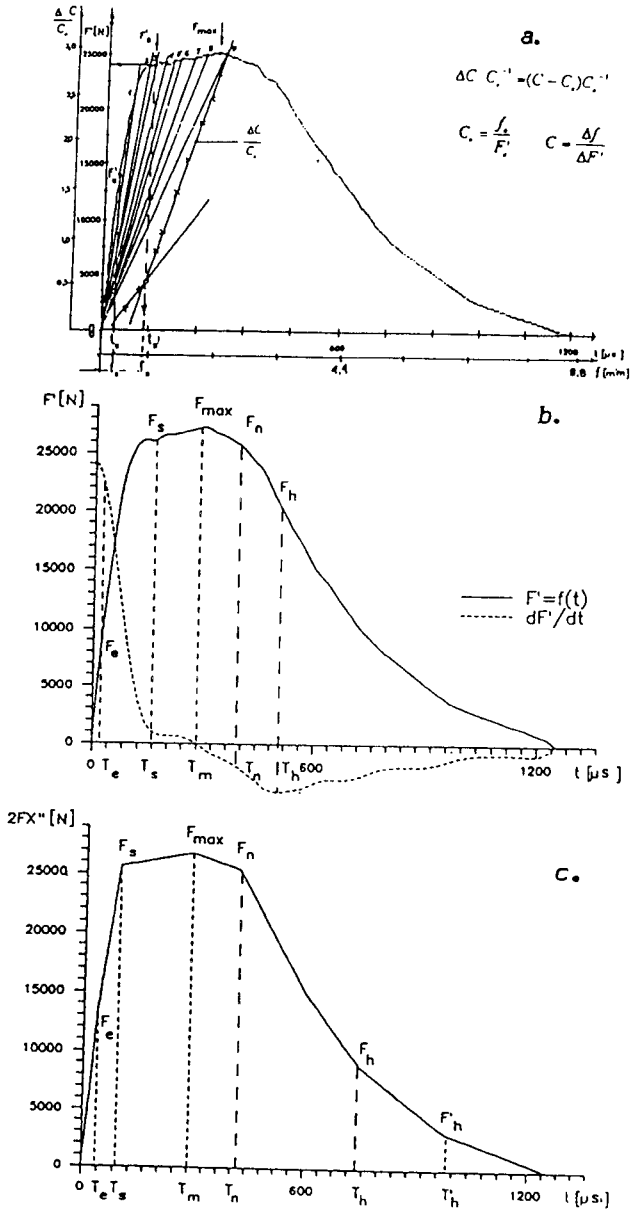
5. PRZYKŁAD APLIKACJI SYSTEMU CAI

Na rysunku 3a-d przedstawiono rezultaty wybranych etapów filtracji, korekcji oraz obróbki przebiegów pomiarowych w dziedzinie czasu dla próbki Charpy V ze stali 18G2A. Zastosowana obróbka matematyczna wykresu rzeczywistego zdjętego z noża wahadła młota udarowego-rysunek 3a, prowadzi do nadania bardziej przejrzystej formy-rysunek 3b, 3c i 3d, z możliwością lepszej interpretacji fizycznego procesu pęknięcia.



Rys.2. Stosowane opcje obliczeniowe przy obróbce zdjętych charakterystyk parametrów

Rys.3. Przebieg procesu uśredniania przebiegu F-t dla wykresu zdjętego ze stali 18G2A:
a. wykres rzeczywisty, b. dla 11 kroków uśredniania ($M=11$), c. dla 21 kroków uśredniania ($M=21$), d. dla 61 kroków uśredniania ($M=61$)



Rys.4. Wyznaczanie punktów charakterystycznych procesu dekohezji próbki a. metodą zmiany podatności próbki, b. metodą różniczkowania przebiegu F-t, c. metodą funkcji sklejaney

Dzięki temu możliwe jest dokładniejsze określenie punktów charakterystycznych na wykresie F(t) oraz rozdział całkowitej pracy łamania K na składowe, określającej etapy procesu pękania. Umożliwia to również bardziej precyzyjną ocenę takich para-

metrów jak K_I^d, J_I^d . Na rysunku 4 dokonano wyznaczenia punktu inicjacji rozwoju szczeliny, bazując na:

- metodzie zmiany podatności próbki [7],
- metodzie różniczkowania przebiegi $F(t)$ [3],
- metodzie funkcji sklejaney.

Tablica 1 przedstawia wyznaczone wartości K_I^d oraz J_I^d opierając się na ww. metodach. Istnieje duża zgodność parametrów ocenionych wg metody zmiany podatności, różniczkowania i funkcji sklejaney, odbiegających od parametru bazującego na wartości siły maksymalnej F_{max} , [8], dla której $dF/dt=0$.

Tabela 1

l.p.	Metoda wyznaczenia punktu inicjacji pęknięcia	Obliczone wartości odporności na pęknięcie	
		K_I^d MN/m ^{3/2}	J_I^d kJ/m ²
1.	Zmiana podatności próbki (rys.4a)	50,6	131
2.	Różniczkowanie przebiegu $F(t)$ (rys.4b)	68,5	157,4
3.	Wyznaczanie siły F_{max} wg ASTM (rys.4b)	75,4	209,1
4.	Metoda funkcji sklejaney (rys.4c)	61,2	148

Ponadto dokonano rozdziału pracy łamania K na składowe:

$$K = K_z + K_r + K_h \quad (16)$$

gdzie:

K_z - praca potrzebna na inicjację procesu pęknięcia,

K_r - praca określająca odporność na rozwój pęknięcia,

K_h - praca związana z udziałem znaczącego odkształcenia plastycznego i przelotem ciągliwym (praca hamowania pęknięcia).

Dla wyznaczenia punktów charakteryzujących, rozdziału pracy K , wykorzystano różniczkowanie przebiegu $F(t)$. Na podstawie zmiany znaku różniczki dF/dt określono punkty F_n F_h i odpowiadające im przedziały czasowe t_n i t_h , dla których obliczono poszczególne wartości pracy K_z , K_r i K_h .

Dla sytuacji przedstawionej na rysunku 4b proporcja rozdziału pracy łamania $K=102J$ jest następująca:

$$K_z = 52J; K_r = 26J; K_h = 23J.$$

Wskazuje to na dobre własności plastyczne badanego materiału i dużą wartość pracy potrzebnej do zapoczątkowania pęknięcia.

6. WNIOSKI

Zastosowanie systemu CAI, opartego na fizycznych podstawach procesu dynamicznego zginania i jego matematycznym opisie pozwala dobrać prawidłowy algorytm postępowania dla oceny parametrów, charakteryzujących przestrzeń wymiarową tego procesu. Są to, w stosunku do wymagań PN, parametry wynikające z dynamicznej mechaniki pęknięcia: K_I^d, J_I^d o znaczeniu technicznym, bardziej istotnym, aniżeli globalna wartość pracy łamania K , bądź wartość udarnośći KCV. Prowadzone aktualnie prace badawcze nad opracowaniem prostych i w miarę pewnych metod oceny K_I^d, J_I^d pozwalają mieć nadzieję na szersze zastosowanie systemu CAI w powszechnej praktyce inżynierskiej.

LITERATURA

- [1] Szucs E.: Modelowanie matematyczne w fizyce technicznej. WNT, 1977.
- [2] Freund L.B.: Dynamic Fracture Mechanics. Cambridge University Press, 1990.
- [3] Ranatowski E., Sadowski J., Strzelecki R.: Physical interpretation of impact bend test by means of mathematical methods. Applied Mathematics and Computer Science, No 2, 1993.
- [4] Ranatowski E., Sadowski J., Strzelecki R.: Modelowanie i ocena podstawowych parametrów w próbie udarowego zginania ze wspomaganiami komputerowym. Zeszyty Naukowe ATR w Bydgoszczy, Mechanika Nr 40, 1996.
- [5] Suchomski P.: O pewnej metodzie optymalnej interpolacji funkcjami sklejanymi o swobodnych węzłach. Pomiary, Automatyka, Kontrola, Nr 19, 1990.
- [6] Novosielcew A.V., Zagurskij V.G., Jabłoński W., Strzelecka N.: Zastosowanie statystycznego, samouczącego się algorytmu w zagadnieniach optymalizacji parametrycznej. Zeszyty Naukowe ATR Bydgoszcz 171. Elektrotechnika Nr 10, 1990, s.171.
- [7] Kabayashi T., Niinomi M.: Evolution dynamic crack initiation and growth toughness by computer aided Charpy impact testing system. Nuclear Engineering and Design, No 3, 1989.
- [8] ASTM E 24.03.03. Proposed Standard Method of Test for Instrumental Impact Testing of precracked Charpy specimens of metallic materials. Draft 2c, ASTM. Philadelphia, 1980.
- [9] Zehnder A.T., Rosakis A.J.: Dynamic fracture initiation and propagation in 4340 steel under impact loading. International Journal of Fracture, No 43, 1990.
- [10] Kannien M.F., et al.: Viscoplastic-dynamic crack propagation: Experimental and analysis research for crack arrest applications in engineering structures, International Journal of Fracture, No 42, 1990.

APPLICATION OF COMPUTER AIDED TESTING CAI
UNDER INVESTIGATION OF FRACTURE PROCESS
OF THE IMPACT BEND TEST

Summary

The paper deals with the proper interpretation of impact bend test diagrams $F(t)$, $F(f)$ for an accurate evaluation of cracking parameters such as K_I^d, J_I^d . The paper presents both a methodology of taking of $F(t)$ characteristic and a computer - aided testing stand. Established are exemplary algorithms of diagram processing within mathematical filtration based on averaging the random variable an oscillation within the scope of time and frequency. A procedure for determination of characteristic points of the sample impact cracking process has also been provide using an example of specific processing $F(t)$ diagram for Charpy V 18G2A steel.

Key words: computer aided instrumented Charpy impact testing.

PRZYSTOSOWANIE PRÓBY UDAROWEGO ZGINANIA DLA OCENY PARAMETRÓW DYNAMICZNEJ ODPORNOŚCI NA PĘKANIE I PROCESU PĘKANIA MATERIAŁÓW

Jan Sadowski

Katedra Mechaniki Stosowanej, Wydział Mechaniczny ATR
ul. Prof. S. Kaliskiego 7, 85-796 Bydgoszcz

W artykule przedstawiono możliwości wykorzystania oprzyrządowanej i skomputeryzowanej próby udarowego zginania dla oceny procesu pęknięcia i oceny podstawowych parametrów dynamicznej odporności na pęknięcie K_{Id} , J_{Id} . Opisano metodykę wyznaczania i oceny tych parametrów na przykładzie badań wybranych materiałów jednorodnych, jak też w zastosowaniu do układów o silnej heterogeniczności jakimi są złącza spawane. W podsumowaniu uzasadniono celowość i potrzebę prowadzenia tych nowoczesnych badań w sensie teoretycznym, jak też w powszechnej praktyce inżynierskiej.

Słowa kluczowe: próba udarności, dynamiczna mechanika pęknięcia.

1. WPROWADZENIE

Ważną grupę zagadnień w ocenie własności materiałów stosowanych szczególnie na konstrukcje spawane, stanowi prawidłowa ocena własności eksploatacyjnych, związanych z dynamicznym charakterem działających obciążeń udarowych. Prawidłowo wykonana konstrukcja spawana powinna przenieść dodatkowe obciążenia udarowe i nie ulegając zniszczeniu i nie doznając trwałych odkształceń sprężysto-plastycznych prowadzących do jej uszkodzenia lub zniszczenia.

Dotychczas jedyną znormalizowaną próbą oceny własności metali, stopów oraz złączy spajanych przy obciążeniu udarowym jest próba udarowego zginania, (PN-79/H-04370, PN-88/M-69733) zwana próbą udarności.

Zgodnie z obowiązującą w kraju procedurą badania udarności materiałów, energia kinetyczna bijaka wahadła młota udarowego zostaje częściowo zamieniona na pracę uderzenia K , odpowiadającą energii zużytej na złamanie próbki:

$$K = mgR(\cos\beta - \cos\alpha), J \quad (1)$$

gdzie:

m - masa wahadła młota, kg,

R - odległość od osi wahadła młota do środka próbki na podporach, mm,

g - przyspieszenie ziemskie, ms^{-2} ,

α - kąt spadania wahadła młota, deg,

β - kąt wychylenia wahadła młota po złamaniu próbki, deg.

Wartość energii uderzenia K odniesiona do powierzchni początkowej przekroju próbki S_0 w miejscu karbu określa parametr KC , zwany udarnością:

$$KC = K \cdot S_0^{-1}, J/cm^2 \quad (2)$$

Wartość zużytej pracy uderzenia K lub udarności KC określona zostaje globalnie, co w aspekcie fizyki procesu łamania badanej próbki może prowadzić do bardzo umownej oceny tychże parametrów.

Obecnie próbie tej usiłuje się nadać bardziej uniwersalny charakter poprzez pomiar i analizę zdjętego w czasie tej próby przebiegu siły łamiącej próbkę w funkcji czasu $F(t)$ lub ugięcia $F(f)$, co umożliwi dokładny podział pracy uderzenia K w różnych etapach łamania próbki.

Procesowi temu sprzyja ogólny postęp w rozwoju elektroniki i zwiększone możliwości w zakresie pomiarów dynamicznych z jednoczesnym wspomaganie komputerowym.

Dzięki tym działaniom, wykorzystując dodatkowo kryteria wynikające z dynamicznej mechaniki pęknięcia możliwe jest określenie nowych parametrów oceny procesu łamania dynamicznego próbki, tj. parametrów dynamicznej odporności na pęknięcie takich, jak: K_{ld} , J_{ld} , T_{mat} , itp., dla których podstawą oceny są zdjęte charakterystyki $F(t)$ i $F(f)$ w procesie udarowego zginania.

Parametry odporności na pęknięcie K_{ld} , J_{ld} wyznaczone w tej próbie są jednym z ważniejszych parametrów (stała materiałowa) charakteryzujących odporność na pęknięcie materiału w warunkach obciążeń udarowych. Umożliwiają one ocenę wytrzymałości na pęknięcie materiału kruchego (K_{ld}) lub plastycznego (J_{ld}) przy założonej długości wady lub też określeniu dopuszczalnej wielkości wady w materiale przy założonym obciążeniu.

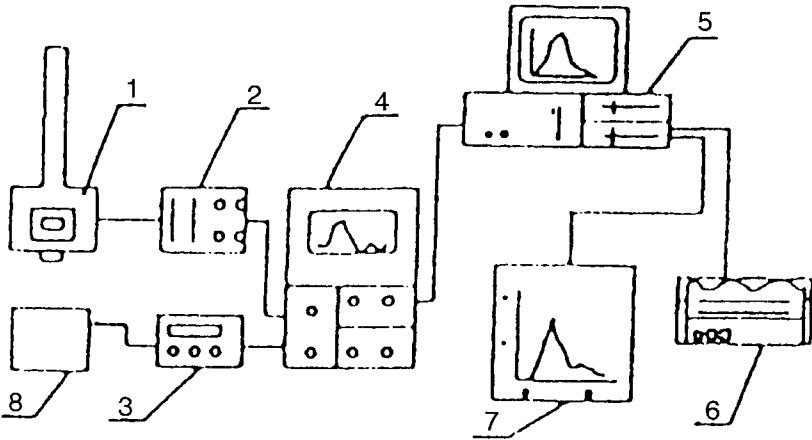
System oceny tychże parametrów został nawet w niektórych krajach znormalizowany, np. w USA, W. Brytanii [1,2]. Równocześnie procedura oceny tychże parametrów i ich praktycznego wykorzystania jest w dalszym ciągu przedmiotem prac naukowo-badawczych prowadzonych zarówno w kraju, jak i zagranicą [3,4,5,6].

2. STANOWISKO BADAWCZE I METODYKA BADAŃ

Na rysunku 1 przedstawiony jest schemat oprzyrządowanego młota udarowego PSd 150/300 na którym realizowano badania.

Układ ten umożliwił zapis przebiegów obciążenia i ugięcia próbki w funkcji czasu, które zarejestrowane w pamięci komputera były wykorzystane do obliczenia wielkości charakteryzujących udarność, odporność na pęknięcie lub ocenę procesu pęknięcia.

Obliczeń dokonywano w oparciu o program komputerowy FRACDYNA [5,6]. Program ten składający się z szeregu modułów pozwalał na pobieranie sygnału z oscyloskopu, sporządzanie przebiegów $F(t)$, $F(f)$ i $f(t)$, ich skalowanie, wygładzanie, wyznaczanie punktów charakterystycznych, dokonanie rozdziału pracy uderzenia K na składowe: K_r , K_i , K_h , obliczanie parametrów odporności na pęknięcie K_{ld} , J_{ld} , udarności KCV oraz dopuszczalnej wielkości wady a_d .



Rys.1. Schemat montażowy stanowiska do badań dynamicznej odporności na pęknięcie: 1- młot udarowy PSd 150/300 o zakresie energii 300J wyposażony w przetwornik siły i przemieszczenia, 2 - mostek tensometryczny 27611 firmy Measurements Group Carolina do pomiarów dynamicznych o częstotliwości nośnej 125 kHz. 3- wzmacniacz sygnałów z przetwornika przemieszczenia, 4 - oscyloskop z pamięcią firmy Tektronix o zakresie częstotliwości 60 MHz z interfejsem RS 232C. 5 - komputer IMB/AT, 6 - drukarka firmy Epson, 7 - ploter firmy Roland, 8 - czujnik przemieszczenia

Na rysunku 2 przedstawiono próbki do badań, w których karb nacinano wg PN dla oceny udatności KCV i wg ASTM [1] z pęknięciem zmęczeniowym dla oceny parametrów odporności na pęknięcie K_{Id} , J_{Id} .

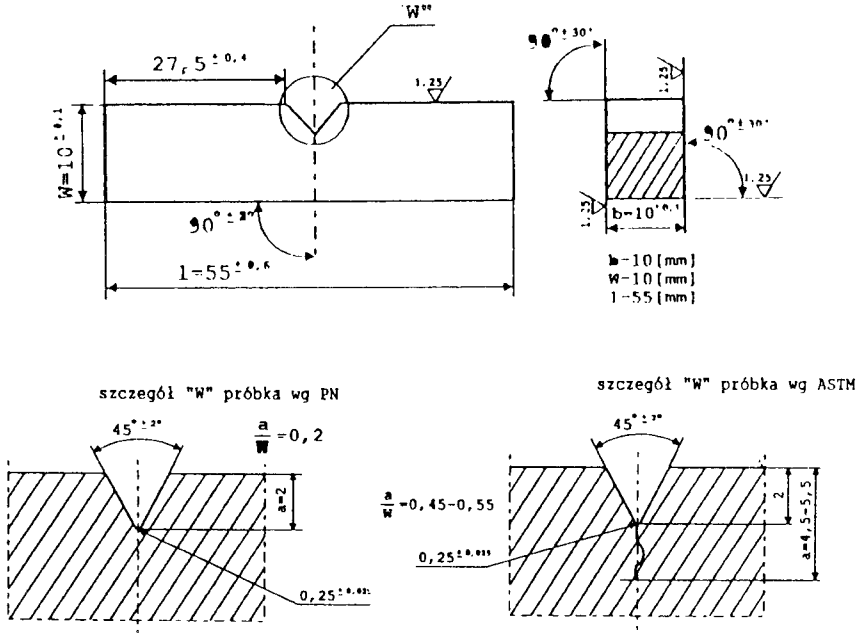
Obliczenia wskaźników odporności na pęknięcie K_{Id} , J_{Id} programem FRACDYNA zrealizowano opierając się na wzorach (3),(4),[1]:

$$K_{Id} = \frac{F_p \cdot S}{B \cdot W^{3/2}} \left[2,9 \left(\frac{a}{w} \right)^{\frac{1}{2}} - 4,6 \left(\frac{a}{w} \right)^{\frac{3}{2}} + 21,8 \left(\frac{a}{w} \right)^{\frac{5}{2}} - 37,6 \left(\frac{a}{w} \right)^{\frac{7}{2}} + 38,7 \left(\frac{a}{w} \right)^{\frac{9}{2}} \right] \text{MPam}^{1/2} \quad (3)$$

$$J_{Id} = \frac{2E_p}{B(W-a)}, \text{kN/m} \quad (4)$$

gdzie:

- F_p - siła niezbędna do zainicjowania pęknięcia w zginanej udarowo próbce, kN,
- S - odległość między podporami, mm,
- B, W - wymiary próbki Charpy V (szerokość, wysokość), m,
- a/W - względna długość szczeliny (pęknięcia w próbce),
- E_p - energia potrzebna do zainicjowania pęknięcia w zginanej próbce, J,
- a - długość pęknięcia (szczeliny) w próbce, m.



Rys.2. Sposób wykonania próbek udarnościowych

Dla oceny krytycznych parametrów K_{Id} , J_{Id} niezbędne jest dokładne wyznaczenie na zdejmowanych w tej próbie przebiegach $F(t)$ i $F(f)$ punktów charakteryzujących początek inicjacji pęknięcia oraz odpowiadającej temu punktowi siły F_p i energii E_p , potrzebnej do zapoczątkowania pęknięcia w badanym materiale. Możliwe jest to przez zastosowanie filtracji matematycznej i analizy zdjętych rzeczywistych przebiegów $F(t)$ i $F(f)$, którą umożliwił program FRACDYNA.

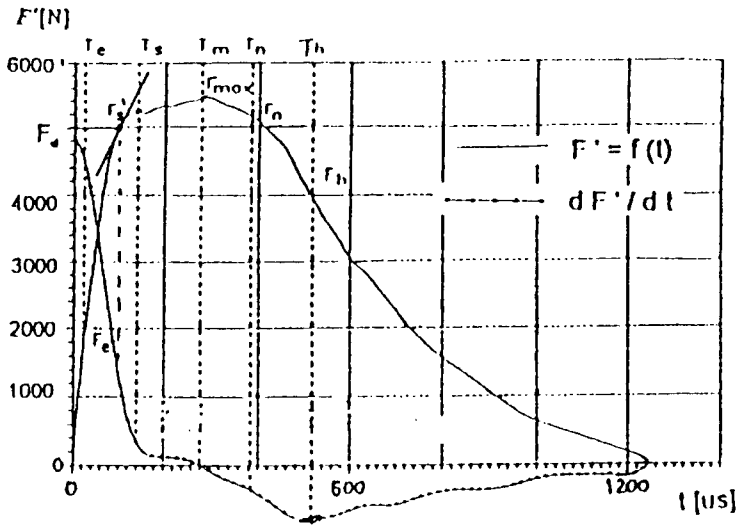
Dla materiału 18G2A, z którego sporządzono zmodyfikowane próbki udarnościo- we wg rysunku 2 zastosowano różne metody oceny punktu inicjacji pęknięcia bazując na [1,3,6]:

- metodzie siły maksymalnej, F_{max} ,
- metodzie zmiany podatności $\Delta c/c$ przebiegu, $F(f)$,
- metodzie aproksymacji funkcją liniową przebiegu, $F(t)$,
- metodzie różniczkowania przebiegu, $F(t)$,
- metodzie wielopróbkowej (zatrzymania pęknięcia).

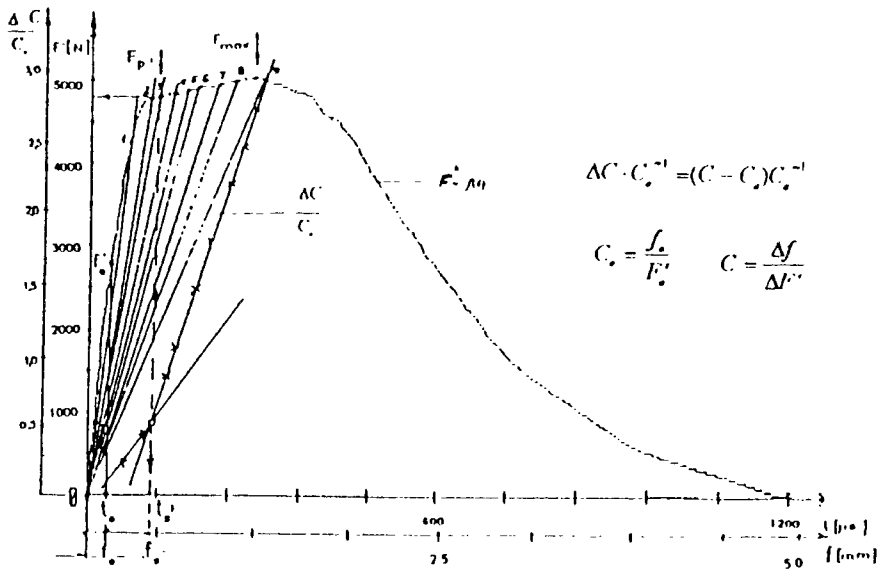
Na rysunku 3 pokazano - na tle przebiegu $F(t)$ - wyznaczone punkty inicjacji pęknięcia ocenione metodą różniczkowania przebiegu.

Na rysunku 4 przedstawiono - na tle przebiegu $F(f)$ - wyznaczenie punktu inicjacji pęknięcia metodą zmiany podatności zginanej udarowo próbki ze stali 18G2A.

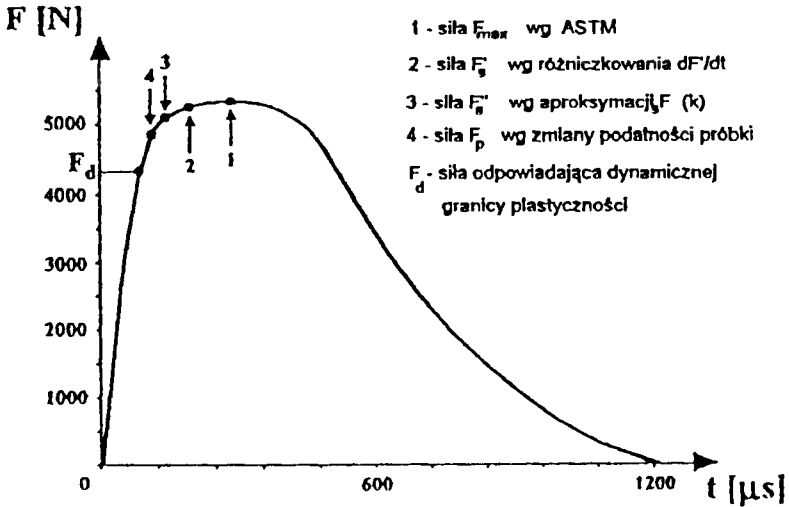
Na rysunku 5 pokazano - na tle przebiegu $F(t)$ - wyznaczone punkty inicjacji pęknięcia ocenione metodami a-d na podstawie których obliczono wzorami: K_{Id} , J_{Id} dla badanej stali 18G2A.



Rys.3. Wyznaczanie punktów charakterystycznych procesu pęknięcia próbki ze stali 18G2A metodą różniczkowania przebiegu $F(t)$

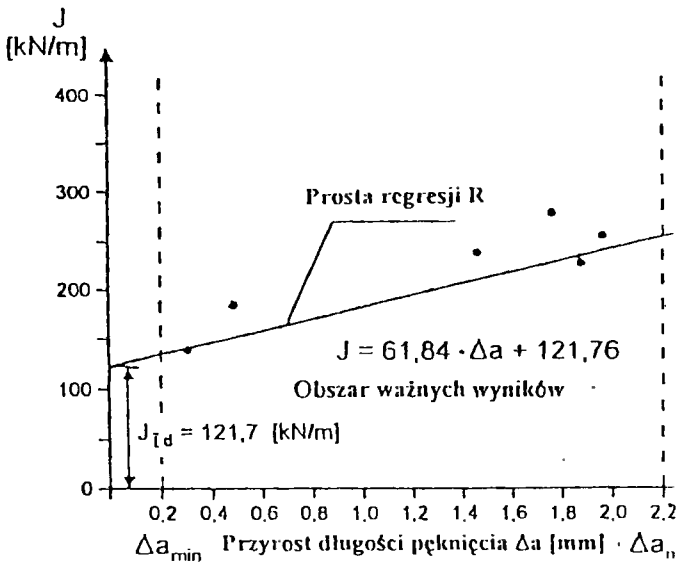


Rys.4. Wyznaczanie punktów charakterystycznych procesu pęknięcia próbki ze stali 18G2A metodą zmiany podatności zginanej próbki udarowo.



Rys.5. Przebieg $F(t)$ dla stali 18G2A z naniesionymi punktami początku inicjacji pęknięcia, które oceniono różnymi metodami

Na rysunku 6 przedstawiono określenie wartości całki J_{Id} dla stali 18G2A metodą wielopróbkową (wzorcową) poprzez wykreślenie prostej regresji R (prosta oporu przeciw rozwijającemu się pęknięciu w materiale).



Rys.6. Wyznaczanie wartości całki J_{Id} w funkcji przyrostu długości pęknięcia wyznaczonej metodą wielopróbkową dla badanej stali 18G2A

W tabelicy 1 zestawiono rezultaty oceny wyznaczonych parametrów odporności na pękanie K_{Id} , J_{Id} otrzymane różnymi metodami, porównane z metodą wielopróbkową.

Stal 18G2A wykazywała cechy materiału plastycznego a badania były wykonywane w temperaturze pokojowej. Dokonano porównania obliczonych wskaźników J_{Id} w danej temperaturze. Z porównania wyników zawartych w tabeli 1 wynika, że najmniejsze odchylenie wskaźnika J_{Id} , od metody wielopróbkowej (wzorcowej) uzyskano dla metody bazującej na zmianie podatności próbki (7,5%) a najwyższe dla metody bazującej na sile maksymalnej F_{max} (71.8%).

Tabela 1

Rezultaty oceny dynamicznej odporności na pękanie K_{Id} , J_{Id} dla stali 18G2A otrzymane różnymi metodami

Oznaczenie metody badań	Wyznaczanie punktu inicjacji pęknięcia	Obliczone wartości parametrów odporności na pęknięcie		Różnica % J_{Id} w stosunku do metody „e”
		K_{Id} [MPa m ^{1/2}]	J_{Id} [kJ/m]	
„a”	siły F_{max} wg ASTM	75,4	209,1	71,8
„b”	zmiany podatności próbki	50,6	131,2	7,5
„c”	aproksymacji liniowej przebiegu $F(t)$	61,2	148,4	21,9
„d”	różniczkowania przebiegu $F(t)$	68,5	187,4	53,8
„e”	wielopróbkowa (zatrzymania pęknięcia)	—	121,7	—

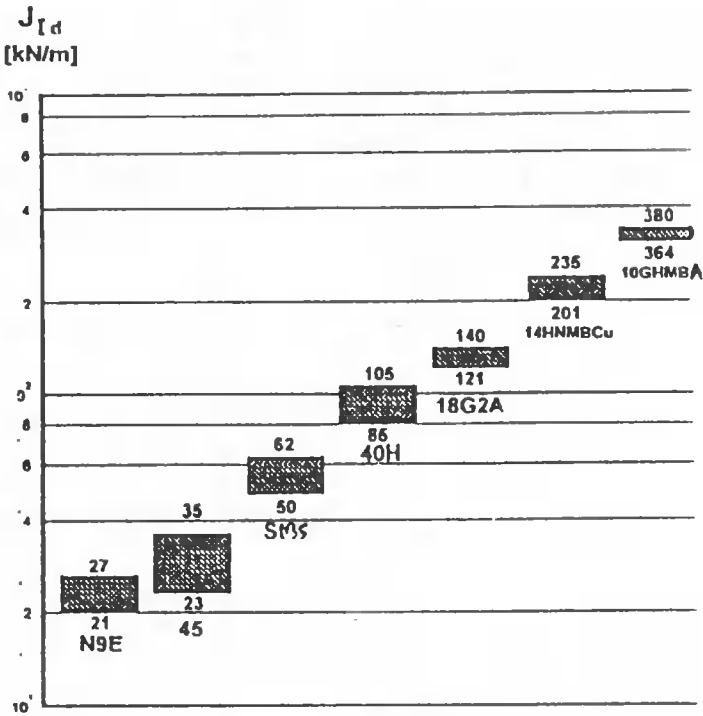
Wobec powyższych argumentów można uznać, iż wyznaczanie parametrów dynamicznej odporności na pękanie K_{Id} , J_{Id} metodą zmiany podatności $\Delta c/c$ zginanej udarowo próbki jest w miarę dokładne i możliwe do przyjęcia dla obliczeń technicznych i zastosowań praktycznych.

3. PRZYKŁADY ZASTOSOWAŃ

Wyselekcjonowaną powyżej metodą zmiany podatności $\Delta c/c$ zginanej próbki, wyznaczono parametry dynamicznej odporności na pękanie J_{Id} dla kilku materiałów plastycznych, co przedstawiono na rysunku 7.

Omawianą metodę zastosowano do oceny odporności na pękanie złożonych układów niejednorodnych złączy spawanych. Na rysunku 8 przedstawiono wyniki badań odporności na pękanie w złączy spawanym automatycznie łukiem krytym wykonanym ze stali 14HNMBCu.

Na rysunku 8a przedstawiono rozkład twardości w złączy oraz miejsca nacięcia korbów w próbkach udarowościowych, na których dokonano oceny KCV oraz parametrów odporności na pękanie K_{Id} , J_{Id} , a_d w badanym złączy spawanym, a także wybrane struktury w niektórych strefach złącza.



Rys.7. Wyniki oceny odporności na pękanie $J_{I,d}$ różnych gatunków stali

Dopuszczalną wielkość wady a_d liczonego wzorem:

$$a_d = \sqrt{\frac{J_{I,d} E}{(1 - \nu^2) \pi \sigma^2 \cdot Y}} \cdot 10^3, \text{ mm} \quad (5)$$

gdzie:

- $J_{I,d}$ - krytyczna wartość całki J dla materiałów plastycznych, kN/m,
- ν - współczynnik Poissona,
- σ - naprężenia przyjmowane na granicy plastyczności, MPa,
- Y - współczynnik kształtu wady, ($Y=1$).

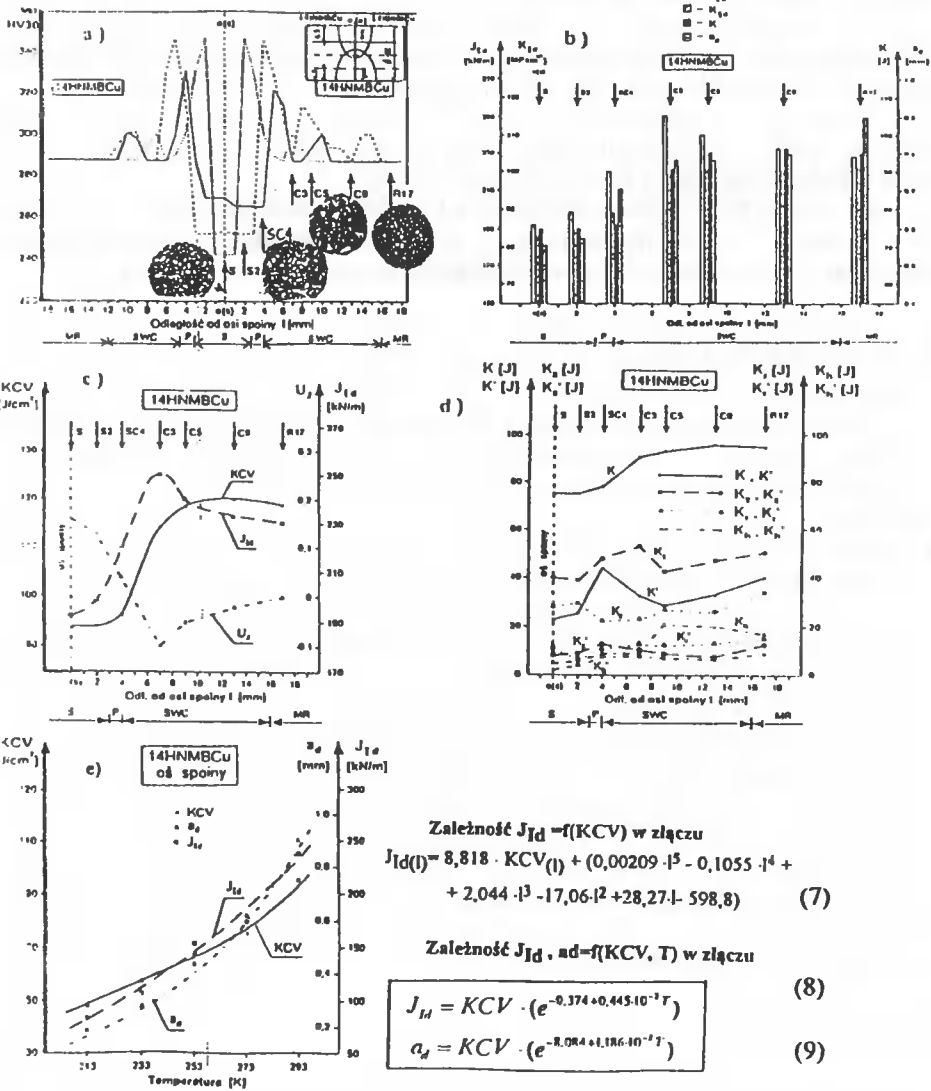
Rysunek 8b przedstawia graficznie zestawienie zmian parametrów odporności na pękanie $K_{I,d}$, $J_{I,d}$, a_d , K w badanym złączu spawanym. Na rysunku 8c przedstawiono zmiany krytycznej wartości całki $J_{I,d}$ oraz udarności KCV i współczynnika uwrażliwienia na pękanie U_J w badanym złączu, którego wartość określono wzorem:

$$U_J = \frac{J_{I,dr} - J_{I,ds}}{J_{I,ds}} \quad (6)$$

gdzie:

- $J_{I,dr}$ - wartość dynamicznej odporności na pękanie w materiale rodzinnym złącza (MR), kN/m,
- $J_{I,ds}$ - wartość dynamicznej odporności na pękanie w spoinie, (SWC) złącza, kN/m.

ZŁĄCZA SPAWANE AUTOMATYCZNIE ŁUKIEM KRYTYM ZE STALI 14HNMBCu



Zależność $J_{1d} = f(KCV)$ w złączy

$$J_{1d}(T) = 8,818 \cdot KCV(T) + (0,00209 \cdot T^3 - 0,1055 \cdot T^4 + 2,044 \cdot T^3 - 17,06 \cdot T^2 + 28,27 \cdot T - 598,8) \quad (7)$$

Zależność $J_{1d} \cdot ad = f(KCV, T)$ w złączy

$$J_{1d} = KCV \cdot (e^{-0,374 + 0,445 \cdot 10^{-3} T}) \quad (8)$$

$$ad = KCV \cdot (e^{-8,084 + 1,186 \cdot 10^{-3} T}) \quad (9)$$

Rys.8. Wyniki badań odporności na pęknięcie w złączy spawanym ze stali 14HNMBCu: a) rozkład twardości w złączy i miejsca nacięcia karbów, b) graficzne zestawienie wyników badań, c) charakter zmian J_{1d} , KCV, U_2 w złączy d) rozdział pracy uderzenia K na składowe $K_a, K_b, K_c, K_d, K_e, K_f, K_g, K_h, K_i, K_j, K_k, K_l, K_m, K_n, K_o, K_p, K_q, K_r, K_s, K_t, K_u, K_v, K_w, K_x, K_y, K_z, K_{1a}, K_{1b}, K_{1c}, K_{1d}, K_{1e}, K_{1f}, K_{1g}, K_{1h}, K_{1i}, K_{1j}, K_{1k}, K_{1l}, K_{1m}, K_{1n}, K_{1o}, K_{1p}, K_{1q}, K_{1r}, K_{1s}, K_{1t}, K_{1u}, K_{1v}, K_{1w}, K_{1x}, K_{1y}, K_{1z}$, e) zmiany parametrów odporności na pęknięcie w zależności od temperatury w osi spoiny złączy

Z analizy rysunku 8c wynika, że złączy to wykazuje wysoką zróżnicowaną odporność na pęknięcie, w całym obszarze złączy. Najmniejszą odporność na pęknięcie obserwuje się w spoinie S oraz strefie przejścia SC4 (192-220 kN/m) a najwyższą w SWC

w odległości 3mm od strefy przejścia (254 kN/m) dalej następnie ona maleje i w strefie materiału rodzimego (MR) dochodzi do 230 kN/m.

Aproksymacja otrzymanych wyników doświadczalnych umożliwiła utworzenie krzywych J_{Id} , KCV w funkcji odległości l od osi spoiny i ustalenie funkcyjnej korelacji między dynamiczną odpornością na pękanie J_{Id} a udarnością KCV, którą określa wzór (7).

Na rysunku 8d przedstawiono charakter zmiany pracy uderzenia K i jej składowych: K_z -pracy dla zapoczątkowania pęknięcia, K_r - pracy rozwoju pęknięcia, K_h - pracy hamowania pęknięcia w rozpatrywanym złączu.

Rysunek 8e przedstawia zmianę parametrów odporności na pękanie J_{Id} , a_d i udarności KCV w funkcji zmian temperatury w osi spoiny badanego złącza spawanego ze stali 14HNMCu. Otrzymane korelacje między tymi parametrami określają wzory (8), (9).

4. PODSUMOWANIE

Przystosowanie oprzyrządowanej i skomputeryzowanej próby udarowego zginania poprzez rejestrację, obróbkę matematyczną i analizę dynamicznych przebiegów $F(t)$, $F(f)$ oraz $f(t)$ zdejmowanych w czasie procesu udarowego zginania badanych materiałów umożliwia:

- dokładny pomiar udarności oraz głębszą analizę wpływu czynników metalurgicznych, sposobu obróbki plastycznej, obróbki cieplnej, nanoszenia karbu itp. na odporność materiału na inicjację i propagację pęknięcia,
- dokładną ocenę procesu niszczenia łamanego udarowo materiału poprzez rozdział globalnej pracy uderzenia K na składowe tej pracy: K_z , K_r , K_h w poszczególnych etapach niszczenia próbki,
- wykorzystując kryteria wynikające z dynamicznej mechaniki pęknięcia, ocenę podstawowych parametrów dynamicznej odporności na pękanie takich jak: K_{Id} , J_{Id} , T_{mat} dla materiałów jednorodnych jak i niejednorodnych.

Otrzymane i pokazane na przykładach matematyczne zależności między odpornością na pękanie J_{Id} a udarnością KCV stwarzają możliwość racjonalnego wykorzystania wyników badań udarności, jako użytecznego parametru wytrzymałościowego przy projektowaniu i doborze optymalnych warunków technologicznych, gwarantujących wymaganą odporność na dynamiczne pękanie materiałów.

LITERATURA

- [1] ASTM E 24.03.03: Proposed Standard method of test for instrumented impact of precracked Charpy specimens of metallic materials. Draft 2c. Philadelphia, 1980.
- [2] BS 6729. : British standard Method for determination of the dynamic fracture toughness of metallic materials. BSJ, London, 1987.
- [3] Kobayashi T: Introduction of New dynamic fracture toughness evaluation system Journal of Testing and Evaluation, No 3, Vol. 21, 1993, s.145-153.
- [4] Biel-Gołaska M.: A method of testing the dynamic fracture toughness of materials characterised by high plasticity. Metallurgy an Foundry Engineering, No 4, Vol.19, 1993, s.491-499.

- [5] Lis Z, Szchlinder H.J. : Evaluation of dynamic fracture toughness J_{Id} using instrumented Charpy impact test: *Mechanika Teoretyczna i Stosowana*, 1994, No 1, Vol.32, 1994, s.119-128.
- [6] Sadowski J.: Ocena odporności na pękanie złączy spajanych w aspekcie próby udarowego zginania”. *Rozprawa doktorska, Politech. Gdańska*, 1996.

AN ASSESSMENT OF THE DYNAMIC FRACTURE RESISTANCE OF THE WELD JOINTS BY IMPACT BEND TEST

Summary

The paper presents an assessment of the dynamic fracture of the mismatched weld different steels by impact bend test. For example, there was made an assessment of the dynamic fracture parameters such as: K_{Id} , J_{Id} , failure work K of the tested samples and the admissible dimension of weld defects.

Key words: impact by test, dynamic fracture.

WPLYW POLA ELEKTROMAGNETYCZNEGO NA PRZEPLYW GAZU LEPKIEGO W SZCZELINIE MIĘDZY NIERUCHOMYMI POWIERZCHNIAMI OBROTOWYMI

Jerzy Sawicki

Katedra Mechaniki Stosowanej, Wydział Mechaniczny ATR
ul. Prof. S. Kaliskiego 7, 85-796 Bydgoszcz

W pracy przedstawiono analizę przepływu gazu lepkiego w szczelinie między krzywoliniowymi powierzchniami obrotowymi w obecności zewnętrznego pola magnetycznego azymutalnego i ortogonalnego do powierzchni pola elektrycznego. Uzyskane równanie dla ciśnienia rozwiązano numerycznie i zilustrowano graficznie dla przepływu gazu w szczelinie stożkowej.

Słowa kluczowe: laminarny przepływ gazu lepkiego, pole elektromagnetyczne.

Ważniejsze oznaczenia

\vec{B}	wektor indukcji magnetycznej,
B_x, B_θ, B_y	składowe wektora indukcji magnetycznej,
\vec{E}	wektor natężenia pola elektrycznego,
E_x, E_θ, E_y	składowe wektora natężenia pola elektrycznego,
$h(x)$	grubość szczeliny,
\vec{H}	wektor natężenia pola magnetycznego,
H_x, H_θ, H_y	składowe wektora natężenia pola magnetycznego,
p	ciśnienie,
p_w, p_z	ciśnienie, odpowiednio na wlocie i wylocie ze szczeliny,
\vec{V}	wektor prędkości,
v_x, v_θ, v_y	składowe wektora prędkości,
μ	dynamiczny współczynnik lepkości,
μ_0	przenikalność magnetyczna próżni,
ρ	gęstość gazu.

1. WPROWADZENIE

Przepływy laminarne gazów lepkich, w szczególności przewodzących elektrycznie budzą od dawna duże zainteresowanie wśród wielu badaczy [1]. Badania ruchu gazu lepkiego w obecności pól magnetycznych i elektrycznych, a także badania wpływu tych pól na różne procesy fizyczne i chemiczne były prowadzone od wielu lat [2]. Szczegół-

nym zainteresowaniem cieszą się badania ruchu cieczy lepkich i gazów w tzw. cienkich warstwach. Przeprowadzane tam rozważania teoretyczne są podstawą do modelowania przepływów nieściśliwych i ściśliwych w łożyskach ślizgowych wzdłużnych i poprzecznych.

W niniejszej pracy przedstawiono analizę teoretyczną ustalonego, laminarnego oraz izotermicznego przepływu gazu w szczelinie o zarysie krzywoliniowym między nieruchomymi powierzchniami obrotowymi.

2. RÓWNANIA RUCHU GAZU LEPKIEGO

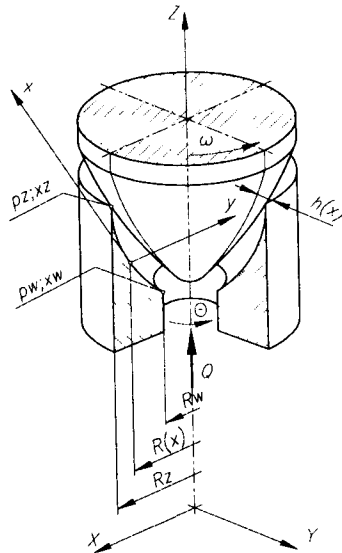
Obszar przepływu gazu lepkiego przedstawiono na rys. 1.

Powierzchnia dolna szczeliny opisana jest funkcją $R(x)$ oznaczającą promień tej powierzchni. Grubość szczeliny zdefiniowana jako odcinek poprowadzony wzdłuż normalnej do powierzchni dolnej oznaczono $h(x)$.

Niech grubość szczeliny $h(x)$ będzie wielkością małą w porównaniu do promienia powierzchni dolnej $R(x)$, co można wyrazić w postaci:

$$h(x) \ll R(x) \quad (1)$$

Przepływ gazu lepkiego odbywa się w obecności zewnętrznego azymutalnego niejednorodnego pola magnetycznego i ortogonalnego do powierzchni ograniczających przepływ pola elektrycznego. Powierzchnie ograniczające przepływ gazu stanowią elektrody między którymi przyłożone jest zadane, zewnętrzne napięcie elektryczne.



Rys.1. Obszar przepływu

Zakładając, że gaz jest ośrodkiem przewodzącym elektrycznie a przepływ jest ustalony, laminarny i izotermiczny równania ruchu przyjmą postać:

- równanie ciągłości przepływu gazu

$$\operatorname{div}(\rho \bar{V}) = 0 \quad (2)$$

- równanie pędu

$$\rho(\bar{V}\nabla\bar{V}) = -\nabla p + \nabla^2\bar{V} + \bar{J} \times \bar{B} \quad (3)$$

Powyższe równania wymagają do ich zamknięcia dodatkowych równań opisujących pole magnetyczne i elektryczne, a mianowicie równań Maxwella [3] w postaci:

$$\nabla \times \bar{B} = \mu_0 \bar{J} \quad (4)$$

$$\nabla \times \bar{E} = 0 \quad (5)$$

$$\nabla \cdot \bar{B} = 0 \quad (6)$$

$$\nabla \cdot \bar{E} = 0 \quad (7)$$

oraz prawo Ohma

$$\bar{J} = \sigma(\bar{E} + \bar{V} \times \bar{B}) \quad (8)$$

Równania ruchu w krzywoliniowym, ortogonalnym układzie współrzędnych, po oszacowaniach charakterystycznych dla tzw. cienkich warstw ($h(x) \ll R(x)$) i pominięciu sił bezwładności przyjmują postać [4]:

- równanie ciągłości przepływu

$$\frac{1}{R} \frac{\partial(R\rho v_x)}{\partial x} + \frac{\partial(\rho v_y)}{\partial y} = 0 \quad (9)$$

- równanie pędu

$$0 = -\frac{\partial p}{\partial x} + \mu \frac{\partial^2 v_x}{\partial x^2} - j_y B_0 \quad (10)$$

$$\frac{\partial p}{\partial y} = 0 \quad (11)$$

Rozwiązania przedstawionych równań muszą spełniać następujące warunki brzegowe:

$$\begin{aligned} v_x &= 0 \text{ dla } y = 0, v_x = 0 \text{ dla } y = h, \\ v_0 &= 0 \text{ dla } y = 0, v_0 = \omega R(x) \text{ dla } y = h. \end{aligned} \quad (12)$$

$$\begin{aligned} p &= p_w \text{ dla } x = x_w \\ p &= p_r \text{ dla } x = x_r \end{aligned}$$

3. CAŁKI RÓWNAŃ RUCHU

Z równania (11) wynika, iż:

$$p = p(x) \quad (13)$$

Z prawa zachowania ładunku, wynika, że $\frac{\partial j_y}{\partial y} = 0$

Całkując równanie (10), i uwzględniając warunki brzegowe (12) otrzymamy:

$$v_x = \frac{1}{2\mu} \left(\frac{dp}{dx} + j_y B_0 \right) (y^2 - hy) \quad (14)$$

Aby wyznaczyć rozkład ciśnienia wzdłuż szczeliny wprowadźmy do rozważań natężenie objętościowe przepływu określone formułą:

$$q = \int_0^h 2\pi R(x) \rho v_x dy \quad (15)$$

Podstawiając do wzoru (15) formułę (14) otrzymamy:

$$\frac{dp}{dx} = -\frac{6q\mu}{\pi h^3 \rho R(x)} - j_y B_0 \quad (16)$$

Z równania (8) wynika, że:

$$j_y = \sigma(E_y + v_x B_0), \quad (17)$$

Ponadto z równania (5) mamy:

$$\frac{\partial E_y}{\partial x} = 0, \text{ a stąd } E_y = E_y(y) \quad (18)$$

Wprowadzając potencjał całkowity w postaci formuły:

$$\phi = - \int_0^h E_y dy \quad (19)$$

równanie (17) po uwzględnieniu (16) i (19) można przedstawić następująco:

$$j_y = -\frac{\sigma\phi}{h} + \frac{qRzB_0\sigma}{2\pi h\rho R^3(x)} \quad (20)$$

Wstawiając do formuły (16) zależność (20) otrzymujemy:

$$\frac{dp}{dx} = -\frac{6q\mu}{\pi h^3 \rho R(x)} + \frac{\sigma R_z B_0 \phi}{h R(x)} - \frac{\sigma q R_z^2 B_0^2}{2\pi h \rho R^3(x)} \quad (21)$$

Wprowadźmy bezwymiarowe zmienne:

$$R = \frac{R(x)}{R_z}, P = \frac{p}{p_z} = \frac{\rho}{\rho_z}, P_w = \frac{p_w}{p_z}, \varepsilon = \frac{R_w}{R_z}, X = \frac{x}{R_z} \quad (22)$$

$$Q = \frac{q\mu}{\pi h^3 p_z \rho_z}, \Phi = \frac{\sqrt{\mu\sigma\phi R_z}}{p_z h^2}, M = h B_0 \sqrt{\frac{\sigma}{\mu}}$$

gdzie:

M - liczba Hartmanna,

Φ - bezwymiarowy potencjał całkowity,

Q - bezwymiarowe masowe natężenie przepływu gazu,

Wówczas równanie pozwalające określić rozkład ciśnienia w szczelinie ma postać:

$$\frac{dP}{dX} = -\frac{Q}{P} \left(\frac{6}{R} + \frac{M^2}{2R^3} \right) + \frac{\Phi M}{R} \quad (23)$$

Warunki brzegowe dla ciśnienia są następujące:

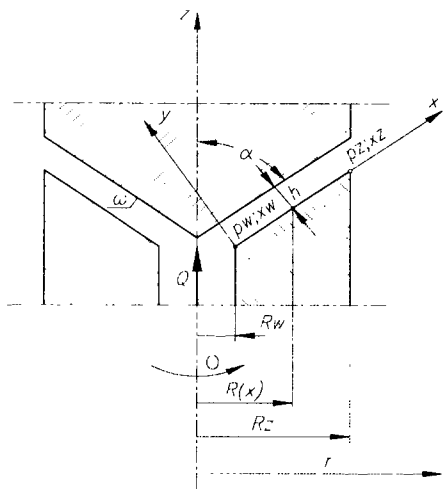
$$P = 1 \text{ dla } R = 1; \quad P = P_w \text{ dla } R = \varepsilon \quad (24)$$

Równanie (23) jest równaniem różniczkowym nieliniowym, dla którego nie ma rozwiązania analitycznego w zamkniętej formie.

Chcąc zatem określić rozkład ciśnienia wzdłuż szczeliny, równanie (23) rozwiązano całkując je numerycznie metodą Runge-Kutta, po uprzednim zadaniu kształtu powierzchni ograniczającym przepływ.

4. PRZEPŁYW GAZU W SZCELINIE MIĘDZY NIERUCHOMYMI POWIERZCHNIAMI STOŻKOWYMI

Wstawiając do równania (23) parametry określające geometrię szczeliny stożkowej (rys.2) [5]:



Rys. 2. Geometria szczeliny stożkowej

$$R(x) = x \sin(\alpha), R_w = x_w \sin(\alpha), R_z = x_z \sin(\alpha), \quad (25)$$

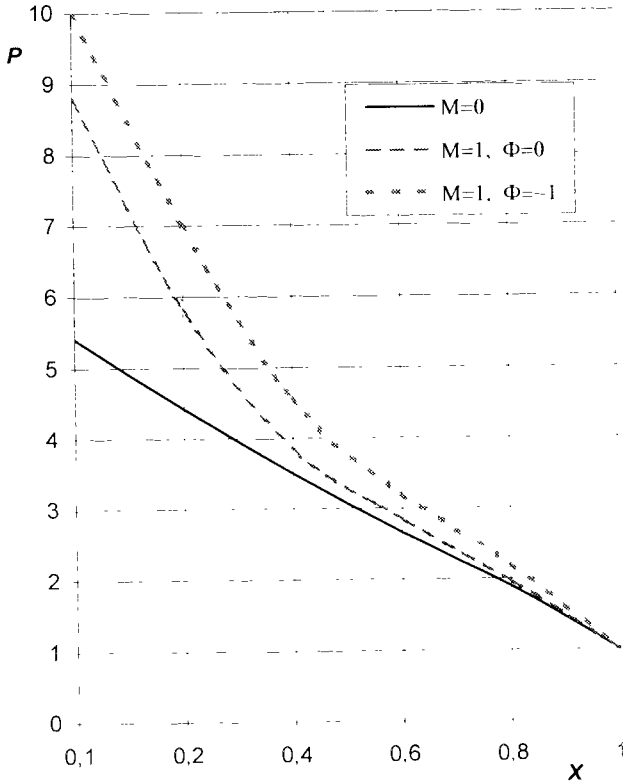
równanie (23) słuszne dla szczeliny o zarysie krzywoliniowym, w szczelinie stożkowej jest następujące:

$$\frac{dP}{dX} = -\frac{Q \sin(\alpha)}{P} \left(\frac{6}{X} + \frac{M^2}{2X^3} \right) + \frac{\Phi M \sin(\alpha)}{X} \quad (26)$$

Warunki brzegowe (24) przyjmują teraz postać:

$$P = 1 \text{ dla } X = 1 \text{ i } P = P_w \text{ dla } X = \varepsilon \quad (27)$$

Rozkład ciśnienia wzdłuż szczeliny stożkowej przedstawiono poniżej (rys. 3).



Rys.3. Rozkłady ciśnienia ($Q = 1$, $X_w = 0,1$, $\alpha = 90^\circ$)

5. PODSUMOWANIE

Analiza prezentowanych w pracy formuł analitycznych, jak również przedstawiony na wykresie (rys. 3) uzyskany w wyniku całkowania numerycznego rozkład ciśnienia wzdłuż szczeliny pozwala sformułować następujące wnioski:

- uzyskane na drodze analitycznego całkowania równanie różniczkowe dla ciśnienia nie posiada ścisłego rozwiązania (równanie nieliniowe),
- wzrost natężenia pola magnetycznego wyrażający się wzrostem liczby Hartmanna M zwiększa wartości ciśnienia wzdłuż szczeliny,
- przyłożone zewnętrzne pole elektryczne ($\Phi < 0$) powoduje dodatkowy wzrost wartości ciśnienia wzdłuż szczeliny.

LITERATURA

- [1] Pai S.I.: A review of electro-magneto-fluid dynamics problems, Rev. Roum. Sci. Techn.-Mec. Appl. T. 19, Nr 1.
- [2] Mahanti A.C., Ramanaiah G.: Magnetogasdynamical inclined thrust bearings, Wear, 29, 1974.
- [3] Sawicki J.: Magneto-hydrodynamic flow of viscous fluid in a slot between curvilinear surfaces of revolution, Rozprawy Inżynierskie-PAN IPPT, 44, 1, 1996.
- [4] Sawicki J.: Uogólnione równania ruchu cieczy niemagnetycznej i magnetycznej w szczelinach między wirującymi powierzchniami obrotowymi, Zesz.Nauk. ATR Nr 202, Mechanika 41, 1996.
- [5] Sawicki J.: Laminarny Magneto-hydrodynamiczny przepływ cieczy lepkiej w szczelinie między krzywoliniowymi wirującymi powierzchniami obrotowymi, Rozprawy Inżynierskie, 3-4, 38, 1990.

INFLUENCE OF ELECTROMAGNETIC FIELDS ON THE VISCOUS
GAS FLOW IN A CLEARANCE BETWEEN FIXED SURFACES
OF REVOLUTION

Summary

In this work the steady laminar, isothermic flow of viscous gas with an azimuthal magnetic field and an axial current is analysed. The obtained solutions of the equations of motion have been illustrated by examples of gas flow through the clearance of constant thickness between fixed conical surfaces.

Key words: laminar flow of viscous gas, electromagnetic field.

PROBLEMY STABILNOŚCI OSIOWEGO RUCHU WALCZAKÓW OBROTOWYCH

Bronisław Siołkowski, Maciej Świtalski

Katedra Mechaniki Stosowanej, Wydział Mechaniczny ATR
ul. Kaliskiego 7, 85-796 Bydgoszcz

Artykuł przedstawia problematykę stabilności osiowego ruchu walczaków obrotowych w ujęciu stateczności technicznej. Treści zawarte w artykule mają na celu uwidocznienie wielu czynników, które mają, i mogą mieć wpływ na uzyskanie stabilności mechanicznej tego typu obiektów. Niniejsza publikacja ma również na celu ukazanie złożoności zagadnienia oraz stanowi próbę zdefiniowania istoty pojęcia dla celów rozważań modelowych. Owa złożoność ma miejsce zarówno ze względu na wiele parametrów jak i trudność bezpośredniego oszacowania ich wpływu na zachowanie się obiektu. Uwidacznia ona również wyraźną potrzebę rozwiązania problemu ujęcia matematycznego osiowych ruchów walczaków jako drogi do zwiększenia ich niezawodności.

1. WSTĘP

1.1. Pojęcie stabilności w mechanice ogólnej

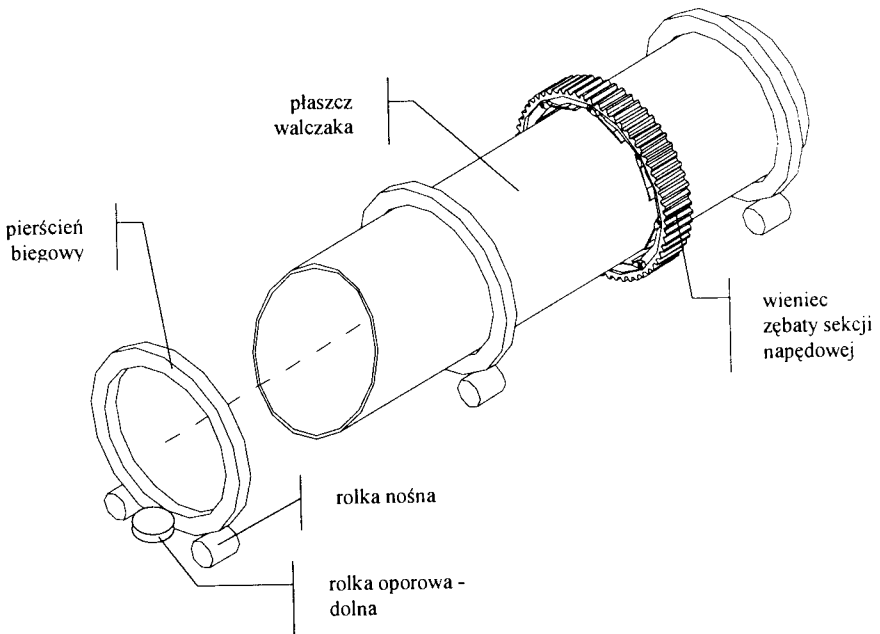
Odpowiednikiem w mechanice klasycznej i jednocześnie uogólnieniem pojęcia stabilności osiowej, będącego tematem wiodącym niniejszego artykułu, jest pojęcie stateczności. Jest ono związane z zachowaniem się układu fizycznego, gdy stan ustalony tego układu zostaje zaburzony. W zależności od tego jaki skutek wywołują zaburzenia stanu ustalonego, określane jest on mianem statecznego lub niestatecznego. (...) W odniesieniu do opisu matematycznego zjawisk fizycznych rozwinęły się dwie główne koncepcje pojęcia stateczności. Jedna nazywa się statecznością w sensie Lapunowa, a druga w sensie Lagrange'a. Obie koncepcje wykorzystują informacje o rozwiązaniach równań ruchu, otrzymanych metodą jakościowego badania przebiegu rozwiązań. Zaburzenia są wprowadzane jako perturbacje warunków początkowych ruchu lub sił działających. Stateczność w sensie Lapunowa wymaga, aby małym perturbacjom odpowiadały małe zmiany w rozwiązaniach równań ruchu i aby te zmiany zniknęły one asymptotycznie, gdy perturbacje znikają. Stateczność w sensie Lagrange'a wymaga jedynie ograniczonej rozwiązań równań ruchu przy małych perturbacjach. Ze względu na zastosowania techniczne rozwinęła się powszechnie stateczność w sensie Lapunowa [1]. Oczywiście pojęcie to zostało i jest systematycznie modyfikowane i przystosowywane do badania różnych układów poddanych różnym perturbacjom. W wyniku bardziej utylitarnej podejścia do definicji stateczności pojawiło się pojęcie stateczności technicznej.

Pojęcie to określa możliwe i dopuszczalne zaburzenia stanu ustalonego. Wynikają z niego wskazania jak wpływać na zmniejszenie skutków zaburzeń ruchu i polepszenie pracy maszyn i urządzeń mechanicznych. „Techniczność” stateczności polega na tym, że przy danych możliwych zmianach warunków ruchu (sił lub charakterystyk) i zmianach warunków początkowych ruchu – uwzględnia się niezależne od nich dopuszczalne perturbacje rozwiązań równań ruchu. Układ mechaniczny będzie stateczny technicznie, jeżeli perturbacje rozwiązań równań ruchu nie będą przekraczały perturbacji dopuszczalnych przy danych zaburzeniach i zmianach warunków początkowych.

W przypadku walczków obrotowych mamy do czynienia z pojęciem stateczności technicznej absolutnej – czyli rozważanej dla perturbacji sił oddziałujących na układ. W mechanice walczków obrotowych odpowiednikiem pojęcia stateczności technicznej jest termin stabilności w odniesieniu do ich ruchu osiowego.

1.2. Geneza pojęcia stabilności w mechanice walczków obrotowych

Walczaki obrotowe mają zastosowanie w wielu gałęziach przemysłu i odgrywają niejednokrotnie kluczową rolę w technologii procesu wytwarzania. Są one podstawowym ogniwem w postępowaniu produkcyjnym chociażby w przemyśle kruszyw budowlanych (piece do wypału klinkieru, piece do wypału kamienia wapiennego, piece do wypału keramzytu, suszarnie, młyny), chemicznym (kalcynatory sody lekkiej, krystalizatory, spalarnie), papierniczym (piece wapiennicze, bębny korujące) oraz znajdują zastosowanie przy utylizacji odpadów komunalnych (biostabilizatory).



Rys.1

W uproszczeniu są to znacznych długości (nawet do 160 m) i średnic (do 10 m) walczaki otwarte o poziomej lub zbliżonej do położenia poziomego lokalizacji osi obrotu (rys.1). Wyposażone są one w pierścienie biegowe (od 2 do 8 – w zależności od długości płaszczu), osadzone na płaszczu w sposób trwały lub zapewniający wzajemną migrację obwodową pierścienia i przyporządkowanej mu carga podpierścieniowej. Pierścienie te wespół z odpowiadającymi im parami rolek nośnych stanowią tzw. układ nośny. Napęd na walczak podawany jest w większości przypadków poprzez osadzony na płaszczu wieniec zębaty. Typowy walczak może oprócz technologicznego ruchu obrotowego „przesuwać się” osiowo w zakresie ograniczonym rolkami oporowymi lub też krawędziami oporowymi rolek nośnych.

Pomijając zagadnienia związane z procesami technologicznymi zachodzącymi wewnątrz tego typu obiektów, pojęciem podstawowym stanowiącym bazę do rozważań w zakresie eksploatacji walczaków obrotowych jest pojęcie stabilności osiowej. Pojęcie to stanowi zagadnienie ogólne ale i fundamentalne w teorii eksploatacji walczaków obrotowych. Zagadnienie stabilności walczaka obrotowego o wspomnianych cechach, jest pojęciem niezwykle obszernym obejmującym wiele zagadnień z zakresu statyki i dynamiki. W uogólnieniu mówi się o stabilności jako stanie optymalnego rozkładu sił działających na układ nośny i płaszcz walczaka oraz o stanie optymalnego rozkładu pochodnych im naprężeń, dla danych cech konstrukcyjnych, kinematycznych i eksploatacyjnych obiektu. W uszczegółowieniu, dla celów rozważań stabilności ruchu osiowego walczaków, stanem stabilności określamy taki stan układu, w którym zachowana jest równowaga sił statycznych i dynamicznych działających na rozpatrywany układ w kierunku osiowym. Stan równowagi może być jednakże zachowany dla różnej konfiguracji sił (ich wartości i zwrotów). Kryterium poprawności stanu równowagi - stabilności jest ocena dopuszczalności wartości tychże sił z punktu widzenia własności wytrzymałościowych elementów układu. Przykładowo, poprzez ustawienie rolek nośnych obiektu można doprowadzić do takiego rozkładu sił, w którym rolka oporowa mogąca przenosić z założenia 30% składowej siły ciężkości walczaka, nie będzie przenosiła żadnych sił osiowych przy nadmiernym obciążeniu osiowym rolek nośnych. Można też doprowadzić do przypadku, w którym rolka ta będzie przenosiła siły osiowe znacznie przekraczające 100% wymienionej składowej. Zarówno w jednym, jak i w drugim przypadku - jeżeli nie dojdzie do bezpośredniego uszkodzenia elementów układu nośnego - można mówić o stanie równowagi sił. Jednakże stan ten będzie poprawny tylko wtedy, gdy rozkład sił w układzie będzie odpowiadał rozkładowi optymalnemu z punktu widzenia wytrzymałości i trwałości elementów wchodzących w jego skład.

Stabilność, rozumiana jako szczególna równowaga sił działających na układ, jest więc podstawowym wskaźnikiem poprawności eksploatacyjnej walczaka obrotowego. Jest ona uwarunkowana wieloma czynnikami, które określamy warunkującymi.

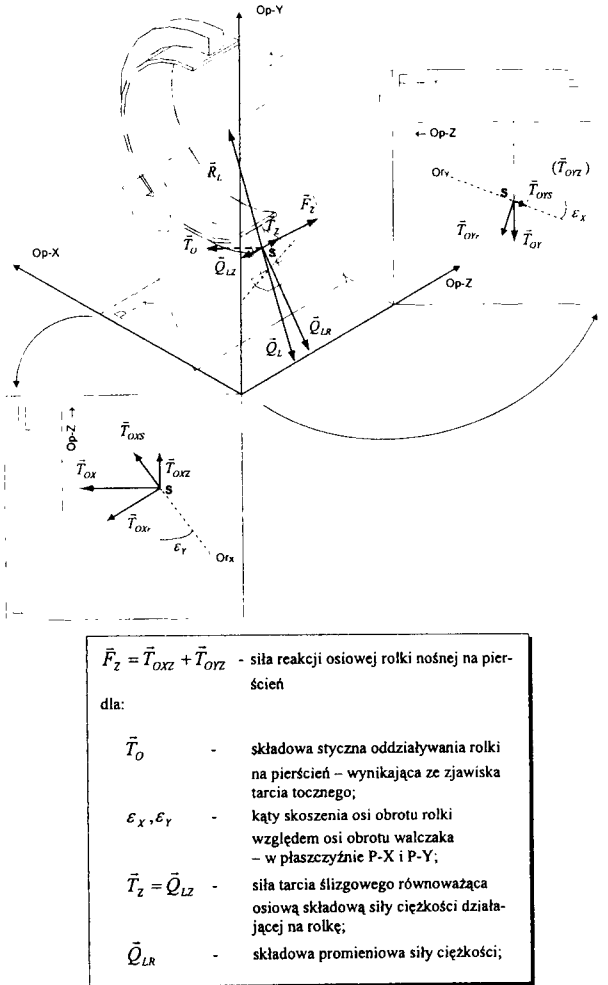
2. CZYNNIKI WARUNKUJĄCE

Czynnikami warunkującymi uzyskanie stanu stabilności są:

- geometria układu nośnego,
- stan powłoki,
- parametry sekcji napędowej,
- parametry eksploatacyjno-technologiczne obiektu.

2.1. Geometria układu nośnego

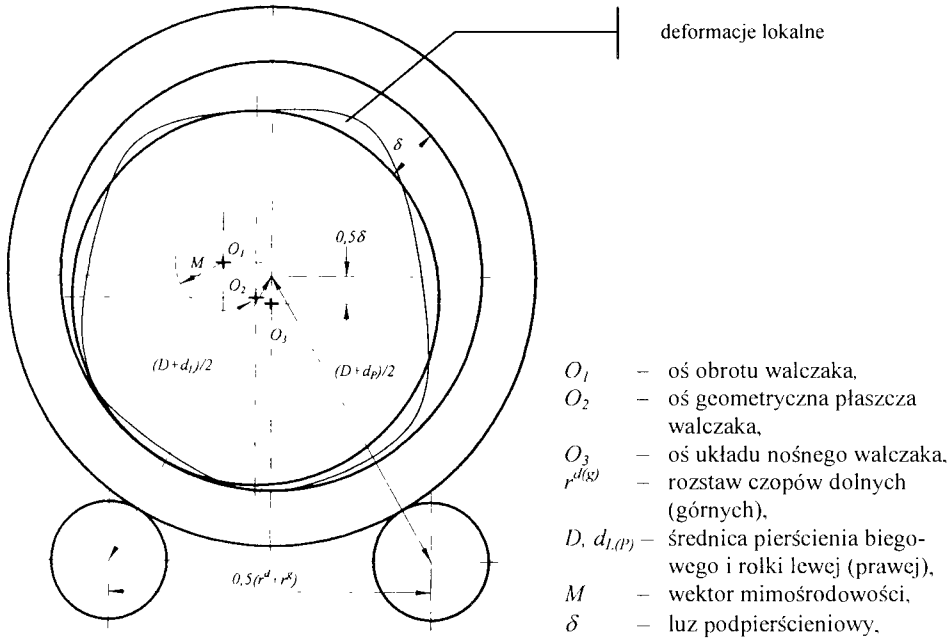
Pojęcie geometrii układu nośnego obejmuje określenie wymiarów elementów wchodzących w skład układu oraz wyznaczenie wzajemnej relacji między osiami obrotów tychże elementów. Ponadto geometria układu nośnego daje jakościowy pogląd na, tzw. siły reakcji osiowych rolek nośnych (rys.2).



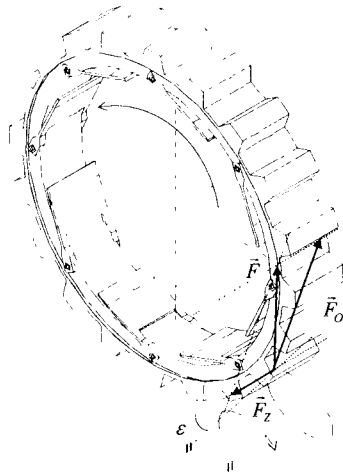
Rys.2

2.2. Stan powłoki

Do podstawowych parametrów określających stan powłoki należą parametry pojedynczych przekrojów (wektor mimośrodowości, kąt wektora mimośrodowości, deformacje lokalne) a w szczególności ich rozkład wzdłuż osi obrotu walczaka (rys.3).



Rys.3



Rys.4

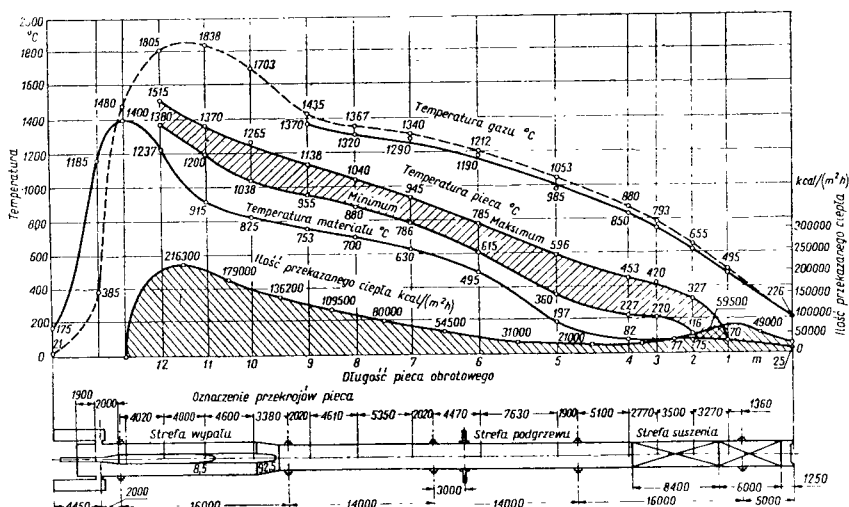
2.3. Parametry sekcji napędowej

Zaliczamy do nich między innymi: parametry osadzenia wieńca zębatego w stosunku do osi obrotu walczaka (centryczność i zwichrowanie), poprawność zazębienia wieńca z zębnikiem (równoległość osi obrotu i zachowanie stosownego luzu wierzchołkowego), osiowość łańcucha kinematycznego wał koła atakującego – reduktor – silnik. Rysunek 4 przedstawia wpływ wzajemnego zwichrowania osi obrotu wieńca zębatego

i osi obrotu wału zębniaka (ką ε) na powstawanie siły składowej F_z (przypadek kół zębnych o zębach prostych).

2.4. Parametry eksploatacyjno-technologiczne obiektu

Należą do nich czynniki związane w sposób bezpośredni z nadawami procesu technologicznego zachodzącego w walczaku (rozkład temperatur wzdłuż płaszczka walczaka, obciążenie materiałem wsadowym, prędkość obrotowa itp.). Istotną rolę odgrywają również czynniki, tzw. zewnętrzne (np. temperatura otoczenia, fakt opadów deszczu, śniegu, poziom zapylenia otoczenia). Na rysunku 5 zaprezentowano rozkłady temperaturowe wzdłuż osi walczaka (dla przykładowego pieca do wypału klinkieru na metodę tzw. popularnie określaną mokrą).



Rys. V-1. Wykres pola temperaturowego i ilości przekazywanego ciepła do wsadu w piecu obrotowym wg Gygi¹⁾

Rys.5

3. MIARY POPRAWNOŚCI EKSPLOATACYJNEJ

Ocena stabilności może być dokonywana albo poprzez ocenę, wyżej wyszczególnionych, czynników warunkujących lub poprzez ocenę trwałości elementów układu nośnego i płaszczka, lub poprzez ocenę tzw. dobroci przewodzenia obiektu, lub też przez wszystkie wymienione grupy opiniotwórcze czy też poprzez dowolne ich kombinacje.

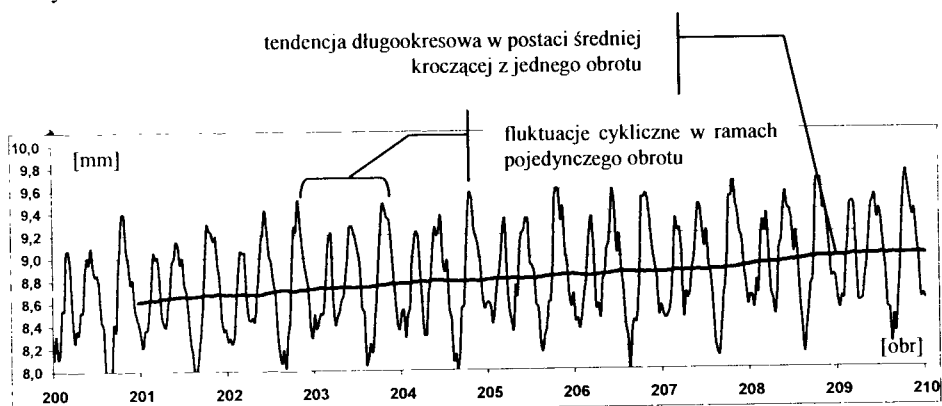
Spłycając zagadnienie sterowania walczakiem obrotowym do minimum zasadnego dla celów niniejszej publikacji, można uznać, że dla operatora tego typu obiektu miarą jego poprawnej eksploatacji od strony mechanicznej są [2, 4, 5, 6, 7]:

- równomierność prędkości obrotowej w trakcie pojedynczego obrotu;
- równomierność i wartość obciążenia elektrycznej instalacji zasilającej;
- stabilność osiowa walczaka.

O ile dwa pierwsze czynniki nie wymagają obszerniejszego komentarza - obrazują one bowiem w sposób pośredni sumaryczne opory ruchu obiektu - o tyle czynnik stabilności osiowej jest parametrem bardziej złożonym i jemu w aspekcie stateczności poświęcona jest pozostała część artykułu.

4. STABILNOŚĆ RUCHU OSIOWEGO

Stabilność ruchu osiowego walczaka charakteryzuje obiekt pod względem stałości jego osiowego położenia. Można mówić o stabilności osiowej w odniesieniu do pojedynczego obrotu (wówczas mówimy o cyklicznych fluktuacjach walczaka, czy też o ich braku) lub też w odniesieniu do czasu znacznie dłuższego (wówczas mówimy o tendencjach do „wspinania się” czy też „opadania” obiektu) (rys.6 [8] – względne osiowe położenia pierścienia biegowego w funkcji wykonanych obrotów walczaka [mm]). Dla użytkownika obiektu ani ruchy cykliczne w ramach pojedynczego obrotu ani tzw. tendencje długookresowe nie są zjawiskami pożądanymi i z punktu widzenia stateczności obiektu są typowymi zaburzeniami stanu ustalonego. Te drugie, ze względu na swoją stosunkową wolnozmiennność są łatwiejsze do oszacowania, zgeneralizowania i łatwiejsze do wyeliminowania na drodze regulacji geometrii układu nośnego.



Rys.6

Najbardziej niekorzystnymi są więc fluktuacje cykliczne z okresem równym okresowi pojedynczego obrotu walczaka.

Powodują one:

- okresowe gwałtowne napory pierścieni biegowych na rolki oporowe doprowadzające w ekstremalnych sytuacjach do zniszczeniowego uszkodzenia konstrukcji napieranej rolki,
- okresowe gwałtowne napory pierścieni biegowych na tzw. stop-bloki ustalające osiowo pierścienie na płaszczu walczaka (również doprowadzające w ekstremalnych sytuacjach do zniszczeniowego uszkodzenia elementów ustalających),
- okresowe gwałtowne napory końcówek płaszczu walczaka na uszczelnienia wlotowe i wylotowe,
- względne gwałtowne zmiany położenia wieńca zębatego napędu względem zębniaka wału atakującego,

- względne gwałtowne zmiany położenia pierścieni biegowych względem bieżni rolek nośnych (doprowadzające w sytuacjach ekstremalnych do tzw. „zaciągania osiowego wałów rolek”;
- problemy z działaniem układu automatyki prowadzenia walczaka (niektóre walczaki posiadają bowiem układy wymuszające wznoszenie i opadanie obiektu).

Owe ruchy osiowe, zarówno cykliczne jak i długookresowe - ze względu na różnorodność przyczyn je wywołujących (patrz czynniki warunkujące) są ruchami towarzyszącymi pracy obiektu w całym okresie jego użytkowania, bez względu na jego stan techniczny i wiek. Istotą walki z niepożądanymi skutkami obecności zjawiska ruchów osiowych jest ich minimalizacja do wartości dopuszczalnych. Obszar wartości dopuszczalnych jest trudnym do jednoznacznego określenia. Wyznaczenie jego musi uwzględniać zarówno czynniki wytrzymałościowe poszczególnych elementów obiektu, zależności ruchowe między tymi elementami, jak również przewidywane czasy i tryb eksploatacji.

Jakościowe i ewentualnie ilościowe określenie dopuszczalnych zaburzeń ruchu osiowego walczaków dla danych cech konstrukcyjnych i eksploatacyjnych jest zagadnieniem dotychczas bliżej niezbadanym (brak pozycji literaturowych krajowych jak i zagranicznych). Zważywszy na wysoki stopień wpływu ruchów osiowych, a w szczególności ruchów cyklicznych wykonywanych przez walczaki obrotowe (szczególnie te bardziej podatne na tego typu fluktuacje dwu- i trójpodporowe) na trwałość elementów ich układów nośnych, można fakt ten uznać za swego rodzaju niedopatrzenie w metodach analizy układów nośnych, które winno być jak najszybciej uzupełnione, co stanowi czasowo najbliższy cel naukowy jednego z autorów niniejszej publikacji.

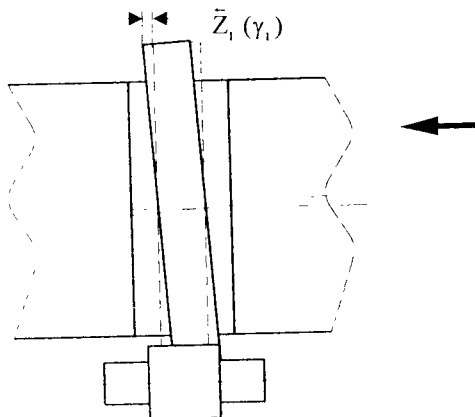
Określenie obszaru dopuszczalnych zaburzeń ruchu osiowego walczaków obrotowych oraz określenie relacji między czynnikami warunkującymi a odpowiedzią układu w postaci zaburzeń będzie stanowiło podstawę do oceny zdadności obiektu począwszy od etapu jego konstruowania (np. określenie dopuszczalnych odchyłek cech konstrukcyjnych układu nośnego) poprzez montaż (np. określenie dokładności montażowych) a kończąc na etapie jego pełnej eksploatacji (np. zakwalifikowanie obiektu do grupy zdadności czy też określenie zakresu jego remontu okresowego).

Obecnie autorzy są zgodni co do faktu, że istnieje bezsprzeczny wpływ opisanych wcześniej czynników warunkujących na stabilność osiową. Poniżej zaprezentowano przykład wpływu jednego z czynników warunkujących stabilność osiową walczaka obrotowego.

5. PRZYKŁAD WPLYWU ZWICHROWANIA PIERŚCIENIA BIEGOWEGO NA STABILNOŚĆ OSIOWĄ WALCZAKA DWUPODPOROWEGO

Jako zwichrowanie pierścienia biegowego Z_i określa się zwichrowanie jego osi symetrii w stosunku do osi obrotu walczaka wyrażone jako maksymalne osiowe wychylenie zewnętrznej krawędzi pierścienia od położenia, dla którego oś symetrii pierścienia pokrywałaby się z osią obrotu walczaka (rys.7; na i -tej podporze, wyrażone w mm). Jako kąt zwichrowania γ_i przyjmuje się numer kąta podziału obwodu, na którym osiowe wychylenie zewnętrznej krawędzi pierścienia biegowego osiąga maksymalną wartość i jest zwrócone w kierunku wylotu materiału wsadowego [4].

W omawianym przypadku przeprowadzono badania poprawności osadzenia pierścienia biegowego na podporze P1 (pierwsza od strony wylądunku materiału wsadowego) oraz pomiary przesuwu osiowego walczaka jako całości. Badanym obiektem była suszarnia obrotowa mączki wapiennej zlokalizowana na terenie firmy MOWAP sp. z o.o. w Wapienniu (woj. kujawsko-pomorskie). Badania wykonano w lutym 1999 roku.



Rys 7

Podstawowe cechy obiektu to: walczyk dwupodporowy, oś obrotu nachylona do płaszczyzny poziomej pod kątem 4%, prędkość obrotowa - 5 obr./min., napęd przekazywany na walczyk poprzez wieniec zębata osadzony na walczaku (przekładnia zębata - łańcuchowa).

Użytkownik obiektu zgłaszał przyspieszone i nierównomierne na obwodzie zużywanie się bieżni pierścienia biegowego na podporze P1, najprawdopodobniej na skutek jego znacznego bicia osiowego.

Wykonano stosowne pomiary osadzenia pierścienia oraz pomiary ruchów osiowych walczaka. Wyniki pomiarów potwierdziły przypuszczenia - wykazały znaczne zwichrowanie pierścienia biegowego na skutek jego wadliwego montażu (obiekt po remoncie).

Postanowiono pierścień osadzić ponownie przy uwzględnieniu korekcy jego położenia. Po dokonaniu korekcy położenia pierścienia pomiary wykonano powtórnie celem potwierdzenia minimalizacji jego bicia osiowego.

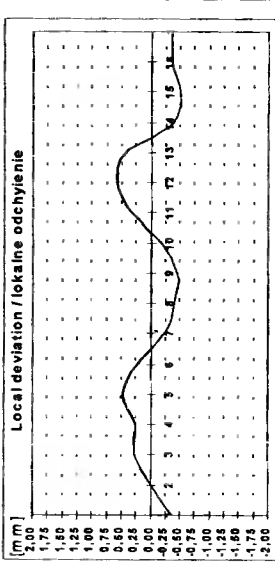
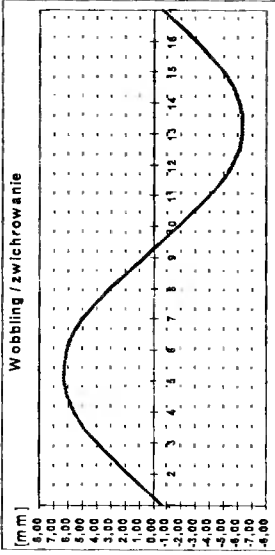
Poniżej zaprezentowano wyniki pomiarów uzyskanych przed regulacją i po jej wykonaniu [9].

Parametry osadzenia pierścienia biegowego (zwichrowania) oraz ruchów osiowych walczaka jako całości (lokalne odchylenia) – dane uzyskane przed regulacją

$Z_1 = 6,35$ mm;

$\gamma_1 = 5,28$ (dla podziału obwodu na 16 części);

zakres bicia pierścienia – 12,85 mm;



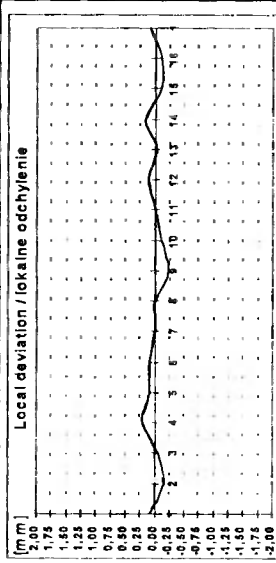
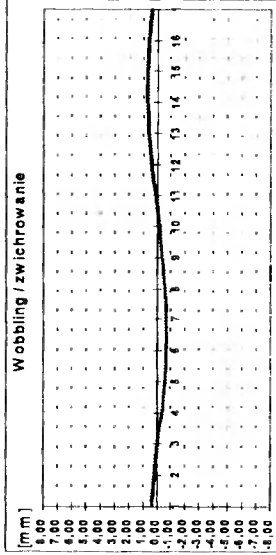
zakres bicia osiowego walczaka – 1,05 mm

Parametry osadzenia pierścienia biegowego (zwichrowania) oraz ruchów osiowych walczaka jako całości (lokalne odchylenia) – dane uzyskane po regulacji

$Z_1 = 0,95$ mm;

$\gamma_1 = 14,63$ (dla podziału obwodu na 16 części);

zakres bicia pierścienia – 2,05 mm;



zakres bicia osiowego walczaka – 0,45 mm

Powyższe dane wykazują wyraźne zmniejszenie zwichrowania pierścienia biegowego na skutek korekcji jego osadzenia. Osadzenie pierścienia biegowego stanowiło dodatkowo w tym przypadku stymulację ruchu osiowego walczaka jako całości. Minimalizacja zwichrowania uwidoczniła się, w sposób nader wyraźny, na minimalizacji zakresu cyklicznego bicia osiowego całego obiektu.

6. PODSUMOWANIE I WNIOSKI

Kluczowość procesów jakie zachodzą w walczakach obrotowych, koszt ich elementów składowych oraz koszt ich wymiany i naprawy, jak również brak dostatecznych źródeł informacji na temat możliwości diagnostycznych tego typu obiektów, wymuszają niejako konieczność poznawania zjawisk nimi rządzących.

Bez wątpienia, jednym z naczelných parametrów opiniotwórczych o stanie walczaka obrotowego jest stabilność jego osiowego ruchu. Poznanie więc czynników, mających bezpośredni czy też pośredni wpływ na tenże parametr staje się - w okresie rosnącego zainteresowania diagnostyką obiektów - priorytetem w aspekcie minimalizacji kosztów eksploatacji i obsługi.

Stabilność ruchu osiowego walczaka obrotowego jest uwarunkowana wieloma czynnikami (patrz czynniki warunkujące). Czynniki te, ze względu na swoją trudnierzalność i problemy interepretacyjne, są niejednokrotnie zaniedbywane przy analizie stanu obiektu. Nie istnieją ponadto żadne normy określające w sposób ilościowy obszar dopuszczalnych zaburzeń czynników warunkujących.

Hościowe określenie obszaru dopuszczalności czynników warunkujących wydaje się więc być tematem istotnym o wysokim znaczeniu użyłitarnym.

Podsumowując treść niniejszego artykułu widać wyraźnie potrzebę zgłębienia problemu stabilności ruchu osiowego walczaków obrotowych.

Zdaniem autorów konieczne jest więc w jak najbliższym czasie zrealizowanie następujących celów badawczych:

- 1) precyzyjne zdefiniowanie pojęcia stabilności ruchu osiowego walczaków obrotowych,
- 2) określenie ilościowe i jakościowe czynników warunkujących uzyskanie poprawnej równowagi osiowej, a w szczególności stworzenie modelu obiektu z wyszczególnieniem współczynników wpływu poszczególných parametrów na stan pracy walczaka,
- 3) określenie obszaru dopuszczalności zaburzeń ruchu osiowego, a w szczególności określenie kryteriów kwalifikujących przynależności obiektów do określonych grup podatności z punktu widzenia wykonywanych przez nich ruchów osiowych,
- 4) wyznaczenie norm dopuszczalności wartości czynników warunkujących i ich perturbacji dla poszczególných etapów życia obiektu (wytwarzanie elementów składowych, montaż i eksploatacja obiektu).

LITERATURA

- [1] Bogusz W.: Stateczność techniczna. PWN, Warszawa, 1972.
- [2] Ahrends I., Cieślński W.: Technologia cementu. BA, Warszawa, 1956.
- [3] Żurakowski S., Hojarczyk S.: Piece obrotowe – projektowanie i konstrukcje. WNT, Warszawa, 1969.

- [4] Mechaniczny przegląd pieca - typ E - sprawozdanie z przeglądu pieca do wypału klinkieru w Ożarowie przeprowadzonego przez F.L.Smitdh w 1992 roku (praca nie publikowana).
- [5] Kantorowicz Z.B.: Maszyny przemysłu chemicznego. PWT, Warszawa, 1959.
- [6] Kurdowski W.: Poradnik technologa przemysłu cementowego. Arkady, Warszawa, 1981.
- [7] Chapman R.O.: Recommended procedures for mechanical analysis of rotary kilns. Bethlehem, Pa USA, 1981.
- [8] Świtalski M., J.Zachwieja: Mechaniczny przegląd spalarni obrotowej - protokół z inspekcji obiektu przeprowadzonej w Oczyszczalni Ścieków - Dębogórze (Gdynia) w styczniu 1999 roku (praca nie publikowana).
- [9] Świtalski M., J.Zachwieja: Mechaniczny przegląd suszarni obrotowej - protokół z inspekcji obiektu przeprowadzonej na terenie firmy MOWAP sp. z o.o. - Wapienno (woj. kujawsko-pomorskie) w lutym 1999 roku (praca nie publikowana).

KRYTERIA WIELOOSIOWEGO NIEPROPORCJONALNEGO ZMĘCZENIA

Dariusz Skibicki, Janusz Sempruch

Katedra Sterowania i Konstrukcji, Wydział Mechaniczny,
ul. Prof. S. Kaliskiego 7, 85-796 Bydgoszcz

W artykule przedstawiono modyfikację kryteriów wieloosiowego zmęczenia proporcjonalnego, opartych na koncepcji płaszczyzny krytycznej, na zakres zmęczenia nieproporcjonalnego. Proponowaną metodykę zastosowano dla kryteriów McDiarmida i Gougha. Dla obu nowych kryteriów przedstawiono wyniki weryfikacji eksperymentalnej.

Słowa kluczowe: wieloosiowe zmęczenie, przesunięcie fazowe, kryterium wytrzymałości.

1. WSTĘP

Ze względu na charakter obciążenia w zakresie zmęczenia wieloosiowego można wyróżnić dwie grupy: proporcjonalne i nieproporcjonalne. Cechą, która odróżnia zmęczenie nieproporcjonalne od proporcjonalnego, jest zmienność położenia osi naprężeń głównych.

Zmęczenie nieproporcjonalne jest zjawiskiem powszechnym. Może być skutkiem, np. działania losowego stanu obciążenia. W przypadku obciążeń sinusoidalnie zmiennych pojawia się, gdy: przynajmniej dla jednej składowej występuje wartość średnia, składowe stanu obciążenia różnią się częstościami drgań lub gdy mamy do czynienia z kątem przesunięcia fazowego pomiędzy składowymi. Jako przykłady występowania obciążeń nieproporcjonalnych najczęściej podaje się: osie kół pojazdów, wały korbowe silników, turbiny, śruby napędowe itp.

Gdy na powszechność występowania obciążeń nieproporcjonalnych spojrzeć się przez pryzmat ich skutków zmęzeniowych, można wówczas mówić o dużej wadze zjawiska zmęczenia nieproporcjonalnego. Efektem działania obciążeń nieproporcjonalnych w zakresie ograniczonej trwałości jest dodatkowe umocnienie materiału i obniżenie trwałości zmęczeniowej, zaś w zakresie nieograniczonej trwałości mamy do czynienia z obniżeniem granicy zmęczenia nawet do 25%.

Niestety, brak dotychczas - co podkreśla wielu badaczy - wystarczająco dokładnych i uniwersalnych opisów zmęczenia nieproporcjonalnego.

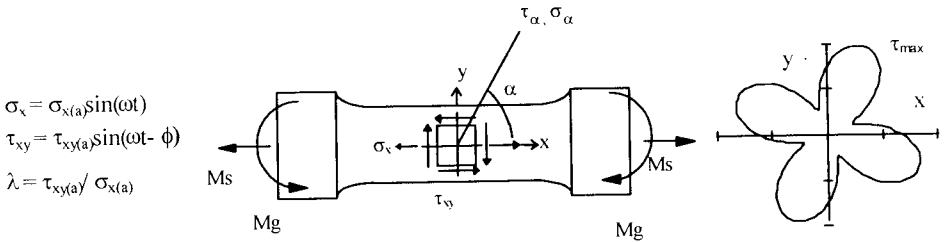
Kryteria znane z zakresu jednoosiowego i wieloosiowego proporcjonalnego zmęczenia nie ujmują złożoności stanu naprężenia i specyfiki zjawisk zmęczeniowych w warunkach nieproporcjonalnych.

Z punktu widzenia naprężeń głównych cechą charakterystyczną wspomnianego stanu naprężenia jest fakt, że chwilowe wartości tych naprężeń obejmują swym działa-

niem kolejno wszystkie płaszczyzny α . I tak, w przypadku zginania i skręcania z przesunięciem fazowym ϕ , chwilowe wartości maksymalnego naprężenia stycznego tworzą charakterystyczne obwiednie (rys.1).

Konsekwencją obrotu osi głównych jest dodatkowa interakcja dyslokacji pochodzących z kolejno obciążonych płaszczyzn α .

Z punktu widzenia zmian naprężeń na poszczególnych płaszczyznach α znaczącym jest, że naprężenia normalne i styczne osiągające swoje wartości maksymalne z przesunięciem fazowym β . W wyniku czego na każdej z dwóch płaszczyzn działania maksymalnego naprężenia stycznego panują odmiennie warunki. Maksymalnemu naprężeniu stycznemu odpowiadają bowiem różne wartości naprężenia normalnego.



Rys.1. Zginanie ze skręcaniem z przesunięciem fazowym oraz obwiednia naprężeń stycznych

Aby uwzględnić odmiennosc zmęczenia nieproporcjonalnego powstają wciąż nowe kryteria dla tego zakresu obciążeń. Nierzadko są to opisy oryginalne, formułowane od podstaw z myślą o obciążeniach nieproporcjonalnych. Często są też próby modyfikacji w celu rozszerzenia zakresu działania kryteriów pierwotnie funkcjonujących tylko dla obciążeń jednoosiowych bądź proporcjonalnych.

2. OGÓLNA POSTAĆ KRYTERIUM

Proponowane kryterium powstało na drodze modyfikacji warunku wieloosiowego zmęczenia proporcjonalnego (dalej to modyfikowane kryterium będziemy je nazywać kryterium bazowym). Taki sposób sformułowania nowego kryterium wiąże się z jednoczesną akceptacją założeń kryterium bazowego. W proponowanym przypadku jako możliwe do modyfikacji uznano każde kryterium oparte na idei płaszczyzny krytycznej. Zaletą tej idei jest silna interpretacja fizyczna zjawiska. Koncepcja płaszczyzny krytycznej zakłada, że inicjacja i rozwój pęknięcia zmęczeniowego następują na określonych płaszczyznach. W ten sposób za proces kumulacji uszkodzeń zmęczeniowych odpowiedzialne są tylko te składowe stanu naprężenia czy odkształcenia, które działają bezpośrednio na tych płaszczyznach.

Konstruując kryterium zmęczenia nieproporcjonalnego w oparciu o wskazaną grupę kryteriów bazowych przyjęto więc również założenie, że proces kumulacji uszkodzeń zmęczeniowych decydujących o zniszczeniu zachodzi na jednej płaszczyźnie zwanej płaszczyzną krytyczną. W naszym przypadku płaszczyzna ta wyznaczona jest działaniem maksymalnego naprężenia stycznego.

W trakcie nieproporcjonalnego zmęczenia zachodzą jednak pewne dodatkowe zjawiska, których skutkiem jest obniżenia trwałości lub wytrzymałości zmęczeniowej.

Modyfikacja kryterium bazowego powinna stworzyć nowy opis poprzez uzupełnienie koncepcji płaszczyzny krytycznej o dodatkowy sens fizyczny. Kluczowe dla zrozumienia odmienności procesu zmęczenia nieproporcjonalnego jest zjawisko dodatkowej interakcji dyslokacji. W przypadku zmęczenia proporcjonalnego, na wybranej płaszczyźnie krytycznej następuje posuwisto-zwrotny ruch dyslokacji. Dla zmęczenia nieproporcjonalnego, w trakcie obrotu osi głównych następuje interakcja dyslokacji poruszających się na płaszczyźnie krytycznej z dyslokacjami generowanymi na pozostałych płaszczyznach. Proces kumulacji uszkodzeń zmęczeniowych na płaszczyźnie krytycznej zostaje zmodyfikowany - najczęściej przyspieszony.

Przyjęto, że proponowane kryterium będzie posiadało budowę modułową, złożoną z dwóch członów: części bazowej τ^* i części modyfikującej τ^{**} :

$$\tau_{red} = \tau^* + \tau^{**} \quad (1)$$

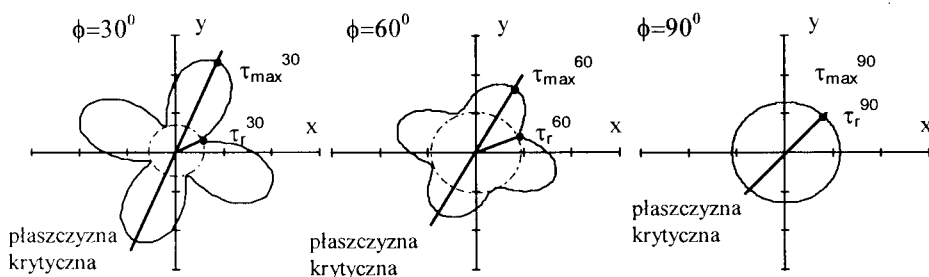
Część bazowa τ^* stanowić będzie modyfikowane kryterium. Część modyfikująca τ^{**} powinna uwzględnić dodatkowe działanie naprężeń na innych płaszczyznach α .

Część bazowa przyjmuje więc postać pewnej funkcji naprężeń: stycznego i normalnego, które działają na płaszczyźnie krytycznej. Powstaje pytanie, jaką zależnością opisać część modyfikującą.

Aby odpowiedzieć na to pytanie przeanalizowano obwiednie maksymalnych naprężeń stycznych, policzonych dla zginania i skręcania z przesunięciem fazowym ϕ . Zaobserwowano spadek granicy zmęczenia wyrażonej naprężeniem stycznym na płaszczyźnie krytycznej wraz ze wzrostem wartości kąta przesunięcia fazowego ϕ (rys.2). Jednocześnie zauważono, że wraz ze spadkiem granicy zmęczenia rosną wartości naprężeń stycznych na pozostałych płaszczyznach α . Zmniejsza się proporcja pomiędzy tymi naprężeniami, a maksymalnym naprężeniem stycznym.

$$\tau_{max}^{30} > \tau_{max}^{60} > \tau_{max}^{90}$$

$$\tau_r^{30} < \tau_r^{60} < \tau_r^{90}$$



Rys.2. Obwiednie naprężeń stycznych dla zmieniającego się kąta ϕ

W fazie konstrukcji nowego kryterium założono, że charakter zmian naprężeń na innych płaszczyznach niż płaszczyzna krytyczna, wraz ze wzrostem kąta przesunięcia fazowego jest dobrze reprezentowany przez promień koła τ_r wpisanego do obwiedni naprężeń. Wielkość τ_r reprezentuje więc skutki zmian kąta przesunięcia fazowego ϕ . W związku z tym τ_r nazwano naprężeniem miarą nieproporcjonalności obciążenia.

Na podstawie obserwacji obwiedni naprężeń zredukowanych dla różnych materiałów stwierdzono istotny wpływ własności materiałowych na wrażliwość wobec zjawiska zmęczenia nieproporcjonalnego. Parametrem własności materiałowych jest stosunek granic zmęczenia Z_{so}/Z_{go} .

Tak więc, ostatecznie człon modyfikujący jest funkcją $\tau^{**} = \tau^{**}(\tau_{red-min}, Z_{so}/Z_{go})$. Na podstawie dalszych analiz zaproponowano następującą ogólną postać kryterium:

$$\tau_{red} = \tau^* + c \cdot \tau_r^n \cdot (Z_{so}/Z_{go})^m \quad (2)$$

3. SZCZEGÓŁOWA POSTAĆ KRYTERIUM

Za pierwsze kryterium bazowe przyjęto kryterium McDiarmida [1]. W swojej pierwotnej formie zostało stworzone dla zginania ze skręcaniem w fazie. Kryterium to oparte jest na koncepcji płaszczyzny krytycznej. Zostało ono bogato zweryfikowane dla szeregu danych eksperymentalnych.

Kryterium McDiarmida powstało na bazie eksperymentalnego kryterium Gougha. Postanowiono więc, że drugim kryterium bazowym będzie „łuk elipsy”.

Aby możliwe było wykorzystanie obu kryteriów jako bazowych, niezbędne były wstępne modyfikacje.

Kryterium McDiarmida nie spełnia zasady jedności czasu i miejsca rozpatrywanych naprężeń. Według formuły autora do obliczenia naprężenia zredukowanego brane są pod uwagę maksymalne wartości naprężenia stycznego i normalnego na płaszczyźnie krytycznej, które w rzeczywistości przesunięte są w fazie. W kryterium McDiarmida użytym jako bazowe, brane jest pod uwagę naprężenie normalne σ_n , które odpowiada maksymalnej wartości naprężenia stycznego τ_a :

$$\tau_{MD} = \tau_a + (Z_{so} - Z_{go}/2) \cdot \left(\frac{2 \cdot \sigma_n}{Z_{go}} \right)^{1.5} \quad (3)$$

Kryterium Gougha jest kryterium eksperymentalnym [2]. Podobnie jak to uczynił McDiarmid, aby skorzystać z tego kryterium, należy wyrazić związek nominalnego naprężenia stycznego i normalnego za pomocą wielkości maksymalnego naprężenia stycznego τ_a i odpowiadającego mu naprężenia normalnego σ_n :

$$\tau_{red} = \tau_a + \left(\frac{2 \cdot Z_{so}}{Z_{go}} \right) \cdot \sigma_n \quad (4)$$

W ten sposób zależność Gougha otrzymuje sens fizyczny zgodny z koncepcją płaszczyzny krytycznej.

W dalszej kolejności należało wyznaczyć szczegółową postać obu kryteriów, co sprowadza się do ustalenia wartości stałych c , m i n . W tym celu postanowiono skorzystać z wyników badań Nisihary, gdyż bazowe kryterium McDiarmida powstało przy wykorzystaniu tych wyników doświadczeń, zaś badania Nisihary obejmują szeroki zakres zmienności parametrów stanu naprężenia $\lambda = \tau_{xy}/\sigma_x = 0.21 \div 1.21$ i $\phi = 0 \div 90^\circ$ oraz dotyczą wielu materiałów konstrukcyjnych o zmienności parametru $Z_{so}/Z_{go} = 0.5 \div 1$.

Minimalizując wartości błędów otrzymano następujące wartości stałych: dla McDiarmid'a $c=0.043$, $m=n=3$ i dla Gough'a $c=0.042$, $m=n=3$.

4. WERYFIKACJA

Weryfikację modelu przeprowadzono poddając analizie wartość średnią \bar{x} i odchylenie standardowe σ_x procentowego błędu względnego, zdefiniowanego następująco:

$$x = [(\text{wartość obliczona}) / (\text{wynik eksperymentu}) - 1] \cdot 100 \quad (5)$$

W przypadku proponowanego kryterium będzie to wielkość $x=(\tau_{red}/Z_{so}-1) \cdot 100$, przyjmując odpowiednio indeksy: x_{MD} dla McDiarmida, x_G dla Gougha.

Każdorazowo wielkości \bar{x}_{MD} i $\sigma_{x,MD}$ porównano z wartościami obliczonymi dla kryteriów oryginalnych: \bar{x}_{MD} , $\sigma_{x,MD}$ dla McDiarmida i \bar{x}_G , $\sigma_{x,G}$ dla Gougha.

W przypadku współczynnika x_{MD} wartość obliczoną stanowi dopuszczalne naprężenie styczne τ_{pred} wyznaczone na podstawie kryterium autora, zaś wartość dopuszczalna oznacza rzeczywistą wartość naprężenia stycznego τ_{Actual} . Dla x_G stosunek wartość obliczona do wartości rzeczywistej oznacza odwrotność współczynnika bezpieczeństwa dla łuku elipsy wg zależności [3]:

$$\left(\frac{\delta}{\delta_\sigma}\right)^2 (\alpha - 1) + \frac{\delta}{\delta_\sigma} (2 - \alpha) + \left(\frac{\delta}{\delta_\tau}\right)^2 = 1 \quad (6)$$

gdzie: $\alpha = Z_{G0}/Z_{S0}$, $\delta_\sigma = Z_{G0}/\sigma_{na}$, $\delta_\tau = Z_{S0}/\tau_{na}$.

Tabela 1

Wyniki weryfikacji dla kryterium bazowego McDiarmida

l p.	Dane eksperymentalne			Wyniki [%]			
	Badania	Material	Z _{so} /Z _{go}	\bar{x}_{MD}	$\sigma_{x,MD}$	\bar{x}_{MD}	$\sigma_{x,MD}$
1	Nisihara [4]	Mild Steel - St34	0,583	2,5	3,4	-1,6	2,1
2		Hard Steel - C45	0,625	3,1	4,1	-2,0	2,1
3		Cast Iron - GG15	0,949	-8	25,3	-1,4	3,3
4		Duralumin	0,642	9	15,6	-8,5	13,4
5	Neugebauer [5]	Cast Iron, GGG 40	0,938	9,3	21,4	1,8	10,7
6		Cast Iron, GGG 45	0,814	2,5	15,6	3,8	7,9
7	Lemmp [6]	St35	0,568	0	8,5	4,5	2,1
8		42CrMo4N	0,575	-2	4,2	5,5	0,7
9		weicher Stahl	0,579	3	5,6	-1,3	3,1
10		harter Stahl	0,631	6,4	6,7	-2,4	3
11	Sonsino [7]	FECUNI1	0,6	0	8,5	-10,5	9,2
12		FECUNI2	0,591	14,5	26,2	-5	12,7
13		FECUNI3	0,604	-4,5	9,2	-4	4,2

W tabeli 1 zestawiono wyniki obliczeń dla kryterium bazowego McDiarmida, w tabeli 2 - Gougha. Każdy wiersz tabeli zawiera wyniki analizy pewnej grupy badań eksperymentalnych o zmiennych stosunkach naprężeń nominalnych $\lambda=0.21-1.21$ i zmienności kąta przesunięcia fazowego $\phi=0-90^\circ$.

W przypadku kryterium McDiarmida uzyskano poprawę wyników w 9 na 13 przypadków. Zmodyfikowane kryterium Gougha lepiej opisuje wyniki badań eksperymentalnych w 10 przypadkach na 13 analizowanych.

Tabela 2

Wyniki weryfikacji dla kryterium bazowego Gougha

Lp.	Dane eksperymentalne			Wyniki [%]			
	Badania	Materiał	Zso/Zgo	\bar{x}_G	$\sigma_{x,G}$	\bar{x}_G	σ_G
1	Nisihara [4]	Mild Steel - St34	0,583	6	5,9	-0,9	2,4
2		Hard Steel - C45	0,625	5,3	3	1,4	1,9
3		Cast Iron - GG15	0,949	11,3	12,1	1,6	4,2
4		Duralumin	0,642	2	0	-7,5	14,8
5	Neugebauer [5]	Cast Iron, GGG 40	0,938	3,7	6,6	6,2	10,1
6		Cast Iron, GGG 45	0,814	7,8	6,8	6	5,9
7	Lemmp [6]	St35	0,568	17,5	14,8	5	2,8
8		42CrMo4N	0,575	14,5	12,	6,5	7
9		weicher Stahl	0,579	6,4	5,2	-0,4	2,7
10		harter Stahl	0,631	3,4	2,6	-0,3	2,7
11	Sonsino [7]	FECUNI1	0,6	3,5	9,2	-9,5	10,6
12		FECUNI2	0,591	8	4,2	-4	12,7
13		FECUNI3	0,604	7	8,5	-2,5	4,9

LITERATURA

- [1] McDiarmid D.L., A new analysis of fatigue under combined bending and twisting, Aeronautical Journal, London, 1974, pp. 325-329.
- [2] Gough H.J., Engineering Steels under Combined Cyclic and Static Stresses, The Engineer, Nov. 18, 1949.
- [3] Kocańda S., Szala J., Podstawy obliczeń zmęczeniowych, PWN, Warszawa 1985.
- [4] Nisihara T., Kawamoto M., The strength of materials under combined bending and twisting with phase difference, College of Engineering, Kyoto Imperial University, Vol. XI, 1945, pp. 85-112.
- [5] Neugebauer J., Fatigue strength of cast iron materials under multiaxial stresses of different frequencies. Report FB-175 Fraunhofer - Institute für Betriebsfestigkeit (LBF), Darmstadt, 1986.
- [6] Lemmp W., Festigkeitsverhalten von Stählen bei mehrachsiger Dauerschwingbeanspruchung durch Normalspannungen mit überlagerten phasengleichen und phasenverschobenen Schubspannungen, Dissertation, TU Stuttgart, 1997.

- [7] Sonsino C.M., Schwingfestigkeitsverhalten von Sinterstahl unter kombinierten mehrachsiger phasegleichen und phasenverschobenen Beanspruchungszustände (LBF), Darmstadt, Bericht Nr FB-168, 1983.

CRITERIA FOR NONPROPORTIONAL MULTIAXIAL FATIGUE

Summary

In the paper criteria for multiaxial non-proportional fatigue strength were presented. These criteria are modifications of well-known criteria from the region of proportional multiaxial fatigue.

Key words: multiaxial fatigue, out-of-phase.

BISTABILITY PHENOMENON IN FLUID DYNAMIC

Václav Tesař

Department of Chemical & Process Engineering, University of Sheffield
Mappin Street, Sheffield – S1 3JD
United Kingdom
(on leave from ČVUT Praha)

Several interesting fluid flow fields exhibit lack of unicity: instead of a single solution they have two stable regimes – with an unstable equilibrium between them – which however becomes stable at low Reynolds numbers. A typical example is a trapped vortex ring held by a special cavity on periphery of a fluid jet. Dynamic models of this bistability show interesting bifurcation properties – period doubling phenomenon and existence of chaotic regimes indicating that this may be an important underlying effect for turbulence.

Key words: bistability, bifurcation, chaotic behaviour, dynamic systems, vortices.

1. INTRODUCTION

Dynamic bistability occurs in nonlinear systems with two neighbouring stable equilibrium states separated by an intermediate unstable (stagnation) equilibrium. There are a number of such flow configurations known in fluid mechanics – in particular in fluid mechanics of jet flows, from where are the examples shown in the present paper. They exhibit a typical pitchfork-type bifurcation, with bistability occurring above a certain critical Reynolds number. Although some bistable phenomena (e.g. [1]) even found engineering applications in the field of Power Fluidics [2], they are mostly considered to be just gymcrakeries, artificial and exceptional cases of no real value for mainstream of fluid mechanics. At most, they are just used as counterexamples documenting why Navier-Stokes equation defies so far all attempts to prove in a mathematically clean way unicity of its solutions.

New results, especially concerning jet flows with vortex rings [4], however, seem to indicate that the role of bistability is much more fundamental. Numerical experiments with harmonic excitation of quite simple model of bistable behaviour indicate existence of period doubling and transition to chaos. This may be a very fundamental effect associated with origins of turbulence.

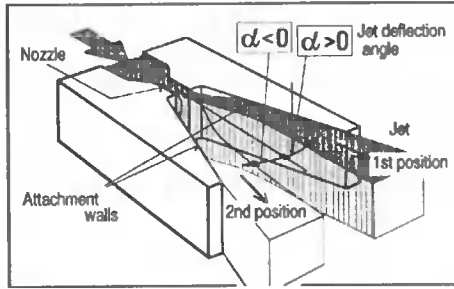


Fig.1. Probably the best known example of the bistable flow phenomenon: two alternative positions of an attached jet due to the Coanda effect

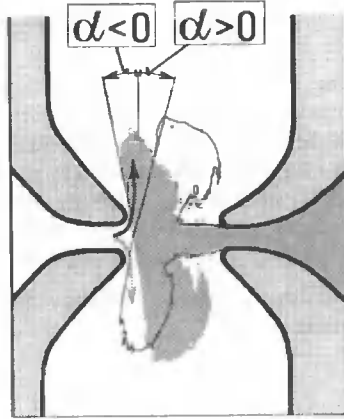


Fig.2. Bistability recently found by the present author in low Reynolds number colliding jets: the shaded area and the contour (from the author's photographs of the flow) show two alternative shapes of the starting jet flow from the right-hand nozzle opposite to a constant transparent fluid jet from the left nozzle

2. EXAMPLES OF SOME BISTABLE PHENOMENA

The alternative attachment of a fluid jet issuing from a slit nozzle to one of the two available attachment walls due to the Coanda effect, as shown in Fig.1, is perhaps the most often encountered bistable flow effect. It has been used in a number of fluid flow control devices [1, 2]. Less known bistable flowfield associated with colliding jets at low Reynolds numbers, as shown in Fig.2, was recently investigated by this author. A significant fact is that at increasing Reynolds numbers this flow configuration is prone to generating oscillations, no doubt by a mechanism of Hopf-type bifurcation.

Of particular relevance for basic problems of fluid mechanics is the flowfield with alternative rotations sense of a vortex ring, shown in Figs3 to 5. It may be a pertinent model to the vortices developing on the periphery of axisymmetric jets, which are difficult to study since they are convected away while they undergo fast changes of size and shape. The trapped ring in the semi-toroidal cavity [4] brings the advantage of being accessible to close investigations.

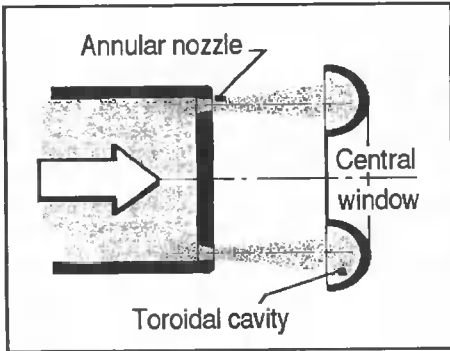


Fig.3. Flow of an annular jet opposite to a semi-toroidal cavity (Tesař and Reisenberger, 1999 - [4]). The jet position shown here is stable only at low Reynolds numbers

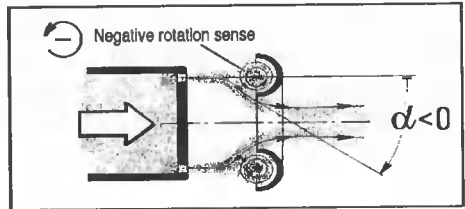


Fig.4. Stable flow of the jet from Fig.3 through the central window at high Reynolds numbers, associated with negatively rotating vortex ring in the toroidal cavity

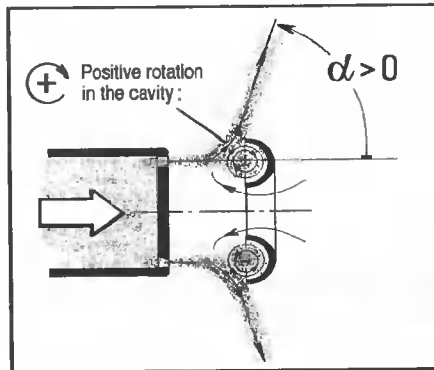


Fig.5. The other stable position of the jet from Fig.3 at high Reynolds numbers, associated with reverse (positive) rotation of the ring vortex

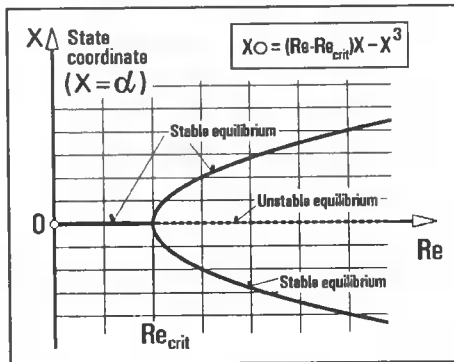


Fig.6. Simple "pitchfork" dynamic model of the Reynolds-number dependent bifurcation into a bistable regime, which may form a useful basis for the study of dynamics of the ring vortices from Figs4 to 6

3. A MODEL FOR THE DYNAMICS

Probably simplest one-dimensional, first-order model for the bistability with central unstable state may be built using the cubic dependence - Figs 7, 8. The state parameter X here plays the role of the jet deflection angle α , the vertical co-ordinate it its rate of change with time. In an autonomous system, the state returns to the equilibrium after a disturbance if the derivative in the equilibrium state is negative. With introduced suitable dependence upon the Reynolds number - Fig.6 - this model may even predict the onset of steady central position below critical Re observed in experiments.

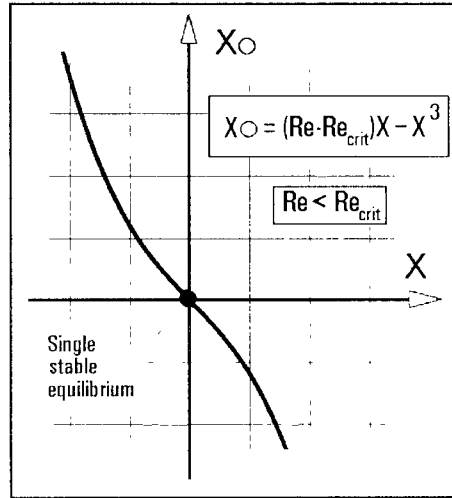


Fig.7. Phase plane representation of the model of the from Fig.6 for subcritical Reynolds numbers, where the zero-deflection jet position (Fig.3) may remain stable

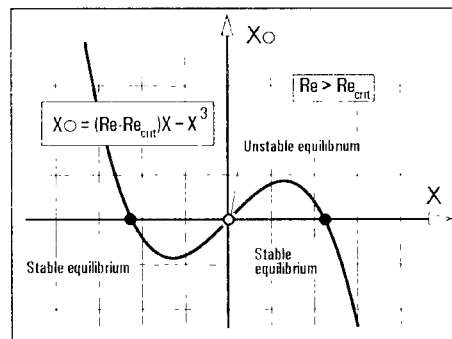


Fig.8. Phase plane representation of the cubic model from Fig.6 for supercritical Reynolds numbers, where it exhibits its typical bistable behaviour

4. SECOND-ORDER DYNAMICS

Addition of a simple (of course, linear) inertial effect to the one-dimensional model turns the model into a second-order one, Fig.9. Not only is this model a potential one - because its derivative hypervector is everywhere symmetric, but its three equilibrium points are in the basic orientation, as is shown by the derivative being a diagonal matrix. This means that investigation of its character does not require the (otherwise necessary) rotation of the axes: as expected, there are the two stable equilibria and the (unstable) stagnation equilibrium between them - Fig.10. Dynamics of temporal development may be estimated by imaging the states climbing - at locally steepest manner - up the potential relief - Fig.11, 12.

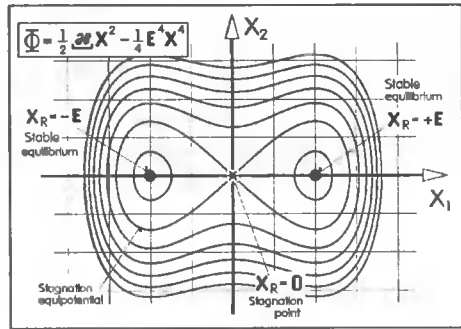
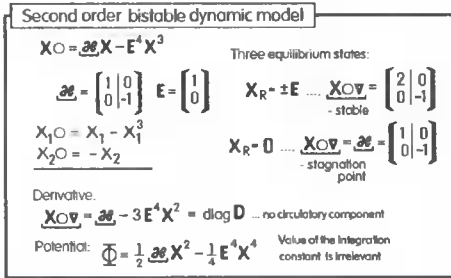


Fig.9. The cubic first-order model from Fig.8 may be developed - by considering fluid inertia - into the second-order dynamic model expressed here using the hypervector notation for writing down higher-order tensors

Fig.10. The model in Fig.9 is a potential one (with everywhere symmetric derivative tensor) so that its geometric properties may be instructively presented by plotting equipotential lines in the state plane

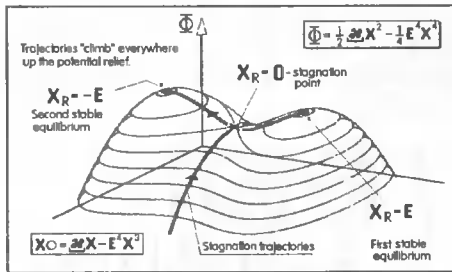


Fig.11. Axonometric presentation of the potential relief from Fig.10. Dynamics of the system may be judged from the notion of states climbing up towards higher value of the potential

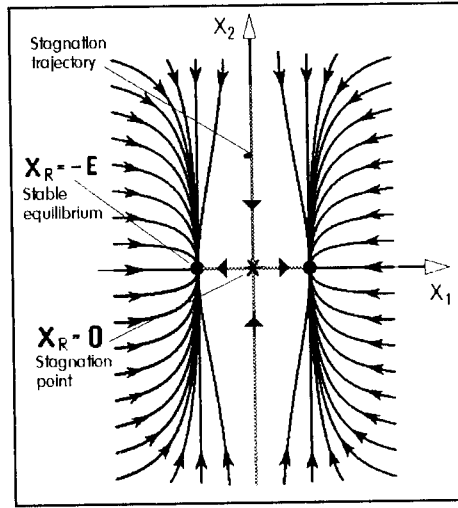


Fig.12. Trajectories of temporal development in the two-dimensional potential model of an autonomous bistable dynamics

5. CIRCULATION

Real dynamic systems are seldom of potential character and for better reality of the model, it may be complemented by superimposition of the simplest circulatory behaviour: a linear one with alternating matrix, as shown in Fig.13.

The well known consequences of added circulation [3], apart from the inevitable deformation of trajectories into spiral shapes (Figs14, 16, 18) due to added term in their equation, are

- a) migration (Fig.15) of those equilibria that are outside the origin, and
- b) if the circulation intensity exceeds it critical value - which is here $C = 1$ - there may be a reversal of character of stagnation points.

In the present model, the critical value of circulatory component (Fig.18) of behaviour is the largest attainable one.

Dynamic model with circulatory component

$$\mathbf{X}_O = (C\mathbf{k} + \mathbf{ae})\mathbf{X} - E^4\mathbf{X}^3$$

$$\mathbf{ae} = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{bmatrix} \quad E = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix} \quad \mathbf{k} = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{bmatrix}$$

a) Migration of equilibrium states \mathbf{X}_R determined from

$$\mathbf{0} = (C\mathbf{k} + \mathbf{ae})\mathbf{X}_R - E^4\mathbf{X}_R^3$$

b) Spiral deformation of trajectories

Fig.13. A more complicated dynamic model of bistability with nonzero circulatory component of system behaviour

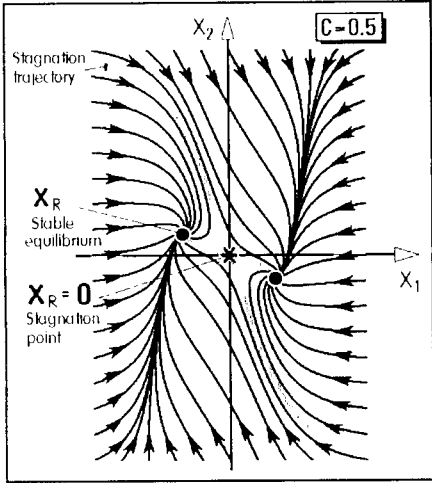


Fig.14. Trajectories of the temporal development of the system described by the equation from Fig.13 for intensity of the circulation relatively small. In spite of deformed shapes of trajectories, this phase portrait is topologically equivalent to the irrotational case in Fig.12

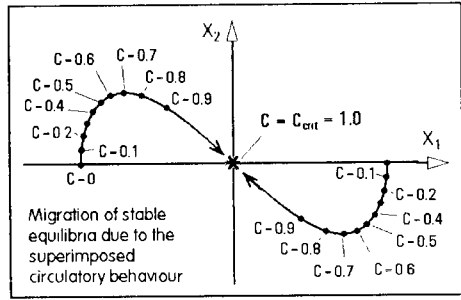


Fig.15. Migration of the stable equilibria with increasing circulation intensity

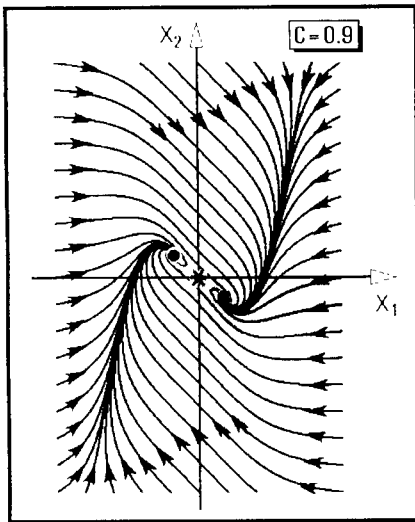


Fig.16 Trajectories of the temporal development of the system described by the equation from Fig.13 for intensity of the circulation approaching its critical value $C=1$

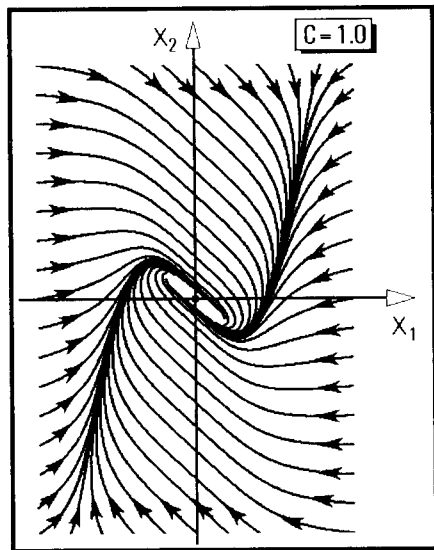


Fig.17. Detail of the central part of Fig.1 with clearly visible shapes of the stagnation trajectories

6. EFFECTS OF EXCITATION

Dynamic systems in real life are exposed to inevitable disturbances. The simplest way how to include their effect in the present model is to add a harmonic excitation. Unfortunately, this results in the development trajectories becoming intractably tangled. A suitable technique how to follow their behaviour is the stroboscopic method of Poincaré – Fig.19. The responses of the excited model was studied with adjusted large level of circulatory behaviour. With small excitation amplitudes, the responses (after a transition period) were simple harmonic orbital motions around one of the stable equilibrium states, as shown in Fig.20. At an increased excitation amplitude, Fig.22, the period doubling effect was found. This is, in fluid flows with vortices, a typical effect usually associated with vortex pairing. It is, in fact, surprising that such an effect may be found here in so simple purely temporal model that ignores spatial distributions.

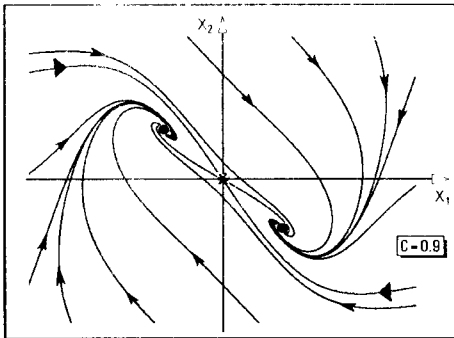


Fig.18. Critical intensity $C=1$ of circulation leads to reversal of stagnation point character into orbital stability

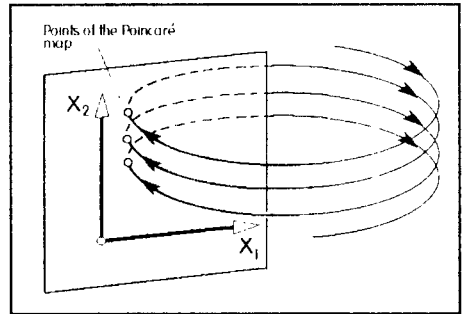


Fig.19. Principle of the Poincaré return mapping: a stroboscopic method of investigating dynamics of higher order system with periodic excitation

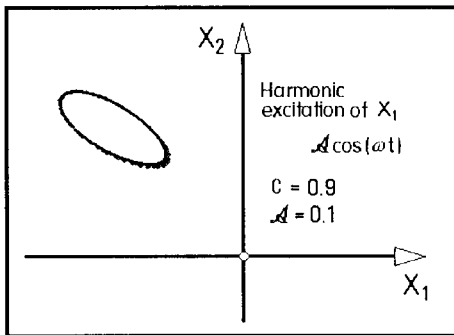


Fig.20. Poincaré mapping of harmonically excited system from Fig.13. At small excitation amplitudes the states do not leave the attraction region of one of the two potential vertices

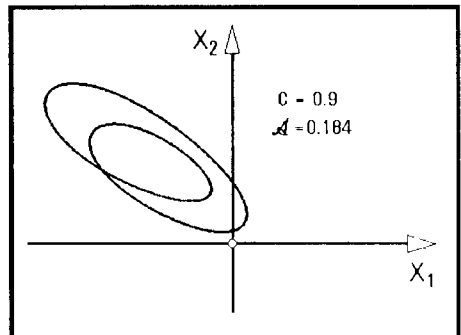


Fig.21. The period doubling phenomenon - typical for fluid flows with vortices - is seen in the Poincaré mapping of the same system from Fig.13 at higher excitation amplitudes

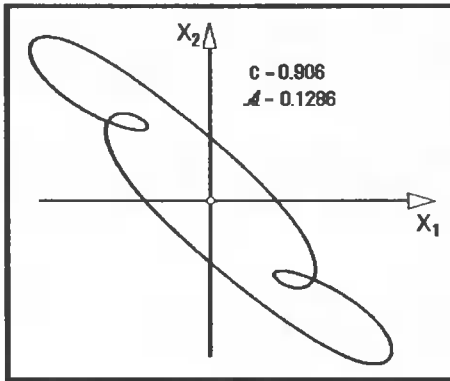


Fig.22. At increased intensity of system circulatory properties the trajectories in state plane can become quite complex

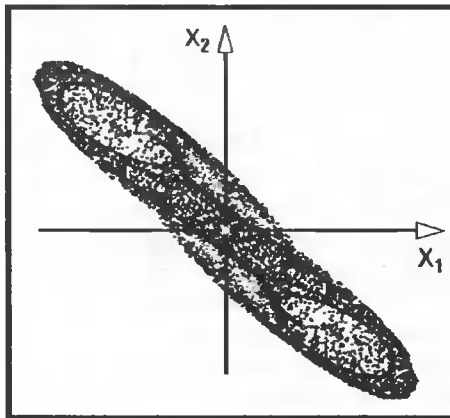


Fig.23. The model of the fluid flow bistable systems according to Fig.13 with higher excitation amplitude may exhibit chaotic behaviour, showing (probably) the presence of a chaotic attractor

Even more significant is the finding that with further increased excitation, especially with higher circulation, this model may exhibit chaotic motions, as documented by Fig.23. The presence of a strange attractor may show that this may be a suitable model for study of the onset of turbulence.

REFERENCES

- [1] Tesař V.: A Mosaic of Experiences and Results from Development of High-Performance Bistable Flow-Control Elements, Proc. Conf. 'Process Control by Power Fluidics', Sheffield, Great Britain, 1975.
- [2] Tesař V.: Valvole fluidiche senza parti mobili, Oleodinamica – pneumatica rivista delle applicazioni fluidodinamiche e controllo del sistemi, p. 216, Anno 39, No 3, Torino, Milano, Italy, 1998.

- [3] Tesař V.: Metoda vyšetřování stability nelineárních systémů založená na hydromechanické analogii (A method of investigating nonlinear systems stability based on a hydromechanical analogy – in Czech), Proc. Conf. ČVUT, p.108, Praha, Czech Rep., July, 1971.
- [4] Tesař V., Reisenberger Ewald : Trapped Vortex Ring Bistability Proc. Colloq. 'Aktuální problémy mechaniky tekutin '98', p. 51, ISBN 8085918-47-1, ÚT AV ČR, February, 1999.

ZJAWISKO BISTABILNOŚCI W DYNAMICE PLYNÓW

Streszczenie

Kilka interesujących obszarów przepływu płynu wykazuje brak jednoznaczności: zamiast pojedynczego rozwiązania posiadają one dwa stabilne stany – z niestabilną równowagą między nimi, która jednakże staje się stabilna przy niskich liczbach Reynoldsa. Szczególnym przykładem jest stabilizujący pierścień wirowy otrzymany przez specjalne wgłębienie na obrzeżu strumienia płynu. Model dynamiczny tej bistabilności wykazuje interesujące rozgałęziające własności, okresowe zjawisko zdwabiania i istnienie stanów chaotycznych powoduje, że może to być istotny wspomagający efekt turbulencji.

Słowa kluczowe: bistabilność, rozdzielanie, zachowanie chaotyczne, system dynamiczny, wirowość.

PATENTY WIBROAKUSTYCZNE BYDGOSKIEGO ŚRODOWISKA NAUKOWEGO

Krzysztof Wernerowski

Katedra Mechaniki Stosowanej, Wydział Mechaniczny ATR
ul. Prof. S. Kaliskiego 7, 85-796 Bydgoszcz

Wykonano analizę patentów bydgoskiego środowiska naukowego zmniejszających poziom parametrów drgań i emisji hałasu. Przedstawiono również patenty osłon, ekranów i przestrzennych pochłaniaczy akustycznych.

Słowa kluczowe: drgania, hałas, poziom.

1. CIARAKTERYSTYKA OGÓLNA

W Katedrze Mechaniki Stosowanej Wydziału Mechanicznego Akademii Techniczno-Rolniczej im. J. i J. Śniadeckich oraz w innych jednostkach bydgoskiego środowiska naukowego zrealizowano wszechstronne badania i analizy teoretyczne wibroakustyki dla przemysłu i budownictwa. Badania diagnostyczne [4] wykonano aparaturą z właściwą dokładnością. Podczas obliczeń analizowano możliwości tłumienia drgań [2], emisji oraz propagacji hałasu [1] uwzględniając nieliniowy charakter zjawisk wibroakustycznych z dużą energią. Zastosowano asymptotyczną [3] metodę rozwiązania zagadnień nieliniowych wibroakustyki maszyn. Na podstawie dokonanych wynalazków uzyskano szereg patentów. Najważniejsze wynalazki wibroakustyczne podano w spisie patentów [1-25].

2. PATENTY ZMNIEJSZAJĄCE POZIOM DRGAŃ I EMISJĘ HAŁASU

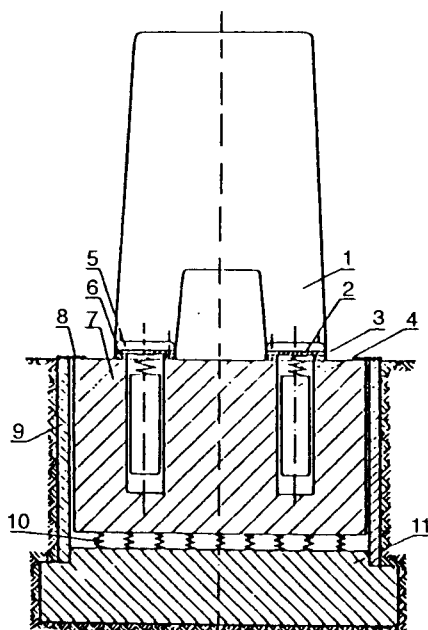
Najlepszą metodą zmniejszania parametrów szkodliwych drgań i hałasu jest bezpośrednio ograniczenie wibracji oraz wypromieniowania dźwięków. Opracowano szereg wynalazków i uzyskano patenty [3,5,68-13,15,18-20,22-25] realnie zmniejszające poziom drgań i wypromieniowania szkodliwych dźwięków. Zagadnienia bezpośredniego zmniejszenia parametrów o charakterze wibroakustycznym są złożone i nie zawsze możliwe jest ich rozwiązanie.

Na rys.1,[2] patent nr 85938 pokazano eliminowanie dynamiczne drgań ciężkiej maszyny. Zaletą wynalazku jest możliwa spokojna praca maszyny o działaniu posuwistozwrotnym lub udarowym w kierunku pionowym.

Zagadnienie synchronicznego działania kilku wibratorów jest złożone. Rozwiązanie przedstawione na rys.2, [7] patent nr 103182 umożliwia samosynchronizację metodą drgań giętych. Korzysta się z postaci wibracji podczas rezonansu z pierwszą częstotliwością.

Rozwiązanie mechaniczno-hydrauliczne pokazane na rys.3,[16] patent nr 135525, zapewnia skuteczne ograniczenia parametrów drgań mechanicznych metodą eliminowania dynamicznego i dławieniem przepływu.

Wielokrotny system tłumiący z eliminatorem, sprężynami oraz zespołem otworów umożliwia dokładne opracowanie charakterystyki tłumienia.



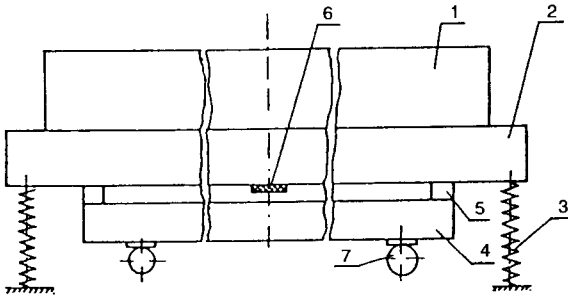
Rys.1. Fundament przeciwdrganiowy, zwłaszcza dla ciężkich maszyn: 1 - maszyna, 2 - blacha stalowa, 3 - sprężyna, 4 - ciężarek, 5 - podpora, 6 - podkładka gumowa, 7 - ruchoma część fundamentu, 8 - folia elastyczna, 9 - osłona płytowa, 10 - warstwa sprężyn, 11-ruchoma część fundamentu

3. OSŁONY, EKRANY I POCHŁANIACZE PRZESTRZENNE HAŁASU

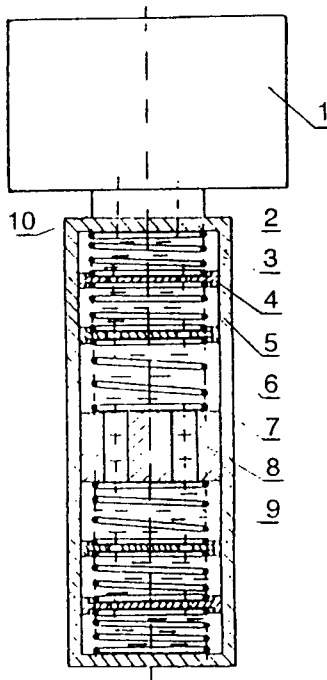
Cennym uzupełnieniem bezpośredniego tłumienia drgań i hałasu jest ograniczenie szkodliwych dźwięków na drodze propagacji. Dokonano szereg wynalazków i uzyskano patenty [1,4,14] działające pochłaniająco-izolacyjne na drodze propagacji hałasu. Działanie osłon i ekranów jest analogiczne.

Na rys.4, [17] patent nr 136547 przedstawiono ekran ograniczający propagację szkodliwych dźwięków o złożonym widmie. Istota wynalazku polega na tym, że na płycie z otworami umocowane są podstawami elementy dźwiękochłonne o zarysie krzywoliniowym.

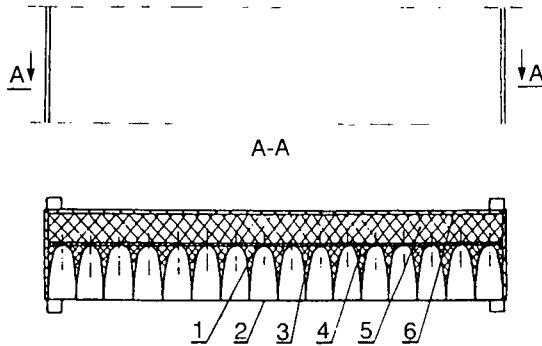
Uzupełnieniem systemowego wyciszania pomieszczenia w zakładzie przemysłowym jest przestrzenny pochłaniacz hałasu pokazany na rys.5, [21] patent nr 151927. Zaletą kształtu stożkowego jest eliminowanie rezonansowe tonów w szerokim paśmie częstotliwości. Zastosowanie materiału porowatego i gumy podwyższa skuteczność działania.



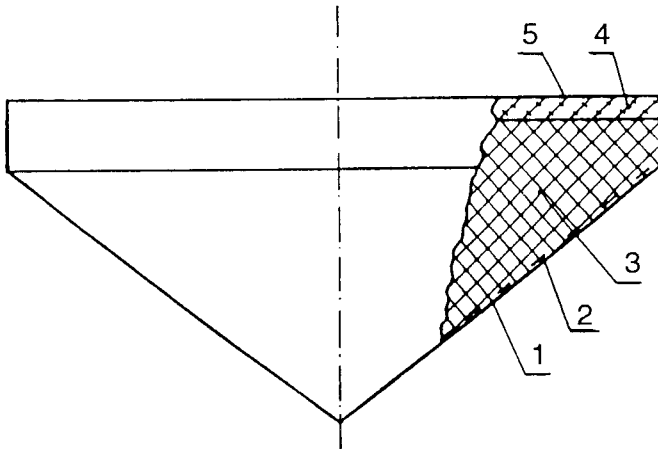
Rys.2. Giętkie samosynchronizujące urządzenie sprężyste wibratorów, zwłaszcza do maszyn i urządzeń do zagęszczania betonu: 1 - forma z betonem i zbrojeniem, 2 - stół, 3 - sprężyna, 4 - belka synchronizująca, 5 - część stała, 6 - zderzak, 7 - wibrator



Rys.3. Eliminatory wibracji ruchu prostoliniowego, zwłaszcza do maszyn i urządzeń wymagających zmian zwrotu prędkości: 1 - maszyna, 2 - obudowa, 3 - sprężyna, 4 - dławik, 5 - sprężyna pośrednia, 6 - dławik pośredni, 7 - sprężyna środkowa, 8 - bezwładniki, 9 - olej, 10 - łącznik



Rys.4. Dźwiękochłonny ekran, zwłaszcza do maszyn i urządzeń mechanicznych:
 1 - pas elementów dźwiękochłonnych, 2 - siatka metalowa, 3 - podstawa elementu pochłaniającego, 4 - płyta, 5 - warstwa pochłaniająca, 6 - płyta metalowa



Rys.5. Przestrzenny pochłaniacz dźwiękochłonny: 1 - pobocznica perforowana, 2 - welon szklany, 3 - materiał dźwiękochłonny, 4 - płyta gumowana, 5-osłona

LITERATURA

- [1] Cempel C.: Wibroakustyka stosowana, PWN, Warszawa, 1989.
- [2] Osiński Z. pr.zb.: Tłumienie drgań, Wydawnictwo Naukowe PWN, Warszawa, 1997.
- [3] Wernerowski K.: Asymptotyczne rozwiązanie wybranych zagadnień nieliniowych wibroakustyki maszyn, ATR, Bydgoszcz, 1995.
- [4] Żółtowski B.: Podstawy diagnostyki maszyn, ATR, Bydgoszcz, 1996.

PATENTY

- [1] nr 84001, Wernerowski K.: Osłona dźwiękochłonna zwłaszcza prasy.
- [2] nr 85938, Wernerowski K.: Fundament przeciwdrganiowy zwłaszcza dla ciężkich maszyn.
- [3] nr 87071, Wernerowski K., Holka H.: Mechanizm do dynamicznego wyważania zwłaszcza traka.
- [4] nr 87206, Wernerowski K., Zachwieja J., Przybył J.: Osłona dźwiękochłonna przestrzeni roboczej zwłaszcza prasy.
- [5] nr 96820, Wernerowski K., Przybył J.: Rura materiałowa podajnika pręta zwłaszcza do automatu tokarskiego.
- [6] nr 97448, Wernerowski K.: Dynamiczny eliminator wibracji, zwłaszcza do fundamentu maszyny wirnikowej.
- [7] nr 103182, Wernerowski K., Wiśniewski Z.: Giętne samosynchronizujące urządzenie sprężyste wibratorów, zwłaszcza maszyn i urządzeń do zagęszczania betonu.
- [8] nr 119862, Wernerowski K.: Tłumik drgań wzdłużnego łożyska gazostaticznego.
- [9] nr 120408, Wernerowski K.: Tłumik półprędkościowego wiru łożyska gazowego.
- [10] nr 123128, Wernerowski K., Kikiewicz Z.: Układ obniżający natężenie szkodliwego hałasu w młynach stożkowych, zwłaszcza w przemyśle celulozowo-papierniczym.
- [11] nr 124020, Wernerowski K., Kikiewicz Z.: Urządzenie do tłumienia drgań w maszyn tarczowych, zwłaszcza dla przemysłu celulozowo-papierniczego.
- [12] nr 127260, Wernerowski K., Śliwiński G.: Wielokrotny tłumik wiskotyczny drgań, zwłaszcza młyna młotkowego.
- [13] nr 127383, Wernerowski K., Kikiewicz Z., Waliszko E.: Poprzeczno-skrętny eliminator szkodliwych wibracji maszyn i urządzeń w przemyśle celulozowo-papierniczym.
- [14] nr 129685, Wernerowski K., Waliszko E., Przybył J.: Przestrzenny pochłaniacz dźwiękochłonny, zwłaszcza dla pras.
- [15] nr 130116, Wernerowski K.: Wzdłużne łożysko przepływowe o podwyższonej sztywności.
- [16] nr 135525, Wernerowski K., Waliszko E.: Eliminator wibracji ruchu prostoliniowego zwłaszcza dla maszyn i urządzeń wymagających zmian zwrotu prędkości.
- [17] nr 136547, Wernerowski K., Waliszko E.: Dźwiękochłonny ekran, zwłaszcza do maszyn i urządzeń mechanicznych.
- [18] nr 138127, Wernerowski K.: Układ tłumiący wibracje krzywkowego mechanizmu płaskiego.
- [19] nr 138673, Wernerowski K.: Rezonansowy tłumik drgań poprzecznego łożyska gazowego.

- [20] nr 138841, Wernerowski K.: Dynamiczny tłumik drgań poprzecznego tłumika, zwłaszcza przepływowego.
- [21] nr 151927, Wernerowski K., Żołnierczyk J., Waliszko E.: Przestrzenny pochłaniacz dźwiękochłonny.
- [22] nr 153208, Wernerowski K., Kaźmierczak Z.: Zespół tłumiący hałas wycinarki jednoramiennej.
- [23] nr 155220, Wernerowski K., Waliszko E., Kaźmierczak Z.: Tłumik hałasu zwłaszcza podajnika pręta wzdłużnego automatu tokarskiego.
- [24] nr 155221, Wernerowski K., Waliszko E., Kaźmierczak Z.: Ustrój tłumiący hałas, zwłaszcza pręta do wzdłużnego automatu tokarskiego.
- [25] nr 173220, Wernerowski K.: Ustrój wyciszający piec łukowy.

VIBROACOUSTIC PATENTS OF BYDGOSZCZ SCIENTIFIC COMMUNITY

Summary

Vibroacoustic patents analysis of Bydgoszcz scientific community reducing the vibration and noise parameters level was done. Shield, screen and special acoustic absorber patents were also presented.

Key words: vibration, noise, level.

ISSN 0208-6395