



AKADEMIA TECHNICZNO-ROLNICZA
IM. JANA I JĘDRZEJA ŚNIADECKICH
W BYDGOSZCZY

Sesja Naukowa
Mechanika Stosowana

ZESZYTY NAUKOWE NR 241

MECHANIKA

53

WYDZIAŁ
MECHANICZNY



BYDGOSZCZ – 2002





AKADEMIA TECHNICZNO-ROLNICZA
IM. JANA I JĘDRZEJA ŚNIADECKICH
W BYDGOSZCZY

ZESZYTY NAUKOWE NR 241



MECHANIKA 53

Sesja Naukowa
Mechanika Stosowana

BYDGOSZCZ – 2002

REDAKTOR NACZELNY
dr hab. inż. Janusz Prusiński, prof. nadzw. ATR

REDAKTOR DZIAŁOWY
prof. dr hab. inż. Maciej Woropay

OPRACOWANIE REDAKCYJNE I TECHNICZNE
mgr Michał Górecki, mgr inż. Daniel Morzyński

© Copyright
Wydawnictwa Uczelniane Akademii Techniczno-Rolniczej
Bydgoszcz 2002

ISSN 0208-6395

Nr inw P 894/2002

Wydawnictwa Uczelniane Akademii Techniczno-Rolniczej
ul. Ks. A. Kordeckiego 20, 85-225 Bydgoszcz, tel. (052) 3749482, 3749426
e-mail: wydawucz@atr.bydgoszcz.pl <http://www.atr.bydgoszcz.pl/~wyd>

Wyd. I. Nakład 120 egz. Ark. aut. 16,00. Ark. druk. 21,25. Papier druk. kl. III.
Oddano do druku i druk ukończono we wrześniu 2002 r. Zamówienie nr 11/2002
Uczelniany Zakład Małej Poligrafii ATR Bydgoszcz, ul. Ks. A. Kordeckiego 20

2002 K 172/78

KOMITET NAUKOWY

prof. dr hab. inż. **Krzysztof Wernerowski** - przewodniczący

prof. dr hab. inż. **Józef Kubik**

prof. dr hab. inż. **Józef Nizioł**

dr hab. inż. **Bronisław Siolkowski**, prof. nadzw. ATR

prof. dr hab. inż. **Eugeniusz Świtoński**

prof. dr hab. inż. **Andrzej Tylikowski**

prof. dr hab. inż. **Arnold Wilczyński**

KOMITET ORGANIZACYJNY

dr hab. inż. **Henryk Holka**, prof. nadzw. ATR - przewodniczący

dr inż. **Jerzy Sawicki** - sekretarz

dr inż. **Jan Sadowski**

mgr inż. **Jan Żołnierczyk**

Katarzyna Łaz

Cecylia Sarbinowska

Spis treści

1. Adam Bar, Józef Nizioł: Drgania masztów z odciągami wywołane opływem wiatru	7
2. Katarzyna Cabańska-Płaczkiewicz, Maciej Wilczyński: Zagadnienie statyczne belki drewnianej kompozytowej	19
3. Feliks Chwarścianek: Wyznaczanie całek równań ruchu płynu nielowtonowskiego metodą przybliżeń całkowych	31
4. Mieczysław Cieszko: Dynamika płynu w przepuszczalnym ośrodku porowatym o anizotropowej strukturze przestrzeni porów	43
5. Zbigniew Dąbek: Probabilistyczne oszacowanie częstotliwości drgań własnych układu drgającego o czterech stopniach swobody	57
6. Mykhaylo Delyavskyy, Robert Ran, Luba Grinczenko, Natala Beregova: Poprzeczne zginanie płyty prostokątnej utwierdzonej na wszystkich krawędziach	65
7. Radosław Drelich, Mariusz Kaczmarek, Józef Kubik: Propagacja fal w drewnie jako naturalnym kompozycie	73
8. Jerzy Gołaś: Wpływ poprzecznych odkształceń postaciowych na możliwość rozwoju delaminacji kompozytów włóknistych o strukturze warstwowej	79
9. Adam Grabowski, Adam Podhorecki: Obliczenia statyczne układów ciągnowych	91
10. Henryk Holka: Modelowanie i analiza dynamiki traktora MTZ-80	101
11. Robert Kostek, Karol Grudziński: Badania symulacyjne rezonansu w drganiach kontaktowych	111
12. Marcin Łukasiewicz: Zastosowanie analizy modalnej w badaniu stanu przekładni zębatych	121
13. Janusz Łukowski, Jan Kołodziej: Parametry struktury modelowych materiałów porowatych	129
14. Stanisław Mroziński, Zbigniew Lis, Marek Szczutkowski: Metoda emisji akustycznej w badaniach eksperymentalnych Katedry Podstaw Konstrukcji Maszyn	139
15. Wiesław Ostachowicz: Mechanika wielowarstwowych belek i płyt kompozytowych	149
16. T. Paczkowski, J. Sawicki: Symulacja komputerowa procesu ECM w oparciu o dwuwymiarowy model przepływu elektrolitu między płaskimi elektrodami	171
17. Julian Polański, Tomasz Karasiewicz: Koncepcja określania trwałości zmęczeniowej w ujęciu energetycznym przy wykorzystaniu matematycznego modelu zachowania się materiału	181
18. Александр Сергеевич Поварехо: Методика расчета выходных характеристик дисковых тормозных механизмов с самоусилением	189

19. Ryszard Poznań: Ocena możliwości wykorzystania procesów wibroakustycznych generowanych przez zespoły oczyszczarki wirnikowej do określenia jej stanu technicznego	199
20. Mirosław Radwański: Warunki początkowe drgań okresowych nieliniowych układów dynamicznych.....	209
21. Dariusz Skibicki: Weryfikacja eksperymentalna modelu zmęczenia dla obciążeń nieproporcjonalnych	215
22. Dariusz Skibicki, Krzysztof Nowicki: Optymalizacja kratownicy przy użyciu algorytmów genetycznych	223
23. Eugeniusz Świtoński: Minimalizacja drgań elektromechanicznych układów maszynowych	229
24. Václav Tesař: One-equation turbulence model solution of developed pipe flow.....	243
25. Jan Titoni: Modelowanie matematyczne ruchu wirującej bryły osiowosymetrycznej.....	255
26. Andrzej Tylikowski: Dynamics of delaminated elements of composite and smart structures	265
27. Krzysztof Wernerowski: Analiza wibroakustycznych ustrojów wyciszających.....	275
28. Arnold Wilczyński, Marek Kociszewski: Wpływ średnicy kołków na naprężenia w połączeniu kątowym płyt włókowych.....	283
29. Tadeusz Zbigniew Woźniak: Modele kinetyczne przemian fazowych.....	291
30. Ali Makhief Al-Zubiedy, Adam Flizikowski: Modelowanie nierównomierności rozdrabniania wielootworowego.....	301
31. Janusz Zachwieja: Efekt żyroskopowy w dynamice walców maszyny papierniczej.....	311
32. Grzegorz Zych: Analiza wpływu warunków podparcia na stan naprężeń w iglicy rozjazdu kolejowego.....	326
33. Чеслав Жданович, Владимир Плищ, Виктор Равино: Экспериментальные исследования деформируемости секции резиноармированной гусеницы	333

DRGANIA MASZTÓW Z ODCIĄGAMI WYWOŁANE OPŁYWEM WIATRU

Adam Bar, Józef Nizioł

Politechnika Krakowska, Instytut Mechaniki i Podstaw Konstrukcji Maszyn
Al. Jana Pawła II 32, Kraków

Praca przedstawia przybliżoną analizę – na podstawie prostego modelu drgań masztu wzmocnionego odciałami. Drgania te wywoływane są odrywaniem się od masztu wirów Karmana. Wykazano, że zjawisko drgań ma charakter samowzbudno-parametryczny. W pracy zamieszczono charakterystyki amplitudowo-częstotliwościowe, amplitudowo-fazowe oraz przebiegi czasowe drgań uzyskane dzięki analizie numerycznej.

Słowa kluczowe: drgania „eolskie”, opływ, wir, odciał

WPROWADZENIE

Drgania mechaniczne konstrukcji inżynierskich w zasadniczej większości są zjawiskami niepożądanymi. Ich propagacja w obrębie konstrukcji może prowadzić do zniszczenia zmęczeniowego, a w konsekwencji do katastrofy.

Najskuteczniejszym sposobem redukcji drgań jest zminimalizowanie przyczyn ich powstawania. Jednak nie zawsze człowiek, dążący do ułatwienia sobie warunków pracy i wprowadzający coraz nowsze urządzenia ułatwiające zwiększenie efektów ekonomicznych, zważa na skutki fizjologiczne występujące u ludzi obsługujących maszyny i urządzenia (choroby wibracyjne, wypadki, awarie maszyn itp.). Na sterowanie drganiami i innymi procesami technologicznymi możemy mieć wpływ. Często jednak drgania wywołują siły przyrody - tutaj nie możemy ingerować w źródło drgań i z całą pokorą powinniśmy próbować poznać zjawiska ich powstawania, by można było zabezpieczyć się przed negatywnymi ich skutkami. Do takich przypadków zaliczyć można, m.in. trzęsienia ziemi, falowanie oceanów, mórz i jezior oraz często występujące drgania „eolskie”, wywołane opływem wiatru (drgania linii elektroenergetycznych, kominów, masztów itp.).

Artykuł ma na celu, na podstawie poznanych praw fizyki, analizę drgań masztów radiowo-telewizyjnych z odciałami – wywołanych opływem wiatru.

WSTĘP

Prac o charakterze podstawowym, które wyjaśniałyby dynamiczne zachowanie się masztów z odciałami jest niewiele. W pracy [3] omówiono drgania odciałów masztów. Na podstawie filmowego opisu galopady odciałów zaproponowano rozwiązania techniczne, prowadzące do ich redukcji poprzez zastosowanie tłumików Stockbridge'a. W pracach [4, 5] analizowano drgania belek o przekroju kołowym, poddanych działaniu sił aerodynamicznych, wywołanych opływem powietrza. Autor zauważył, że są one

szczególnie niebezpieczne w obszarach synchronizacji, kiedy to podstawowa częstość wzbudzenia aerodynamicznego jest w przybliżeniu równa częstości drgań własnych belki. Występuje wówczas nieliniowa interakcja opływającego powietrza i opływanej belki. Drgania mają charakter parametryczno-samowzbudny. W pracy [1] rozpatrywano drgania poprzeczne belki wolnopodpartej o przekroju kołowym, przy czym założono, że prędkość opływu gazem oprócz składowej deterministycznej zawiera składową będącą wolnozmiennym procesem stochastycznym. W pracy [6] analizowano drgania belki z odciągami, umocowanej jednym końcem na przegubie, zaś drugi był swobodny. Założono, że obciążenie wiatrem jest procesem losowym. Przebadano wpływ napięcia odciągów i ich kątów z osią belki na stateczność jej ruchu.

Celem niniejszej pracy jest uwzględnienie wzajemnego sprzężenia drgań masztu i odciągów. Opis założeń przyjętych przy konstrukcji modelu matematycznego zamieszczono w rozdziale 2.

1. OPIS ZAŁOŻEŃ PRZYJĘTYCH PRZY KONSTRUKCJI MODELU MATEMATYCZNEGO

1.1. Wzbudzenie aerosprężyste wywołane wirami Karmana

Laminarny opływ ciała przez ciecz wiąże się – w odpowiednich warunkach – z pojawianiem się okresowo zmiennej siły, działającej na to ciało. Jest ona prostopadła do wektora prędkości ośrodka i wywołana jest odrywaniem się - „po zawiętrznej” stronie ciała – wirów o naprzemiennych rotacjach. Zjawisko to bywa obserwowane w przypadku ciał o regularnych przekrojach, a więc, m.in. słupów kołowych oraz lin (np. Linii elektroenergetycznych). Amplitudalna wartość siły „karmanowskiej” działającej na jednostkę długości kołowego walca, którego oś jest prostopadła do wektora prędkości wynosi:

$$\mu_0 = c_y \rho_0 R v_w^2$$

gdzie: c_y jest współczynnikiem, którego wartość waha się wokół 0,5, ρ_0 – gęstością ośrodka, R – promieniem walca, a v_w – prędkością względną wiatru. Częstotliwość odrywania się wirów określa związek:

$$\omega_{sh} = \frac{\pi(sh)v}{R}$$

Jest więc ona proporcjonalna do prędkości wiatru, a odwrotnie proporcjonalna do promienia walca. Stała S_h jest współczynnikiem Stroughala i wynosi ok. 0,2. Jeśli walec jest obiektem sprężystym siła taka może wywołać jego ruch drgający. Obserwacje procesów karmanowskich, w których wystąpiły drgania ciał sprężystych pokazują, że częstość odrywania się wirów jest równa częstotliwości własnej ciała, jeśli tylko niezbyt różni się ona od ω_k .

Powyższe cechy skłaniają, by drgania takie traktować jako samowzbudne. Ponieważ momenty odrywania się wirów zachodzą przy maksymalnych wychyleniach, przeto w pracy przyjęto, że karmanowskie obciążenie ciągle działające na słup będzie opisane związkiem

$$\mu = c_y \rho_0 R (v^2 + y'^2) \text{sign}(y') \quad (1.1)$$

gdzie: y jest współrzędną ruchu poprzecznych przekrojów słupa.

1.2. Konstrukcja słupa

- W pracy przyjęto, że słup jest utwierdzoną, smukłą, cienkościenną rurą, której drgania własne mogą być opisane równaniem liniowym.
- Co do materiału rury, przyjęto założenie, że jego właściwości sprężysto-tłumiące opisane są modelem Voigta-Kelvina.
- Oporu powietrza nie należy uwzględniać, ponieważ został on ujęty w wartości współczynnika c_v .
- Celem uproszczenia obliczeń przyjęto, że ruch końca słupa jest sinusoidalny, co przy niezbyt dużych drganiach jest niemal ściśle.

1.3. Odciąg

W przedstawionych rozważaniach przyjęto, że słup wzmocniono dwoma odciągami, zamocowanymi na jego wierzchołku i leżącymi w jednej płaszczyźnie – prostopadłej do kierunku wiatru. Zrezygnowano z pozostałych dwóch odciągów, ponieważ leżałyby one w płaszczyźnie równoległej do wspomnianej prędkości i nie wzbudzałyby się w nich drgania parametryczne wywołane ruchem słupa. Analizie takich właśnie drgań poświęcona jest przedstawiana praca.

Odnosnie modelu przyjęto następujące założenia:

- odciąg tworzą w położeniu równowagi kąty 45^0 ze słupem,
- zachodzi wstępny statyczny naciąg odpowiadający wydłużeniu odciagu o wielkość u_0 ,
- modelem odciagu jest struna, w której zachodzi zarówno poprzeczny (w), jak i wzdłużny (u) ruch jej przekrojów. Prowadzi to do opisu matematycznego za pomocą dwóch sprzężonych i nieliniowych równań różniczkowych cząstkowych,
- w związku z poprzednim założeniem uwzględniona oba ruchy końca odciagu. Wywołane są one poziomym przemieszczaniem końca słupa,
- celem rozprzężenia równań ruchu zastosowano hipotezę Kirchhoffa,
- rozpraszanie energii opisano liniowym modelem wiskotycznym obrazującym opór zewnętrzny.

2. RÓWNANIE RÓŻNICZKOWE RUCHU

Słup wraz z odciągami rozdzielono, uwalniając poszczególne podukłady od więzów i zakładając reakcje. Efekt tej procedury przedstawiono na rysunku 1.

Ze względu na antysymetrię układu pomiędzy wielkościami na rysunku zachodzą oczywiste związki

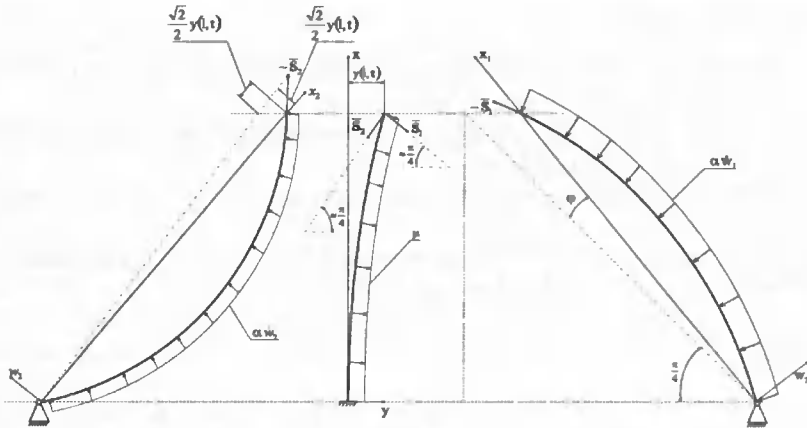
$$u_2(x_2, t) = -u_1(x_1, t) \quad w_2(x_2, t) = -w_1(x_1, t)$$

Siły naciągu strun mają postać:

$$S_i = \frac{EA}{\sqrt{2}l} u_i(l\sqrt{2}, t)$$

gdzie przemieszczenia osiowe końców strun określono posługując się hipotezą Kirchhoffa. Wynoszą one [kaud]:

$$u_i(l\sqrt{2}, t) = u_0 - \frac{\sqrt{2}}{2} y(l, t) + \frac{1}{2} \int_0^{l\sqrt{2}} (w_i')^2 dx$$



Rys. 1. Schemat modelu fizycznego

Na rysunku oraz w dalszych rozważaniach użyto następujących oznaczeń:

Słup

R_1, R_2 – promienie zewn. i wewn. rury słupa,
 l – wysokość,
 ρ – gęstość materiału,
 E, E' – moduł sprężystości,
 $2v$ – częstość drgań samowzbudnych,
 J, F – moment geometryczny i pole przekroju.

Odciąg

r – promień przekroju,
 α – współczynnik oporu zewn.,
 A – pole przekroju,
 $l\sqrt{2}$ – długość odciągu.

2.1. Równania ruchu odciągów

Układy współrzędnych (x_i, w_i) , w których warunki brzegowe na funkcje w są zerowe są, jak widać, nieinercjalne. Zgodnie z założeniem (1.2) $y(l, t) = p_0 \cos(2vt)$, zatem kąt φ opisujący obrót układu będzie się wyrażał zależnością:

$$\varphi = \frac{\sqrt{2}}{2} \frac{p_0 \cos(2vt)}{l\sqrt{2}} \Rightarrow \dot{\varphi} = -\frac{2p_0 v}{l} \sin(2vt)$$

Składowa normalna siły unoszenia modyfikuje wielkość siły osiowej z częstością $4v$. Jest ona jednak o rząd mniejsza od zmiennej składowej siły naciągu, wywołanej ruchem słupa. Podobnie poprzeczna składowa siły Coriolisa jest o rząd mniejsza od siły stycznej unoszenia. W związku z tym przy wyprowadzaniu równań ruchu uwzględniono jedynie tę ostatnią. Związek (2.2) uwzględniający, że jest ona rozłożona w sposób ciągły ma postać:

$$\mu_{xt} = -\rho A x_1 \ddot{\varphi} = \frac{2\rho_0 p_0 v^2 A}{l} \times \cos(2vt) \quad (2.2)$$

Zgodnie z rysunkiem 1 i przedstawionymi wcześniej rozważeniami równanie ruchu wybranego odcięcia będzie miało postać:

$$\rho A \dot{w} + \alpha w - \frac{EA}{l\sqrt{2}} \left\{ u_0 - \frac{\sqrt{2}}{2} p(t) + \frac{1}{2} \int_0^l w'^2 dx \right\} w'' = \mu_{ut}(x, t) \quad (2.3)$$

Wprowadzając nowe zmienne:

$$\tau = vt, \quad \xi = \frac{x_1}{l\sqrt{2}}, \quad w_0 = \frac{w}{u_0}$$

otrzymano odpowiednik (2.3), zapisany w postaci bezwymiarowej:

$$\ddot{w}_0 + c_1 \dot{w}_0 - q^2 \left[1 - \delta \cos(2\tau) + \frac{1}{2} c_2 \int_0^1 (w'_0)^2 d\xi \right] w_0'' = c_3 \xi \cos(2\tau) \quad (2.4)$$

gdzie:

$$\delta = \frac{\sqrt{2}}{2} \frac{p_0}{u_0}, \quad c_1 = \frac{\alpha}{\rho A v}, \quad c_2 = \frac{u_0}{l\sqrt{2}}, \quad c_3 = 4\delta$$

$$q^2 = \frac{E u_0}{2\sqrt{2} \rho l^3 v^2} \quad (2.5)$$

2.2. Równanie drgań poprzecznych słupa

Zgodnie z wcześniejszymi założeniami równanie ruchu słupa składa się z części liniowej oraz członu nieliniowego, opisującego wzbudzenie aerosprężyste. Ma więc postać:

$$\rho F \ddot{y} + E' J \dot{y}^{IV} + E J y^{IV} + (S_0 + S(t)) y'' = \mu \operatorname{sign}(\dot{y}_0^2) \quad (2.6)$$

$$\mu = c_v \rho R (v^2 + \dot{y}^2)$$

przy warunkach brzegowych:

$$y(0, t) = y'(0, t) = y''(l, t) = 0$$

$$E J y'''(l, t) = \frac{\sqrt{2}}{2} (S_1 - S_2) = -\frac{EA}{l} y(l, t) \quad (2.7)$$

Przechodząc, podobnie jak w (2.4), na wielkości bezwymiarowe:

$$\tau = \mu t, \quad \xi = \frac{x}{l}, \quad y_0 = \frac{y}{u_0}, \quad \gamma = \frac{u_0 v^2}{v}, \quad \mu_0 = \frac{c_v \rho_0 \gamma v^2}{\rho F v^2 u_0} \quad (2.8)$$

otrzymamy ostateczną postać równania ruchu:

$$\ddot{y}_0 + B \dot{y}_0^{IV} + C y_0^{IV} = D (1 + \gamma^2 \dot{y}_0^2) \operatorname{sign}(\dot{y}_0) \quad (2.9)$$

przy warunkach brzegowych:

$$\begin{aligned} y_0(0, \tau) = y_0'(0, \tau) = y_0''(1, \tau) = 0 \\ y_0'''(1, \tau) = -\frac{Al^2}{J} y_0(1, \tau) \end{aligned} \quad (2.10)$$

Wprowadzone nowe oznaczenia B, C i D wyrażają się związkami:

$$B = \frac{E'J}{\rho F v^2 l^4}, \quad C = \frac{EJ}{\rho F v^2 l^4}, \quad D = \frac{c_y \rho_0 r v^2}{\rho F v^2 u_0} \quad (2.11)$$

3. PRZEJŚCIE NA RÓWNANIA RÓŻNICZKOWE ZWYCZAJNE

Jak widać, przyjęte założenie o sinusoidalnym ruchu końca słupa – równoważne analizie jedynie pierwszej harmonicznej rozwiązania – prowadzi do rozprzężenia równań opisujących drgania słupa i odciaгу. Przy przejściu z równań cząstkowych na zwyczajne posłużono się metodą Ritz'a. Poniżej przedstawiono w zarysie owo przejście.

3.1. Równanie zwyczajne ruchu słupa

Zmienna składowa siły osiowej jest bardzo mała w porównaniu ze stałą składową S_0 . Z teorii drgań parametrycznych wiadomo, że w przypadku istnienia tłumienia rezonans parametryczny może pojawić się, gdy wielkość amplitudy wzbudzenia parametrycznego jest odpowiednio duża. Nie popełnimy więc wielkiego błędu, jeśli analizować będziemy jedynie drgania samowzbudne belki z uwzględnieniem stałej siły osiowej, której wpływ uwidacznia się jedynie w obniżeniu wartości ciągu częstości drgań własnych. Rozwiązanie założono w postaci:

$$y_0(\xi, \tau) = X_0(\xi) p(\tau) \quad (3.1)$$

Jako funkcję położenia przyjęto drugą formę własną części liniowej równania (2.9), ponieważ odpowiadająca jej częstość własna jest najbliższa częstości karmanowskiej – ω_k . Postępuje się tak zwykle analizując układy samowzbudne. Dodatkowo narzucono warunek, by $X_0(1) = 1$. W omawianym przypadku funkcja ta ma postać wyrażoną związkiem:

$$X_0(\xi) = g \left\{ sh \lambda \xi - \sin(\lambda \xi) - \frac{sh \lambda + \sin(\lambda)}{ch \lambda + \cos(\lambda)} (ch \lambda \xi - \cos(\lambda \xi)) \right\} \quad (3.2)$$

w którym bezwymiarowy współczynnik wybranej formy – λ określa równanie charakterystyczne:

$$\frac{\lambda^3 J}{Al^2} (1 + ch \lambda \cos(\lambda)) + sh \lambda \cos(\lambda) - sh \lambda \sin(\lambda) = 0 \quad (3.3)$$

Stała g ma wartość zapewniającą warunek normy $X_0(1) = 1$.

Wypełniając postulat Ritz'a, czyli podstawiając rozwiązanie (3.1) do równania (2.9), a następnie wykorzystując ich wzajemną ortogonalność otrzymano równanie zwyczajne funkcji czasu – $p(t)$:

$$\ddot{p} + B_0 \dot{p} + C_0 p - D_0 (1 + v_0^2 \dot{p}_0^2) \text{sign}(\dot{p}) = 0 \quad (3.4)$$

gdzie:

$$B_0 = \frac{k_2}{k_1} B, \quad C_0 = \frac{k_2}{k_1} C, \quad D_0 = \frac{k_3}{k_1} D, \quad v_0 = k_u \gamma \quad (3.5)$$

$$k_1 = \int_0^1 X_0^2 d\xi, \quad k_2 = \int_0^1 X_0^{IV} X_0 d\xi, \quad k_3 = \int_0^1 X_0 d\xi, \quad k_4 = \int_0^1 X_0^3 d\xi$$

Jak łatwo zauważyć, C_0 ma sens bezwymiarowej częstości własnej, zatem $C_0 = 2$ (w wielkościach wymiarowych - $2v$).

3.2. Odcciąg

Przyjęcie funkcji aproksymującej wymaga w tym przypadku nieco szerszego omówienia. Otóż struna modelująca odcciąg podlega dwóm rodzajom wymuszenia:

- parametrycznego, poprzez zmienny w czasie współczynnik przy funkcji w_0 ,
- zewnątrznego, wywołanego składową styczną siłą unoszenia.

W przypadku (a) drgania o charakterze ustalonym zachodzą – w układach nieliniowych – z połową częstości wzbudzenia przy warunku, że jest ona wystarczająco bliska wybranej częstości własnej drgań poprzecznych struny. W pracy, dla celów obliczeniowych, przyjęto pierwszą częstość. Wymuszenie (b) wywołuje natomiast drgania o częstości funkcji będącej prawą stroną równania (2.4). Mogące wystąpić w rozwiązaniu człony z częstościami będącymi kombinacją liniową częstości podstawowych można zaniedbać, ze względu na małą wartość współczynnika c_2 w równaniu (2.4) (mała nieliniowość). W wyniku powyższych rozważań przyjęto jako rozwiązanie przybliżone Ritz'a funkcję

$$y_0 = \sum_{n=1}^2 f_n(\tau) \sin(n\pi\xi) \quad (3.6)$$

spełniającą zarówno wymagania metody, jak i uwzględniającą fizyczne cechy układu. Dokonując odpowiednich przekształceń otrzymano ostatecznie układ dwóch równań zwyczajnych opisujących funkcje f_1 i f_2 :

$$\begin{aligned} \ddot{f}_1 + \omega^2 f_1 &= -b\dot{f}_1 + \omega^2 \delta f_1 \cos(2\tau) + 2h \cos(2\tau) - \frac{1}{4}\chi(f_1^3 + 4f_1 f_2^2) \\ \ddot{f}_2 + 4\omega^2 f_2 &= -b_1 \dot{f}_2 + 4\omega^2 \delta f_2 \cos(2\tau) + h \cos(2\tau) - \chi(f_1^2 f_2 + 4f_2^3) \end{aligned} \quad (3.7)$$

Użyte w nich oznaczenia związane są z parametrami, uprzednio wprowadzonymi zależnościami:

$$\omega^2 = \pi^2 q^2, \quad b = c_1, \quad h = \frac{c_3}{\pi}, \quad \chi = \pi^2 \omega^2 c_2 \quad (3.8)$$

4. PRZYBLIŻONE ROZWIĄZANIE

Celem autorów było uzyskanie charakterystyk amplitudowo-częstotliwościowych dla odciągow i ich związku z aerosprężystym wzbudzeniem drgań słupa. Wybrano zatem metodę uśrednienia Bogolubowa-Kryłowa, pozwalającą ściśle określić pierwszą harmoniczną rozwiązań. Zgodnie z tą metodą przyjęto:

$$\begin{aligned}\dot{p}(\tau) &= a_0(\tau) \cos[2\tau + v_0(\tau)] \\ f_1(\tau) &= a_1(\tau) \cos[\tau + v_1(\tau)] \\ f_2(\tau) &= a_2(\tau) \cos[2\tau + v_2(\tau)]\end{aligned}\quad (4.1)$$

gdzie: a_i oraz v_i uznano jako wolnozmiennne w stosunku do okresów rozwiązań.

Dokonując prostych obliczeń uzyskano układ sześciu równań różniczkowych zawierających wspomniane funkcje. Mają one postać:

$$\begin{aligned}a_0 &= -\frac{1}{2\pi} \left\{ -2D_0 + \pi B_0 a_0 - \frac{32}{3} v_0^2 D_0 a_0^2 \right\} \\ (2\tau + v_0(\tau))^* &= 2 \quad \Rightarrow \quad v_0 = const = 0 \\ \dot{a}_1 &= -\frac{a_1}{2} \left(b + \frac{\omega^2 \delta}{2} \sin(2v_1) \right) \\ \dot{v}_1 &= \omega^2 - 1 - \frac{\omega^2 \delta}{2} \cos(2v_1) + \frac{1}{4} \chi \left(\frac{3}{4} a_1^2 + 2a_2^2 \right) \\ \dot{a}_2 &= -\frac{1}{2} [b_1 a - h \sin(v_2)] \\ \dot{v}_2 &= \frac{1}{2} \left[4(\omega^2 - 1) + \frac{h}{a_2} \cos(v_2) + \chi (a_1^2 + 3a_2^2) \right]\end{aligned}\quad (4.2)$$

Kładąc zera po lewych stronach powyższych równań można uzyskać wartości amplitud i faz w stanie ustalonym. Analizę należy wówczas uzupełnić badaniem stabilności rozwiązań. Powyższy aspekt został poruszony w rozdziale 5.

5. REZULTATY OBLICZEŃ NUMERYCZNYCH

Wartości parametrów opisujących układ zostały tak dobrane, by zapewnić wystąpienie zjawiska rezonansu parametrycznego. Jako zmienne przyjęte zostały:

- prędkość wiatru v ,
- wstępny statyczny naciąg u_0 .

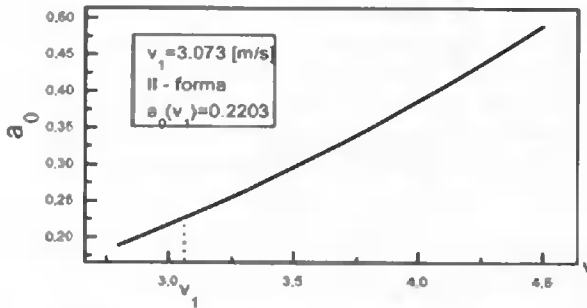
Pomiędzy pierwszą z nich a współczynnikiem wzbudzenia δ zachodzi zależność bardzo bliska liniowej, co potwierdziły obliczenia numeryczne. Naciąg jest również związany liniowymi zależnościami z częstotliwościami własnymi odciągow – co wynika ze związków (2.5) i (4.2). Decyduje on zatem o tzw. dostrojeniu parametrycznym. Dobór parametrów geometrycznych słupa został przeprowadzony tak, by jego druga

częstość własna była równa 30,1 [1/s], tyle bowiem wynosi karmanowska częstość odrywania się wirów powietrznych przy prędkości wiatru $v = 3.073$ [m/s], mieszczącej się wewnątrz przedziału prędkości przy których występuje to zjawisko.

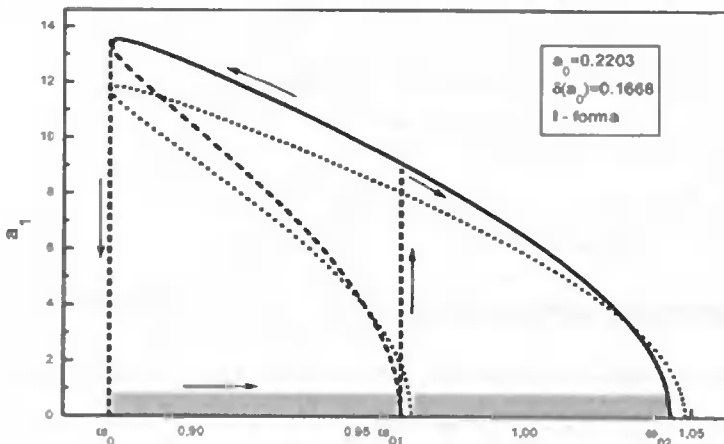
Dane obliczeniowe:

Słup	Odcciąg
$R_1 = 6,307$ [cm],	$r = 1,2$ [mm],
$R_2 = 5,807$ [cm],	$L = 28,484$ [m],
$l = 20$ [m],	$\alpha \rightarrow b = 0,073$ [-],
$E = 2,06 \times 10^{11}$ [Pa],	$u_{00} \in (0,010; 0,015)$ [-],
$E' = 0,448 \times 10^8$ [Pa.s],	
$v \in (2,5; 4,5)$ [m/s].	

Na rysunku 2 pokazano zależność bezwymiarowej amplitudy drgań końca słupa – a_0 od prędkości wiatru v . Podobny typ zależności zachodzi pomiędzy współczynnikiem wzbudzenia δ , a prędkością v , bowiem zależność $a_0 - \delta$ jest linowa (wzór 2.5).

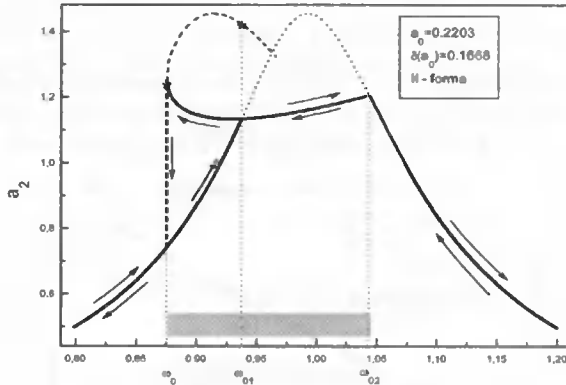


Rys. 2. Zależność amplitudy drgań końca słupa od prędkości wiatru – w wielkościach bezwymiarowych



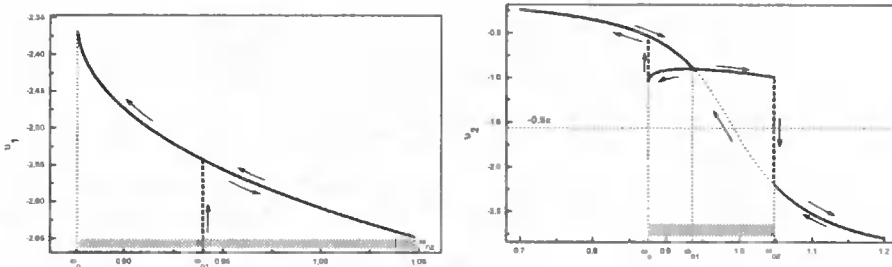
Rys. 3. Charakterystyka amplitudowo-częstotliwościowa opisująca drgania parametryczne

Rysunek 3 przedstawia charakterystykę amplitudowo-częstotliwościową funkcji f_1 (wzór 3.7), w której dominuje wpływ rezonansu parametrycznego. Część zaznaczona linią przerywaną jest odwzorowaniem rozwiązań niestabilnych. Amplituda końca słupa wynosi w tym przypadku $a_0 = 0,2203$. Idealne dostrojenie parametryczne ($\omega = 1$) zachodzi przy $u_{00} = 0,01355$. Cieńszą linią zaznaczono charakterystykę jaką by uzyskano nie analizując wpływu nieinercyjności. Charakterystyka amplitudowo-częstotliwościowa związana z funkcją f_2 , nominalnie opisującą wpływ wymuszenia zewnętrznego pokazano na rys. 4. Przy jej wyznaczaniu przyjęto te same wartości parametrów co na rys. 3. Odcinki charakterystyki zaznaczone linią przerywaną odpowiadają rozwiązaniom niestabilnym. Linia kropkowana to charakterystyka układu, w którym nie występuje rezonans parametryczny.



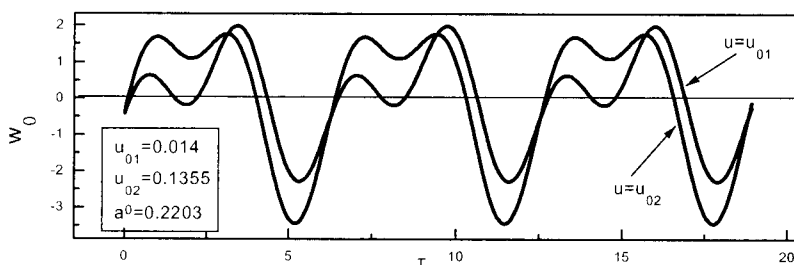
Rys. 4. Charakterystyka amplitudowo-częstotliwościowa drgań z częstotliwością 2ν . Częstotliwości tej na rysunku odpowiada wartość $\omega = 1$

W pracy nie zamieszczono charakterystyk odpowiadających różnym prędkościom wiatru, ponieważ nie wnoszą one żadnych elementów poznawczych (wzrost prędkości powoduje oczywisty wzrost amplitud). Rysunek 5 przedstawia fazy wspomnianych funkcji f_i (wzory 4.1). Sposób wykreślenia krzywych jest taki sam jak na rys. 3 i 4.



Rys. 5. Przesunięcia fazowe w zależności od bezwymiarowej częstości paśmie dla funkcji f_1 i f_2

Na koniec, na rysunku 6 zamieszczono przebiegi czasowe drgań odciągów w $\frac{1}{4}$ długości przy dwóch różnych naciągach wstępnych paśmie.



Rys. 6. Przebiegi drgań odciału w $\frac{1}{4}$ jego długości przy różnych stopniach dostrojenia

6. WNIOSKI

1. Zależność amplitudy końca słupa od prędkości wiatru, zmieniającej się w przedziale (2.5; 5) [m/s] jest niemal liniowa (rys. 2). Mimo iż przedstawione wyniki dotyczą drugiej formy drgań, jednak przeprowadzone obliczenia wykazały niemal identyczną zależność dla pierwszej formy. Przy prędkości wiatru $v = 3.073$ [m/s] przeliczona na wielkości wymiarowe amplituda słupa wynosi ok. 4 [mm].
2. Zakres częstotliwości, przy których następuje sprzężenie się parametrycznych drgań odciałów z samowzбудnym ruchem słupa, jest stosunkowo wąski. W rozpatrywanym przypadku, gdy częstota własna słupa wynosiła 30.1 [1/s], częstota własna odciału musi zawierać się w przedziale (14.3; 17.1) [1/s] odpowiadającym przedziałowi (ω_0 , ω_2) – w wielkościach bezwymiarowych z rys. 3.
3. Efekt wzbudzenia parametrycznego jest dominujący przy drganiach odciałów. Wpływ wymuszenia poprzecznego ujawnia się poprzez nieznaczny wzrost amplitud w obszarze rezonansowym. Przy danych przyjętych do obliczeń, na podstawie których otrzymano rys. 3, 4, wzrasta ona o ok. 12% - z 16 cm do 18.3 cm. Daje się również zauważyć pewne przesunięcie charakterystyki amplitudowo-częstotliwościowej w lewo.
4. Drgania z dwukrotnie większą częstotliwością są silnie sprzężone z drganiami parametrycznymi. Ich amplituda jest wygaszana w otoczeniu rezonansowej częstotliwości 30.1 [1/s], co pokazuje rys. 4. Obrazuje to również wykres fazy na rys. 5, który „omija” rezonansową wartość $-\pi/2$. Wpływ wymuszenia poprzecznego daje się jednak zauważyć w o wiele szerszym przedziale częstotliwości niż przedział drgań parametrycznych zachodzących w otoczeniu 15 [1/s].
5. Wpływ wymuszenia poprzecznego, opisanego poprzez ruch w układzie nieinercyjnym, jest także wyraźnie widoczny na rys. 5, przedstawiającym czasowy wykres przebiegu drgań w $\frac{1}{4}$ długości odciału.
6. Nieznaczne powiększenie częstotliwości ponad ω_2 lub zmniejszenie poniżej ω_0 powoduje, że drgania stają się niemal harmoniczne.

LITERATURA

- [1] A. Bar, 1977. Drgania belki sprężystej w poprzecznym strumieniu gazu, w przypadku zdeterminowanym i probabilistycznym. Praca doktorska, Politechnika Krakowska.
- [2] S. Kauderer, 1961. Nieliniowa Mechanika. Moskwa.
- [3] J. Kawecki, 1999. Drgania odciągów masztów i rozwiązania techniczne prowadzące do ich redukcji. Zesz. Nauk. Politechniki Rzeszowskiej, Mechanika 52, ss. 65-70.
- [4] R. Lewandowski, 1999. Okresowe drgania konstrukcji geometrycznie nieliniowych. Wyd. Politechniki Poznańskiej.
- [5] R. Lewandowski, 1999: Komputerowa analiza drgań układów samowzbudnych z wymuszeniem parametrycznym. Zesz. Nauk. Politechniki Rzeszowskiej, Mechanika 48, ss. 95-102.
- [6] J. Nizioł, 1968. Przypadkowe drgania belki przy nieliniowych warunkach brzegowych z uwzględnieniem siły osiowej. Księga Dynamiki Konstrukcji, T. II, ss. 275-282, Rzeszów.

VIBRATIONS OF MASTS WITH STAYS CAUSED BY WIND FLOW

Summary

The paper presents an approximate analysis based on a simple model of vibrations of a mast supported by stay cables. The vibrations of the mast are excited by the separation of the Karman vortex. It has been demonstrated that the vibrations in the discussed structure has the self-excited parametric character. The paper includes the frequency and phase characteristics well as the time plots obtained by means of numerical analysis.

Keywords: "eolian" vibration, flow, vortex, stay

ZAGADNIENIE STATYCZNE BELKI DREWNIANEJ KOMPOZYTOWEJ

Katarzyna Cabańska-Płaczkiewicz, Maciej Wilczyński

Wydział Matematyki Techniki i Nauk Przyrodniczych,
Akademia Bydgoska im. Kazimierza Wielkiego
Instytut Techniki, 85-064 Bydgoszcz, ul. Chodkiewicza 30

W pracy przedstawiono analizę statyczną problemu zginania belki drewnianej pokrytej dwu-warstwowym laminatem złożonym z warstwy klejowej i okleiny. Wyprowadzono układ równań różniczkowych zjawiska zginania belki kompozytowej. Następnie rozwiązano powyższy układ równań. Występujące w rozwiązaniu stałe całkowania wyznaczono z pewnych szczególnych warunków brzegowych zarówno dla belki jak i okleiny. Na koniec wykonano obliczenia komputerowe, które przedstawiono na wykresach.

Słowa kluczowe: drewno, laminat, belka kompozytowa, zginanie

Oznaczenia

- x, y, z - osie układu współrzędnych,
- l - długość belki,
- b, h - szerokość i wysokość belki drewnianej,
- a_i, a_j - grubość okleiny dolnej $i = 1$, górnej $i = 2$ oraz bocznych $j = 3, 4$,
- g_i, g_j - grubość warstwy klejowej dolnej $i = 1$, górnej $i = 2$ oraz bocznych $j = 3, 4$,
- E - moduł Younga belki drewnianej,
- E_i, E_j - moduł Younga okleiny dolnej $i = 1$, górnej $i = 2$ oraz bocznych $j = 3, 4$,
- G_i, G_j - moduł Kirchhoffa warstw klejowych,
- q - obciążenie rozłożone belki,
- p_i, p_j - obciążenia rozłożone oklein,
- Q - siła poprzeczna w belce drewnianej,
- M - moment zginający w belce drewnianej,
- N_i, N_j - siły osiowe w okleinach,
- σ - naprężenia normalne w belce drewnianej,
- σ_i, σ_j - naprężenia normalne w okleinach,
- τ_i, τ_j - naprężenia styczne w warstwach klejowych,
- w - ugięcie belki,
- φ - kąt ugięcia belki,
- u_i, u_j - przemieszczenia wzdłużne przekrojów poprzecznych oklein.

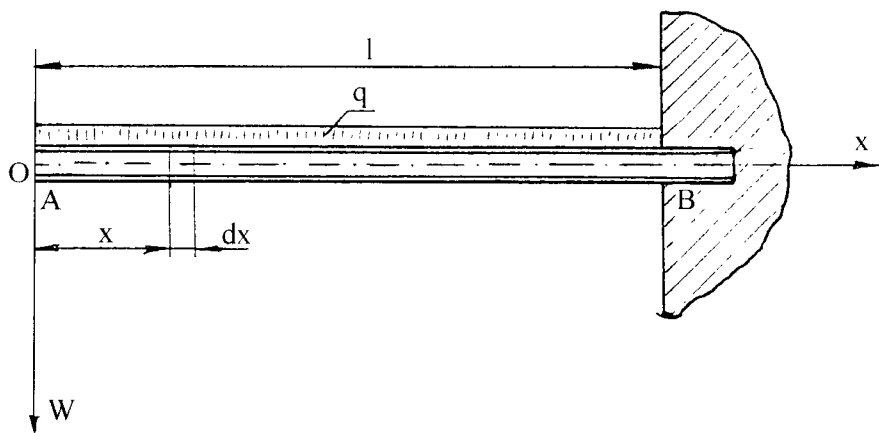
1. WSTĘP

Szybki postęp w technice w ostatnich latach jest możliwy dzięki rozwojowi nowoczesnych materiałów i konstrukcji. Ważną grupę nowoczesnych materiałów stanowią kompozyty [1, 2, 3, 5, 7, 8], natomiast elementów konstrukcyjnych laminaty [4, 6]. Wiele wyrobów, np. meble, stolarka budowlana, galanteria drzewna itp. oraz niektóre urządzenia, np. gospodarstwa domowego, rekreacyjne i sportowe itp. są wykonywane z drewna litego lub z materiałów drewnopochodnych [1, 7]. Wyroby te są często pokryte za pośrednictwem warstwy klejowej różnego rodzaju okleinami, np. fornirami, fornierytami, foliami itp. Cel stosowania wspomnianych oklein może być różnorodny. Najczęściej owe okleiny spełniają wysokie walory estetyczne oraz użytkowe, np. izolacyjne i ochronne przed nadmiernym zużyciem itp. Mechanika konstrukcji materiałów kompozytowych, laminowanych drewnopochodnych jest przedstawiona w pracach [1-8].

Celem tej pracy jest podjęcie próby dokonania analizy wpływu okleiny na statykę belki drewnianej.

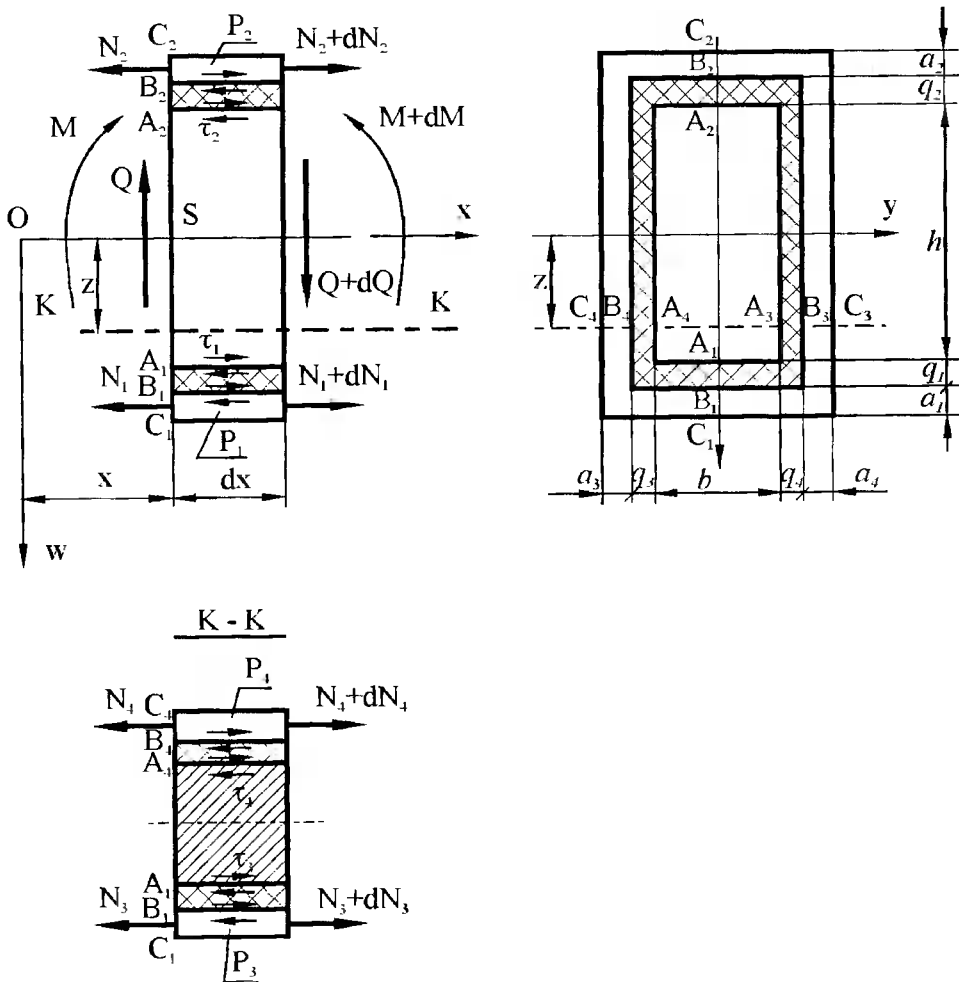
2. MODEL FIZYCZNY

Układem mechanicznym badanym w tej pracy jest belka kompozytowa, której model fizyczny przedstawiony jest na rysunku 1. Belka ta jest w jej końcu A utwierdzona do sztywnej ściany, natomiast jej prawy koniec B pozostaje swobodny. Obciążenie jest równomiernie rozłożone na długości belki i w jej płaszczyźnie głównej (rys. 1).



Rys. 1. Belka drewniana pokryta laminatem

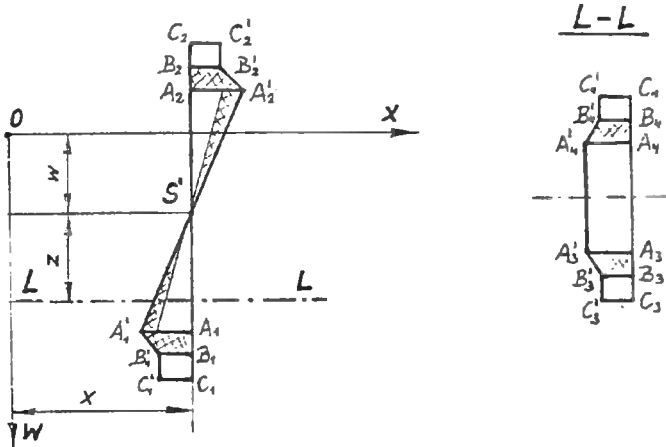
Głównym elementem belki kombinowanej jest wykonany z drewna bukowego jej rdzeń o przekroju prostokątnym $b \times h$ i długości l (rys. 1 i 2b). Założono, że materiał belki drewnianej jest jednorodny oraz, że jej „włókna” ułożone są wzdłuż jej osi geometrycznej. Poza tym przyjęto, że belka drewniana jest opisana modelem Bernoulliego-Eulera.



Rys. 2. Element różniczkowy belki kompozytowej i siły działające na jego składowe subelementy; a) widok główny. b) widok boczny. c) widok z góry pomocniczego przekroju K-K

Rdzeń belki kompozytowej, tj. bela drewniana pokryta jest laminatem. Warstwa zewnętrzna stanowiąca, tzw. okleinę belki drewnianej wykonana jest z tworzywa o wysokich walorach wytrzymałościowych, użytkowych i estetycznych. Trzeba zaznaczyć, że własności wytrzymałościowe okleiny są znacznie większe niż dla belki drewnianej, natomiast grubość okleiny jest bardzo mała w porównaniu do wymiarów gabarytowych przekroju poprzecznego belki. Generalnie, w warstwie okleinowej uwzględniono tylko jednoosiowy stan naprężenia, przy czym w przekroju okleiny górnej i dolnej występują stałe naprężenia odpowiednio rozciągające i ściskające, natomiast w przekrojach oklein bocznych przyjęto wzdłuż wysokości belki liniowo-zmienny rozkład naprężeń normalnych. Wewnętrzna warstwa klejowa jest elementem łączącym okleinę z belką drewnianą. Założono, że warstwa klejowa jest poddana prostemu ścinaniu, przy czym w przekrojach warstwy górnej i dolnej występują stałe naprężenia styczne wzdłuż sze-

rokości belki, natomiast wzdłuż wysokości belki w przekrojach warstw bocznych przyjęto liniowo-zmienny rozkład naprężeń stycznych.



Rys. 3. Geometria przemieszczeń przekroju poprzecznego belki drewnianej i związanych z nią przekrojów poprzecznych warstw klejowych i oklein; a) widok główny; b) widok z góry pomocniczego przekroju L-L

3. MODEL MATEMATYCZNY

3.1. Wielkości statyczne i ich zależności

3.1.1. Siły wewnętrzne

Uogólnionymi siłami wewnętrznymi w belce drewnianej są moment gnący $M = M(x)$ i siła poprzeczna $Q = Q(x)$, natomiast w okleinach występują siły rozciągające (ściskające) $N_i = N_i(x)$, ($i = 1, 2$) oraz $N_j = N_j(x)$, ($j = 3, 4$). Rolę sił wewnętrznych w warstwach klejowych spełniają naprężenia $\tau_i = \tau_i(x)$, ($i = 1, 2$) oraz $\tau_j = \tau_j(x, z)$, ($j = 3, 4$).

3.1.2. Równania różniczkowe równowagi

Zależności różniczkowe pomiędzy siłami wewnętrznymi występującymi w przekrojach poprzecznych oklein i belki a siłami zewnętrznymi działającymi na powierzchniach oklein i belki wyprowadzono w opierając się na wyciętym elemencie belki kompozytowej pokazany na rys. 2a,c. Wspomniane zależności przyjmują następującą postać:

a) dla oklein belki

$$\frac{dN_i}{dx} = -p_i, \quad (i = 1, 2); \quad \frac{dN_j}{dx} = -p_j, \quad (j = 1, 2); \quad (1)$$

gdzie:

$$p_i = -b\tau_i, \quad p_j = -\tau_j, \quad (2)$$

b) dla belki drewnianej:

$$\frac{dQ}{dx} = -q, \quad \frac{dM}{dx} = Q - m \quad (3)$$

gdzie:

$$m = \sum_{i=1}^2 m_i + \sum_{j=3}^4 m_j \quad (4)$$

przy czym:

$$m_i = \frac{1}{2} bh \tau_i, \quad m_j = \int_{-\frac{h}{2}}^{\frac{h}{2}} z \tau_j dz \quad (5)$$

3.1.3. Stan naprężenia

Naprężenia w elementach składowych belki kompozytowej określone są następującymi wzorami:

a) w okleinach belki kompozytowej:

$$\sigma_i = \frac{N_i}{F_i}, \quad i = 1, 2; \quad \sigma_j = \frac{N_j}{F_j}, \quad j = 3, 4; \quad (6)$$

gdzie:

$$F_i = ba_i, \quad F_j = 1 \times a_j \quad (7)$$

b) w belce drewnianej:

$$\sigma = \frac{M}{I} z \quad (8)$$

gdzie:

$$I = \frac{bh^3}{12} \quad (9)$$

jest momentem bezwładności przekroju poprzecznego belki drewnianej względem osi obojętnej y tego przekroju.

3.2. Wielkości geometryczne i ich związki

3.2.1. Przemieszczenia

Przekrój poprzeczny belki drewnianej występujący z wyciętymi elementami różniczkowymi belki kompozytowej (jak na rys. 3a, b) ulega dwóm rodzajom przemieszczeń, tj. translacji $w = w(x)$ i rotacji $\varphi = \varphi(x)$, gdzie $\varphi = dw/dx$. Przekroje poprzeczne oklein ulegają przemieszczeniom wzdłużnym, tj., $u_i = u_i(x)$ i $u_j = u_j(x, z)$, natomiast warstwy klejowe ulegają na ich zewnętrznych i wewnętrznych powierzchniach również przemieszczeniom wzdłużnym ale zróżnicowanym względem siebie. Poza tym należy jeszcze podkreślić, że warstwy klejone i okleiny ulegają wraz z belką drewnianą przemieszczeniom $w = w(x)$, które nie mają w tych rozważaniach istotnego znaczenia.

Po to, żeby wyjaśnić powyższe stwierdzenia poniżej omówiono pewne relacje geometryczne. Mianowicie, widać wyraźnie, że dzięki rotacji przekroju poprzecznego belki drewnianej, jak pokazano na rys. 3a i b, punkty A_i , ($i = 1, 2$) oraz A_j , ($j = 3, 4$) należące jednocześnie do tej belki i odpowiadającej jej i -tej oraz j -tej warstwy klejowej ulegają odpowiednio przemieszczeniom wzdłużnym równoległym do osi belki $\bar{u}_i = (-1)^i A_i A_i'$ oraz $\bar{u}_j = -A_j A_j'$. Z kolei punkty B_i , ($i = 1, 2$) i B_j , ($j = 3, 4$) nale-

żące odpowiednio do i -tej i j -tej warstwy klejowej oraz jednocześnie odpowiednio do i -tej i j -tej okleiny ulegają odpowiednio przemieszczeniom wzdłużnym równoległym do osi belki $\bar{u}_i = (-1)^i B_i B'_i$ i $\bar{u}_j = -B_j B'_j$. Należy również zauważyć, że z powodu przyjętego założenia bezmomentowego jednoosiowego stanu naprężenia w okleinach, przemieszczenia punktów C_i , ($i = 1, 2$) oraz C_j , ($j = 3, 4$) są odpowiednio równe przemieszczeniom punktów B_i oraz B_j .

3.2.2. Stan odkształcenia

Odkształcenia występujące w składowych elementach belki kompozytowej mają następującą postać:

a) dla oklein:

$$\varepsilon_i = \frac{du_i}{dx}, \quad (i = 1, 2); \quad \varepsilon_j = \frac{du_j}{dx}, \quad (j = 3, 4) \quad (10)$$

b) dla belki drewnianej:

$$\varepsilon = -z \frac{d^2 w}{dx^2} \quad (11)$$

c) dla warstw klejowych:

$$\gamma_i = (-1)^i \frac{\bar{u}_i - u_i}{g_i}, \quad (i = 1, 2); \quad \gamma_j = -\frac{\bar{u}_j - u_j}{g_j}, \quad (j = 3, 4) \quad (12)$$

gdzie:

$$\bar{u}_i = (-1)^i \frac{h}{2} \frac{dw}{dx}, \quad (i = 1, 2); \quad \bar{u}_j = -z \frac{dw}{dx}, \quad (j = 3, 4) \quad (13)$$

3.3. Równania konstytutywne

Związki fizyczne pomiędzy stanem odkształcenia a stanem naprężenia dla elementów składowych belki kompozytowej ogranicza się tym zagadnieniu do prostych przypadków prawa Hook'a i przyjmuje odpowiednio następującą postać:

a) dla oklein

$$\sigma_i = E_i \varepsilon_i, \quad (i = 1, 2); \quad \sigma_j = E_j \varepsilon_j, \quad (i = 3, 4), \quad (14)$$

b) dla belki drewnianej:

$$\sigma = E \varepsilon, \quad (15)$$

c) dla warstw klejowych:

$$\tau_i = G_i \gamma_i, \quad (i = 1, 2); \quad \tau_j = G_j \gamma_j, \quad (j = 3, 4) \quad (16)$$

4. RÓWNANIA PROBLEMU

4.1. Równania różniczkowe w przemieszczeniach

Podstawiając równania (6) i (8) oraz (10-12) przy wykorzystaniu (14-16), a następnie podstawiając uzyskane w ten sposób rezultaty odpowiednio do (1) i (3) z uwzględnieniem równań (2) i (4) otrzymano następujący układ sprzężonych równań

różniczkowych opisujących zjawisko zginania belki kompozytowej przedstawionej na rys. 1, a mianowicie

$$E_i F_i \frac{d^2 u_i}{dx^2} + G_i \frac{b}{g_i} u_i - (-1)^i G_i \frac{bh}{2g_i} \frac{dw}{dx} = 0, \quad (i = 1, 2),$$

$$E_j F_j \frac{d^2 u_j}{dx^2} + \frac{G_j}{g_j} u_j + G_j \frac{z}{g_j} \frac{dw}{dx} = 0, \quad (j = 3, 4), \quad (17)$$

$$EI \frac{d^4 w}{dx^4} - \frac{h^2}{4} \left(\sum_{i=1}^2 \frac{G_i b}{g_i} + \sum_{j=3}^4 \frac{G_j h}{3g_j} \right) \frac{d^2 w}{dx^2} + \frac{bh}{2} \sum_{i=1}^2 (-1)^i \frac{G_i}{g_i} \frac{du_i}{dx} - \frac{h^2}{6} \sum_{j=3}^4 \frac{G_j}{g_j} \frac{du_j}{dx} = q(x)$$

gdzie: $u_j^* = u_j \Big|_{z=\frac{h}{2}}$ jest przemieszczeniem maksymalnym.

W przypadku, gdy $g_i = g_j = g$, $a_i = a_j = a$, $G_i = G_j = G$ oraz $E_i = E_j = E$ występuje zależność $(-1)^i u_i = -u_i = u_i$, wówczas układ równań różniczkowych (17) redukuje się do następującej postaci:

$$E_o a \frac{d^2 u}{dx^2} + \frac{G}{g} u - \frac{Gh}{2g} \frac{dw}{dx} = 0, \quad (18)$$

$$EI \frac{d^4 w}{dx^4} - G \frac{h^2}{6g} (3b+h) \frac{d^2 w}{dx^2} + G \frac{h}{3g} (3b+h) \frac{du}{dx} = q(x).$$

Po wprowadzeniu następujących oznaczeń:

$$\alpha = \frac{G}{EI} \frac{h^2}{6g} (3b+h), \quad \beta = \frac{G}{EI} \frac{h}{3g} (3b+h), \quad (19)$$

$$\alpha_o = \frac{Gh}{2gE_o A}, \quad \beta_o = \frac{G}{gE_o a}, \quad A = a \times b$$

układ równań (18) można przedstawić w następującej uporządkowanej formie

$$\frac{d^4 w}{dx^4} - \alpha \frac{d^2 w}{dx^2} - \beta \frac{du}{dx} = q(x), \quad (20)$$

$$\alpha_o \frac{dw}{dx} + \frac{d^2 u}{dx^2} + \beta_o u = 0.$$

lub w postaci macierzowej

$$\mathbf{B}_4 \frac{d^4 \mathbf{y}}{dx^4} + \mathbf{B}_2 \frac{d^2 \mathbf{y}}{dx^2} + \mathbf{B}_1 \frac{d\mathbf{y}}{dx} + \mathbf{B}_0 \mathbf{y} = \mathbf{F}(x) \quad (21)$$

gdzie:

$$\mathbf{Y}(x) = \begin{bmatrix} w(x) \\ u(x) \end{bmatrix}, \quad \mathbf{F}(x) = \begin{bmatrix} q(x) \\ 0 \end{bmatrix}, \quad \mathbf{B}_4 = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}, \quad \mathbf{B}_3 = \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix},$$

$$\mathbf{B}_2 = \begin{bmatrix} -\alpha & 0 \\ 0 & -1 \end{bmatrix}, \quad \mathbf{B}_1 = \begin{bmatrix} 0 & \beta \\ \alpha_o & 0 \end{bmatrix}, \quad \mathbf{B}_0 = \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & -\beta_o \end{bmatrix} \quad (22)$$

4.2. Warunki brzegowe

Warunki brzegowe dla belki drewnianej należącej do złożonego układu pokazanego na rys. 1 są następujące:

$$\begin{aligned} \frac{d^2 w}{dx^2} \Big|_{x=0} &= 0, & \left[\frac{d^3 w}{dx^3} - \alpha \frac{dw}{dx} + \beta u \right]_{x=0} &= 0, \\ w \Big|_{x=l} &= 0, & \frac{dw}{dx} \Big|_{x=l} &= 0 \end{aligned} \quad (23)$$

natomiast warunki brzegowe dla oklein formułujemy dla dwóch przypadków:

a) dla swobodnych końców

$$\frac{du}{dx} \Big|_{x=0} = 0, \quad \frac{du}{dx} \Big|_{x=l} = 0, \quad (24)$$

b) dla zamocowanych końców do belki drewnianej

$$u = \frac{-h}{2} \frac{dw}{dx} \Big|_{x=0} = 0, \quad u \Big|_{x=l} = 0. \quad (25)$$

Należy zauważyć, że poza wyżej wspomnianymi warunkami brzegowymi mogą one mieć formy mieszane, tzn. pierwszy warunek (24) może wystąpić razem z drugim warunkiem (25) lub drugi warunek (24) z pierwszym warunkiem (25).

5. ROZWIĄZANIE UKŁADU RÓWNAŃ RÓŻNICZKOWYCH

5.1. Rozwiązanie ogólne jednorodnego układu równań różniczkowych

Przyjmując tymczasem $q(x) \equiv 0$ układ równań różniczkowych (20) staje się układem jednorodnym, a jego ogólne rozwiązanie przyjmuje następującą postać:

$$\begin{aligned} w_o &= C_1 \sinh \lambda x + C_2 \cosh \lambda x + D_1 x^3 + D_2 x^2 + D_3 x + D_4, \\ u_o &= d(C_1 \cosh \lambda x + C_2 \sinh \lambda x) \end{aligned} \quad (26)$$

gdzie:

$$\lambda = \sqrt{\alpha - \beta_o}, \quad d = \frac{\alpha_o \lambda}{\lambda^2 + \beta_o} \quad (27)$$

Natomiast: $C_1, C_2, D_1, D_2, D_3, D_4$ są stałymi całkowania.

5.2. Rozwiązanie szczególne jednorodnego układu równań różniczkowych

Po zastosowaniu przekształcenia Laplace'a w równaniu (21) otrzymano równanie operatorowe:

$$\mathbf{G}(s) \times \mathbf{Y}(s) = \mathbf{F}(s) + \mathbf{L}(s) \quad (28)$$

gdzie:

$$\mathbf{G}(s) = c_4 s^4 + c_2 s^2 + c_1 s + c_0 \quad (29)$$

jest macierzą charakterystyczną; $Y(s)$ i $F(s)$ są odpowiednio transformatami macierzy; $y^{**}(s) = Y(s)$ przy założeniu, że macierz kolumnowa $L(s) \equiv 0$.

Równanie (28) przepisano w następującej formie:

$$Y(s) = G^{-1}(s) [F(s) + L(s)] \quad (30)$$

gdzie:

$$G(s) = \begin{bmatrix} v_{11} & v_{12} \\ v_{21} & v_{22} \end{bmatrix} \quad (31)$$

Elementy macierzy (31) opisano w formie:

$$v_{11} = s^4 - \alpha s^2, \quad v_{12} = \beta s, \quad v_{22} = -s^2 - \beta_0, \quad v_{21} = -s^2 - \beta_0 \quad (32)$$

gdzie:

$$K(s) = G^{-1}(s) \quad (33)$$

Po zastosowaniu odwrotnego przekształcenia Laplace's Γ^{-1} równania (28) otrzymano rozwiązanie szczególne w formie operatorowej:

$$y(x, y) = k(x, y) * F(x, y) \quad (34)$$

gdzie:

$$k(x, y) = \Gamma^{-1} K(x, s) \quad (35)$$

Elementy macierzy (35) opisano wzorem:

$$k(x, y) = \begin{bmatrix} k_{11} & k_{12} \\ k_{21} & k_{22} \end{bmatrix} \quad (36)$$

Rozwiązanie szczególne układu równań (20) składa się z fundamentalnego układu rozwiązań:

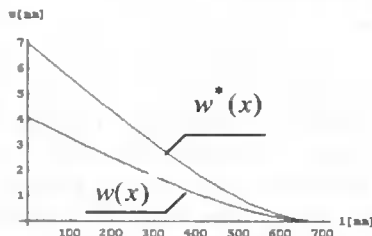
$$w_s = \int_0^l q(x) k_{11}(x - \tau) d\tau, \quad u_s = \int_0^l q(x) k_{12}(x - \tau) d\tau \quad (37)$$

6. OBLICZENIA NUMERYCZNE

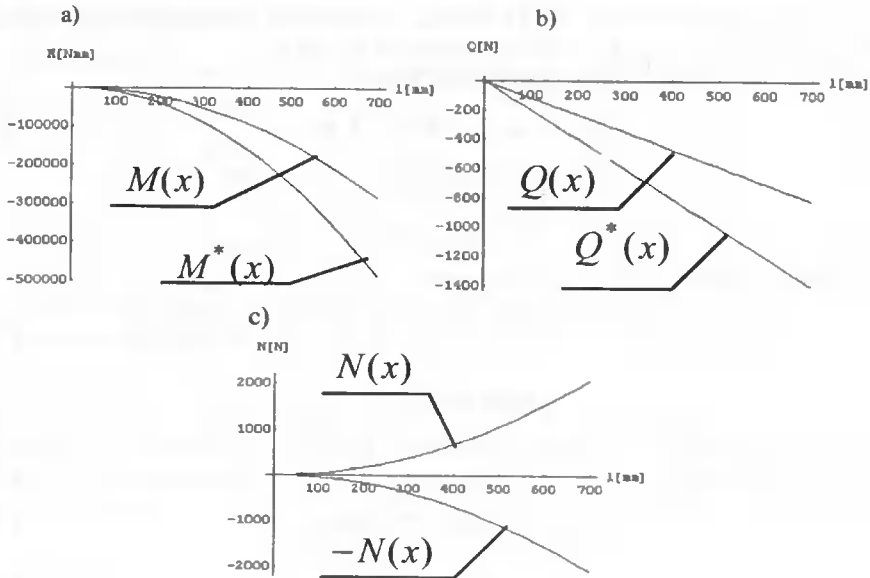
Obliczenia numeryczne wykonano dla następujących danych liczbowych:

$E = 10^4$ MPa, $E_0 = 2E$, $a_0 = 3$ mm, $b = 30$ mm, $h = 70$ mm, $l = 700$ mm, $g = 0,5$ mm, $q = 2$ N/mm

Na rysunku 4 przedstawiono wykresy ugięcia belki kompozytowej $w(x)$ i belki drewnianej $w^*(x)$. Wykres sił wewnętrznych w belkach pokazano na rysunku 5: wykres momentów zginających $M(x)$ w belce kompozytowej i $\dot{M}(x)$ w belce drewnianej (rys. 5a), wykres sił poprzecznych $T(x)$ w belce kompozytowej i $\dot{T}(x)$ w belce drewnianej (rys. 5b) oraz wykres sił normalnych $\pm N(x)$ w belce kompozytowej (rys. 5c).

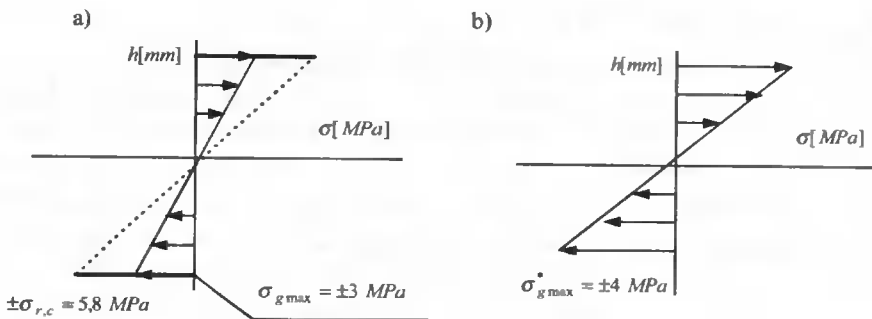


Rys. 4. Wykresy ugięcia belki kompozytowej $w(x)$ i belki drewnianej $w^*(x)$



Rys. 5. Wykres sił wewnętrznych w belkach; a. wykres momentów zginających $M(x)$ w belce kompozytowej oraz $M^*(x)$ w belce drewnianej, b. wykres sił poprzecznych $T(x)$ w belce kompozytowej oraz $T^*(x)$ w belce drewnianej, c. wykres sił normalnych $\pm N(x)$ w belce kompozytowej

Wykresy naprężeń przedstawiono na rysunku 6 dla belki drewnianej - naprężenia zginające $\sigma_g^*(x)$ i dla belki kompozytowej - naprężenia zginające $\sigma_g(x)$ oraz naprężenia rozciągające i ściskające $\pm\sigma_{r,c}$.



Rys. 6. Wykres naprężeń; a. $\sigma(x)$ w belce kompozytowej i b. $\sigma^*(x)$ w belce drewnianej

W analitycznych rozważaniach przeprowadzonych w tej pracy uwzględniono wpływ laminatu pokrywającą belkę drewnianą na jej cechy wytrzymałościowe, tj. na jej siły wewnętrzne, naprężenia zginające oraz ugięcia. Z przeprowadzonych obliczeń dla danych przyjętych w przykładzie, otrzymano około 35% zmniejszenia zarówno sił wewnętrznych, naprężeń w rdzeniu drewnianym belki kompozytowej jak również ugięcia w tej belce.

LITERATURA

- [1] Bodig J., Jayne B., 1982. Mechanics of wood and wood composites. Van Nostrand Reinhold, New York.
- [2] Cabańska-Płaczekiewicz K., Szcześniak W., 1998. The mutual influence of bending, torsion and axial compression of Bernoulli's beam in a non-homogeneous elastic medium. Prace Naukowe Politechniki Warszawskiej, Budownictwo, z. 132.
- [3] Gołaś J., 2001. Numerical analysis of thick, multi-layered composite girdes using hybrid-stress finite elements. Journal of Theoretical and Applied Mechanics, 2, 2001, 39.
- [4] Kurnik W., Tylikowski A., 1976. Mechanika elementów laminowanych. WPW Warszawa.
- [5] Timoshenko S., Gierje D.Ž. Mechanika Materiałów. Mir, Moskwa.
- [6] Tylikowski A., 1999. Stabilization of beam parametric vibrations by means of distributed pizelectric elements. Journal of Theoretical and Applied Mechanics, 2, 37, 1999.
- [7] Wilczyński A., 2000. Anizotropia właściwości sprężystych płytowych materiałów drewnopochodnych. Wyd. Uczeln. ATR Bydgoszcz, Zesz. Nauk., Mechanika 47.
- [8] Woźniak Cz., 2000. Computational models of periodic composites. Tolerance averaging versus homogenization. Journal of Theoretical and Applied Mechanics, 2, 2000, 38.

THE STATIC PROBLEM OF THE WOODEN COMPOSITE BEAM

Summary

In this paper static analysis has been presented of the bending problem of the wooden beam covered with two-layer laminate, ie. the bonding layer and scaleboard. The system of the differential equation governing the phenomenon of the bending of the composite beam was derived and solved. Then the integration constants from the boundary conditions for the beam and the scaleboard were determined. Finally, the computer calculations were carried out, which were then represented in the graphs.

Key words: wooden, laminate, composite beam, bending.

WYZNACZANIE CAŁEK RÓWNAŃ RUCHU PŁYNU NIENEWTONOWSKIEGO METODĄ PRZYBLIŻEŃ CAŁKOWYCH

Feliks Chwarścianek

Katedra Maszyn Spożywczych i Ochrony Środowiska. Wydział Mechaniczny ATR
ul. Prof. S. Kaliskiego 7, 85-796 Bydgoszcz

W opracowaniu przedstawiono metodę obliczania przepływu płynu lepkiego modelowanego równaniami konstytutywnymi typu potęgowego (model Szulmana i pochodne) w osiowo-symetrycznych szczelinowych kanałach o dowolnej krzywoliniowej konfiguracji ich profilu. Rozwiązania równań ruchu dokonano metodą przybliżeń całkowych.

Słowa kluczowe: lepkość, modele płynów, krzywoliniowy kanał szczelinowy, wytłaczanie, metoda przybliżeń całkowych

Objaśnienia symboli:

- ε - odkształcenia postaciowe
- $\dot{\varepsilon}$ - prędkość odkształcenia postaciowego
- $\dot{\varepsilon}_{ij}$ - tensor prędkości odkształceń
- δ_{ij} - delta Kroneckera, tensor jednostkowy
- τ - naprężenie ścinające (styczne)
- τ_0 - naprężenie ścinające początkowe
- τ_{ij} - tensor naprężeń ścinających (lepkich)
- t - czas
- p - ciśnienie płynu
- p_{ij} - tensor naprężeń w płynie
- η - lepkość dynamiczna płynu (newtonowska)
- η_e - lepkość efektywna, zastępcza, pozorna
- $\eta_B \div \eta_S$ - lepkość efektywna dla określonego modelu
- m, n - wykładniki potęgowe
- v - prędkość płynu
- ρ - gęstość płynu

1. WSTĘP

Przepływy płynów w własnościach nienewtonowskich występują powszechnie w przetwórstwie polimerów, spożywczym i paszowym. Coraz większą rolę zwłaszcza w przetwórstwie spożywczym znajduje proces wytłaczania. W procesie wytłaczania

szczególnie istotny jest przepływ materiału wytłaczanego przez głowicę wytłaczarską (kształtującą produkt). Przepływ materiału o własnościach nienewtonowskich przez kanały głowicy wytłaczarskiej jest przedmiotem rozważań, zarówno w aspekcie modelu opisującego własności płynu jak i modelu zjawiska przepływu oraz metody formułowania równań ruchu płynu.

Analityczne rozwiązanie poszczególnych przypadków przepływu nie zawsze jest znane i możliwe do otrzymania zwłaszcza w odniesieniu do bardziej złożonych modeli płynu i złożonych konfiguracji samego przepływu i jego geometrii.

2. OKREŚLENIE MODELU PŁYNU

Dla opisu płynów o własnościach nienewtonowskich założono wykorzystanie modelu możliwie ogólnego, typu potęgowego (np. Szulmana), obejmując tym samym opisem modelu szerszy zakres właściwości reologicznych płynącego materiału. Przyjęcie takiego modelu wydaje się być uzasadnione ze względu na występowanie naprężeń początkowych jak i dość szeroki zakres zmienności współczynników materiałowych – wykładników potęg oraz możliwość otrzymania rozwiązania dla modeli prostszych bezpośrednio przez uproszczenie modelu wyjściowego. Modele typu potęgowego dość dobrze, zwłaszcza w tzw. pierwszym przybliżeniu opisu własności płynu oddają właściwości wielu płynących materiałów. Ważnym powodem jest również to, że modele te posiadają względnie prostą budowę i niewielką ilość parametrów oraz, że możliwe jest dla nich budowanie trójwymiarowych równań konstytutywnych. Modele typu potęgowego opisuje ogólna zależność funkcyjna w postaci:

$$\hat{\sigma} = f(\hat{\sigma}_0^N, \dot{\mathbf{a}}^M) \quad (1)$$

Ważną rolę w formułowaniu wyrażeń modelowych płynów spełnia tzw. uogólnione prawo Newtona, w postaci określającej lepkość efektywną (zwaną też zastępczą, pozorną lub strukturalną) traktowaną parametrycznie:

$$\eta_e = \frac{\tau}{\dot{\epsilon}} \neq \text{const} \quad (2)$$

Ogólna postać wyrażenia funkcyjnego dla lepkości efektywnej to:

$$\eta_e = f(\dot{\epsilon}, K) \quad (3)$$

gdzie: K – współczynnik materiałowy.

Uogólnione prawo Newtona pozwala na nadanie modelom różnych płynów formalnie podobnej postaci matematycznej, przydatnej w formułowaniu równań opisujących przepływ materiałów, zwłaszcza gdy znaczącą właściwością reologiczną tych materiałów jest ich lepkość, zmienna i zależna od prędkości odkształceń.

Z uogólnionego prawa Newtona w przestrzeni trójwymiarowej (zapropozowanego przez Stokesa), dla nieściśliwego płynu lepkiego, otrzymuje się dla tensora naprężeń postać:

$$p_{ij} = -p\delta_{ij} + \tau_{ij} \quad (4)$$

lub:

$$p_{ij} = -p\delta_{ij} + 2B\dot{\epsilon}_{ij} \quad (5)$$

Stąd natychmiast tensor naprężeń stycznych:

$$\tau_{ij} = 2B\dot{\epsilon}_{ij} \quad (6)$$

Gdzie parametr B jest funkcją lepkości płynu, opisaną ogólnie jako:

$$B = f(A, \eta_e) \quad (7)$$

W wyrażeniu tym wielkość A nazywana jest natężeniem prędkości deformacji (moduł dewiatora prędkości odkształceń) i opisany jest jako:

$$A = \left| 2\dot{\mathbf{a}}_{ik} \cdot \dot{\mathbf{a}}_{ki} \right|^{1/2} \quad (8)$$

Po wykonaniu działań, forma rozwinięta będzie w postaci:

$$A = \left[2(\dot{\epsilon}_{11}^2 + \dot{\epsilon}_{22}^2 + \dot{\epsilon}_{33}^2 + 2\dot{\epsilon}_{12}^2 + 2\dot{\epsilon}_{23}^2 + 2\dot{\epsilon}_{31}^2) \right]^{1/2} \quad (9)$$

Równanie Newtona dla lepkiej cieczy jednorodnej, izotropowej, nieściśliwej i lepkiej w zapisie tensorowym będzie:

$$p_{ij} = -p\delta_{ij} + 2\eta\dot{\epsilon}_{ij} \quad (10)$$

Natomiast dla uogólnienia prawa Newtona (analogicznie do formuł podanych przez Stokesa) można zapisać:

$$\tau_{ij} = 2\eta_e\dot{\epsilon}_{ij} \quad (11)$$

Analiza wyrażeń zawierających parametr lepkości B (lepkość uogólniona) wykazuje formalne podobieństwo do wyrażeń newtonowskich, w konsekwencji można

w ogólności zapisać, iż:

$$B = \hat{\mathbf{O}} \cdot \mathbf{A}^{-1} \quad (12)$$

Dla modelu Szulmana w postaci:

$$\hat{\mathbf{O}}_s^{1/n} = \hat{\mathbf{O}}_0^{1/n} + (\zeta_s \cdot \dot{\mathbf{a}})^{1/m} \quad (13)$$

zależność na parametr lepkości B przyjmuje formę:

$$B_s = \hat{\mathbf{O}}_s \cdot \mathbf{A}_s^{-1} \quad (14)$$

Będzie zatem dalej dla modelu Szulmana:

$$B_s = \left[\hat{\mathbf{O}}_0^{1/n} + (\zeta_s \cdot \mathbf{A}_s)^{1/m} \right]^n \mathbf{A}_s^{-1} \quad (15)$$

Wyrażenie na tensor naprężeń ścinających Szulmana odpowiednio do (6 i 13) będzie:

$$\hat{\sigma}_{ij} = 2 \left[\hat{\sigma}_0^{\frac{1}{n}} + (\zeta_s \cdot A_s)^{\frac{1}{m}} \right]^n A_s^{-1} \cdot \dot{\hat{\sigma}}_{ij} \quad (16)$$

gdzie: η_s – lepkość płynu opisanego modelem Szulmana

Wyrażenia dla modeli pochodnych od modelu Szulmana można utworzyć przez przyjęcie odpowiednich wartości wykładników m i n – otrzymując modele od Newtona do Cassona.

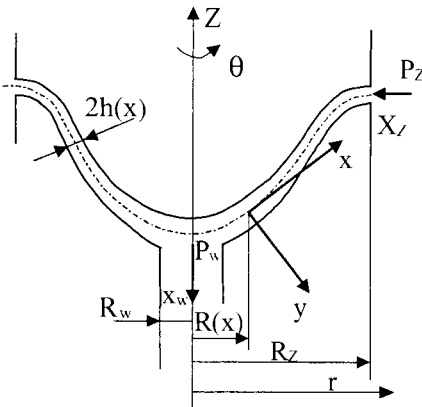
3. MODEL PRZEPLYWU, KONFIGURACJA

Konfigurację przepływu modelującą kanał głowicy wylączarskiej w możliwie ogólnej postaci pokazano na rys. 1. Dla tego układu geometrycznego wprowadzono następujące założenia charakteryzujące profil geometryczny:

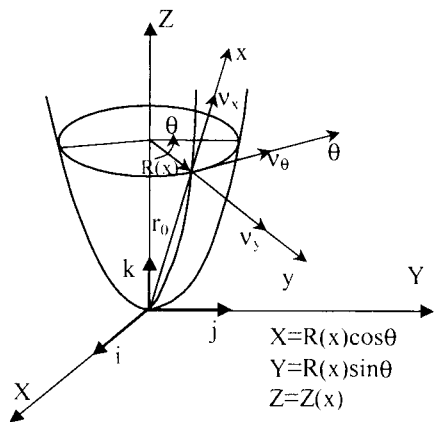
- krzywoliniowy (dowolny) profil kanału o promieniu krzywizny, $R = R(x)$,
- osiowa symetria kanału (i przepływu),
- zmienna szerokość kanału, $h = h(x)$,
- szczelinowość kanału, określona jako: $2h(x) \ll R(x)$.

Z układem geometrycznym z rysunku 1 związane jest wprowadzenie dodatkowego układu współrzędnych krzywoliniowych x, θ, y - rysunek 2.

W krzywoliniowym układzie współrzędnych dla opisu ruchu płynu należy wyznaczyć współczynniki Lamé'go przy pomocy doraźnie wprowadzonego ortogonalnego układu współrzędnych (q_1, q_2, q_3) i przy wykorzystaniu przekształceń (wzorów) Rodrigesa. Współczynniki Lamé'go wykorzystane zostaną w określaniu tensorów prędkości odkształceń oraz tensorów naprężeń ścinających.



Rys. 1.



Rys. 2.

4. SFORMUŁOWANIE RÓWNAŃ RUCHU PŁYNU

Ruch płynu nienewtonowskiego, którego właściwości określają modele typu potęgowego, opisany jest równaniami wynikającymi z podstawowych zasad zachowania (mechaniki) – masy, pędu, momentu pędu i energii.

Dla przepływu płynów modelowanych przez wyrażenia (15) i (16) wprowadzono dodatkowe założenia upraszczające:

- nieściśliwość, $\rho = \text{const}$
- izotermiczność, $\theta = \text{const}$
- stałość współczynników materiałowych,
- pomijalność sił masowych.

Konsekwencją uwzględnienia założeń upraszczających jest stwierdzenie, że pole wielkości mechanicznych określone jest równaniami:

- ciągłości:
$$\dot{\Gamma}_{,i} = 0 \quad (17)$$

- pędu:
$$\ddot{\Pi}_i = p_{ij,j} \quad (18)$$

W przyjętym układzie współrzędnych krzywoliniowych otrzymuje się:

- równanie ciągłości w postaci:

$$\frac{1}{R} \frac{\partial}{\partial x} (R \dot{\Gamma}_x) + \frac{\partial \dot{\Gamma}_y}{\partial y} + \frac{1}{R} \frac{\partial \dot{\Gamma}_\theta}{\partial \theta} = 0 \quad (19)$$

- równanie pędu (dla trzech składowych)

$$\rho \left(\frac{\partial v_x}{\partial t} + v_x \frac{\partial v_x}{\partial x} + \frac{v_\theta}{R} \cdot \frac{\partial v_x}{\partial \theta} + v_y \frac{\partial v_x}{\partial y} - \frac{v_\theta^2}{R} \cdot \frac{\partial R}{\partial x} \right) = \quad (20)$$

$$= - \frac{\partial p}{\partial x} + \frac{1}{R} \frac{\partial}{\partial x} (R \tau_{xx}) - \frac{1}{R} \tau_{\theta\theta} \frac{\partial R}{\partial x} + \frac{\partial \tau_{xy}}{\partial y} + \frac{1}{R} \frac{\partial \tau_{\theta x}}{\partial \theta}$$

$$\rho \left(\frac{\partial v_\theta}{\partial t} + v_x \frac{\partial v_\theta}{\partial x} + \frac{v_\theta}{R} \cdot \frac{\partial v_\theta}{\partial \theta} + v_y \frac{\partial v_\theta}{\partial y} - \frac{v_x v_\theta}{R} \cdot \frac{\partial R}{\partial x} \right) = \quad (21)$$

$$= - \frac{1}{R} \frac{\partial p}{\partial x} + \frac{1}{R^2} \frac{\partial}{\partial x} (R^2 \tau_{x\theta}) + \frac{1}{R} \frac{\partial \tau_{\theta\theta}}{\partial y} + \frac{\partial \tau_{\theta y}}{\partial y}$$

$$\rho \left(\frac{\partial v_y}{\partial t} + v_x \frac{\partial v_y}{\partial x} + \frac{v_\theta}{R} \cdot \frac{\partial v_y}{\partial \theta} + v_y \frac{\partial v_y}{\partial \theta} \right) = \quad (22)$$

$$= - \frac{\partial p}{\partial x} + \frac{1}{R} \frac{\partial}{\partial x} (R \tau_{xy}) + \frac{1}{R} \frac{\partial \tau_{\theta y}}{\partial \theta} + \frac{1}{R} \frac{\partial \tau_{yy}}{\partial y}$$

W ostatnich równaniach określenia wymagają składowe naprężeń stycznych τ_{ij} (tensora naprężeń lepkich). Korzystając z zależności na tensor prędkości odkształceń w postaci:

$$\dot{\epsilon}_{ik} = \frac{1}{2}(v_{i,k} + v_{k,i}) \quad (23)$$

oraz z wyrażen na składowe prędkości odkształceń w uogólnionym układzie współrzędnych, a także po uwzględnieniu wartości współczynników Lamé'go otrzymuje się wyrażenie na składowe tensora prędkości odkształceń i dalej na natężenie prędkości deformacji A oraz składowe równań pędu.

W efekcie wyznaczony zostaje układ równań (ciągłości, pędu, natężenia prędkości deformacji) dla dowolnego modelu płynu typu potęgowego, którego właściwości opisuje parametr B. Równania te mogą dalej być uproszczone w wyniku wprowadzenia założeń dotyczących:

- stacjonarności przepływu, co pozwala na eliminację pochodnych lokalnych,
- osiowej symetrii przepływu.

Skutkiem wprowadzenia tych założeń jest ograniczenie równań do dwóch składowych pędu. Zatem układ niezbędnych równań przybierze postać:

- równanie ciągłości:

$$\frac{1}{R} \frac{\partial}{\partial x}(Rv_x) + \frac{\partial v_y}{\partial y} = 0 \quad (24)$$

- równanie pędu (dwie składowe):

$$\rho \left(v_x \frac{\partial v_x}{\partial x} + v_y \frac{\partial v_x}{\partial y} \right) = -\frac{\partial p}{\partial x} + \frac{2}{R} \frac{\partial}{\partial x} \left(BR \frac{\partial v_x}{\partial x} \right) + \quad (25)$$

$$-\frac{2}{R^2} Bv_x (R')^2 + \frac{\partial}{\partial y} B \left(\frac{\partial v_y}{\partial x} + \frac{\partial v_x}{\partial y} \right) = 0$$

$$\rho \left(v_x \frac{\partial v_y}{\partial x} + v_y \frac{\partial v_y}{\partial y} \right) = -\frac{\partial p}{\partial x} + \frac{1}{R} \frac{\partial}{\partial x} BR \left(\frac{\partial v_y}{\partial x} + \frac{\partial v_x}{\partial y} \right) + 2 \frac{\partial}{\partial y} B \frac{\partial v_y}{\partial y} \quad (26)$$

- równanie natężenia prędkości deformacji

$$A = \left[2 \left(\frac{\partial v_x}{\partial x} \right)^2 + 2 \left(\frac{R'}{R} v_x \right)^2 + 2 \left(\frac{\partial v_y}{\partial y} \right)^2 + \left(\frac{\partial v_y}{\partial x} + \frac{\partial v_x}{\partial y} \right)^2 \right]^{\frac{1}{2}} \quad (27)$$

Dla umożliwienia rozwiązania układu równań (24-27) wykorzystano procedury modelowania przepływów podobnych (podobieństwo przepływów) poprzez wyznaczenie stosunków podobieństwa wielkości określających przepływ.

Za wielkości znamienne (charakterystyczne) dla rozważanego przepływu przyjęto wartości średnie wielkości występujących w sformułowanych równaniach ruchu, do wielkości tych odniesiono odpowiadające im wartości średnie. Postępowanie to prowadzi do uzyskania formuł bezwymiarowych w równaniach ruchu.

Wykorzystując postać bezwymiarową można dokonać już oszacowania rzędu wartości wielkości występujących w równaniach. W wyniku przeprowadzonych oszacowań oraz przekształceń otrzymano następujące uproszczone zależności opisujące ruch płynu lepkiego:

- równanie ciągłości w postaci równania (24),
- równanie pędu dla równania (25) w postaci:

$$\tilde{n} \left(i_x \frac{\partial i_x}{\partial x} + i_y \frac{\partial i_x}{\partial y} \right) = -\frac{dp}{dx} + \frac{\partial}{\partial y} \hat{\sigma}_{xy} \quad (28)$$

lub w postaci:

$$\tilde{n} \left(i_x \frac{\partial i_x}{\partial x} + i_y \frac{\partial i_x}{\partial y} \right) = -\frac{dp}{dx} + \frac{\partial}{\partial y} \left(B \frac{\partial i_x}{\partial y} \right) \quad (29)$$

dla równania (26): $\frac{dp}{dy} = 0$ i stąd natychmiast:

$$p = p(x), \quad (30)$$

- natężenie prędkości deformacji:

$$A = \left| \frac{\partial i_x}{\partial y} \right|. \quad (31)$$

Równania te stanowią komplet zależności opisujących przepływ płynu, stosownie do ich uproszczeń dokonano uproszczeń formuł modelujących właściwości reologiczne płynu. Na podstawie wyrażeń (15-16) dokonano odpowiednich ich przekształceń otrzymując dla modelu Szulmana wyrażenie w postaci:

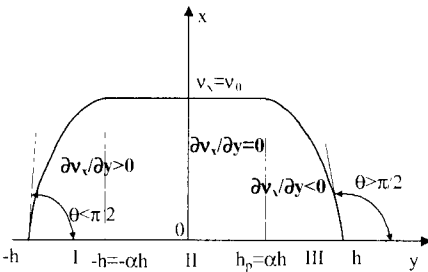
$$\tau_{xy} = B_s \frac{\partial i_x}{\partial y} \quad (32)$$

$$B_s = \left[\tau_0^n + \left(\eta_s \left| \frac{\partial i_x}{\partial y} \right| \right)^m \right]^{\frac{1}{n}} \left| \frac{\partial i_x}{\partial y} \right|^{-1} \quad (33)$$

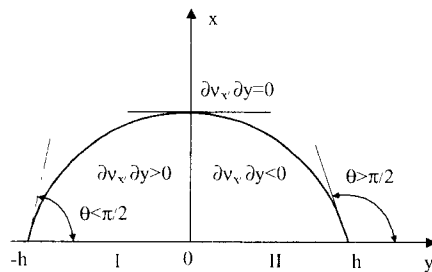
W przepływach podobnych poza tożsamą postacią bezwymiarowych równań ruchu występuje pokrywanie się bezwymiarowych warunków brzegowych przepływu.

Dla płynów modelowanych zależnościami (15 i 33) określono odpowiednie profile geometryczne prędkości płynu w kanale, profile te określono dla przypadków:

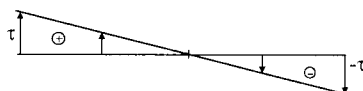
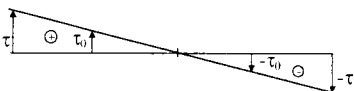
- płynów z naprężeniami początkowymi $\tau_0 \neq 0$, rys. 3,
- płynów bez naprężeń początkowych $\tau_0 = 0$, rys. 4.



Rys. 3.



Rys. 4.



Profile prędkości pokazane na rysunkach podzielono na przedziały zmienności prędkości w poprzek kanału opisane ogólną zależnością:

$$y = f(-h, -h_p, h_p, h) \quad (34)$$

Dla poszczególnych przedziałów zmienności określono warunki brzegowe przepływu, które wykorzystane zostaną w rozwiązaniu wyznaczonego układu równań metoda przybliżeń całkowych.

5. CAŁKI RÓWNAŃ RUCHU DLA PRZYBLIŻENIA REYNOLDSA

Metoda przybliżeń całkowych (jako jedyna z przybliżonych metod) pozwala na uwzględnienie sił bezwładności w przepływie (w przybliżeniu pędu i energii). Metoda ta pozwala dalej na określenie rozkładu ciśnień (strat) wzdłuż kanału.

Procedura rozwiązywania wykonana jest dla najogólniejszego z przyjętych modeli płynu (model Szulmana). Rozwiązanie dla modeli pochodnych można otrzymać przez stosowne uproszczenie rozwiązania ogólnego.

Rozwiązanie układu równań (28-31) przybliżeniem Reynoldsa polega na pominięciu składników bezwładnościowych w równaniu (28), co prowadzi do układu równań:

$$\frac{1}{R} \frac{\partial}{\partial x} (R i_x) + \frac{\partial i_y}{\partial y} = 0 \quad (35)$$

$$-\frac{dp}{dx} + \frac{\partial}{\partial y} \hat{\sigma}_{xy} = 0 \quad (36)$$

Równanie pędu (36) rozwiązuje się całkując je. Z warunków brzegowych z rys. 3 wyznaczyć można stałą całkowania ($C = 0$). Podstawiając następnie odpowiednie równanie modelowe płynu (model Szulmana) można po przekształceniu wyznaczyć wyrażenie na gradient prędkości i dalej, po scałkowaniu, na prędkość płynu w postaci:

$$i_x = \frac{s}{\zeta_s} \int \left\{ \left[-s \left(-\frac{dp}{dx} \right) y \right]^{\frac{1}{n}} - \hat{\sigma}_0^{\frac{1}{n}} \right\}^m dy + c \quad (37)$$

Całkowanie powyższej formuły można przeprowadzić po rozwinięciu w szereg funkcji w nawiasie klamrowym, otrzymując wyrażenie na prędkość:

$$i_x = -\frac{1}{\zeta_s} \left(-\frac{dp}{dx} \right)^{\frac{m}{n}} \cdot h^{\frac{m}{n}+1} \cdot i_1 + C \quad (38)$$

Gdzie przez v_1 oznaczono wynik całkowania szeregu. Dla wyznaczenia stałej całkowania, wartości wyrażenia (38) określone zostaną z warunków brzegowych z rysunku 3 w poszczególnych przedziałach zmienności profilu prędkości. Otrzymuje się przez to trzy wyrażenia na prędkość płynu (gdzie stałe całkowania – C_s dla modelu Szulmana są szeregami) w postaci:

$$\text{- przedział I: } v_{xI} = -\frac{1}{\eta_s} \left(-\frac{dp}{dx} \right)^{\frac{m}{n}} \cdot h^{\frac{m}{n}+1} (v_{II} - C_s) \quad (39)$$

$$\text{- przedział II: } v_{xII} = v_0 = c = \frac{1}{\eta_s} \left(-\frac{dp}{dx} \right)^{\frac{m}{n}} \cdot h_p^{\frac{m}{n}+1} \cdot C_s \quad (40)$$

$$\text{- przedział III: } v_{xIII} = -\frac{1}{\eta_s} \left(-\frac{dp}{dx} \right)^{\frac{m}{n}} \cdot h_p^{\frac{m}{n}+1} (v_{III} - C_s) \quad (41)$$

Tabela 1. Przybliżenie Reynoldsa – model Szulmana

Określenie równania	Formuła matematyczna
Równanie prędkości ogólne	$\dot{v}_x = \frac{s}{\zeta_s} \int \left\{ \left[-s \left(-\frac{dp}{dx} \right) y \right]^{\frac{1}{n}} - \hat{\sigma}_0^{\frac{1}{n}} \right\}^m dy + C$
Równanie prędkości po scałkowaniu - forma rozwinięta	$\dot{v}_x = -\frac{1}{\zeta_s} \left(-\frac{dp}{dx} \right)^{\frac{m}{n}} h^{\frac{m}{n}+1} \left\{ \frac{n}{m+n} \left(\frac{a}{b} \right)^{\frac{m-n}{n}} - \frac{m!}{(n-1)!} \frac{n}{m+n-1} \left(\frac{a}{b} \right)^{\frac{m-1}{n}+1} + \frac{m!}{2(m-2)!} \frac{n}{m+n-2} \left(\frac{a}{b} \right)^{\frac{m-2}{n}+1} + \dots + (-1)^{m-1} \frac{m!}{(n-1)!} \frac{n}{n+1} \left(\frac{a}{b} \right)^{\frac{1}{n}+1} + (-1)^m \left(\frac{a}{b} \right) \right\} + C$
- forma skrócona	$v_x = -\frac{1}{\eta_s} \left(-\frac{dp}{dx} \right)^{\frac{m}{n}} \cdot h^{\frac{m}{n}+1} (v_1 - C_s)$
Stała całkowania	$C = -\frac{1}{\zeta_s} \left(-\frac{dp}{dx} \right)^{\frac{m}{n}} \cdot h^{\frac{m}{n}+1} \cdot C_s; \quad C_s = \dot{v}_1; \quad \frac{a}{b} = \frac{h}{h_p}$
Równanie ciągłości scałkowane i współczynnik funkcyjny	$\frac{1}{\zeta_s} \left(-\frac{dp}{dx} \right)^{\frac{m}{n}} \cdot h^{\frac{m}{n}} \cdot h \cdot M_1 = \frac{C_0}{R}; \quad M_1 = \hat{a}^{\frac{m}{n}+2} (C_1 + C_{III} + 2C_s)$ $\hat{a} = \hat{\sigma}_0 \frac{1}{h} \left(-\frac{dp}{dx} \right)^{-1}$
Gradient ciśnienia	$-\frac{dp}{dx} = \left(\frac{Q \cdot \zeta_s}{2\hat{\sigma} \cdot M_1} \right)^{\frac{n}{m}} \frac{1}{R^{\frac{n}{m}} \cdot h^{\frac{m+n}{m}}} = K_R \cdot D_1'(x)$
Parametry geometryczne	$D_1(x) = \int \left(\frac{1}{M_1} \right)^{\frac{n}{m}} \frac{dx}{R^{\frac{n}{m}} \cdot h^{\frac{m+n}{m}}}; \quad H(x) = \int \frac{dx}{R^{\frac{n}{m}} \cdot h^{\frac{m+n}{m}}}$
Ciśnienie	$-p(x) = K_R \cdot D_1(x) + C; \quad K_R = \left(\frac{Q \cdot \zeta_s}{2\hat{\sigma} \cdot M_1} \right)^{\frac{n}{m}}$

Równanie ciągłości w postaci (35) rozwiązano wykorzystując przekształcenie Leibniza. Całkowanie w poprzek szczeliny (od $-h$ do h) prowadzi do wyrażenia będącego sumą równań ciągłości w poszczególnych przedziałach zmienności profilu prędkości na rys. 3. Dalsze rozwiązanie tego równania polega na wykorzystaniu wyrażań (39, 40, i 41) otrzymując:

$$\int_{-h}^h v_x dy = \frac{1}{\eta_s} \left(-\frac{dp}{dx} \right)^{\frac{m}{n}} \cdot h^{\frac{m}{n}+1} \cdot h \cdot M_1 = \frac{C_0}{R} \quad (42)$$

Gdzie iloczyn: hM_1 jest wynikiem całkowania szeregow v_1 i c_s . Wielkość M_1 jest zaś funkcją stałych całkowania i współczynnika zmiany profilu prędkości β z rys. 3. Z równania powyższego można wyznaczyć gradient ciśnienia w funkcji wydatku objętościowego. Po odpowiednich przekształceniach i podstawieniu otrzymuje się wyrażenie na przebieg ciśnienia (tabela 1). Rozkład ciśnienia, czyli funkcji $p(x)$ można określić dla przypadków:

- ogólnego, gdy: $R = R(x)$, $h = h(x)$, $M_1 = M_1(x)$
- szczególnego, gdy: $R = R(x)$, $h = h(x)$, $M_1 \approx \text{const}$

Analizując zmienność rozkładu ciśnienia wzdłuż kanału, można obliczyć parametry wejściowe i wyjściowe z kanału oraz spadki (straty ciśnienia).

6. PODSUMOWANIE I WNIOSKI

Obliczeniom poddano zjawisko przepływu w możliwie ogólnym ujęciu, zarówno, co do modelu płynu (kilka modeli) jak i z punktu widzenia konfiguracji geometrycznej przepływu (dowolny, krzywoliniowy profil).

W wyniku obliczeń otrzymano wyrażenia opisujące profil prędkości płynu oraz zależności opisujące rozkład ciśnienia. Dla zastosowań praktycznych opis taki jest wystarczający.

Przedstawiona metoda pozwala na efektywne rozwiązanie zagadnienia metodami analitycznymi dla modeli prostych (Newtona, Ostwalda de Waele, Binghama). Dla bardziej złożonych modeli (od Herschela-Bulkleya do Szulmana) można wyznaczone zależności potraktować jako algorytmy dla programu obliczeń komputerowych odpowiednich wielkości przepływu w konkretnych układach fizycznych.

Rozwiązanie dla przybliżenia Reynoldsa – wyznaczone całki równań ruchu są podane dla zobrazowania toku i sposobu działań. Rozwiązanie dla przybliżenia pędu i energii (uwzględniające siły bezwładności) ma podobny przebieg do opisanego.

LITERATURA

- [1] K. Itoh, Designing Extrusion Dies, Japan Plastics, Vol 11-1977, 12-1978, 13-1979
- [2] Z. Kembłowski, J. Duda, 1977. Matematyczne modele lepkich uogólnionych płynów newtonowskich, Politechnika Łódzka, Zeszyty Naukowe, Chemia Nr 26.
- [3] O. Plajer, 1970. Praktische Rheologie für Extrudierwerkzeuge, Plastivarbeiter, Heft 1.
- [4] W.J. Prosnak, 1970. Mechanika płynów, PWN Warszawa.
- [5] M. Reiner, 1958. Reologia teoretyczna, PWN Warszawa.
- [6] Z.P. Szulman, W.I. Bajkow, 1979. Reodinamika i ciepłomassobmien w pienocznym teciżenijach, Nauka i Technika, Mińsk.

- [7] E. Walicki, 1974. Przepływ cieczy lepkiej w szczelinie między wirującymi powierzchniami obrotowymi. *Mechanika Teoretyczna Stosowana*, Vol. 12, Nr 1.
- [8] E. Walicki, 1977. Ruch płynów lepkich w szczelinach wzdłużnych łożysk ślizgowych. *Wyd. Uczeln. ATR Bydgoszcz, Zeszyty Naukowe* 50.
- [9] W.L. Wilkinson, 1963. *Ciecze nienewtonowskie*, WNT Warszawa.
- [10] S. Zahorski, 1978. *Mechanika przepływów cieczy lekkosprężystych*, PAN-IPPT.
- [11] F. Chwarścianek, 1987. *Modelowanie przepływu polimerów w szczelinowych kanałach urządzeń formujących*, Rozprawa doktorska, Politechnika Poznańska.

SOLUTIONS OF EQUATIONS OF FLOW MOTION
OF NON-NEWTONIAN FLUID BY INTEGRAL
APROXIMATIONS METHOD

Summary

This paper presents the method of calculating viscous fluid flow modelled by constitutional power-type equations (Shulman models and derivatives) in axial-symmetrical channels of an arbitrary curvilinear configuration profile. The solutions of the equations of fluid motion were achieved by the integral approximations method.

Keywords: viscosity, models of fluids, curvilinear slot channel, extrusion, integral approximations method

DYNAMIKA PŁYNU W PRZEPUSZCZALNYM OŚRODKU POROWATYM O ANIZOTROPOWEJ STRUKTURZE PRZESTRZENI PORÓW

Mieczysław Cieszko

Akademia Bydgoska. Instytut Mechaniki Środowiska i Informatyki Stosowanej
Wydział Matematyki Techniki i Nauk Przyrodniczych
ul. Chodkiewicza 30, 85-064 Bydgoszcz

Przedmiotem pracy jest modelowanie ruchu płynu w anizotropowej przestrzeni porów nieodkształcalnego szkieletu. Rozważania oparto na nowym makroskopowym modelu nasyconego płynem porowatego ośrodka [3, 4], w którym przepływ płyn u przez szkielet o anizotropowej strukturze przestrzeni porów jest opisywany jako ruch kontinuum materialnego w płaskiej anizotropowej przestrzeni metrycznej (przestrzeni Minkowskiego) zanurzonej w przestrzeni Euklidesa będącej modelem przestrzeni fizycznej. Sformułowano równania bilansu masy i pędu płynu oraz wyprowadzono równania falowe dla zaburzeń o małej amplitudzie w barotropowym nielepkim płynie wypełniającym anizotropową przestrzeń porów. Pokazano, że prędkość płaskich fal w takim ośrodku zależy od kierunku ich propagacji i dla kierunków głównych przestrzeni porów jest odwrotnie proporcjonalna do krętości porów.

Słowa kluczowe: materiały porowate, struktura porów, przestrzeń Minkowskiego

1. WSTĘP

W pracy [4] zaproponowano nowy makroskopowy model ruchu płynu w przepuszczalnych materiałach porowatych o anizotropowej strukturze przestrzeni porów. W modelu tym anizotropowa przestrzeń porów szkieletu rozważana jest jako płaska, anizotropowa przestrzeń metryczna (przestrzeń Minkowskiego, [1, 6, 7]) zanurzona w przestrzeni Euklidesa będącej modelem przestrzeni fizycznej. Umożliwiło to wewnętrznie spójne zdefiniowanie podstawowych parametrów struktury porów: krętości porów, porowatości powierzchniowej i objętościowej, oraz ich charakterystyk tensorowych ściśle związanych z tensorem metrycznym przestrzeni porów.

Celem niniejszej pracy jest sformułowanie opisu ruchu płynu w nieodkształcalnym szkielecie przepuszczalnego materiału porowatego o anizotropowej strukturze przestrzeni porów, oraz zilustrowanie wpływu tej struktury na przebieg zjawisk dynamicznych w płynie.

Podstawę rozważań stanowią koncepcje i pojęcia szczegółowo dyskutowane w pracy [4], które w zwartej postaci przytoczono także w punkcie drugim i trzecim niniejszej pracy. W punkcie czwartym zdefiniowano parcjalne i fazowe gęstości masy płynu oraz strumień jego masy, formułując postacie form różniczkowych dla masy zawartej w infinytezymalnym elemencie ośrodka, oraz dla strumienia masy przepływającego przez infinytezymalny element powierzchni. Umożliwiło to zdefiniowanie pola

prędkości transportu masy płynu w przestrzeni porów szkieletu bez konieczności odwoływania się do pojęcia makroskopowej cząstki płynu, której wykorzystanie do opisu kinematyki płynu w takim ośrodku nasuwa szereg wątpliwości. Wyprowadzono globalne i lokalne równanie bilansu masy płynu.

W punkcie piątym zdefiniowano wektory i tensory parcjalnego i fazowego naprężenia w płynie oraz postacie twierdzeń Cauchy'ego jawnie zależne od metryki przestrzeni. Zdefiniowano postacie sił oddziaływania płynu ze szkieletem oraz siły masowej oddziaływania zewnętrznego pola grawitacyjnego. Sformułowano globalne i lokalne równanie bilansu pędu płynu.

Wpływ struktury przestrzeni porów na przebieg zjawisk dynamicznych przedyskutowano natomiast w punkcie szóstym w oparciu o wyprowadzone równania falowe dla zaburzeń o małej amplitudzie w nielepkim, barotropowym płynie wypełniającym taki ośrodek.

2. OZNACZENIA I PODSTAWOWE DEFINICJE

Wektory i tensory. W rozważaniach prowadzonych w pracy przez \mathcal{V} będziemy oznaczali 3-wymiarową przestrzeń wektorową nad ciałem liczb rzeczywistych R , a przez \mathcal{V}^* przestrzeń wektorową dualną do \mathcal{V} . Jeśli $\mathbf{u} \in \mathcal{V}$ i $\mathbf{v}^* \in \mathcal{V}^*$, wówczas skalar $\mathbf{u} \cdot \mathbf{v}^* = \mathbf{v}^* \cdot \mathbf{u} \in R$ nazywać będziemy iloczynem dualnym wektora \mathbf{u} i kowektora \mathbf{v}^* . Kropką (\cdot) oznaczać będziemy biliniowe działanie zewnętrzne określone na elementach przestrzeni \mathcal{V} oraz \mathcal{V}^* i nazywać będziemy mnożeniem dualnym.

Tensory są rozważane w pracy jako wieloliniowe odwzorowania przestrzeni wektorowych. Są one elementami przestrzeni liniowych będących iloczynami tensorowymi przestrzeni wektorowych. Np., tensor $\mathbf{A} \in \mathcal{V} \otimes \mathcal{V}^*$ jest endomorfizmem przestrzeni \mathcal{V} i \mathcal{V}^* . Dla $\mathbf{u} \in \mathcal{V}$ i $\mathbf{v}^* \in \mathcal{V}^*$ mamy: $\mathbf{A} \cdot \mathbf{u} \in \mathcal{V}$ i $\mathbf{v}^* \cdot \mathbf{A} \in \mathcal{V}^*$. Iloczyny tensorowe wektorów $\mathbf{u} \otimes \mathbf{v}^*$ są najprostszymi postaciami tensorów w przestrzeni $\mathcal{V} \otimes \mathcal{V}^*$.

Reprezentacje elementów powierzchni i objętości. W pracy tensory antysymetryczne drugiego rzędu $\sigma \in \otimes \mathcal{V}^2$ i trzeciego rzędu $\vartheta \in \otimes \mathcal{V}^3$ wykorzystywane są jako algebraiczne modele zorientowanych elementów, odpowiednio, powierzchni i objętości. Elementy te, rozpięte odpowiednio na dwóch (\mathbf{u}, \mathbf{v}) i trzech $(\mathbf{u}, \mathbf{v}, \mathbf{w})$ liniowo niezależnych wektorach, mogą być reprezentowane przez iloczyny zewnętrzne tych wektorów $\mathbf{u} \wedge \mathbf{v}$ i $\mathbf{u} \wedge \mathbf{v} \wedge \mathbf{w}$ (patrz [8]). Elementy powierzchni σ tworzą trójwymiarową przestrzeń $\wedge \mathcal{V}^2$ ($\wedge \mathcal{V}^2 \subset \otimes \mathcal{V}^2$) antysymetrycznych tensorów drugiego rzędu, natomiast elementy objętości ϑ tworzą jednowymiarową przestrzeń $\wedge \mathcal{V}^3$ ($\wedge \mathcal{V}^3 \subset \otimes \mathcal{V}^3$) antysymetrycznych tensorów trzeciego rzędu.

Punktowe przestrzenie Minkowskiego i Euklidesa. Parę (P, \mathcal{V}) złożoną z punktu P i przestrzeni wektorowej \mathcal{V} będziemy utożsamiali z afiniczną przestrzenią punktową. Punkt P jest nazywany punktem odniesienia, a \mathcal{V} przestrzenią wektorów położenia punktów przestrzeni afinicznej. W przypadku gdy w przestrzeni wektorowej \mathcal{V} określona jest norma, przestrzeń afiniczna (P, \mathcal{V}) nazywana jest przestrzenią metryczną. Norma $u_\lambda = L_\lambda(\mathbf{u})$ definiuje długość wektora \mathbf{u} i umożliwia wyznaczenie odległości pomiędzy dwoma dowolnymi punktami przestrzeni (P, \mathcal{V}) . Przy odpowiedniej gładkości funkcji $L_\lambda(\mathbf{u})$, może być ona przedstawiona w postaci, [1, 5, 7],

$$L_A^{-2}(\mathbf{u}) = \mathbf{u} \cdot \mathbf{M}_A(\mathbf{u}) \cdot \mathbf{u} \quad (1)$$

gdzie $\mathbf{M}_A(\mathbf{u})$ jest symetrycznym, nieosobliwym i dodatnio określonym tensorem drugiego rzędu. Tensor ten spełnia warunek

$$\mathbf{M}_A(k \mathbf{u}) \equiv \mathbf{M}_A(\mathbf{u}) \quad k > 0. \quad (2)$$

i nazywany jest tensorem metrycznym przestrzeni afinicznej.

Z własności (2) wynika, że w ogólnym przypadku tensor $\mathbf{M}_A(\mathbf{u})$ zależy od kierunku i zwrotu wektora \mathbf{u} natomiast nie zależy od jego długości. Ta własność tensora $\mathbf{M}_A(\mathbf{u})$ określa anizotropowe własności oraz brak symetrii odległości ($L_A(-\mathbf{u}) \neq L_A(\mathbf{u})$) w przestrzeni metrycznej. Przestrzeń wyposażona w tak ogólną metrykę nazywana jest przestrzenią Minkowskiego.

Euklidesowa przestrzeń punktowa jest szczególnym przypadkiem przestrzeni Minkowskiego. Z przestrzenią Euklidesa mamy do czynienia wówczas gdy tensor metryczny $\mathbf{M}_A(\mathbf{u})$ nie zależy od kierunku mierzonego wektora \mathbf{u} . Tensor metryczny przestrzeni euklidesowej będziemy oznaczali przez \mathbf{M} , a długość wektora \mathbf{u} w tej przestrzeni przez u .

Istnienie miary odległości w przestrzeni Minkowskiego umożliwia zdefiniowanie metryk elementów powierzchni σ i objętości ϑ . Otrzymujemy, [3], [4],

$$S_A^{-2}(\sigma) = \sigma : S_A(\mathbf{r}) : \sigma, \quad V_A^{-2}(\vartheta) = \vartheta : V_A : \vartheta \quad (3)$$

gdzie:

$$S_A(\mathbf{r}) = \alpha(\mathbf{r}) \frac{1}{2!} \begin{pmatrix} \mathbf{M}_A(\mathbf{r}) \\ \mathbf{M}_A(\mathbf{r}) \end{pmatrix}, \quad V_A = \alpha(\mathbf{r}) \frac{1}{3!} \begin{pmatrix} \mathbf{M}_A(\mathbf{r}) \\ \mathbf{M}_A(\mathbf{r}) \\ \mathbf{M}_A(\mathbf{r}) \end{pmatrix} \quad (4)$$

są tensorami metrycznymi, odpowiednio, w przestrzeni elementów powierzchni ${}^{\wedge}V^2$ i objętości ${}^{\wedge}V^3$. Tensor $S_A(\mathbf{r})$ jest rzędu czwartego, a tensor V_A rzędu szóstego. Dwoma i trzema kropkami oznaczono podwójny i potrójny iloczyn dualny. Wektor \mathbf{r} w (4) jest prostopadły do elementu powierzchni σ względem metryki $\mathbf{M}_A(\mathbf{r})$, natomiast

$$\alpha(\mathbf{r}) = f_v^2 / \det(\mathbf{M}^{-1} \cdot \mathbf{M}_A(\mathbf{r})) \quad (5)$$

gdzie f_v jest dodatnim, stałym parametrem.

Miary Euklidesa S i V , odpowiednio, elementów powierzchni σ i objętości ϑ są szczególnymi przypadkami wyrażeń (3) i mogą być uzyskane przyjmując w (4) i (5): $\mathbf{M}_A(\mathbf{r}) = \mathbf{M}$ i $f_v = 1$.

3. MODELOWANIE ANIZOTROPOWEJ PRZESTRZENI PORÓW

Pojęcie przestrzeni Minkowskiego może być wykorzystane jako model anizotropowej przestrzeni porów przepuszczalnych materiałów porowatych [3, 4]. Wówczas zdefiniowane w poprzednim punkcie miary elementów linii, powierzchni i objętości w przestrzeni Minkowskiego odnoszą się bezpośrednio do przestrzeni porów. Długość wektora jest odległością w porach pomiędzy dwoma punktami przestrzeni wyznaczającymi początek i koniec wektora; miara elementu powierzchni jest polem powierzchni porów na tym elemencie, natomiast miara elementu objętości jest objętością porów w tym

elemencie. Umożliwia to wewnątrznie spójne zdefiniowanie parametrów charakteryzujących strukturę porów materiałów porowatych.

Biorąc pod uwagę, że rzeczywiste materiały porowate występują zawsze jako materialne obiekty zanurzone w przestrzeni fizycznej modelowanej w ramach klasycznej mechaniki jako euklidesowa przestrzeń punktowa, przestrzeń Minkowskiego jako model anizotropowej przestrzeni porów rozważana jest jako zanurzona w przestrzeni Euklidesa. Zanurzenie takie umożliwia określenie miar dowolnego elementu linii, powierzchni i objętości w obu przestrzeniach, a w rezultacie zdefiniowanie parametrów struktury porów: krętości porów $\delta(\mathbf{u})$, porowatości powierzchniowej $\lambda(\boldsymbol{\sigma})$ i porowatości objętościowej f_v . Definicje te przyjmują postać:

$$\delta^2(\mathbf{u}) = \left(\frac{u_\Lambda}{u} \right)^2 = \frac{\mathbf{u} \cdot \mathbf{M}_\Lambda(\mathbf{u}) \cdot \mathbf{u}}{\mathbf{u} \cdot \mathbf{M} \cdot \mathbf{u}} = \mathbf{n} \cdot \mathbf{M}_\Lambda(\mathbf{n}) \cdot \mathbf{n} \quad (6)$$

$$\lambda^2(\boldsymbol{\sigma}) = \left(\frac{S_\Lambda}{S} \right)^2 = \frac{\boldsymbol{\sigma} : \mathbf{S}_\Lambda(\mathbf{N}) : \boldsymbol{\sigma}}{\boldsymbol{\sigma} : \mathbf{S} : \boldsymbol{\sigma}} = \mathbf{E}_2 : \mathbf{S}_\Lambda(\mathbf{N}) : \mathbf{E}_2 \quad (7)$$

$$f_v^2 = \left(\frac{V_\Lambda}{V} \right)^2 = \frac{\boldsymbol{\vartheta} : \mathbf{V}_\Lambda : \boldsymbol{\vartheta}}{\boldsymbol{\vartheta} : \mathbf{V} : \boldsymbol{\vartheta}} = \mathbf{E}_3 : \mathbf{V}_\Lambda : \mathbf{E}_3 \quad (8)$$

gdzie \mathbf{n} ($\mathbf{n} \cdot \mathbf{M} \cdot \mathbf{n} = 1$), \mathbf{E}_2 ($\mathbf{E}_2 : \mathbf{S} : \mathbf{E}_2 = 1$) i \mathbf{E}_3 ($\mathbf{E}_3 : \mathbf{V} : \mathbf{E}_3 = 1$) są, odpowiednio, euklidesowym wektorem oraz jednostkowym elementem powierzchni i objętości.

4. BILANS MASY PŁYNU

Parcjalne i fazowe gęstości masy. Rozważamy obszar D przestrzeni fizycznej ograniczony powierzchnią ∂D zajęty przez nasycony płynem ośrodek porowaty. Przyjmujemy, że dowolny infinytezymalny element objętości $d\boldsymbol{\vartheta} \in \wedge V^3$ obszaru D zawiera masę dm , której wartość określona jest przez formę różniczkową postaci

$$dm = \hat{m}(\mathbf{x}, t; d\boldsymbol{\vartheta}) . \quad (9)$$

O formie tej zakładamy, że jest ciągłą funkcją wszystkich argumentów występujących w (9) i spełnia warunek absolutnej jednorodności względem elementu objętości $d\boldsymbol{\vartheta}$,

$$\hat{m}(\mathbf{x}, t; k d\boldsymbol{\vartheta}) = |k| \hat{m}(\mathbf{x}, t; d\boldsymbol{\vartheta}) . \quad (10)$$

Oznacza to, że rozważamy tu jedynie sytuacje, w których masa płynu jest w sposób ciągły rozłożona w ośrodku. Wykluczamy w ten sposób możliwość istnienia punktowych, liniowych i powierzchniowych skupisk masy, a także obszarów w ośrodku, w którym płyn nie występuje. Warunek (10) zapewnia, że masa zawarta w infinytezymalnym elemencie objętości $d\boldsymbol{\vartheta}$ rośnie proporcjonalnie do wielkości tego elementu i nie zależy od jego orientacji.

Wykorzystując warunek (10), forma różniczkowa (9) może być przedstawiona w postaci

$$dm = R(\mathbf{x}, t; d\boldsymbol{\vartheta}) : d\boldsymbol{\vartheta} \quad (11)$$

gdzie:

$$R(x, t; d\vartheta) = \frac{\partial \hat{m}}{\partial (d\vartheta)} \in \wedge^3 V^*, R(x, t; k d\vartheta) = |k| / k R(x, t; d\vartheta)$$

jest tensorem antysymetrycznym trzeciego rzędu, który zależy jedynie od orientacji elementu $d\vartheta$. Dlatego tensor R może być interpretowany jako tensor gęstości masy płynu. Wykrzystując reprezentację

$$d\vartheta = dV E_3 = dV_A E_3^A \quad (12)$$

gdzie dV i dV_A są miarami objętości elementu $d\vartheta$, odpowiednio, względem metryki przestrzeni Euklidesa i Minkowskiego, z wyrażenia (11) otrzymamy:

$$dm = \bar{\rho} dV = \rho dV_A \quad (13)$$

przy czym wielkości

$$\bar{\rho} = R : E_3, \quad \rho = R : E_3^A$$

mogą być interpretowane, odpowiednio, jako parcjalna i fazowa gęstość masy płynu. Przez E_3^A oznaczono jednostkowy element objętości Minkowskiego: $E_3^A : V_A : E_3^A = 1$. Ze względu na definicję (8) obie gęstości są związane ze sobą zależnością $\bar{\rho} = f_v \rho$.

Strumień masy płynu. Weźmy pod uwagę dowolny infinitezymalny element powierzchni $d\sigma \in \wedge^2 V^2$ wyróżniony na powierzchni ∂D . Przyjmujemy, że strumień masy płynu $d\varphi$ przepływający przez ten element określony jest przez formę różniczkową postaci

$$d\varphi = \hat{\varphi}(x, t; d\sigma), \quad (14)$$

która jest ciągłą funkcją czasu t , elementu $d\sigma$ oraz jego położenia w przestrzeni.

O funkcji $\hat{\varphi}(x, t; d\sigma)$ będziemy ponadto zakładali, że jest jednorodną funkcją pierwszego stopnia względem elementu powierzchni $d\sigma$. Mamy

$$\hat{\varphi}(x, t; k d\sigma) = k \hat{\varphi}(x, t; d\sigma) \quad (15)$$

dla $k \neq 0$. Własność ta zapewnia, że k -krotne zwiększenie (zmniejszenie) wielkości infinitezimalnego elementu $d\sigma$ powoduje proporcjonalne zwiększenie (zmniejszenie) strumienia masy płynu przepływającego przez ten element, natomiast zmiana orientacji tego elementu na przeciwną zmienia znak strumienia masy.

Wykorzystując warunek (15) można pokazać, że funkcja określająca formę różniczkową strumienia wielkości fizycznej spełniającej równanie bilansu, jest liniowa względem elementu powierzchni $d\sigma$. Dla strumienia masy płynu (14) otrzymujemy

$$d\varphi = \Phi(x, t) : d\sigma \quad (16)$$

gdzie $\Phi(x, t)$ jest tensorem antysymetrycznym drugiego rzędu i może być interpretowany jako tensor gęstości strumienia masy płynu. Charakteryzuje on pole przepływu masy płynu przez ośrodek porowaty. Wyrażenie (16) nie zależy od metryki przestrzeni porów.

Przedstawiając element powierzchni $d\sigma$ przy pomocy wersorów Euklidesa n i Minkowskiego N prostopadłych do tego elementu,

$$d\sigma = \mathbf{E}_3 \cdot \mathbf{M} \cdot \mathbf{n} \, dS = \mathbf{E}_3^A \cdot \mathbf{M}_A(\mathbf{N}) \cdot \mathbf{N} \, dS_A \quad (17)$$

z wyrażenia (16) otrzymamy

$$d\varphi = \bar{\mathbf{q}} \cdot \mathbf{M} \cdot \mathbf{n} \, dS = \mathbf{q} \cdot \mathbf{M}_A(\mathbf{N}) \cdot \mathbf{N} \, dS_A \quad (18)$$

gdzie dS jest polem elementu $d\sigma$ (jest miarą $d\sigma$ względem metryki Euklidesa), a dS_A jest polem porów zawartych w tym elemencie (jest miarą $d\sigma$ względem metryki Minkowskiego). Natomiast wielkości $\bar{\mathbf{q}}$ i \mathbf{q} dane są wzorami:

$$\bar{\mathbf{q}} = \Phi : \mathbf{E}_3, \mathbf{q} = \Phi : \mathbf{E}_3^A \quad (19)$$

i mogą być interpretowane jako parcjalny i fazowy wektor gęstości strumienia masy płynu. Ze względu na zależność; $\mathbf{E}_3 = f_v \mathbf{E}_3^A$, z (19) otrzymujemy.

$$\bar{\mathbf{q}} = f_v \mathbf{q} \quad (20)$$

Wektory strumienia masy $\bar{\mathbf{q}}$ i \mathbf{q} oraz gęstości $\bar{\rho}$ i ρ umożliwiają zdefiniowanie pola prędkości transportu masy płynu w przestrzeni porów,

$$\mathbf{v}(\mathbf{x}, t) = \bar{\mathbf{q}} / \bar{\rho} = \mathbf{q} / \rho \quad (21)$$

Oznacza to, że transport masy płynu w ośrodku porowatym charakteryzowany jest jednym wektorowym polem prędkości, niezależnym od tego, względem której przestrzeni – fizycznej czy porowej – rozważany jest ruch płynu.

Reprezentacje (18), po uwzględnieniu (21), przyjmują postać:

$$d\varphi = \bar{\rho} \mathbf{v}(\mathbf{x}, t) \cdot \mathbf{M} \cdot \mathbf{n} \, dS = \rho \mathbf{v}(\mathbf{x}, t) \cdot \mathbf{M}_A(\mathbf{N}) \cdot \mathbf{N} \, dS_A \quad (22)$$

Istnienie jednego wektorowego pola $\mathbf{v}(\mathbf{x}, t)$ prędkości transportu masy płynu w ośrodku porowatym nie oznacza, że wartości prędkości przepływu płynu w przestrzeni fizycznej i porowej są jednakowe. Wyznaczając bowiem długości wektora \mathbf{v} względem metryki Euklidesa i Minkowskiego otrzymamy prędkości:

$$v = \sqrt{\mathbf{v} \cdot \mathbf{M} \cdot \mathbf{v}}, v_A = \sqrt{\mathbf{v} \cdot \mathbf{M}_A(\mathbf{v}) \cdot \mathbf{v}} \quad (23)$$

które ze względu na definicję krętości porów (6) są związane ze sobą zależnością

$$v_A = \delta v. \quad (24)$$

Wielkość v_A nazywana jest prędkością porową, a v - prędkością średnią transportu masy płynu w ośrodku porowatym. Obie prędkości są związane z tzw. prędkością filtracyjną (prędkością pozorną) przepływu płynu v^f , definiowaną wzorem:

$$v^f = dQ/dS \quad (25)$$

gdzie $dQ = d\varphi_n / \rho$ jest objętościowym wydatkiem masy płynu przepływającego przez element powierzchni $ds = dS \mathbf{n}$ prostopały do kierunku przepływu. Ponieważ w takim przypadku $\mathbf{v} = v \mathbf{n}$, z (22) mamy:

$$d\varphi_n = f_v \rho v \, dS \quad (26)$$

Wówczas wyrażenie (25) przyjmuje postać:

$$v^f = f_v v \quad (27)$$

a po uwzględnieniu (24), otrzymamy:

$$v^i = f^i / \delta v \quad (28)$$

Zależność (27) pomiędzy prędkością filtracyjną v^i a prędkością średnią v znana jest w literaturze jako postulat Dupuit-Forchheimera [6], natomiast zależność postaci (28) była postulowana przez Carmana w pracy [2].

Równanie bilansu masy płynu. Wykorzystując reprezentację (13)₂ dla masy dm i (22) dla strumienia masy $d\varphi$, całkowe równanie bilansu masy płynu w obszarze D może być przedstawione w postaci:

$$\frac{d}{dt} \int_D \rho dV_A + \int_{\partial D} \rho \mathbf{v} \cdot \mathbf{M}_A(\mathbf{N}) \cdot \mathbf{N} dS_A = 0$$

Ze względu na twierdzenie Gaussa-Ostrogradskiego, lokalna postać tego równania będzie następująca:

$$\frac{D\rho}{Dt} + \rho \nabla \cdot \mathbf{v} = 0 \quad (29)$$

gdzie ∇ jest operatorem Nabla, natomiast

$$\frac{D}{Dt} = \frac{\partial}{\partial t} + \mathbf{v} \cdot \nabla ()$$

Z (29) wynika, że równanie bilansu masy płynu w postaci absolutnej nie zależy w sposób jawny od metryki przestrzeni, w której ruch płynu ma miejsce.

5. BILANS PĘDU PŁYNU

Równania bilansu pędu płynu w anizotropowej przestrzeni porów szkieletu sformułujemy dla obszaru D przestrzeni ograniczonego nieruchomą powierzchnią ∂D . Wyróżniony obszar będziemy przy tym traktowali jako układ otwarty, w którym o szybkości zmiany pędu decydują ciągłe pola sił występujące zarówno na powierzchni, jak i wewnątrz obszaru. Siły powierzchniowe związane są z transportem pędu płynu przez powierzchnię ∂D towarzyszącym transportowi jego masy oraz siłami wewnętrznymi w płynie. Siły objętościowe natomiast powodowane są oddziaływaniem lepkiem przepływającego płynu ze szkieletem oraz oddziaływaniem masowym zewnętrznego pola grawitacyjnego.

Pęd i strumień pędu płynu. Dla pędu $d\mathbf{p}$ płynu zawartego w infinitezymalnym elemencie objętości $d\mathfrak{t}$ i dla strumienia pędu $d\boldsymbol{\psi}$ związanego z transportem masy płynu przez element powierzchni $d\boldsymbol{\sigma}$ przyjmujemy następujące postacie form różniczkowych:

$$d\mathbf{p} = \mathbf{v}(\mathbf{x}, t) dm, \quad d\boldsymbol{\psi} = \mathbf{v}(\mathbf{x}, t) d\varphi \quad (30)$$

gdzie dm i $d\varphi$ są określone, odpowiednio, przez (11) (lub (13)) i (16) (lub (18)).

Siły wewnętrzne w płynie. Zakładamy, że makroskopowe siły wewnętrzne $d\mathbf{f}$ działające w płynie wypełniającym porowaty ośrodek na infinitezymalnym elemencie powierzchni $d\boldsymbol{\sigma}$ są określone przez formę różniczkową postaci:

$$d\mathbf{f} = \hat{\mathbf{f}}(\mathbf{x}, t; d\boldsymbol{\sigma}) \in \mathcal{V} \quad (31)$$

w której funkcja $\hat{\mathbf{f}}(\mathbf{x}, t; d\sigma)$ spełnia warunek jednorodności pierwszego rzędu względem elementu powierzchni $d\sigma$. Mamy:

$$\hat{\mathbf{f}}(\mathbf{x}, t; k d\sigma) = k \hat{\mathbf{f}}(\mathbf{x}, t; d\sigma) \quad (32)$$

dla $k \neq 0$. Warunek ten wynika z żądania by siła wewnętrzna w płynie działająca na infinytezymalnym elemencie powierzchni ośrodka $d\sigma$ była proporcjonalna do wielkości tego elementu, a przy zmianie orientacji elementu powierzchni na przeciwny ($k=-1$), zmieniała swój zwrot. Wymóg ten jest konsekwencją wzajemności sił wewnętrznych występujących na powierzchniach rozdzielonych części ośrodka.

Bezpośrednim następstwem warunku (32), przy założeniu, że siły wewnętrzne w płynie spełniają równanie bilansu pędu, jest liniowość funkcji $\hat{\mathbf{f}}(\mathbf{x}, t; d\sigma)$ względem elementu $d\sigma$. Wynika to z twierdzenia o czworościanie. Otrzymujemy:

$$\hat{\mathbf{f}}(\mathbf{x}, t; d\sigma) = \hat{\mathbf{T}}(\mathbf{x}, t) : d\sigma \quad (33)$$

gdzie $\hat{\mathbf{T}}(\mathbf{x}, t) \in \mathcal{V} \otimes \mathcal{V}^{*2}$ jest tensorem trzeciego rzędu i może być interpretowany jako tensor naprężenia w płynie wypełniającym przestrzeń porów szkieletu. Wyrażenie (33) nie zależy jawnie od metryki przestrzeni zajętej przez płyn.

Aby otrzymać reprezentację siły powierzchniowej (31) związanej z miarami Euclidesa i Minkowskiego elementu powierzchni $d\sigma$, wykorzystamy zależności (17) w wyrażeniach (33). Reprezentacje te przyjmują postać:

$$d\mathbf{f} = \bar{\mathbf{t}} dS, \quad d\mathbf{f} = \mathbf{t} dS_A \quad (34)$$

gdzie

$$\bar{\mathbf{t}} = \bar{\mathbf{T}} \cdot \mathbf{M} \cdot \mathbf{n}, \quad \mathbf{t} = \mathbf{T} \cdot \mathbf{M}_A(\mathbf{N}) \cdot \mathbf{N} \quad (35)$$

jest parcjalnym i fazowym wektorem naprężenia w płynie odniesionym, odpowiednio, do jednostki powierzchni porowatego ośrodka i jednostki powierzchni porów w płaszczyźnie wyznaczonej przez element powierzchni $d\sigma$, natomiast:

$$\bar{\mathbf{T}} = \hat{\mathbf{T}} : \mathbf{E}_3, \quad \mathbf{T} = \hat{\mathbf{T}} : \mathbf{E}_3^A, \quad \in \mathcal{V}^2 \quad (36)$$

jest parcjalnym i fazowym tensorem naprężenia w płynie. Zależności (35) są zmodyfikowanymi postaciami twierdzenia Cauchy'ego, w których tensory metryczne są jawnie obecne.

Z zależności (34), (36) oraz definicji (6), (7) i (12) wynika, że:

$$\bar{\mathbf{t}} = \lambda(\sigma) \mathbf{t}, \quad \bar{\mathbf{T}} = f_v \mathbf{T}. \quad (37)$$

Siły objętościowe w płynie. Biorąc pod uwagę, że zarówno siły lepkiego oddziaływania płynu ze szkieletem jak i siły masowe są siłami objętościowymi, w rozważaniach będziemy zakładali, że obie te wielkości określone dla infinytezymalnego obszaru ośrodka są funkcjami elementu objętości $d\mathfrak{D}$.

Dla siły $d\mathbf{h}$ lepkiego oddziaływania płynu ze szkieletem w infinytezymalnym elemencie objętości $d\mathfrak{D}$ przyjmujemy w następującą formę różniczkową:

$$d\mathbf{h} = \hat{\mathbf{h}}(\mathbf{x}, t; d\mathfrak{D}) \in \mathcal{V} \quad (38)$$

której funkcja powinna spełniać warunek jednorodności postaci:

$$\hat{\mathbf{h}}(\mathbf{x}, t; k d\mathfrak{D}) = |k| \hat{\mathbf{h}}(\mathbf{x}, t; d\mathfrak{D}) \quad k \neq 0: \quad (39)$$

Podobnie jak w przypadku gęstości masy płynu (10), z (39) otrzymujemy:

$$\hat{\mathbf{h}}(\mathbf{x}, t; d\mathcal{V}) = \Pi(\mathbf{x}, t; d\mathcal{V}) \vdash d\mathcal{V} \quad (40)$$

gdzie:

$$\Pi(\mathbf{x}, t; d\mathcal{V}) = \frac{\partial}{\partial(d\mathcal{V})} \hat{\mathbf{h}}(\mathbf{x}, t; d\mathcal{V}), \Pi(\mathbf{x}, t; k d\mathcal{V}) = |k| / k \Pi(\mathbf{x}, t; d\mathcal{V})$$

jest tensorem czwartego rzędu.

Z tożsamości tej wynika, że tensor $\Pi(\mathbf{x}, t; d\mathcal{V})$ jest jednorodną funkcją zerowego rzędu względem elementu $d\mathcal{V}$, tj. nie zależy od wielkości tego elementu, a jedynie od jego orientacji.

Wykorzystując reprezentacje (12) oraz zależność (40), wyrażenie (38) może być przedstawione w postaci:

$$d\mathbf{h} = \bar{\boldsymbol{\pi}}(\mathbf{x}, t) dV = \boldsymbol{\pi}(\mathbf{x}, t) dV_A \quad (41)$$

gdzie:

$$\bar{\boldsymbol{\pi}}(\mathbf{x}, t) = \Pi \vdash \mathbf{E}_3, \boldsymbol{\pi}(\mathbf{x}, t) = \Pi \vdash \mathbf{E}_3^A$$

$$\bar{\boldsymbol{\pi}}(\mathbf{x}, t) = f_v, \boldsymbol{\pi}(\mathbf{x}, t) \in \mathcal{V}$$

są wektorami gęstości objętościowej sił wzajemnego oddziaływania płynu ze szkieletem, odpowiednio, odniesionymi do jednostki objętości ośrodka i jednostki objętości porów.

Aby określić siłę masową z jaką działa zewnętrzne pole grawitacyjne na płyn zawarty w obszarze D przez

$$d\mathbf{g} = \hat{\mathbf{g}}(\mathbf{x}, t; dm), \in \mathcal{V} \quad (42)$$

oznaczymy formę różniczkową definiującą siłę $d\mathbf{g}$ oddziaływania pola grawitacyjnego na masę dm zawartą elemencie objętości $d\mathcal{V}$ ośrodka. Funkcja $\hat{\mathbf{g}}(\mathbf{x}, t; dm)$ powinna przy tym spełniać warunek jednorodności postaci:

$$\hat{\mathbf{g}}(\mathbf{x}, t; k dm) = k \hat{\mathbf{g}}(\mathbf{x}, t; dm) \quad k > 0 \quad (43)$$

Ze względu na skalarny charakter wielkości dm , warunek (43) powoduje, że funkcja $\hat{\mathbf{g}}(\mathbf{x}, t; dm)$ musi być liniowa względem masy dm . Otrzymujemy:

$$\hat{\mathbf{g}}(\mathbf{x}, t; dm) = \mathbf{b}(\mathbf{x}, t) dm$$

a także

$$d\mathbf{g} = \mathbf{b}(\mathbf{x}, t) dm \quad (44)$$

gdzie $\mathbf{b}(\mathbf{x}, t)$ jest wektorem gęstości masowej sił zewnętrznych.

Uwzględniając reprezentacje (12), forma różniczkowa (42) może być alternatywnie zapisana w postaci:

$$d\mathbf{g} = \rho \mathbf{b}(\mathbf{x}, t) dV_A = \bar{\rho} \mathbf{b}(\mathbf{x}, t) dV \quad (45)$$

Równanie bilansu pędu płynu. Wykorzystując sformułowane wyżej formy różniczkowe dla pędu i strumienia pędu (30), dla sił wewnętrznych w płynie (34) oraz dla siły oddziaływania płynu ze szkieletem (41) i dla siły masowej (44), całkowite równanie bilansu pędu płynu w obszarze D może być przedstawione w postaci:

$$\begin{aligned} \frac{d}{dt} \int_D \rho \mathbf{v} dV_A = & - \int_{\partial D} \rho \mathbf{v} \mathbf{v} \cdot \mathbf{M}_A(\mathbf{N}) \cdot \mathbf{N} dS_A + \\ & + \int_{\partial D} \mathbf{T} \cdot \mathbf{M}_A(\mathbf{N}) \cdot \mathbf{N} dS_A + \int_D \boldsymbol{\pi} dV_A + \int_D \rho \mathbf{b} dV_A \end{aligned} \quad (46)$$

Po wykorzystaniu twierdzenia Gaussa-Ostrogradskiego oraz równania bilansu masy (29) otrzymamy postać lokalną równania (46),

$$\rho \frac{D\mathbf{v}}{Dt} = \mathbf{T} \cdot \nabla + \boldsymbol{\pi} + \rho \mathbf{b} \quad (47)$$

Z (47) wynika, że równanie bilansu pędu płynu w postaci absolutnej, podobnie jak równanie bilansu masy (29), nie zależy w sposób jawny od metryki przesytrzeni porów szkieletu. Domknięcie tych równań wymaga sformułowania związków konstytutywnych dla fazowego tensora naprężenia \mathbf{T} definiującego własności mechaniczne płynu oraz dla siły $\boldsymbol{\pi}$ lepkiego oddziaływania płynu ze szkieletem. Zagadnienia te będą przedmiotem rozważań oddzielnej pracy.

6. WPŁYW STRUKTURY PRZESTRZENI PORÓW NA PROPAGACJĘ FAL W PŁYNIU

Aby zilustrować wpływ anizotropowej struktury przestrzeni porów szkieletu na przebieg zjawisk dynamicznych w płynie wypełniającym jego pory, rozważymy zagadnienie propagacji fal w takim ośrodku. Przyjmijemy przy tym następujące założenia:

- zaburzenia płynu mają małą amplitudę,
- płyn jest nielepekki, barotropowy i nie oddziałuje cieplnie ze szkieletem,
- pomijamy wpływ sił masowych.

Założenie pierwsze eliminuje z opisu nieliniowości fizyczne, pozostawiając nieliniowości geometryczne powodowane strukturą przestrzeni porów szkieletu.

Założenie drugie natomiast umożliwi pominięcie siły $\boldsymbol{\pi}$ lepkiego oddziaływania płynu ze szkieletem i oznacza, że ciśnienie płynu w porach szkieletu jest jednoznacznie funkcją gęstości fazowej płynu ρ ,

$$p = p(\rho) \quad (48)$$

Biorąc pod uwagę, że przy braku ruchu płynu, jego ciśnienie w każdym punkcie porów ośrodka jest takie samo, wektor fazowego naprężenia \mathbf{t} charakteryzujący wielkość sił wewnętrznych w płynie działających na jednostkę pola powierzchni porów w płaszczyźnie o normalnej \mathbf{N} (względem metryki Minkowskiego), powinien być współliniowy z tym wersorem, a jego długość względem metryki porów równa ciśnieniu w płynie porowym. Równanie konstytutywne dla wektora naprężenia \mathbf{t} przyjmie zatem postać:

$$\mathbf{t} = -p(\rho) \mathbf{N} \quad (49)$$

Wówczas bowiem:

$$t = |\mathbf{t}|_A = \sqrt{\mathbf{t} \cdot \mathbf{M}_A(\mathbf{t}) \cdot \mathbf{t}} = p(\rho)$$

dla dowolnego kierunku wersora \mathbf{N} . O ciśnieniu p zakładamy, że jest znaną funkcją gęstości płynu ρ .

Po uwzględnieniu w wraźeniu (49) zależności (35)₂ pomiędzy fazowym wektorem i tensorem naprężenia w płynie, dla funkcji konstytutywnej tensora naprężenia w płynie $\mathbf{T} = \mathbf{T}_s(\rho)$ otrzymamy tożsamość:

$$\mathbf{T}_s(\rho) \cdot \mathbf{M}_s(\mathbf{N}) \cdot \mathbf{N} = -p(\rho) \mathbf{N} \quad (50)$$

która powinna być spełniona dla dowolnego kierunku wektora \mathbf{N} . Ze względu na liniową zależność prawej strony tożsamości (50) od wektora \mathbf{N} mamy:

$$\mathbf{T} \cdot \mathbf{M}_s(\mathbf{N}) = -p(\rho) \mathbf{I} \quad (51)$$

Przy powyższych założeniach równania (29), (47), (51) i (48) przyjmują postać:

$$\frac{\partial \rho}{\partial t} + \rho_0 \nabla \cdot \mathbf{v} = 0$$

$$\rho_0 \frac{\partial \mathbf{v}}{\partial t} = \nabla \cdot \mathbf{T}$$

$$\mathbf{T} \cdot \mathbf{M}_s(\mathbf{N}) = -p \mathbf{I}$$

$$p - p_0 = a_0^2 (\rho - \rho_0)$$

gdzie przez p_0 i ρ_0 oznaczono ciśnienie porowe i gęstość fazową płynu w stanie niezaburzonego ośrodka, natomiast:

$$a_0 = \sqrt{dp/d\rho}|_{\rho = \rho_0}$$

jest prędkością propagacji zaburzeń w samym płynie, poza ośrodkiem porowatym.

Po wyeliminowaniu tensora \mathbf{T} z równania ruchu płynu (52)₂ otrzymujemy:

$$\mathcal{M}_s(\mathbf{v}) \cdot \frac{\partial \mathbf{v}}{\partial t} = \bar{\nabla}\{p\} \quad (53)$$

gdzie $\bar{\nabla}\{p\} = \mathbf{M}^{-1} \cdot \nabla\{p\} \in \mathcal{V}$ jest wektorem gradientu ciśnienia, a wielkość

$$\mathcal{M}_s(\mathbf{v}) = \rho_0 \mathbf{M}^{-1} \cdot \mathbf{M}_s(\mathbf{v}) \quad (54)$$

może być interpretowana jako tensor gęstości płynu wypełniającego anizotropową przestrzeń porów szkieletu. Tensor ten charakteryzuje fazowy udział masy płynu w jego ruchu w poszczególnych kierunkach porowatego szkieletu i jest wyrazem sprzężenia dynamicznego pomiędzy płynem i szkieletem. Znaczenie i charakter wpływu tego sprzężenia na propagację fal podkreśla fakt, że w przypadku nielepkiego płynu siły dynamiczne w płynie oraz jego właściwości sprężyste całkowicie określają przebieg tych zjawisk. Z (53) wynika, że w ogólnym przypadku wektor przyspieszenia płynu nie jest współliniowy z wektorem gradientu ciśnienia płynu.

Równanie ruchu (53) wraz z równaniem ciągłości (52)₁ i związkami (52)₄, tworzą układ określający sprzężone pola ciśnienia, gęstości i prędkości płynu w falach propagujących się w nasyconych ośrodkach porowatych o anizotropowej strukturze przestrzeni porów.

W przypadku struktury porów szkieletu scharakteryzowanej tensorem metrycznym \mathbf{M}_s , niezależnym od kierunku w przestrzeni porów, z układu równań (52) można wyprowadzić równanie falowe dla pola ciśnienia w płynie. Otrzymujemy:

$$\frac{\partial^2 p}{\partial t^2} = a_0^2 \nabla \cdot \mathbf{M}_A^{-1} \cdot \nabla \{p\} \quad (55)$$

Tensor metryczny \mathbf{M}_A , w tej postaci, opisuje anizotropową przestrzeń porów szkieletu o ortotropowej strukturze.

Równanie (55) zapisane w kartezjańskim układzie współrzędnych związanym z kierunkami głównymi tensora \mathbf{M}_A , przyjmuje postać:

$$\frac{\partial^2 p}{\partial t^2} = c_1^2 \frac{\partial^2 p}{\partial x_1^2} + c_2^2 \frac{\partial^2 p}{\partial x_2^2} + c_3^2 \frac{\partial^2 p}{\partial x_3^2}$$

gdzie $c_i = a_0/\delta_i$ ($i = 1, 2, 3$) jest prędkością propagacji fali w i -tym kierunku głównym ortotropowej przestrzeni porów, natomiast δ_i ($\delta_i \geq 1$) jest parametrem, krętości porów w tym kierunku.

Z powyższych zależności wynika, że prędkość propagacji fal w płynie wypełniającym ortotropową przestrzeń porów szkieletu zależy od kierunku propagacji fal i jest odwrotnie proporcjonalna do krętości porów w tym kierunku. Prędkość fal w takim ośrodku jest zawsze nie większa od ich prędkości w samym płynie, poza porowatym szkieletem.

7. UWAGI KOŃCOWE

W pracy sformułowano równania bilansu masy i pędu płynu przepływającego przez ośrodek porowaty o anizotropowej strukturze przestrzeni porów wykorzystując metryczną przestrzeń Minkowskiego jako model anizotropowej przestrzeni porów. Wyprowadzono także równania falowe dla zaburzeń o małej amplitudzie w barotropowym, nielepkim płynie wypełniającym taki ośrodek. Pokazano, że zarówno równanie bilansu masy jak i pędu płynu w postaci absolutnej nie zależą jawnie od metryki przestrzeni, w której ruch płynu ma miejsce. Wykazano, że tensor metryczny przestrzeni porów szkieletu określa fazowy udział masy płynu w jego ruchu w poszczególnych kierunkach porowatego szkieletu, decydując o wielkości sprzężenia dynamicznego między płynem i szkieletem. Wykazano również, że prędkość płaskiej fali w takim ośrodku zależy od kierunku jej propagacji i dla kierunków głównych przestrzeni porów szkieletu jest odwrotnie proporcjonalna do krętości porów.

Otrzymane równania bilansowe wymagają uzupełnienia o związki konstytutywne dla tensora naprężenia w lepkim płynie charakteryzującego jego własności mechaniczne w porach szkieletu, oraz dla sił lepkiego oddziaływania płynu ze szkieletem. Umożliwi to uzyskanie uogólnionych równań Brinkmana i Darcy opisujących przepływ płynu w anizotropowej przestrzeni porów szkieletu, a także równań falowych uwzględniających wpływ anizotropowej struktury przestrzeni porów na tłumienie fal w takim ośrodku.

Należy podkreślić, że przedstawiony opis ruchu płynu w anizotropowej przestrzeni porów nieodkształcalnego szkieletu stanowi dogodny punkt wyjścia dla modelowania nasyconych płynem deformowalnych materiałów porowatych, w których koncepcja deformującej się przestrzeni metrycznej (przestrzeni Finslera) jako modelu anizotropowej przestrzeni porów zajmowałaby centralne miejsce.

LITERATURA

- [1] D. Bao, S. Chern, Z. Shen, 2002. An introduction to Riemman-Finsler geometry. Springer-Verlag, New York-Berlin.
- [2] P. Carman, 1956. Flow of gases throught porous media. Butterworths Scientific Publicatoions, Londyn.
- [3] M. Cieszko, 2000. ZAMM, **80**, ss. 129-132.
- [4] M. Cieszko, 2000. Wyd. Uczeln. ATR w Bydgoszczy, Zesz. Nauk., **228**(1), ss. 81-90.
- [5] H. Rund, 1959. The Differential Geometry of Finsler Spaces. Springer-Verlag, Berlin-Gottingen-Heidelberg.
- [6] A. Scheideger, 1974. The physics of flow through porous media. Univ. of Toronto.
- [7] A.C. Thompson, 1996. Minkowski Geometry. Encyclopedia of Mathematics and its Applications, Cambridge University Press.
- [8] H. Flanders, 1969. Teoria form różniczkowych. PWN Warszawa.

FLUID DYNAMICS IN PERMEABLE POROUS MATERIALS WITH ANISOTROPIC PORE SPACE STRUCTURE

Summary

The paper describes fluid motion in a rigid porous medium of anisotropic pore space structure. The discussion was based on the new macroscopic model of saturated porous medium (Cieszko [3], [4]) in which fluid flow through porous skeleton of anisotropic pore structure is described as a motion of the material continuum in the plane anisotropic metric space (Minkowski space) immersed in the Euclidean one that is the model of the physical space. The mass and linear momentum balance equations for fluid were derived and the equation for wave propagation in barotropic inviscid fluid filling anisotropic space of pores was obtained. It was shown that the velocity of the plane wave in such a medium depends on the direction of wave propagation and for the principal direction of the pore space is invesely proportional to the tortuosity of pores.

Keywords: porous materials, pore structure, Minkowski space

PROBABILISTYCZNE OSZACOWANIE CZĘSTOTLIWOŚCI DRGAŃ WŁASNYCH UKŁADU DRGAJĄCEGO O CZTERECH STOPNIACH SWOBODY

Zbigniew Dąbek

Akademia Techniczno-Rolnicza, Wydział Mechaniczny
Katedra Techniki Ciepłej i Metrologii
ul. Prof. S. Kaliskiego 7, 85-796 Bydgoszcz

W referacie przedstawiono probabilistyczne oszacowanie rozrzutu wartości parametrów technicznych metodą numerycznej kompozycji rozkładów prawdopodobieństwa. Wybrany parametr techniczny traktuje się jako zmienną losową będącą określoną funkcją innych parametrów technicznych traktowanych jako niezależne zmienne losowe. Zdaniem autora, wyniki otrzymane tą drogą, bardziej odpowiadają rzeczywistości niż przyjęty z założenia model probabilistyczny oparty na rozkładzie normalnym.

Słowa kluczowe: drgania własne, metody numeryczne, kompozycja rozkładów prawdopodobieństwa.

1. WSTĘP

Podstawą rozwiązywania w większości zadań technicznych jest model matematyczny zjawiska lub urządzenia technicznego i często warunków, w jakich ono będzie funkcjonować. W takim przypadku przeprowadza się obliczenia na pewnych wartościach charakterystycznych dla danego zadania, które można nazwać wartościami nominalnymi. Przy praktycznej realizacji takiego zadania, wartości rzeczywiste parametrów technicznych będą się jednak różniły od ich wartości nominalnych. Jest to skutek nieuniknionych błędów wykonawczych parametrów technicznych, które można nazwać składowymi. W efekcie, wartość parametru technicznego charakteryzującego dane urządzenie (można go nazwać wynikowym), będzie się również różniła od obliczonej w warunkach modelowych wartości nominalnej. Istotnym więc staje się problem oszacowania odchylenia wartości parametru wynikowego względem jego wartości nominalnej.

Oszacowanie to można dokonać metodami deterministycznymi, obliczając maksymalne możliwe odchylenie wartości parametru wynikowego względem jego wartości nominalnej lub metodami probabilistycznymi, oceniając jego odchylenie prawdopodobne. W przypadku obliczeń deterministycznych stosuje się często wzór:

$$\Delta y = \sum_{i=1}^n \left| \frac{\partial y}{\partial x_i} \right| \Delta x_i \quad (1)$$

gdzie:

$$y = f(x_1, \dots, x_n),$$

Δy - możliwy rozrzut wartości badanego parametru.

Δx_i - dopuszczalny rozrzut wartości parametru (dla $i=1, \dots, n$)

Postępowanie takie ma tę zaletę, że nawet przy najniekorzystniejszym zbiegu odchyżeń poszczególnych wielkości składowych, rzeczywista wartość rozrzutu badanego parametru nie przekroczy wartości obliczonej, a więc praktycznie, jeśli obliczony rozrzut jest możliwy do przyjęcia, to dalsze analizy można już pominąć. Jest to rozwiązanie deterministyczne, a więc z prawdopodobieństwem 1. Jednocześnie oznacza to, że prawdopodobieństwo przypadku, aby rzeczywista wartość rozrzutu odpowiadała obliczonej, jest równa zero. Stąd jedyny wniosek, że jest to rozwiązanie teoretyczne i skrajnie pesymistyczne.

Ponieważ rzeczywiste odchylenia wartości parametrów technicznych od ich wartości nominalnych mają charakter losowy, który powoduje, że poszczególne odchylenia mogą wzajemnie kompensować lub sumować, należy zastosować analizę probabilistyczną. Istnieje szereg takich metod, z czego najczęściej stosuje się wzór przyjęty przy obliczaniu niepewności pomiaru pośredniego:

$$s_y = \sqrt{\sum_{i=1}^n \left(\frac{\partial y}{\partial x_i} \right)^2 s_i^2} \quad (2)$$

gdzie s_1, \dots, s_n przedstawiają odchylenia średnie kwadratowe pomiaru bezpośredniego (tzw. niepewności standardowe) wielkości x_1, \dots, x_n przyjmując, że pomiar pośredni jest opisany funkcją

$$y = f(x_1, \dots, x_n) \quad (3)$$

W zasadzie zależność (3) powinna być napisana w postaci:

$$\sigma_y \approx \sqrt{\sum_{i=1}^n \left(\frac{\partial y}{\partial x_i} \right)^2 \sigma_i^2} \quad (4)$$

gdzie σ_y oraz σ_i są parametrami populacji generalnej.

Ostatecznie, rozrzut badanego parametru można oszacować (przez analogię do niepewności pomiaru pośredniego) jako:

$$\Delta y = \bar{y} + k\sigma_y \quad (5)$$

gdzie k jest wsp. rozszerzenia przyjmowanym zwykle jako 2 lub 3 [5,6,8].

I tu nasuwa się szereg wątpliwości:

- dla funkcji nieliniowych zależność (4) jest przybliżona oraz wynika z rozwinięcia funkcji w szereg Taylora i tu jest **pierwsze** przybliżenie,
- wartość σ_i nigdy nie jest znana, a dla jej oszacowania można jedynie posłużyć się jej estymatorami - **drugie** przybliżenie,
- pomnożenie wartości σ_y przez wsp. rozszerzenia k jest skorzystaniem z własności rozkładu normalnego, ale rozkład normalny powstaje w wyniku **sumy** niezależnych zmiennych losowych, których **wpływ** na wartość funkcji jest **jednakowy**. Tutaj suma może być przypadkiem szczególnym, którego się nie rozpatruje. Rozpatruje się w zasadzie funkcje nieliniowe. Jeśli uwzględnia się wartość pierwszej pochodnej to znaczy, że uwzględnia się wpływ poszczególnych zmiennych, a więc przeczy się wa-

runkom powstania rozkładu normalnego. Wynika z tego więc **kolejne** przybliżenie, którego stopień jest nieznanym,

Praktyczne wykorzystanie informacji o wartości s_y jest, wbrew pozorom, dość trudne. Wynika to z faktu, że rozkład zmiennej losowej y nie jest znany.

Rekapitulując: wynik takiego postępowania należy traktować jako zgrubne oszacowanie niepewności pomiaru pośredniego bez powoływania się na jakiegokolwiek prawdopodobieństwo.

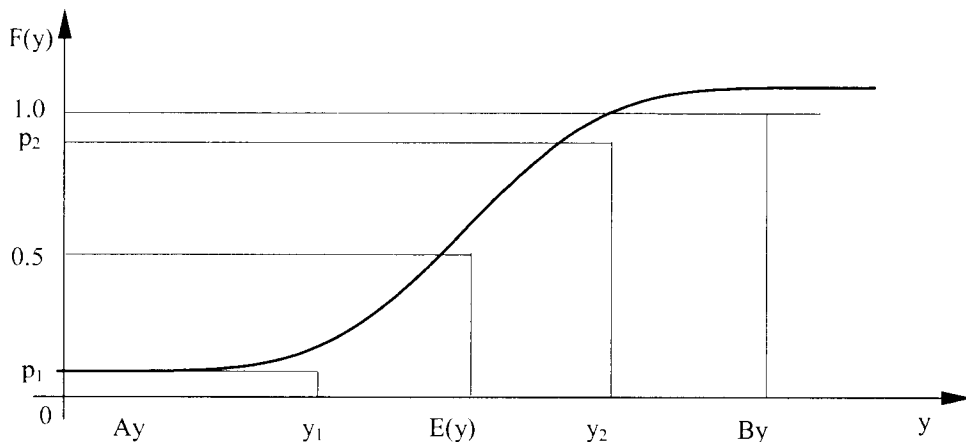
Jak do tej pory, nie ma w matematyce twierdzenia, które (na drodze analitycznej) rozwiązywałoby problem kompozycji dowolnych rozkładów prawdopodobieństwa, zwłaszcza w przypadku, kiedy zmienna losowa jest dowolną funkcją innych zmiennych losowych.

Mając to na uwadze, autor poleca algorytm¹, który polega na numerycznej kompozycji rozkładów prawdopodobieństwa wielkości składowych, przy czym:

- zbędne jest założenie normalności rozkładu,
- postać funkcji określającej pomiar pośredni jest dowolna - funkcja może być nawet nieciągła,
- dowolne są rozkłady prawdopodobieństwa wielkości składowych - mogą być dyskretne, (a więc istnieje możliwość uwzględnienia rozkładów empirycznych).

W wyniku obliczeń otrzymuje się zarówno rozwiązanie deterministyczne (z prawdopodobieństwem 1), a więc wartość maksymalną błędu granicznego, jak i rozwiązanie probabilistyczne tzn. funkcje gęstości prawdopodobieństwa i dystrybuantę, z czego łatwo jest odczytać niepewność pomiaru przy założonym prawdopodobieństwie oceny (z wykresu lub tabulogramu),

W wyniku obliczeń otrzymuje się również obliczone wszystkie podstawowe parametry statystyczne wyznaczonego rozkładu prawdopodobieństwa wielkości mierzonej.



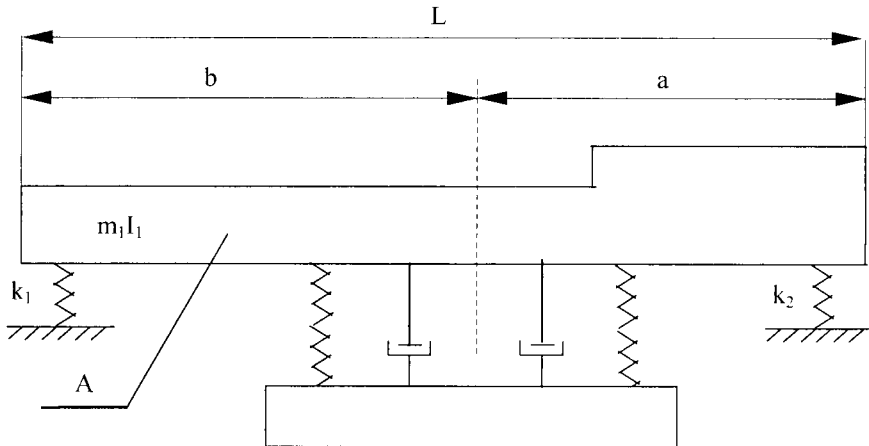
Rys. 1. Dystrybuanta wielkości wynikowej i praktyczny sposób jej wykorzystania

$$P(Y \in (y_1, y_2)) = p_2 - p_1 \tag{6}$$

¹ Algorytm jest opisany w [3, 4] wraz z przykładami zastosowania.

2. OBLICZENIE CZĘSTOTLIWOŚCI DRGAŃ WŁASNYCH UKŁADU DRGAJĄCEGO O CZTERECH STOPNIACH SWOBODY

Przedmiotem analizy jest układ drgający przedstawiony na rysunku 2, i opisany w [7] przy czym założono, że element oznaczony na rysunku 2 symbolem „A” jest przedmiotem o złożonym kształcie tak, że wyznaczenie jego środka ciężkości oraz momentu bezwładności metodami analitycznymi jest niemożliwe. Długość L jest wymiarem gabarytowym.



Rys. 2. Układ drgający o czterech stopniach swobody wg [7]

Częstotliwość drgań własnych przedmiotu „A” określona została zależnością [7]:

$$\omega_{1,2}^2 = \frac{1}{2} \left(\frac{2k_1}{m_1} + \frac{k_1(a^2 + b^2)}{I_1} \mp \sqrt{\left(\frac{2k_1}{m_1} + \frac{k_1(a^2 + b^2)}{I_1} \right)^2 - \frac{4k_1^2(a^2 + b^2)}{m_1 I_1}} \right) \quad (7)$$

gdzie:

- $\omega_{1,2}$ - częstotliwości drgań własnych w rd/s,
- m_1 - masa belki w kg,
- a, b - odległości od środka ciężkości w m,
- k_1 - sztywność sprężyny w N/m,
- I_1 - moment bezwładności w $\text{kg} \cdot \text{m}^2$

W niniejszym referacie ograniczono się jedynie do wyznaczenia częstotliwości drgań własnych przedmiotu „A”.

Oszacowanie rzeczywistych odchyłek od wartości nominalnych poszczególnych parametrów może nie być łatwe przy założeniu, że badany przedmiot charakteryzuje się nierównomiernym rozłożeniem masy.

Pomiar masy jest stosunkowo łatwy, ponieważ można go dokonać na zwykłej wadze uchyłnej z niedokładnością rzędu ± 1 dag.

Zmierzenie wymiaru gabarytowego L też nie powinno sprawiać trudności, jeśli przyjąć, że można zmierzyć jego rzut na płaszczyznę podstawy i można przyjąć, iż niedokładność takiego pomiaru nie powinna przekroczyć ± 3 mm.

Wyznaczenie położenia środka ciężkości jest sprawa złożoną, jeśli nie można tego dokonać metodami analitycznymi. Doświadczalna metoda takiego pomiaru opisana jest w [1], gdzie niedokładność takiego pomiaru oszacowano (przy pewnych założeniach przeprowadzania eksperymentu) oszacowano na $\pm 13\%$. Dotyczy to wprawdzie elementów dużych (pojazdy szynowe) ale sądząc z opisu metody, nie należy przypuszczać, aby masa przedmiotu odgrywała tu znaczącą rolę.

Moment bezwładności również można wyznaczyć eksperymentalnie kierując się opisami podanymi w [1, 2]. Z przedstawionego opisu nie należy sądzić, aby niedokładność takiego pomiaru była mniejsza od $\pm 15\%$.

Oszacowanie odchylenia rzeczywistego sztywności sprężyny, można dokonać dość łatwo, a niedokładność takiego oszacowania nie powinna przekraczać ok. 1%.

Uwzględniając powyższe uwagi, można przyjąć następujący zestaw danych, które symulują warunki rzeczywiste.

$$m_1 = (25,0 \pm 0,01) \text{ kg,}$$

$$L = (4,0 \pm 0,003)$$

$$b = (3,0 \pm 0,4) \text{ m,}$$

$$k_{1,2} = (50,0 \pm 0,5) \text{ kN/m,}$$

$$I_1 = (50,0 \pm 7,5) \text{ kg}\cdot\text{m}^2$$

Niewielkiej modyfikacji musi ulec wzór (7), ponieważ sztywność sprężyn w warunkach rzeczywistych zawsze będzie różna, a współrzędne środka ciężkości należy odnieść do jednej bazy, stąd:

$$\omega_{1,2}^2 = \frac{1}{2} \left(\frac{k_1 + k_2}{m_1} + \frac{(k_1 + k_2)[(L - b)^2 + b^2]}{2I_1} \mp \sqrt{\left(\frac{k_1 + k_2}{m_1} + \frac{(k_1 + k_2)[(L - b)^2 + b^2]}{2I_1} \right)^2 - \frac{2(k_1^2 + k_2^2)[(L - b)^2 + b^2]}{m_1 I_1}} \right) \quad (8)$$

We wspomnianej metodzie kompozycji rozkładów prawdopodobieństwa przyjęto, że parametry m_1 , L , b , $k_{1,2}$ i I_1 są zmiennymi losowymi o rozkładach jednostajnych. Takie założenie przyjmuje się zwykle w przypadku oceny błędów pomiarów i zalecane jest przez ustalenia międzynarodowe [5,6], kiedy nieznanne są rozkłady prawdopodobieństwa.

3. WYNIKI OBLICZEŃ

A. Obliczenie częstotliwości ω_1

Wartości graniczne $\omega_{1 \min} = 38,587$ $\omega_{1 \max} = 41,692$

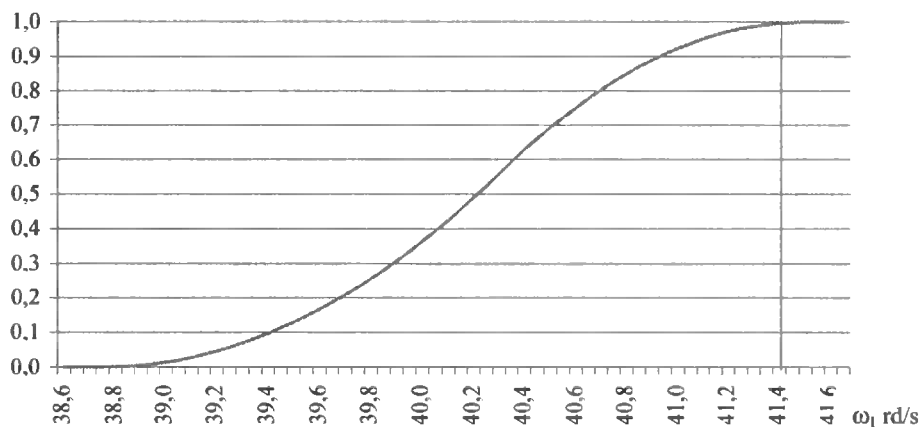
Rozrzut wartości $\Delta\omega_1 = 3,105$

Parametry rozkładu prawdopodobieństwa zmiennej losowej ω_1

Wartość oczekiwana $m = 40,1989$

Odchylenie standardowe	$\sigma = 0,561777$
Mediana	$Me = 40,225220$
Modalna	$Mo = 40,301218$
Współczynnik asymetrii	$a_3 = -0,131398$
Współczynnik spłaszczenia	$a_4 = 2,409009$

Prawdopodobieństwo

Rys. 3. Dystrybuanta zmiennej losowej ω_1

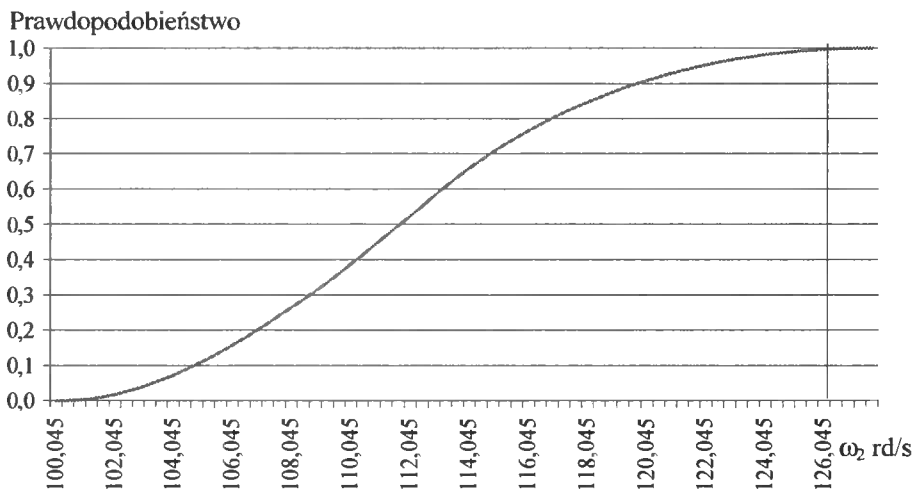
Z wykresu wynika, że z prawdopodobieństwem bliskim jedności można oczekiwać, że prawdopodobny rozrzut wartości ω_1 będzie w przedziale $\langle 38,86; 41,40 \rangle$ rd/s co oznacza, że prawdopodobny rozrzut będzie wynosił ok. 2,54 rd/s, a więc mniej niż wynika to z obliczeń deterministycznych.

B. Obliczenie częstotliwości ω_2

Wartości graniczne	$\omega_{1 \min} = 99.845$	$\omega_{1 \max} = 128.341$
Rozrzut wartości	$\Delta\omega_1 = 28.496$	

Parametry rozkładu prawdopodobieństwa zmiennej losowej ω_2

Wartość oczekiwana	$m = 111,9649$
Odchylenie standardowe	$\sigma = 5,539346$
Mediana	$Me = 111,704354$
Modalna	$Mo = 112,149652$
Współczynnik asymetrii	$a_3 = 0,274213$
Współczynnik spłaszczenia	$a_4 = 2,497805$


 Rys. 4. Dystrybuanta zmiennej losowej ω_2

Prawdopodobny wartość ω_2 będzie zawarta w przedziale $<101,045;126,045>$ rd/s a prawdopodobny rozrzut będzie wynosił ok. 25 rd/s, a więc również mniej niż wynika to z obliczeń deterministycznych.

4. WNIOSKI

- a. Nie ulega wątpliwości, że oszacowanie możliwego rozrzutu wartości parametrów technicznych będącego skutkiem odchyień od wartości nominalnych jest wskazane. Odpowiedź negatywna pozwoli na zwiększenie tolerancji wielkości składowych, co umożliwi zmniejszenie kosztów badań (konstrukcji). Odpowiedź pozytywna pozwoli na odpowiedni dopuszczalny dobór tolerancji, co też znajdzie swoje odbicie w kosztach.
- b. Rozwiązanie deterministyczne pozwala na oszacowanie wartości rozrzutu badanego parametru technicznego zakładając najniekorzystniejszy zbieg odchyień poszczególnych wielkości. Daje to, pewność z prawdopodobieństwem 1, ale otrzymane rozwiązanie jest zbyt asekuracyjne i jego przydatność techniczna jest w większości przypadków wątpliwa. Sensowne rozwiązanie można jedynie otrzymać metodami probabilistycznymi
- c. W rozpatrywanym przypadku pierwsza częstotliwość drgań własnych może się różnić o $\pm 3\%$ od obliczonej wartości nominalnej częstotliwości, co przypuszczalnie nie będzie miało istotnego wpływu na praktyczne użytkowanie badanej konstrukcji.
- d. W drugim przypadku różnica ta stanowi $\pm 11\%$, co może już mieć praktyczne znaczenie.

LITERATURA

- [1] A. Chudzikiewicz, J. Drożdźiel, J. Kisilowski, A. Żochowski, 1982. Modelowanie i analiza dynamiki układu mechanicznego tor-pojazd. PWN Warszawa
- [2] J. Drożdźiel, J. Kisilowski, W. Kus, 1979. Niektóre metody identyfikacji parametrów i własności dynamicznych pojazdów szynowych. Archiwum Budowy Maszyn T. XXVI, z.3, ss. 367-383.

- [3] Z. Dąbek, 1976. O pewnej metodzie analizy wymiarowej. Normalizacja nr 12.
- [4] Z. Dąbek, 1980. Numeryczne metody analizy wielkości tolerowanych. Wyd. Uczeln. ATR Bydgoszcz.
- [5] Guidance Document on Measurement Uncertainty. Comité of Testing Laboratories IECEE/CTL (Sec) 056/94.
- [6] Guide to expression of uncertainty in measurement. NAMAS. September 1994 r.
- [7] H. Holka, 1984. The dynamic vibration absorber for the main system with degrees of freedom. International Symposium on Design and Synthesis. JSPE+IFTOMM Tokyo. ss. 849-852.
- [8] Wytyczne do obliczania i wyrażania niepewności pomiaru. Główny Urząd Miar. Warszawa, 1994 r.

FREE VIBRATION PROBABILITY DISTRIBUTION ESTIMATION OF A SYSTEM WITH FOUR DEGREES OF FREEDOM

Summary

This paper presents probability analysis of technical parameters values distribution of a system with four degrees of freedom using compound probability distribution. was clone. Numerical method was adopted. A given technical parameter is treated as a random variable, being the function of other technical parameters treated as independent random variables. The results obtained in this way are closer to reality than probabilistic model based on normal distribution.

Keywords: free vibration, numerical method, compound probability distribution

POPRZECZNE ZGINANIE PŁYTY PROSTOKĄTNEJ UTWIERDZONEJ NA WSZYSTKICH KRAWĘDZIACH

Mykhaylo Delyavskyy¹⁾, Robert Ran¹⁾, Luba Grinczenko²⁾, Natalia Beregova²⁾

¹⁾ Akademia Techniczno-Rolnicza
Wydział Budownictwa i Inżynierii Środowiska, Katedra Mechaniki Budowli
w Bydgoszczy

²⁾ Lutski Industrialny Uniwersytet, Lutsk, Ukraina

Celem pracy jest opracowanie metody wyznaczania wszystkich wielkości statycznych i geometrycznych w prostokątnej płycie izotropowej, utwierdzonej na wszystkich czterech krawędziach. Opracowana metoda opiera się na teorii Kirchhoffa. Za niewiadome podstawowe wybrano przemieszczenia. Uzyskano wyrażenia na siły przekrojowe oraz wykonano obliczenia numeryczne.

Słowa kluczowe: płyta prostokątna utwierdzone, metoda rozwiązywania, stan naprężeń i odkształceń, szeregi Fouriera, obciążenie poprzeczne, oparcie utwierdzone

1. PODSTAWOWE ZAŁOŻENIA I RÓWNANIA

Rozważmy cienką płytę izotropową o grubości h i wymiarach w rzucie $2a_j$ ($j = 1, 2$) utwierdzonej na wszystkich krawędziach na którą działa obciążenie stałe $q(x_1, x_2) = q_0$. Zginanie takiej płyty opisujemy równaniem różniczkowym czwartego stopnia [1-4]:

$$\frac{\partial^4 w}{\partial x_1^4} + 2 \frac{\partial^4 w}{\partial x_1^2 \partial x_2^2} + \frac{\partial^4 w}{\partial x_2^4} = \frac{q_0}{D} \quad (1)$$

gdzie: $w(x_1, x_2)$ oznacza ugięcie płyty, $D = \frac{Eh^3}{12(1-\nu^2)}$ - sztywność na zginanie, natomiast E i ν odpowiednio moduł Younga i współczynnik Poissona. Momenty zginające M_{11} oraz M_{22} wyrażamy przez nieznaną funkcje ugięcia płyty $w(x_1, x_2)$:

$$M_{11} = -D \left(\frac{\partial^2 w}{\partial x_1^2} + \nu \frac{\partial^2 w}{\partial x_2^2} \right), \quad M_{22} = -D \left(\frac{\partial^2 w}{\partial x_2^2} + \nu \frac{\partial^2 w}{\partial x_1^2} \right). \quad (2)$$

2. ROZWIĄZANIE PODSTAWOWYCH RÓWNAŃ TEORII PŁYT

W celu określenia stanu naprężenia i odkształcenia w płycie musimy wyznaczyć funkcje ugięcia $w(x_1, x_2)$. Funkcje tę otrzymamy z rozwiązania równania różniczkowego (1).

Ogólne rozwiązanie niejednorodnego równania różniczkowego (1) poszukujemy w postaci sumy:

$$w = w_0 + w_* \quad (3)$$

całki ogólnej w_0 jednorodnego równania różniczkowego:

$$\frac{\partial^4 w}{\partial x_1^4} + 2 \frac{\partial^4 w}{\partial x_1^2 \partial x_2^2} + \frac{\partial^4 w}{\partial x_2^4} = 0 \quad (4)$$

oraz całki szczególnej w_* niejednorodnego równania (1). Całkę szczególną wybieramy w postaci:

$$w_* = \frac{q_0 (x_1^2 - a_1^2) \cdot (x_2^2 - a_2^2)}{8D} \quad (5)$$

Natomiast rozwiązanie ogólne równania jednorodnego (4) szukamy w postaci [5]:

$$w_0 = \sum_{k=1}^{\infty} \left[f_k^{[1]}(x_1) \cos \delta_k^{[2]} x_2 + f_k^{[2]}(x_2) \cos \delta_k^{[1]} x_1 \right] \quad (6)$$

Podstawiamy wyrażenie (6) do równania (4). Po rozdzieleniu zmiennych otrzymujemy układ dwóch niezwiązanych zwyczajnych równań różniczkowych:

$$f_k^{[j]}(x_j) - 2\delta_k^{[3-j]} f_k^{[j]}(x_j) + \delta_k^{[3-j]} f_k^{[j]}(x_j) = 0 \quad j=1, 2 \quad (7)$$

względem nieznanymi funkcji $f_k^{[j]}(x_j)$. Rozwiązania szczególne danego układu wybieramy w postaci:

$$f_k^{[j]}(x_j) = R_k^{[j]} \exp(\lambda_k^{[j]} x_j) \quad (8)$$

gdzie $R_k^{[j]}$, $\lambda_k^{[j]}$ są niewiadomymi parametrami.

Po podstawieniu tych rozwiązań do równań (7) uzyskujemy równania charakterystyczne na parametry $\lambda_k^{[j]}$:

$$\lambda_k^{[j]} - 2\delta_k^{[3-j]} \lambda_k^{[j]} + \delta_k^{[3-j]} = 0 \quad (9)$$

Pierwiastki:

$$\lambda_{(1,2)k}^{[1]} = \delta_k^{[3-1]}, \quad \lambda_{(3,4)k}^{[1]} = -\delta_k^{[3-1]} \quad (10)$$

są krotne, dlatego całka ogólna równania (4) wynosi:

$$w_0 = \sum_{k=1}^{\infty} \left\{ \left[R_{1(k)}^{[1]} \exp(\delta_k^{[2]} x_1) + R_{2(k)}^{[1]} x_1 \exp(\delta_k^{[2]} x_1) \right] \cos(\delta_k^{[2]} x_2) + \left[R_{1(k)}^{[2]} \exp(\delta_k^{[1]} x_2) + R_{2(k)}^{[2]} x_2 \exp(\delta_k^{[1]} x_2) \right] \cos(\delta_k^{[1]} x_1) \right\} \quad (11)$$

Ograniczymy się tylko do analizy zagadnienia symetrycznego. Wówczas ugięcie płyty będzie funkcją symetryczną zmiennych x_1 i x_2 :

$$w_0 = \sum_{k=1}^{\infty} \left\{ \left[R_{1(k)}^{[1]} \operatorname{ch}(\delta_k^{[2]} x_1) + R_{2(k)}^{[1]} x_1 \operatorname{sh}(\delta_k^{[2]} x_1) \right] \cos(\delta_k^{[2]} x_2) + \left[R_{1(k)}^{[2]} \operatorname{ch}(\delta_k^{[1]} x_2) + R_{2(k)}^{[2]} x_2 \operatorname{sh}(\delta_k^{[1]} x_2) \right] \cos(\delta_k^{[1]} x_1) \right\} \quad (12)$$

Ze zwiększeniem liczby wyrazów (parametr k) w szeregach (12) funkcje eksponencjalne rosną bardzo szybko, co prowadzi do rozbieżności procesu obliczeniowego przy obliczeniach numerycznych. Po to, aby ulepszyć ten proces wprowadzimy cztery normowane funkcje:

$$\Phi_{1(k)}^{[j]}(x_j) = \frac{ch(\delta_k^{[3-j]} x_j)}{\exp(\delta_k^{[3-j]} a_j)}; \quad \Phi_{2(k)}^{[j]} = \frac{x_j}{a_j} \cdot \frac{sh(\delta_k^{[3-j]} x_j)}{\exp(\delta_k^{[3-j]} a_j)} \quad (13)$$

kóre nazwiemy funkcjami podstawowymi. Teraz rozwiązanie niejednorodnego równania (1) możemy zapisać w poniższej postaci:

$$w = \frac{q_0 a_1^4}{D} \sum_{k=1}^{\infty} \left\{ \left[R_{1(k)}^{[1]} \Phi_{1(k)}^{[1]}(x_1) + R_{2(k)}^{[1]} \Phi_{2(k)}^{[1]}(x_1) \right] C_k^{[2]}(x_2) + \left[R_{1(k)}^{[2]} \Phi_{1(k)}^{[2]}(x_2) + R_{2(k)}^{[2]} \cdot \Phi_{1(k)}^{[2]}(x_2) \right] C_k^{[1]}(x_1) + \frac{(x_1^2/a_1^2 - 1)(x_2^2/a_2^2 - 1)a_2^2}{8a_1^2} \right\} \quad (14)$$

W równaniu (14) wprowadzono następujące oznaczenia

$$C_k^{[j]}(x_j) = \cos(\delta_k^{[j]} x_j); \quad \delta_k^{[j]} = \frac{(2k-1)\pi}{2a_j}; \quad \delta_k = \frac{(2k-1)\pi}{2} \quad (15)$$

Różniczkując funkcje $w(x_1, x_2)$ po zmiennych x_1, x_2 otrzymujemy wyrażenia na kąty obrotów normalnej do powierzchni środkowej płyty:

$$\varphi_1 = \frac{\partial w}{\partial x_1} = \frac{q_0 a_1^4}{D} \sum_{k=1}^{\infty} \left\{ \left[R_{1(k)}^{[1]} \Phi_{1(k)}^{[1]'}(x_1) + R_{2(k)}^{[1]} \Phi_{2(k)}^{[1]'}(x_1) \right] C_k^{[2]}(x_2) + \left[R_{1(k)}^{[2]} \Phi_{1(k)}^{[2]}(x_2) + R_{2(k)}^{[2]} \cdot \Phi_{1(k)}^{[2]}(x_2) \right] C_k^{[1]'}(x_1) + \frac{x_1(x_2^2/a_2^2 - 1)a_2^2}{4a_1^4} \right\} \quad (16)$$

$$\varphi_2 = \frac{\partial w}{\partial x_2} = \frac{q_0 a_1^4}{D} \sum_{k=1}^{\infty} \left\{ \left[R_{1(k)}^{[1]} \Phi_{1(k)}^{[1]}(x_1) + R_{2(k)}^{[1]} \Phi_{2(k)}^{[1]}(x_1) \right] C_k^{[2]'}(x_2) + \left[R_{1(k)}^{[2]} \Phi_{1(k)}^{[2]'}(x_2) + R_{2(k)}^{[2]} \cdot \Phi_{1(k)}^{[2]'}(x_2) \right] C_k^{[1]}(x_1) + \frac{x_2(x_1^2/a_1^2 - 1)}{4a_1^2} \right\} \quad (17)$$

3. OKREŚLENIE WARUNKÓW BRZEGOWYCH

Nieznane stałe $R_{v(k)}^{[j]}$ określamy z warunków brzegowych na krawędziach płyty ($x_i = \pm a_i$):

$$w \Big|_{x_i = a_i} = 0, \quad \varphi_i = \frac{\partial w}{\partial x_i} \Big|_{x_i = a_i} = 0, \quad (18)$$

gdzie $\varphi_i(x_i)$ jest kątem obrotu krawędzi ($x_i = \pm a_i$). Podstawiamy wyrażenia (14), (16), (17) do warunków granicznych (18). Uwzględniając, że na krawędziach płyty ($x_i = \pm a_i$), $C_k^{[1]}(1) = 0$ otrzymujemy układ $2k + 2$ równań algebraicznych na nieznane współczynniki $R_{v(k)}^{[j]}$, $v = 1, 2$

$$\begin{aligned}
R_{1(k)}^{[1]} \cdot \Phi_{1(k)}^{[1]}(1) + R_{2(k)}^{[1]} \cdot \Phi_{2(k)}^{[1]}(1) &= 0; \\
R_{1(k)}^{[2]} \cdot \Phi_{1(k)}^{[2]}(1) + R_{2(k)}^{[2]} \cdot \Phi_{2(k)}^{[2]}(1) &= 0; \\
\sum_{k=1}^K \left\{ \left[R_{1(k)}^{[1/]} \cdot \hat{O}_{1(k)}^{[1/]}(1) + R_{2(k)}^{[1/]} \cdot \hat{O}_{2(k)}^{[1/]}(1) \right] \cdot C_k^{[2/]}(\xi_2) + \right. \\
&+ \left. \left[R_{1(k)}^{[2/]} \cdot \hat{O}_{1(k)}^{[2/]}(\xi_2) + R_{2(k)}^{[2/]} \cdot \hat{O}_{2(k)}^{[2/]}(\xi_2) \right] \cdot C_k^{[1/]}(1) \right\} + \frac{a_2^2}{4a_1^3} (\xi_2^2 - 1) = 0; \\
\sum_{k=1}^K \left\{ \left[R_{1(k)}^{[1]} \cdot \Phi_{1(k)}^{[1]}(\xi_1) + R_{2(k)}^{[1]} \cdot \Phi_{2(k)}^{[1]}(\xi_1) \right] \cdot C_k^{[2]}(1) + \right. \\
&+ \left. \left[R_{1(k)}^{[2]} \cdot \Phi_{1(k)}^{[2]}(1) + R_{2(k)}^{[2]} \cdot \Phi_{2(k)}^{[2]}(1) \right] \cdot C_k^{[1]}(\xi_1) \right\} + \frac{a_2^2}{4a_1^3} (\xi_1^2 - 1) = 0;
\end{aligned} \tag{19}$$

Z pierwszych $2k$ równań układu (19) określamy:

$$R_{2(k)}^{[j]} = - \frac{\Phi_{1(k)}^{[j]}(1)}{\Phi_{2(k)}^{[j]}(1)} R_{1(k)}^{[j]} \tag{20}$$

Podstawiając te związki do równań pozostałych uzyskujemy układ dwóch równań ze zmiennymi współczynnikami na nieznanne parametry $R_{1(k)}^{[1]}, R_{1(k)}^{[2]}$

$$\begin{aligned}
\sum_{k=1}^K \left\{ R_{1(k)}^{[1]} \left[\Phi_{1(k)}^{[1]}(1) - \frac{\Phi_{1(k)}^{[1]}(1)}{\Phi_{2(k)}^{[1]}(1)} \Phi_{2(k)}^{[1]}(1) \right] \cdot C_k^{[2]}(\xi_2) + \right. \\
&+ R_{1(k)}^{[2]} \left[\Phi_{1(k)}^{[2]}(\xi_2) - \frac{\Phi_{1(k)}^{[2]}(1)}{\Phi_{2(k)}^{[2]}(1)} \Phi_{2(k)}^{[2]}(\xi_2) \right] \cdot C_k^{[1]}(1) \left. \right\} + \frac{a_2^2}{4a_1^3} (\xi_2^2 - 1) = 0; \\
\sum_{k=1}^K \left\{ R_{1(k)}^{[1]} \left[\Phi_{1(k)}^{[1]}(\xi_1) - \frac{\Phi_{1(k)}^{[1]}(1)}{\Phi_{2(k)}^{[1]}(1)} \Phi_{2(k)}^{[1]}(\xi_1) \right] \cdot C_k^{[2]}(1) + \right. \\
&+ R_{1(k)}^{[2]} \left[\Phi_{1(k)}^{[2]}(1) - \frac{\Phi_{1(k)}^{[2]}(1)}{\Phi_{2(k)}^{[2]}(1)} \Phi_{2(k)}^{[2]}(1) \right] \cdot C_k^{[1]}(\xi_1) \left. \right\} + \frac{a_2^2}{4a_1^3} (\xi_1^2 - 1) = 0;
\end{aligned} \tag{21}$$

gdzie ξ_j jest względną zmienną $\xi_j = x_j / a_j$. Układ równań (21) rozwiązujemy metodą kolokacji.

4. OBLICZENIA

Ponieważ w danej metodzie równania równowagi są spełnione ściśle to dokładność otrzymanego rozwiązania zależy tylko od dokładności spełnienia warunków granicznych opisanych układem równań (21). Układ ten rozwiązujemy metodą kolokacji. Przy rozwiązywaniu przyjęto równomierne rozmieszczenie punktów kolokacji.

Przedziały $\xi_1 \in [0;1]$ oraz $\xi_2 \in [0;1]$ podzielono na odcinki o długości $\frac{1}{K}$. Układ równań zapisano dla każdego punktu: $\xi_1 = 0; \xi_1 = \frac{1}{K}; \xi_1 = \frac{2}{K}; \dots; \xi_1 = \frac{K-1}{K}$ oraz $\xi_2 = 0; \xi_2 = \frac{1}{K}; \xi_2 = \frac{2}{K}; \dots; \xi_2 = \frac{K-1}{K}$.

Ilość punktów kolokacji (parametr K) wybierano tak, żeby osiągnąć zadaną dokładność spełnienia układu równań (21). Liczbę punktów K przyjmowano K=2, 4, 8, 10, 20, 40, 100.

Uzyskane rezultaty pokazały, że wybór punktów o liczbie K>10 na połowie krawędzi już nie wpływa na zmianę dokładności obliczeń. Przyjęto, że liczba Poissona $\nu = 0,3$.

Dla oceny dokładności otrzymanego rozwiązania parametry R określono z równań granicznych. Ponownie podstawiono parametry R do tych równań i sprawdzono wartość odchylenia od zera ich lewych części w różnych punktach kolokacji z krokiem H=0.1, 0.01. Ustalono, że dla H=0.1, tj. dla dziesięciu punktów kolokacji (K=10), maksymalne odchylenie od zera równania (21.1) nie zwiększa się $9.551644 \cdot 10^{-5}$ oraz $4.864484 \cdot 10^{-5}$ dla równania (21.2). Znaczy to, że dokładność obliczeń jest bardzo duża. Rezultaty dotyczą przedziału zmiany smukłości $a_1 / a_2 = 1 \div 2$.

W tabeli 1 podano rezultaty dla punktów środkowych płyty. W tabeli 2 dla środkowych punktów krawędzi. W kolumnach II dla porównania zamieszczono rezultaty podane w literaturze [1].

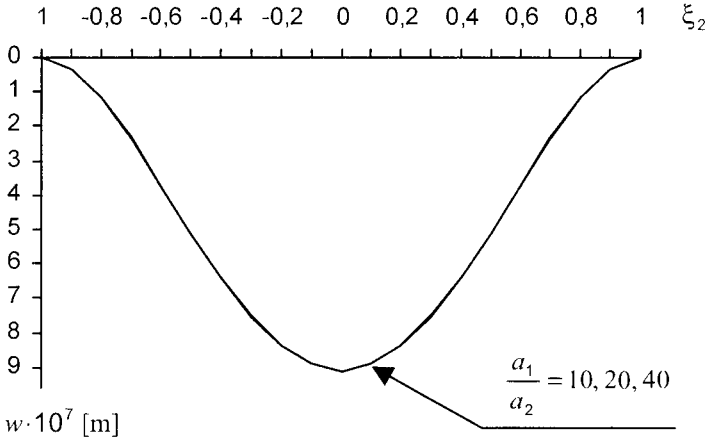
Tabela 1. Zmiana ugięcia i momentów zginających w punktach środkowych płyty dla różnych smukłości a_1/a_2

$\frac{a_2}{a_1}$	$w \cdot 10^3 D / \left(\frac{q_0 \cdot (2a_1)^4}{D} \right)$ w środku		$M_{11} \cdot 10^2 / (q_0 \cdot 4a_1^2)$ w środku ($x_1 = 0; x_2 = 0$)		$M_{22} \cdot 10^2 / (q_0 \cdot 4a_1^2)$ w środku ($x_1 = 0; x_2 = 0$)	
	I	II	I	II	I	II
2,0	2,532957	2,54	4,115505	4,12	1,580803	1,58
1,6	2,299972	2,30	3,81818	3,81	1,925064	1,93
1,4	2,068814	2,07	3,497411	3,49	2,126635	2,12
1,2	1,72487	1,72	2,997159	2,99	2,284043	2,28
1,0	1,265319	1,26	2,290509	2,31	2,290509	2,31

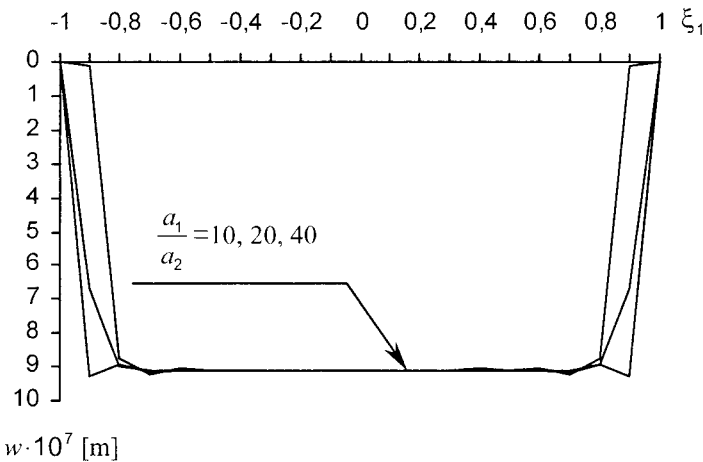
Tabela 2. Zmiana ugięcia i momentów zginających w punktach środkowych krawędzi płyty dla różnych smukłości a_1/a_2

$\frac{a_2}{a_1}$	$M_{11} \cdot 10^2 / (q_0 \cdot 4a_1^2)$ $x_1 = a_1; x_2 = 0$		$M_{22} \cdot 10^2 / (q_0 \cdot 4a_1^2)$ $x_1 = 0; x_2 = a_2$
	I	II	
1,00	-5,133427	-5,13	-5,133427
1,20	-6,389856	-6,39	-5,540799
1,40	-7,259283	-7,26	-5,680311
1,60	-7,803507	-7,80	-5,709942
2,00	-8,286789	-8,29	-5,698745

Widzimy, że rezultaty otrzymane za pomocą różnych podejść są zgodne. Na dwóch poniższych rysunkach podano zmianę ugięcia dla różnych smukłości a_1/a_2 w przekroju $\xi_1 = 0$ i $\xi_2 = 0$:



Rys. 1. Zmiana ugięcia płyty w przekroju $\xi_1 = 0$ dla różnych smukłości a_1/a_2



Rys. 2. Zmiana ugięcia płyty w przekroju $\xi_2 = 0$ dla różnych smukłości a_1/a_2

Z rysunku pierwszego wynika, że wzrost smukłości a_1/a_2 nie powoduje zmiany ugięcia. W przypadku przekroju $\xi_2 = 0$ (rys. 2) w obszarach przykrawędziowych następuje zaburzenie ugięcia. W pozostałych punktach zmiana ugięcia ma taki sam charakter jak w przekroju $\xi_1 = 0$. Oznacza to, że taką płytę możemy rozpatrywać jako nieskończone pasmo płytowe przebywające w warunkach zginania walcowego wszędzie oprócz małych obszarów w pobliżu krawędzi.

LITERATURA

- [1] С.П. Тимошенко, Войновски-Кригер, 1966. Пластины и оболочки. Наука, Москва.
- [2] Л.Т. Бережницкий, М.В. Делявский, В.В. Панасюк, 1979. Изгиб тонких пластин с дефектами типа трещин. Наукова думка, Киев.
- [3] И.А. Прусов, 1975. Метод сопряжения в теории плит. Издво Белорус. унта Минск.
- [4] Z. Kączkowski, 1980. Płyty. Obliczenia statyczne. Arkady, Warszawa.
- [5] М.В. Делявский, 1995. Расчет напряженного состояния в толстой ортотропной плите под действием изгибающей нагрузки. Пробл. прочности. - № 11-12, ss. 45-53.
- [6] M. Delyavskyy, J. Gołaś, A Podhorecka, 1999. O pewnym podejściu do rozwiązywania płyt wielowarstwowych. XLV Konf. Nauk. Krynica, ss. 63-70.

TRANSVERSE BENDING OF THE RECTANGULAR PLATE CLAMPED AT THE ALL EDGES

Summary

The aim of the paper was to develop a method to determine the static and kinematics characteristics in a rectangular isotropic plate perfectly clamped at all edges. The developed method is based on Kirchhoff's theory. Displacements were chosen as unknowns. The analytical expressions for the section forces were obtained and calculations have been performed.

Keywords: rectangular clamped plate, calculation method, state of stress, Fourier's series, transverse load, rigid foundation

PROPAGACJA FAL W DREWIE JAKO NATURALNYM KOMPOZYCIE

Radosław Drelich, Mariusz Kaczmarek, Józef Kubik

Akademia Bydgoska im. Kazimierza Wielkiego
Instytut Mechaniki Środowiska i Informatyki Stosowanej
ul. Chodkiewicza 30, 85-064 Bydgoszcz

W pracy skoncentrowano się na przedyskutowaniu uzyskanych rezultatów eksperymentalnych badań ultradźwiękowych drewna sosnowego z przewidywaniami modelu propagacji fal w kompozycie dwuwarstwowym. Przeprowadzono analizę w dziedzinie czasu (przebiegi czasowe impulsów fal podłużnych propagujących się w trzech kierunkach anatomicznych drewna) oraz w dziedzinie częstotliwości (zależności współczynnika tłumienia i prędkości fazowej fal ultradźwiękowych od częstotliwości). Podjęto próbę wytłumaczenia wpływu budowy mezostrukturalnej materiału na parametry propagacji.

Słowa kluczowe: badania ultradźwiękowe, drewno

1. WSTĘP

Drewno jest jednym z podstawowych materiałów konstrukcyjnych, o dużych walorach użytkowych i estetycznych. Jednakże z uwagi na naturalne pochodzenie, wpływ zmiennych czynników środowiskowych jak i pogodowych własności drewna są silnie niejednorodne. Techniki ultradźwiękowe z uwagi na nieniszczące i nieinwazyjne metody badań mogą być wykorzystane do oceny własności drewna jako wyjściowego materiału budowlanego czy też stanu elementów konstrukcyjnych w czasie ich użytkowania. Pozwalają one ocenić w sposób szybki i tani podstawowe własności mechaniczne jak i wady drewna.

Praca niniejsza ma na celu zbadanie wpływu kompozytowej budowy drewna (drewno wczesne, drewno późne) na propagację fal ultradźwiękowych na przykładzie drewna sosny. Zastosowano quasi-podłużne fale objętościowe i metodę fal przechodzących w celu wyznaczenia przebiegów czasowych sygnałów ultradźwiękowych, wielkości tłumienia, dyspersji prędkości fazowych oraz przeprowadzono analizę widmową sygnałów w funkcji częstotliwości. Przedyskutowano wpływ budowy strukturalnej drewna na poziomie mezoskopowym na propagację fal ultradźwiękowych.

2. MATERIAŁ I METODA BADAŃ

Pomiarom poddano drewno sosnowe (*Pinus Sylvestris* L.) o wilgotności 8-9% i gęstości od 475 do 520 kg/m³. W badaniach wykorzystano ultradźwiękową, impulsową metodę fali przechodzącej z zastosowaniem próbek o dwóch grubościach ($L_1 \approx 10$ mm, $L_2 \approx 20$ mm), gdzie jeden z sygnałów z badanych próbek jest sygnałem odniesie-

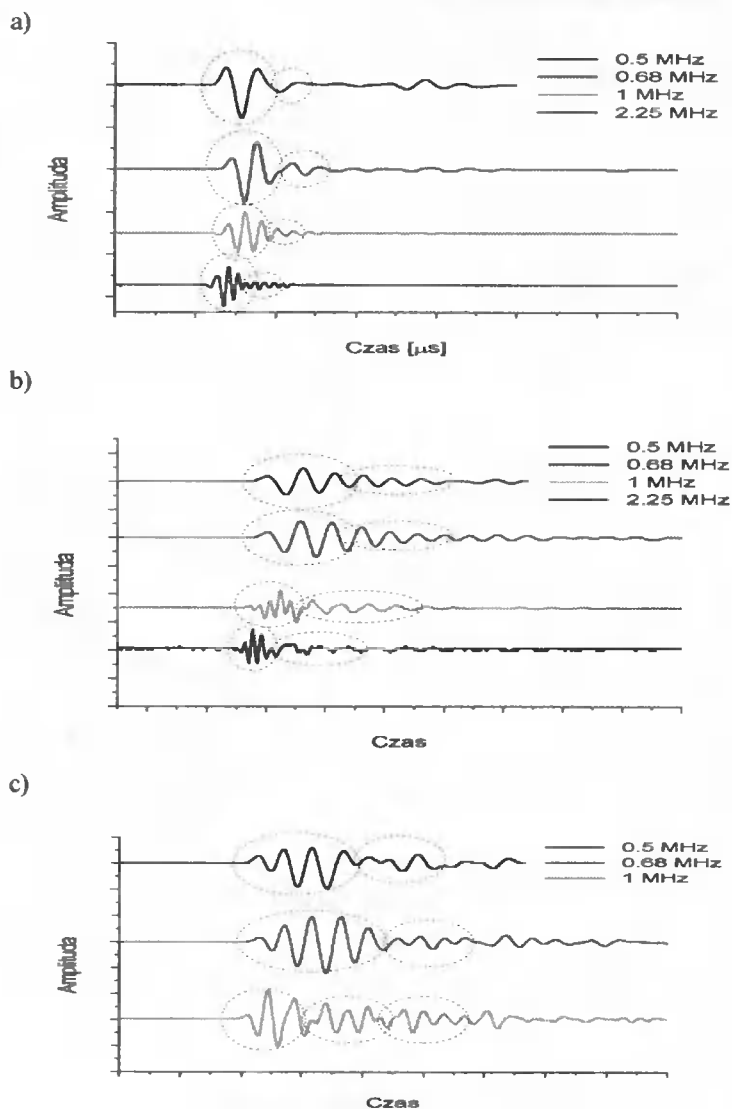
nia. Sygnałem pobudzającym głowicę nadawczą był sygnał szpilkowy. Pomiar przeprowadzono w szerokim zakresie częstotliwości ultradźwiękowych od 0,3 do 3,5 MHz. Sprzężenie akustyczne pomiędzy głowicami ultradźwiękowymi a materiałem badanym zapewniono przez laboratoryjny smar silikonowy. Do wyznaczenia widm amplitudowych, współczynnika tłumienia i prędkości fazowych fal wykorzystano analizę spektralną opierającą się na tzw. szybkiej transformacji Fouriera (FFT) [7].

3. WYNIKI BADAŃ I ICH DYSKUSJA

W wyniku przeprowadzonych pomiarów otrzymano czasowe przebiegi impulsów fal przechodzących dla trzech kierunków anatomicznych drewna (kierunek wzdłużny rys. 1a, promieniowy 1b, styczny 1c) sygnałów uzyskanych przy zastosowaniu głowic o częstotliwościach głównych: 0,5, 0,68, 1, 2,25 MHz. Obok istotnie różnych amplitud i czasów przejścia mierzonych sygnałów warto zwrócić uwagę na ich różny kształt w zależności od kierunku pomiaru i częstotliwości. Obserwowane własności fal w drewnie wynikają ze specyficznej budowy strukturalnej tego materiału. Na poziomie mezoskopowym czy też makroskopowym możemy traktować drewno jako naturalny kompozyt składający się z dwóch warstw materiału o różnych własnościach (drewna wczesnego i drewna późnego). Badania teoretyczne kompozytów dwufazowych (dwuwarstwowych) przy założeniu długości fal znacznie większych od grubości warstw [3] jak i badania eksperymentalne [6] pokazują, że jeżeli propagacja fal podłużnych w takim kompozycie zachodzi w kierunku, w którym obie fazy są ciągłe (kierunek wzdłużny lub styczny w drewnie) w materiale mogą się propagować przynajmniej dwa mody falowe (fale będące wynikiem sprzężonego ruchu makrocząstek obu faz), natomiast w przypadku propagacji fal w kierunku poprzecznym występuje tylko jeden mod falowy. Analiza sygnałów przechodzących w drewnie sosny w dziedzinie czasu, pozwala wyróżnić przynajmniej dwie składowe sygnału (zaznaczone na rysunkach) szczególnie zauważalne dla częstotliwości wyższych 1, 2,25 MHz dla wszystkich kierunków anatomicznych. Uzyskane rezultaty eksperymentalne potwierdzają przewidywania modelu dla materiałów kompozytowych dwufazowych dla kierunku wzdłużnego i kierunku stycznego choć dla tego ostatniego obserwuje się wyraźnie trzy mody falowe. Niewytłumaczalna natomiast w ramach modelu warstwowego fal długich jest obecność dwóch składowych w sygnale uzyskanym dla kierunku promieniowego (prostopadle do warstw). Zachodzi jednak wątpliwość czy w rozważanym przypadku słuszny jest model fal długich. Przy prędkości propagacji w kierunku promieniowym równej około 2,3 km/s i częstotliwości 2,25 MHz długość fali wynosi około 1 mm (patrz tabela 1) i jest porównywalna w grubością przyrostów rocznych, których grubość waha się od 0,8 do 1,2 mm.

Zatem, ma miejsce sytuacja, że nie tylko długość fali nie jest znacznie większa od grubości warstw ale z uwagi na różnice impedancji akustycznej warstw należy się spodziewać obecności istotnych efektów rozproszeniowych w tak zwanym zakresie silnego rozpraszania [5]. Charakterystyczną cechą fal w takim zakresie jest to, że sygnał koherentny (uśredniony w czasie i przestrzeni) przechodzący przez materiał silnie rozpraszający może zawierać dwie składowe: składową balistyczną i składową będącą wypadkową fal rozproszonych na niejednorodnościach. Przyjmując taki punkt widzenia można by wytłumaczyć obecność dwóch składowych sygnału w kierunku promieniowym gdzie elementami struktury w skali mezo- wpływającymi na pojawianie się zjawiska rozpraszania w tym kierunku mogą być przyrosty roczne (drewno późne, drewno

wczesne) i zarazem różnice impedancji akustycznej warstw [5]. Efekt rozpraszania jest ściśle związany z charakterem współczynnika tłumienia i prędkości fazowej.



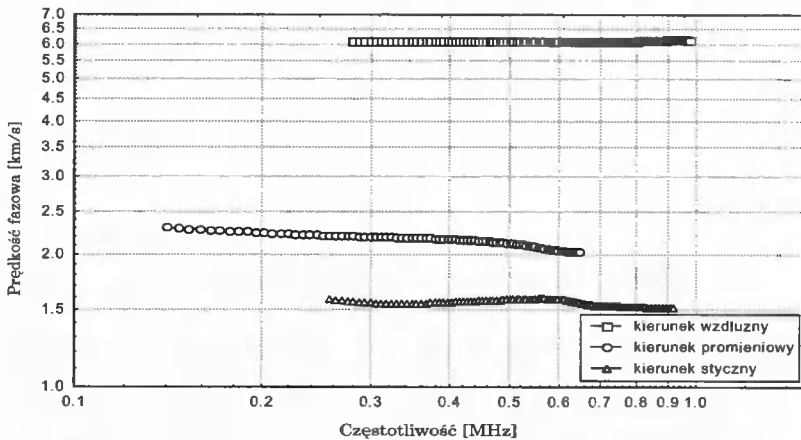
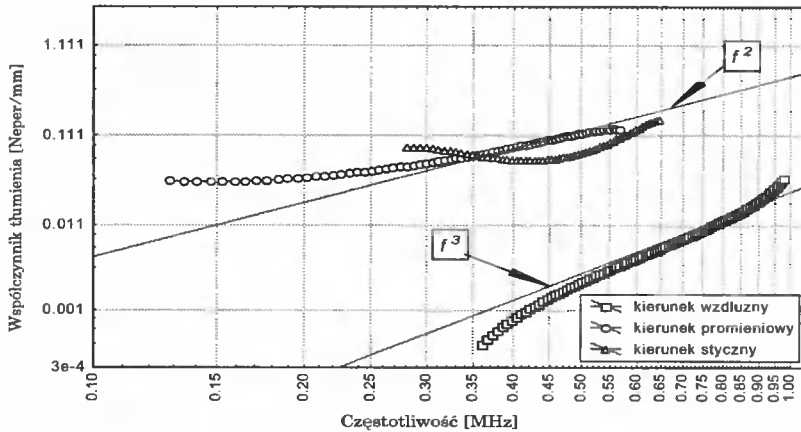
Rys. 1. Przebiegi czasowe impulsów fali podłużnej w drewnie sosny

Na przebiegach tych zwracają uwagę istotne różnice prędkości propagacji jak i tłumienia w zależności od kierunku propagacji fali. Obok analizy w dziedzinie czasu przeprowadzono analizę w dziedzinie częstotliwości gdzie pierwsza składowa sygnału odebranego została wykorzystana do wyznaczenia charakterystyk propagacji fal: prędkości fazowej i współczynnika tłumienia fal podłużnych w funkcji częstotliwości, pokazanych na rysunku 2. Nachylenie krzywych współczynnika tłumienia dla wszystkich kierunków anatomicznych jest charakterystyczne dla rozpraszania gdzie w zależności

od charakteru tego zjawiska może ono być proporcjonalne do czwartej lub drugiej potęgi częstotliwości co ma również odbicie w przebiegu prędkości fazowych, które charakteryzują się ujemną bądź dodatnią dyspersją.

Tabela 1. Zmiany długości fali ze wzrostem częstotliwości dla poszczególnych kierunków anatomicznych drewna sosny

częstotliwość [MHz]	kierunek wzdłużny	kierunek promieniowy	kierunek styczny
	$v \approx 5,9$ [km/s] długość fali λ [mm]	prędkość fali podłużnej $v \approx 2,3$ [km/s] długość fali λ [mm]	$v \approx 1,7$ [km/s] długość fali λ [mm]
0,5	11,8	4,6	3,4
0,68	8,7	3,4	2,5
1	5,9	2,3	1,7
2,25	2,62	1,1	0,76



Rys. 2. Współczynniki tłumienia i prędkości fazowe wyznaczone dla trzech kierunków anatomicznych drewna sosny wyznaczone w zakresie częstotliwości od 0,2 do 1 MHz

Analizując otrzymane rezultaty obserwuje się pewne podobieństwo do wyników uzyskanych dla materiałów silnie tłumiących niejednorodnych takich jak np. spieki szkła, zawiesiny szkła w żelu USG [1], w których elementami struktury są pory lub cząstki stałe o wymiarach od porównywalnych z długościami fal do dużo mniejszych. W drewnie natomiast elementami struktury wpływającymi na efekt rozpraszania oprócz elementów w skali mezo- jakimi są przyrosty roczne mogą być elementy budowy na poziomie mikro takie jak: cewki, naczynia, włókna drzewne. promienie rdzeniowe ich długość i średnica.

Powyższa dyskusja pokazuje, że wymagane są dalsze badania zarówno eksperymentalne jak i teoretyczne, które pozwolą wyjaśnić naturę obserwowanych własności fal ultradźwiękowych w drewnie. W szczególności ważną byłaby głębsza analiza teoretyczna propagacji fal w drewnie w zakresie długości fal porównywalnych i krótszych od grubości przyrostów rocznych, a także rozważenie roli jaką odgrywają obok elementów wyróżnionych w skali mezoskopowej elementy mikrostruktury materiału.

LITERATURA

- [1] R. Drelich, M. Kaczmarek, J. Kubik, 2001. Propagacja fal ultradźwiękowych w materiałach niejednorodnych: badania spieków szkła i zawiesin szkła w żelu. Zeszyty Problemowe PTBN i DTST i TMP - Badania Nieniszczące Nr 6, ss. 109-114, Warszawa.
- [2] B. Feeney, R. Chivers, G. Barnard, 2001. Meso-structural considerations of ultrasonic propagation in wood. *Molecular and Quantum Acoustics*, v. 22, ss.57-68.
- [3] G.P. Sendeckyi, 1974. *Mechanics of Composite Materials*, vol. 2, Academic Press.
- [4] R. L. Smith, W. N. Reynolds, H. N. G. Wadley, 1981. Ultrasonic attenuation and microstructure in low-carbon steels. *Metal Science*, 15, ss. 554-558.
- [5] J.H. Page, H.P. Schriemer, I.P. Jones, P. Sheng, D.A. Weitz, 1997. Classical wave propagation in strongly scattering media. *Physica A*, v. 241, ss. 64-71.
- [6] C.H. Yew, P.N. Jogi, 1976. A study of wave motion in fiber-reinforced medium. *Int. J. Solids Structures*, vol. 12, ss. 693-703.
- [7] C. H. Yew and C. S. Chen, 1978. Experimental study of dispersive waves in beam and rod using FFT. *J. Appl. Mechanics*, 45, ss. 940-942.

PROPAGATION OF ULTRASONIC WAVES IN WOOD AS NATURAL COMPOSITE

Summary

The paper concentrates on discussing the results of experimental studies carried out using ultrasonic technique on pinewood, and comparing the results with the predictions of the wave propagation model for two-layer composite. The analysis was conducted of the signals presented in time domain (considering the signals from the main three anatomical directions of wood) and in frequency domain (relation of attenuation and phase velocity of ultrasonic waves to frequency). An explanation of the influence of mesoscopic structure of wood on wave propagation parameters was proposed.

Keywords: ultrasonic studies, wood, composite

WPLYW POPRZECZNYCH ODKSZTAŁCEŃ POSTACIOWYCH NA MOŻLIWOŚĆ ROZWOJU DELAMINACJI KOMPOZYTÓW WŁÓKNISTYCH O STRUKTURZE WARSTWOWEJ

Jerzy Gołaś

Akademia Techniczno-Rolnicza
Wydział Budownictwa i Inżynierii Środowiska, Katedra Mechaniki Budowli
ul. Prof. S. Kaliskiego 7, 85-796 Bydgoszcz

W artykule przedstawiono analizę mechanizmu rozwarstwiania niszczącego strukturę kompozytów. Rozszczepienie warstw obniża nośność i trwałość części. Wykonano dyskusję możliwości rozwarstwienia kompozytowych układów z włókna. Na podstawie modelu Timoszenki oraz liniowej teorii stateczności uzyskano analityczne rozwiązanie określające składowe energetyczne.

Słowa kluczowe: rozwarstwienie, ścinanie, wielowarstwowy kompozyt, stateczność

1. WPROWADZENIE

Materiały kompozytowe o strukturze warstwowej, jak laminaty czy kompozyty włókniste o warstwowym wzmocnieniu włóknem długim, odznaczają się obok swej wysokiej wytrzymałości w płaszczyznach wzmocnienia, także niską odpornością na rozwarstwienie (delaminację) [1-7]. Delaminacja jest jedną z najczęściej występujących wad technologicznych lub uszkodzeń eksploatacyjnych elementów konstrukcji wykonanych z owych materiałów. Jest to pęknięcie powierzchniowe zachodzące między warstwami kompozytu (we włóknokompozytach w materiale matrycy pomiędzy powierzchniami zbrojenia), które prowadzi często do odseparowania warstw i może istotnie wpływać na zmianę właściwości mechanicznych oraz trwałość danego elementu. Na odseparowanie warstw przypowierzchniowych narażone są zwłaszcza belki i dźwigary powierzchniowe wykonane z kompozytów o silnej anizotropii własności mechanicznych poszczególnych warstw. W strefach ściskanych dochodzi w trakcie ich użytkowania do kumulacji mikro defektów w makro pęknięcia, a następnie do rozwoju delaminacji łącznie z lokalnym wybočeniem (wybrzuszeniem) części odseparowanych. Lokalne wyboczenia wywołują z kolei wzajemne rozwieranie i poślizgi danych powierzchni rozwarstwień, wprowadzając do układu ze szczeliną obciążenia typu I, II i III.

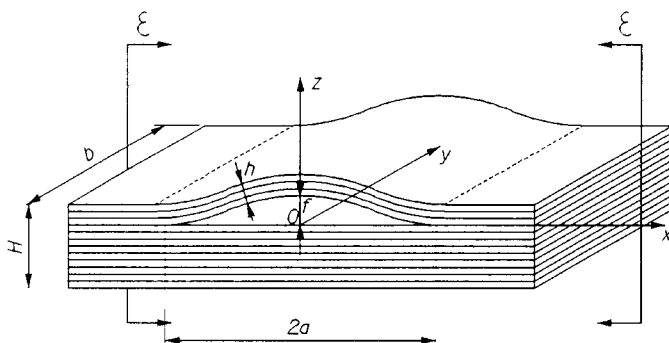
Zagadnieniu rozwoju delaminacji warstw przypowierzchniowych w kompozytach warstwowych poświęciło swe prace wielu autorów, a między innymi H. Chai [1], W.W. Bołotin [2, 3, 4, 5, 6], P. Czarnocki [7]. Bogaty przegląd prac można znaleźć np. w pracy [5]. W pracach [1, 2, 3] podane zostały, w ramach liniowej teorii wyboczenia sprężystego warstw izotropowych, analityczne zależności pozwalające określić współczynniki uwolnienia energii G_I i G_{II} uzależnione od długości rozwarstwienia, grubości odseparowanych warstw i obciążenia zewnętrznego. W pracy [4] podano propozycję

analizy delaminacji na podstawie trójwymiarowego modelu rozwarstwienia. Proponowane podejście analizowano m.in. na przykładzie delaminacji prostokątnej oddzielającej cienkie ortotropowe warstwy laminatu i podano zależności między współczynnikami G_I i G_{II} dla jednokierunkowego ściskania. Natomiast w pracy [6] analizowano odspojenia wielowarstwowe I typu, gdzie w warunkach zginania cylindrycznego pliku odseparowanych warstw uwzględniono również wpływ ścinania poprzecznego w zakresie modelu belki Timoshenki. Wykazano, że udział warstw o małej sztywności na ścinanie w części odseparowanej delaminacją, może powodować istotne zmiany w wielkościach odkształceń i wymiarach krytycznych szczeliny. W [7] zaprezentowano interesujące wyniki numerycznej analizy dokonane za pomocą MES, na zależności między kierunkami zbrojenia w rozdzielonych kołową delaminacją warstwach cienkiej płyty laminowanej poddanej ściskaniu a charakterem rozkładu i proporcji składowych WUE G_I , G_{II} i G_{III} .

W pracy niniejszej rozważa się wpływ poprzecznych odkształceń postaciowych na możliwość rozwoju delaminacji w kompozycie włóknistym o warstwowym układzie siatek zbrojenia. Siatki zbrojenia są gęste i wykonane z cienkich, ciągłych prostoliniowych włókien o wysokim module sprężystości. W rozwiązaniach uwzględnia się dwa typy rozwarcia szczeliny I i II. W przypadku jednokierunkowego ściskania, przy założeniu cylindrycznej postaci wygięcia warstw odseparowanych delaminacją, otrzymano w ramach zlinearyzowanej teorii stateczności zamknięte rozwiązania analityczne na składowe współczynnika uwolnienia energii G_I i G_{II} . Przeprowadzono także analizę parametryczną uzyskanych rozwiązań.

2. SFORMUŁOWANIE ZAGADNIENIA

Rozważa się element konstrukcyjny ze sprężystego kompozytu dwuskładnikowego, w którym zbrojenie w postaci gęstych siatek wykonanych z długich włókien prostoliniowych, rozmieszczone jest warstwowo w poprzecznie izotropowej matrycy w płaszczyznach $z=z^r$ ($r=1, 2, 3, \dots$). Przyjmuje się, że układ włókien w poszczególnych siatkach zbrojenia zapewnia ortotropię danego kompozytu warstwowego w płaszczyznach równoległych do płaszczyzn układu współrzędnych $Oxyz$. Na głębokości h od powierzchni zewnętrznej występuje na całej szerokości elementu płaska szczelina prostokątna o długości $2a$, powstała w materiale matrycy pomiędzy sąsiadującymi siatkami zbrojenia. Rozważany element konstrukcyjny poddany jest jednoosiowemu ściskaniu wywołującemu odkształcenia ϵ (rys. 1). W stanie początkowym część odseparowana o grubości h i szerokości b jest płaska oraz wolna od sił wewnętrznych i odkształceń, zaś będąc w stanie wygiętym (wyboczonym) panują w niej warunki zginania cylindrycznego.



Rys. 1. Schemat wielowarstwowego odspojenia przy powierzchniowej w elemencie ściskanym

W procesie wzrostu delaminacji stan sił i odkształceń w części odseparowanej ulega zmianie, a do określenia go należałoby w każdym etapie rozwiązywać nieliniowe zadanie stanu pokrytycznego. Aby jednak uprościć rozważania przyjmuje się, za pracami [1, 2, 3, 4, 5 i 6], że siły wewnętrzne w każdej chwili odpowiadają krytycznym wartościom liniowej stateczności dla danej odkształconej konfiguracji części odwarstwionej. Dzięki czemu uzyskano zamknięte rozwiązania analityczne.

Rozpiętość szczeliny przyjmuje się, podobnie jak w pracy [4], za pomocą dwóch pól długości a_1 i a_2 ($a_1 \leq a_2$), gdzie a_1 odpowiada strefie rozrywania szczeliny, a w strefie $a_1 \leq |x| \leq a_2$ zachodzi jedynie wzajemny poślizg powierzchni wywołany ścinaniem. W części $|x| < a_1$ następuje pełna utrata kontaktu. Mamy zatem istnienie co najmniej dwóch typów rozwarcia szczeliny, typ I i II. W dalszych rozważaniach przyjęto, że warstwa h odseparowana szczeliną spełnia w przekrojach $|x| = a_1$ warunki utwierdzenia. Dopóki strzałka wygięcia $f=0$, to część odwarstwiona odkształca się identycznie z całym elementem konstrukcyjnym. Przy $\varepsilon > \varepsilon_c$ (gdzie ε_c jest odkształceniem krytycznym uwzględniającym także podatność materiału matrycy na ścinanie), następuje wygięcie części odseparowanej. Przy czym od początku wygięcia zakłada się, że działające w odwarstwieniu siły ściskające równe krytycznej sile wybočenja występują także w strefie $a_1 \leq |x| \leq a_2$.

3. ROZWIĄZANIE PROBLEMU

Funkcję ugięcia $w(x)$ oraz kąt odkształcenia postaciowego $\gamma(x)$ wygiętej warstwy h przyjmujemy w postaci [6]:

$$w(x) = f \cos^2 \frac{\pi x}{2a_1}, \quad \gamma(x) = g \sin \frac{\pi x}{a_1}, \quad |x| \leq a_1, \quad (1)$$

gdzie f i g są niewiadomymi. Odkształcenie krytyczne ε_c określamy z kryterium energetycznego

$$\frac{\partial(\Delta U + \Delta \Pi)}{\partial f} = 0, \quad \frac{\partial(\Delta U + \Delta \Pi)}{\partial g} = 0, \quad (2)$$

w którym

$$\Delta U = \frac{1}{2} D^{1111} \int_{-a_1}^{a_1} (w_{,xx}^2 - 2w_{,xx} \gamma_{,x} + \gamma_{,x}^2) dx + \frac{1}{2} G h k \int_{-a_1}^{a_1} \gamma^2 dx \quad (3)$$

jest przyrostem potencjalnej energii sprężystej odwarstwienia wywołany małym wygięciem, a

$$\Delta \Pi = -\frac{1}{2} B^{1111} \varepsilon \int_{-a_1}^{a_2} w_{,1}^2 dx \quad (4)$$

przyrostem energii potencjalnej sił zewnętrznych. We wzorach (3) i (4) wprowadzono oznaczenia z prac [8 i 9], gdzie: $D^{1111} = D + 2 \sum_{\Delta} k_{\Delta}^r \left(t_{\Delta}^r \right)^4 \sum_i e_i^2$ i $B^{1111} = B + 2i \sum_{\Delta} k_{\Delta}^r \left(t_{\Delta}^r \right)^4$ są odpowiednio sztywnościami giętnymi i tarczowymi włóknokompozytowej warstwy odseparowanej; $D = Eh^3/12(1-\nu^2)$, $B = Eh/(1-\nu^2)$; E , G , ν - stałe materiałowe, $\gamma = \psi + w_{,1}$ - kąt odkształcenia postaciowego, ψ - kąt obrotu elementu normalnego, $k_{\Delta}^r = E_{\Delta}^r A_{\Delta}^r / b_{\Delta}^r$ - uśredniona sztywność na rozciąganie (ściskanie) włókien rodziny Δ , t_{Δ}^r - cosinusy kierunkowe, i - liczba par symetrycznie rozmieszczonych siatek zbrojenia w odległościach $z^r = \pm e_1, \pm e_2, \dots, \pm e_i$ ($e_i < h/2$) od powierzchni środkowej.

Po podstawieniu (1) do (3) i (4) otrzymuje się z warunków (2) układ dwóch równań liniowych jednorodnych z niewiadomymi $f(a_1)$ i $g(a_1)$, a z warunku znikania wyznacznika układu odkształcenie krytyczne

$$\varepsilon_c = \frac{\pi^2 D^{1111}}{a_1^2 B^{1111}} \left(1 + \frac{\pi^2 D^{1111}}{a_1^2 G h k} \right)^{-1} \quad (5)$$

Strzałkę ugięcia $f(a_1)$ wyznaczmy porównując skrócenie podstawowego elementu ze zbliżeniem przekroju $|x|=a_1$ części odseparowanej wywołane wygięciem [1, 2],

$$\Delta = (\varepsilon - \varepsilon_c) 2a_1 = \frac{1}{2} \int_{-a_1}^{a_1} w_{,1}^2 dx \quad (6)$$

skąd

$$f(a_1) = \frac{4a_1}{\pi} [\varepsilon - \varepsilon_c(a_1)]^{1/2} \quad (7)$$

Z warunku (2)₂, mamy

$$g(a_1) = -\frac{\pi f(a_1)}{2a_1} \left(1 + \frac{G h k a_1^2}{D^{1111} \pi^2} \right)^{-1} \quad (8)$$

Do określenia stabilnego wzrostu delaminacji wykorzystamy kryterium energetyczne Griffithza. Wzrost szczeliny nastąpi, kiedy współczynnik uwolnienia energii osiągnie wartość krytyczną charakteryzującą odporność materiału na pęknięcie.

Całkowita energia potencjalna sił zewnętrznych układu wywołana ściskaniem w postaci zadanego odkształcenia ε , przy $a_1 \leq a_2$, wyraża się wzorem

$$\Pi = const - \frac{1}{2} B^{1111} b a_2 [\varepsilon^2 - \varepsilon_c^2(a_1)] + \frac{1}{2} D^{1111} b \int_0^{a_1} (w_{,11} - \gamma_{,1})^2 dx + \frac{1}{2} G h k b \int_0^{a_1} \gamma^2 dx \quad (9)$$

Wartość energii obliczono tu dla połowy długości elementu $x \geq 0$. Stała w wyrażeniu (9) jest równa energii potencjalnej elementu konstrukcyjnego bez szczeliny. Drugi składnik uwzględnia odciążenie w odwarstwieniu spowodowane spadkiem siły ścisającej wyrażonej przez odkształcenia [4]. Natomiast składniki pozostałe wyrażają energię

potencjalną zginania i ścinania dla części odwarstwionej. Podstawiając (1), (7) i (8) do (9) oraz wykorzystując (5), otrzymamy

$$\Pi = const - \frac{1}{2} B^{1111} b a_2 [\varepsilon^2 - \varepsilon_c^2(a_1)] + B^{1111} b a_1 \varepsilon_c (a_1) [\varepsilon - \varepsilon_c(a_1)]. \quad (10)$$

Składowe współczynnika uwolnienia energii określa się jako:

$$G_I = -\frac{\partial \Pi}{\partial a_1} = B^{1111} b \varepsilon_c \left[\left(\frac{2}{\eta} - 1 \right) \varepsilon + \left(2 \frac{a_2}{a_1 \eta} - \frac{4}{\eta} + 1 \right) \varepsilon_c \right], \quad (11)$$

$$G_{II} = -\frac{\partial \Pi}{\partial a_2} = \frac{1}{2} B^{1111} b (\varepsilon^2 - \varepsilon_c^2), \quad (12)$$

gdzie:

$$\eta = 1 + \frac{\pi^2 D^{1111}}{a_1^2 G h k} \quad (13)$$

jest współczynnikiem uwzględniającym wpływ poprzecznych odkształceń postaciowych.

Z wyznaczonych wyżej zamkniętych rozwiązań analitycznych wynikają rozwiązania dla prostszych przypadków. Chcąc pominąć np. wpływ odkształceń postaciowych w materiale matrycy wystarczy przyjąć moduł ścinania $G = \infty$, a wówczas:

$$\eta = 1, \quad g = 0, \quad \varepsilon_c = \frac{\pi^2 D^{1111}}{a_1^2 B^{1111}},$$

$$G_I = B^{1111} b \varepsilon_c \left[\varepsilon + \left(2 \frac{a_2}{a_1} - 3 \right) \varepsilon_c \right], \quad G_{II} = \frac{1}{2} B^{1111} b (\varepsilon^2 - \varepsilon_c^2). \quad (14)$$

A eliminując fazę włóknistą przyjmując $A_3^i = 0$, otrzymamy rozwiązanie dotyczące odwarstwienia izotropowego

$$G_I = \frac{E b h}{1 - \nu^2} \varepsilon_c \left[\varepsilon + \left(2 \frac{a_2}{a_1} - 3 \right) \varepsilon_c \right], \quad G_{II} = \frac{E b h}{2(1 - \nu^2)} (\varepsilon^2 - \varepsilon_c^2), \quad (15)$$

skąd dla $a_1 = a_2 = a$

$$G_I = \frac{E b h}{1 - \nu^2} \varepsilon_c (\varepsilon - \varepsilon_c), \quad G_{II} = \frac{E b h}{2(1 - \nu^2)} (\varepsilon^2 - \varepsilon_c^2), \quad (16)$$

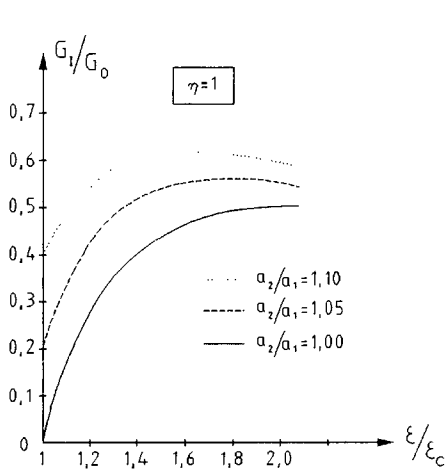
$$G = G_I + G_{II} = \frac{E b h}{2(1 - \nu^2)} (\varepsilon^2 + 2\varepsilon\varepsilon_c - 3\varepsilon_c^2). \quad (17)$$

Rozwiązania (15), (16) i (17) są zgodne z odpowiednimi rozwiązaniami uzyskanymi w pracach [2, 3, 4].

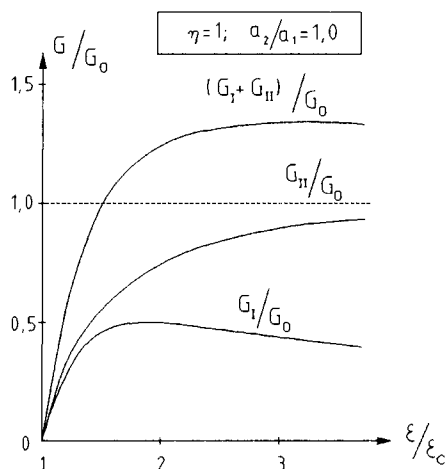
4. ANALIZA PARAMETRYCZNA

W celu zilustrowania uzyskanych powyżej rozwiązań analitycznych przeprowadzono odpowiednie analizy parametryczne. Dla ułatwienia przyjęto, że część elementu

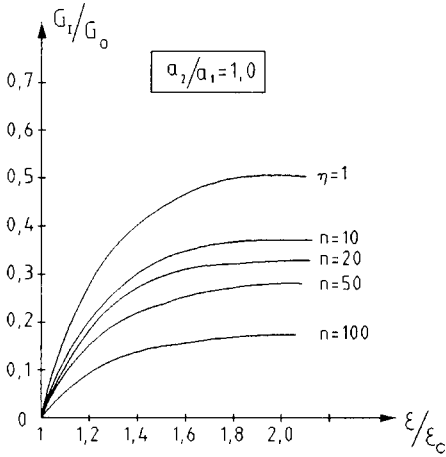
odseparowana szczeliną zawiera dwie jednakowe siatki zbrojenia rozmieszczone symetrycznie w przekroju $z' = \pm 0.4h$. Siatki utworzone są z dwóch rodzin włókien wzajemnie ortogonalnych o kierunkach zgodnych z osiami współrzędnych x, y . Rysunek 2 przedstawia wykresy zmienności bezwymiarowych wielkości składowych WUE G_I/G_0 , G_{II}/G_0 i G/G_0 (gdzie: $G_0 = 0.5B^{1111}b\varepsilon^2$) w zależności od stosunku $\varepsilon/\varepsilon_c$ w przypadku nieuwzględnienia odkształceń postaciowych ($\eta=1$) oraz dla $h/2a_1 = 0.1$, $a_1 = a_2$. W okolicy $\varepsilon = \varepsilon_c$ krzywe G_I/G_0 i G_{II}/G_0 mają bliskie sobie styczne, a $G_I \approx G_{II}$. Natomiast ze wzrostem $\varepsilon/\varepsilon_c$ krzywa G_I/G_0 maleje, a G_{II}/G_0 zmierza asymptotycznie do jedności. Jednak należy zwrócić tu uwagę, że wykresy poza wartościami $\varepsilon/\varepsilon_c > 1.5$ są w teorii liniowej niewiarygodne [4]. Zmienność G_I/G_0 przy różnych stosunkach a_2/a_1 równych 1.0, 1.05 i 1.10 ilustruje rysunek 3. Natomiast wpływ poprzecznych odkształceń postaciowych w przypadku różnych stosunków modułów Younga materiału włókien do materiału matrycy $n = E'/E = 10; 20; 50; 100$ i zmiennych rozmiarów $a_2/a_1 = 1; 1.05$, przy gęstości zbrojenia $\mu_\lambda = A'_\lambda/b'_\lambda h = 0.01$ oraz $\nu=0.3$, przedstawiono na rysunkach 4 i 5. Zauważa się tu wyraźny spadek wartości G_I/G_0 wraz ze wzrostem a_2/a_1 , n i $\varepsilon/\varepsilon_c$, a styczne odpowiednich krzywych w okolicy $\varepsilon = \varepsilon_c$ zmniejszają ewidentnie swe nachylenie.



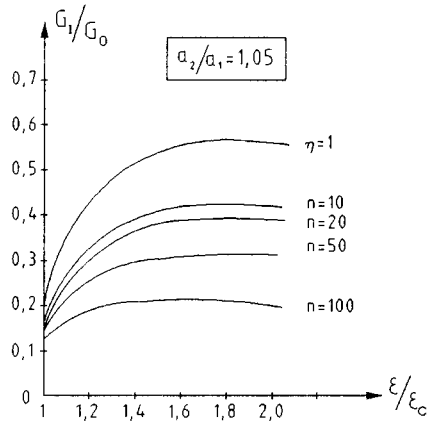
Rys. 2.



Rys. 3.



Rys. 4.



Rys. 5.

Przeprowadzona podobna do powyższej analiza lecz uwzględniająca liniowo lepkosprężyste zachowanie matrycy zilustrowana została na rysunkach 6, 7, 8 i 9, gdzie indeksami górnymi N i D przy wielkościach fizycznych G^N , ϵ_c^N , η^N , G^D , ϵ_c^D i η^D zaznaczono, że odnoszą się one odpowiednio do stanu natychmiastowego lub długotrwałego. Założono, że własność lepkosprężystą materiał matrycy zachowuje tylko w składowej ścinania poprzecznego. Przyjęto tu związki fizyczne w postaci:

$$\sigma^{11} = \frac{E}{1-\nu^2}(\epsilon_{11} + \nu\epsilon_{22}), \quad \sigma^{22} = \frac{E}{1-\nu^2}(\epsilon_{22} + \nu\epsilon_{11}), \quad (18)$$

$$\sigma^{13} = G\gamma_{13} - \int_0^t R^{1313}(t-\tau)\gamma_{13}(\tau)d\tau,$$

gdzie jądro relaksacji $R^{1313} = \frac{G-H'}{n} \exp\left(-\frac{t-\tau}{n}\right)$, odpowiada modelowi ciała

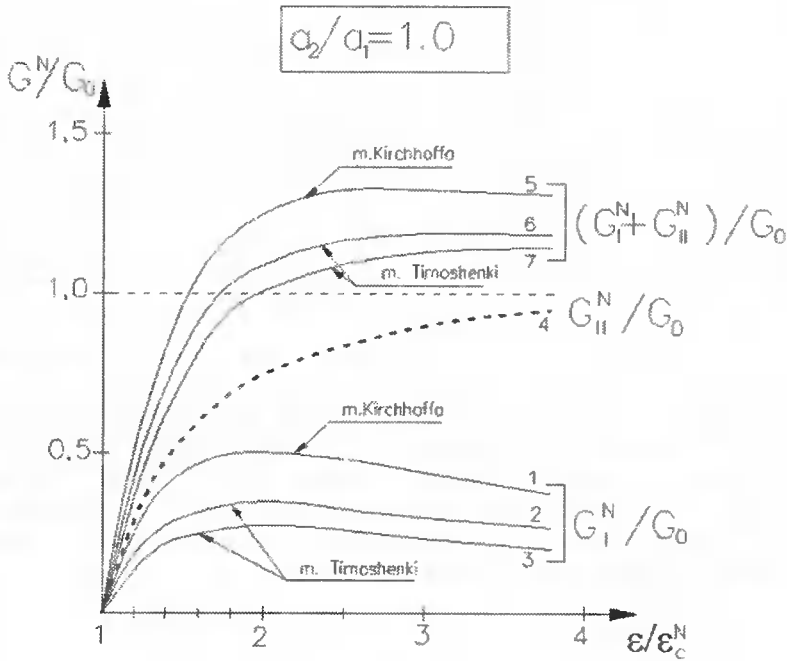
o związku $\sigma^{13} + n\frac{\partial\sigma^{13}}{\partial t} = H'\gamma_{13} + G\frac{\partial\gamma_{13}}{\partial t}$; G i H' są natychmiastowym i długotrwałym modułem Kirchhoffa, zaś $\epsilon_{11} = u_{,x} + \nu\psi_{,x}$; $\gamma_{13} = \gamma = \psi + w_{,x}$. Natomiast natychmiastowe i długotrwałe odkształcenia krytyczne wynoszą:

$$\epsilon_c^N = \epsilon_c(0^+) = \frac{\pi^2 D^{1111}}{a_1^2 B^{1111}} \frac{1}{\eta^N} = \epsilon_{c, spr}, \quad (19)$$

$$\epsilon_c^D = \epsilon_c(\infty) = \frac{\pi^2 D^{1111}}{a_1^2 B^{1111}} \frac{1}{\eta^D},$$

gdzie

$$\eta^N = \eta, \quad \eta^D = 1 + \frac{\pi^2 D^{1111}}{a_1^2 H' h k} \quad (20)$$



Rys 6.

Linie oznaczone cyframi opisują:

- 1 – model Kirchhoffa $\eta^N = 1.0$, $G = H' = \infty$
- 2 – model Timoshenki $n=20$, $\eta^N = 1.192$
- 3 – model Timoshenki $n=50$, $\eta^N = 1.310$
- 4 – model Kirchhoffa i model Timoshenki
- 6 – model Timoshenki $n=20$, $\eta^N = 1.192$
- 7 – model Timoshenki $n=50$, $\eta^N = 1.310$

Linie ciągłe odpowiadają stanowi natychmiastowemu, a przerywane stanowi długotrwałemu ($t = \infty$).

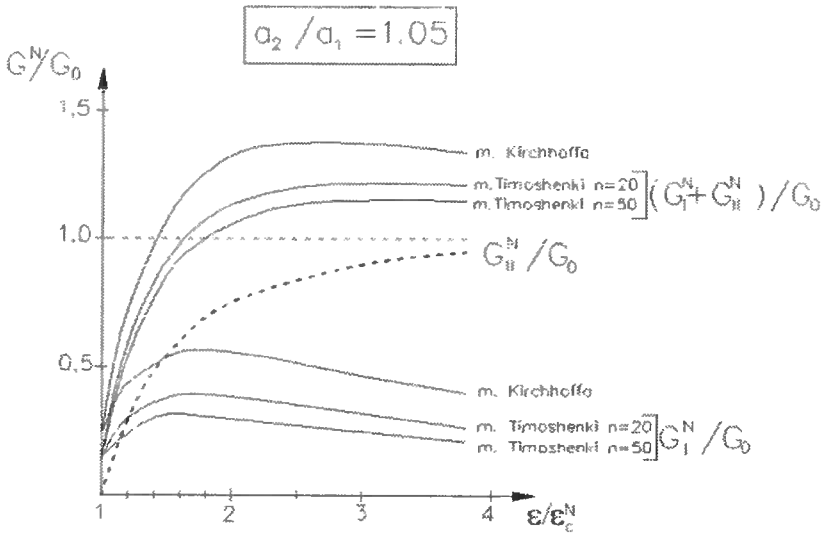
Równoważne stany rozmiarów odwarstwienia a w zależności od odkształcenia ε wyznacza się z kryterium Griffitza [2, 3, 10]

$$G(a, \varepsilon) = 2\gamma_0, \quad (21)$$

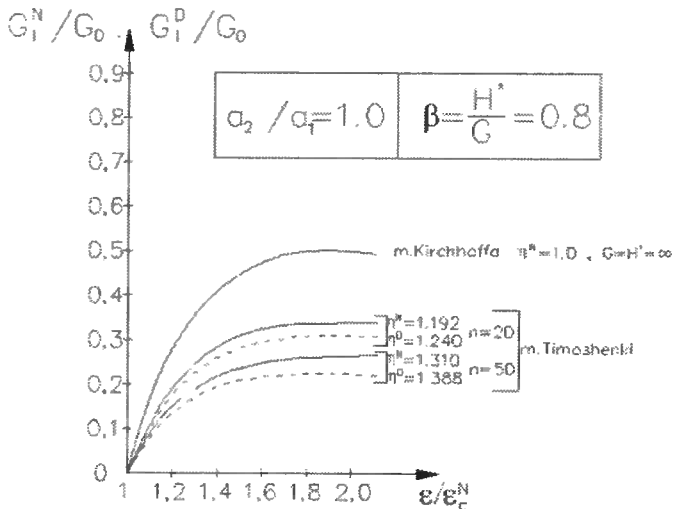
gdzie γ_0 jest jednostkową energią powierzchniową pęknięcia przyjmowaną jako stała materiałowa charakteryzująca odporność danego materiału na pęknięcie. Wykorzystując (11) i (12) można równość (21) przedstawić w postaci

$$\varepsilon^2 + 2\left(\frac{2}{\eta} - 1\right)\varepsilon\varepsilon_c - \left(\frac{4}{\eta} - 1\right)\varepsilon_c^2 = \varepsilon_\gamma^2, \quad (22)$$

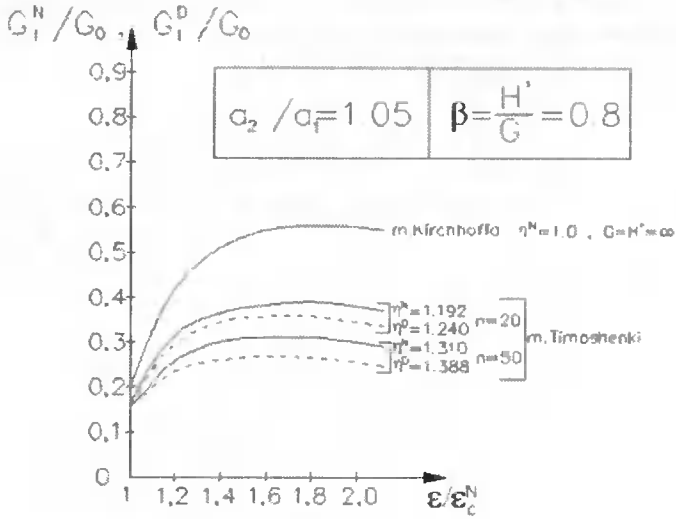
gdzie przyjęto $a_1 = a_2 = a$ oraz wprowadzono oznaczenie $\varepsilon_\gamma = (4\gamma_0/B^{1111})^{1/2}$.



Rys. 7.

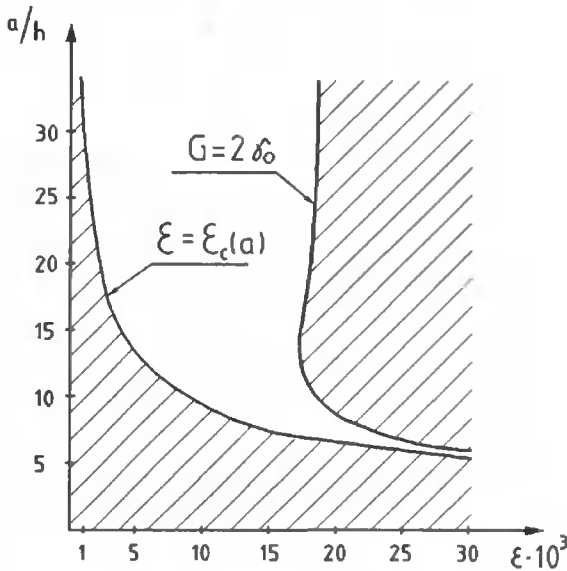


Rys. 8.



Rys. 9.

Ilustrację stanów $\epsilon = \epsilon_c$ i $G = 2\gamma_0$ dla $\epsilon_y = 0.02$, $n=20$, $\nu=0.3$, $\mu_s = 0.01$ przedstawiono na rysunku 10. Pole niezakreskowane oznacza tu obszar w którym możliwy jest quasirównoważny rozwój delaminacji.



Rys. 10.

5. PODSUMOWANIE

W wyniku przeprowadzonej analizy stwierdzono, że:

1. Obliczone wartości odkształceń krytycznych, powodujących wyboczenie części odseparowanej delaminacją, zależą nie tylko od a/h , $n = E'_3/E$, gęstości zbrojenia μ_3 , współczynnika ν ale także, od poprzecznych odkształceń postaciowych w materiale matrycy.
2. Przyjęcie dwóch typów I i II rozwarcia szczeliny i wprowadzenie odcinków długości $|x| < a_1$ i $a_1 \leq |x| \leq a_2$ pozwala na uściślenie składowych współczynnika uwolnienia energii G_I i G_{II} .

LITERATURA

- [1] H. Chai, C.D. Babcock, W.G. Knauss, 1981. One dimensional modelling of failure in laminated plates by delamination buckling. *Int. J. Solids Structures*. Vol. 17, No. 11, pp. 1069-1083.
- [2] W.W. Bolotin, 1983. Urawnenija rosta ustałostnych treszczin. *Izw. AN SSSR, Mechanika Tverdogo Tela.*, No. 4, ss. 153-160.
- [3] W.W. Bolotin, 1984. Defekty tipa rassloenij w konstrukcijach iz kompozitnych materialow. *Mechanika Kompozitnych Materialow*. Vol. 20, No. 2, ss. 239-255.
- [4] W.W. Bolotin, 1988. Mezslojnoe razruszenie kompozitow pri kombinirowannom nagruženii. *Mechanika Kompozitnych Materialow*. Vol. 24, No. 3, ss. 410-418.
- [5] V.V. Bolotin, 1996. Delaminations in composite structures: its origin, buckling, growth and stability. *Composites. Part B 27B*, pp. 129-145.
- [6] V.V. Bolotin, S.V. Nefedov, V.A. Pudov, O.V. Trifonov, 1997. Stability of multi-layered delaminations in laminate composites. *Mechanics of Composite Materials*. 1997, Vol. 33, No. 3, pp. 312-320.
- [7] P.Czarnocki, 2000. Wpływ sekwencji zbrojenia na możliwości delaminacji, *Materiały XVIII Sympozjum KBM PAN nt. Zmęczenie Materiałów i Konstrukcji*, Wyd. Uczeln. ATR w Bydgoszczy, ss. 117-124.
- [8] Gołaś J., 1995. On limits of application of Kirchhoff's hypothesis in the theory of viscoelastic fibrous composite plates. *Engineering Transactions*. Vol. 43, No. 4, pp. 603-626.
- [9] Gołaś J., On necessity of making allowance for shear strain in cylindrical bending of fibre composite viscoelastic plates. *Archives of Civil Engineering*. 1997, Vol. 43, No. 2, pp. 121-147.
- [10] Neimitz A., *Mechanika pękania*. PWN Warszawa, 1998.

IMPACT OF TRANSVERSE SHEAR STRAINS ON THE POSSIBILITY OF DELAMINATION OF MULTI-LAYERED COMPOSITES

Summary

Delamination is one of the most frequently occurring kinds of damage to the composite structure. It is a surface crack between the layers of the composite that leads to separation of layers and influences the carrying capacity and durability of a structural element.

In this paper the author discusses the impact of the transverse shear strains on the possibility of development of delamination, using the axially compressed fiber-composite with a multi-layered system of reinforcing meshes. Within the Timoshenko model and the linearized theory of stability, the author obtained an analytical solution to the components of the energy release rate G_I and G_{II} . Numerous parameter analyses have been carried out.

Keywords: delamination, cutting off, multilayer composite, stability

OBLICZENIA STATYCZNE UKŁADÓW CIĘGNOWYCH

Adam Grabowski, Adam Podhorecki

Akademia Techniczno-Rolnicza
Wydział Budownictwa i Inżynierii Środowiska, Katedra Mechaniki Budowli
ul Prof. S. Kaliskiego 7, 85-796 Bydgoszcz

W pracy rozpatruje się ciągną wiotkie wykonane z materiału liniowo sprężystego. Przedstawiono model ciągną, wyprowadzono równania oraz pokazano przykłady analizy dwóch układów ciągnowych. Otrzymane równania są silnie nieliniowe, do ich rozwiązywania opracowano metodę iteracyjną. Zamieszczone przykłady wyliczono przy pomocy autorskiego programu.

Słowa kluczowe: mechanika budowli, ciągną, konstrukcje ciągnowe, konstrukcje wiszące

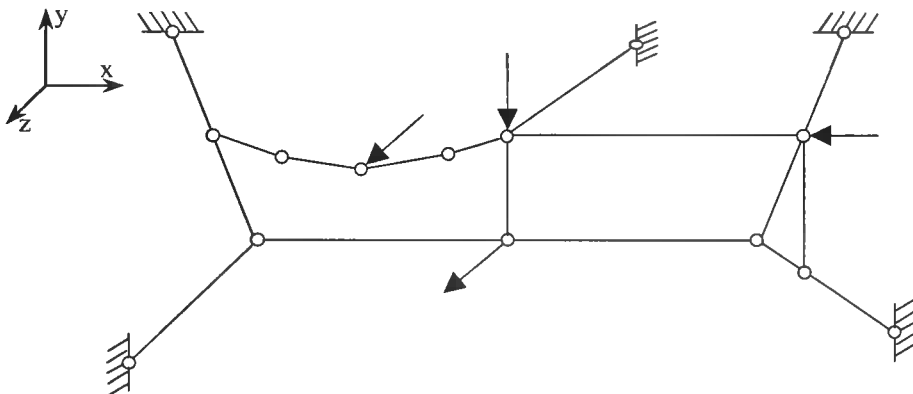
1. WSTĘP

Ciągną wiotkie o dowolnie dużej krzywiznie rozwiązuje się metodami numerycznymi [1-5]. Otrzymane rozwiązania niezależnie od użytej metody charakteryzują się silnymi nieliniowościami. Wynika to między innymi z dużych przemieszczeń wpływających na postać równań równowagi oraz z faktu, że w przypadku ściskania następuje wyłączenie się ciągną z pracy statycznej.

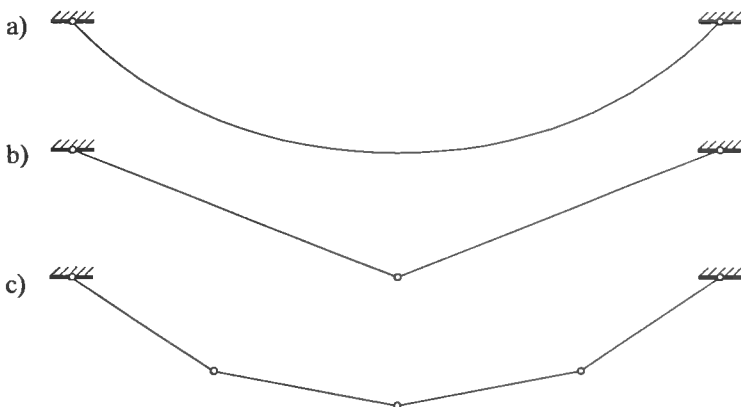
Celem pracy jest przystosowanie znanej metody dyskretyzacji ciągną wiotkiego na odcinki prętów prostych do rozwiązywania dowolnych układów ciągnowych i dowolnie obciążonych.

2. ZAŁOŻENIA

Rozpatruje się ciągną idealnie wiotkie, to znaczy takie, które nie przenoszą momentów zginających i sił poprzecznych, a jedyną siłą wewnętrzną, jest siła rozciągająca. Przyjmujemy, że ciągną wykonane jest z materiału liniowo – sprężystego (a więc podlegającemu prawu Hooke'a). Układ ciągnowy składa się z dowolnej liczby prętów prostych, połączonych ze sobą na końcach idealnymi przegubami (rys.1). Każde dowolnie wybrane ciągną układu ciągnowego może być modelowane w postaci łańcucha złożonego ze skończonej liczby prętów prostych (rys.2). Obciążenie układu ciągnowego stanowią siły skupione o dowolnych kierunkach, przyłożone w węzłach, zmiany temperatury w poszczególnych prętach, zmiany długości prętów i przemieszczenia podpór.



Rys. 1. Przykładowy układ cięgnowy modelowany prętami prostymi



Rys. 2. Modelowanie cięgna wiotkiego, a) rzeczywiste cięgno wiotkie, b) i c) model cięgna wiotkiego

Rozpatrywane zagadnienie brzegowe stanowią:

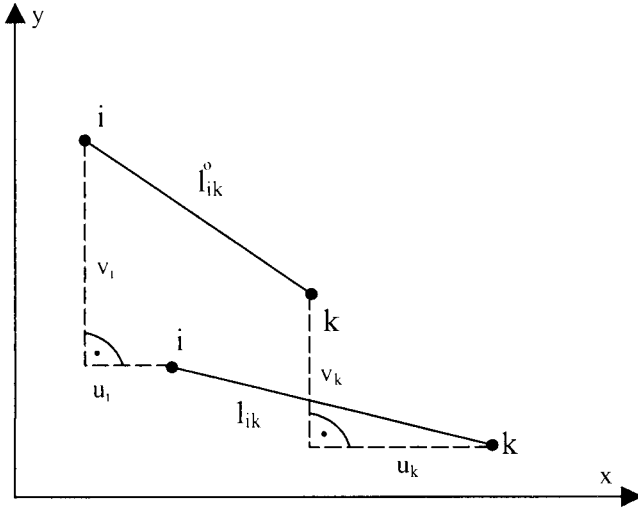
- 1) równania geometryczne – zapisane dla odcinków prętów prostych – uwzględniające dowolnie duże przemieszczenia,
- 2) równania fizyczne – zapisane dla odcinków prętów prostych – w postaci prawa Hooke'a (występują odkształcenia nieskończenie małe),
- 3) równania statyczne (równowagi) w zdyskretyzowanych węzłach – zapisane dla układu cięgnowego zdeformowanego,
- 4) warunki brzegowe.

Po wyeliminowaniu z powyższych równań sił otrzymuje się układ równań algebraicznych opisanych przemieszczeniami. Układ ten jest silnie nieliniowy i najczęściej niestabilny lub mało stabilny w procesie zeszywniania się układu cięgnowego od zadanego obciążenia. Stabilność układu równań wynika z geometrycznej zmienności układu cięgnowego. Po zeszywnieniu układu cięgnowego następuje utrata „nadliczbowych” stopni swobody co prowadzi do jednoznacznego rozwiązania układu równań. Wymienione wyżej elementy stanowią poważną trudność w rozwiązywaniu układu równań. Wymusza to stosowanie metod iteracyjnych i wprowadzanie różnych sztucznych wię-

zów lub pewnej formy linearyzacji równań w procesie dochodzenia do rzeczywistego rozwiązania.

3. RÓWNANIA OPISUJĄCE STATYKĘ UKŁADU CIĘGNOWEGO

Układ ciągnowy w stanie nieobciążonym (początkowym) ma znaną konfigurację, to znaczy że krzywizny poszczególnych cięgien są dane. Taki układ ciągnowy dyskretyzujemy, to znaczy zastępujemy układem prętów prostych. Każdy pręt ma dwa węzły o znanych współrzędnych.



Rys. 3. Długości prętów w konfiguracji nieobciążonej (początkowej) i w konfiguracji obciążonej (końcowej)

Długości poszczególnych prętów „ l_{ik}^0 ” w konfiguracji nieobciążonej wynoszą

$$l_{ik}^0 = \sqrt{(x_k^0 - x_i^0)^2 + (y_k^0 - y_i^0)^2 + (z_k^0 - z_i^0)^2}, \quad (1)$$

$i, k = 1, 2, \dots, n,$

gdzie x_i^0, y_i^0, z_i^0 oznaczają znane współrzędne „ n ” węzłów zdyskretyzowanego układu ciągnowego.

Po obciążeniu, pręty zmieniają swoje długości

$$l_{ik} = \sqrt{(x_k - x_i)^2 + (y_k - y_i)^2 + (z_k - z_i)^2}, \quad (2)$$

$i, k = 1, 2, \dots, n,$

gdzie x_i, y_i, z_i oznaczają nieznanne współrzędne „ n ” węzłów zdyskretyzowanego układu ciągnowego. Warto w tym miejscu wprowadzić składowe stanu przemieszczenia wiążące konfigurację początkową i końcową

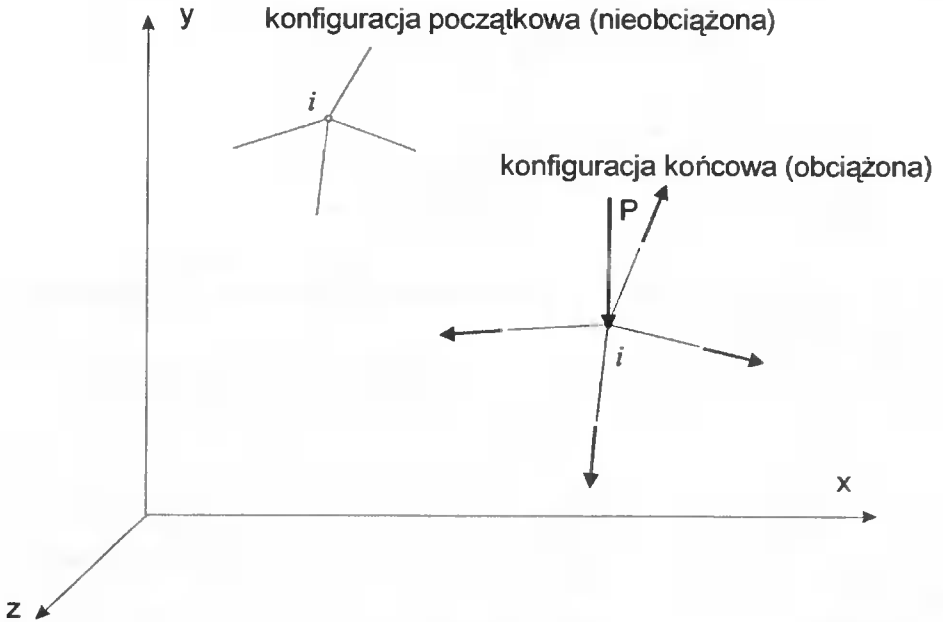
$$u_i = x_i - x_i^O, \quad v_i = y_i - y_i^O, \quad w_i = z_i - z_i^O. \quad (3)$$

Po wprowadzeniu zależności (3) do wzoru (2) mamy

$$l_{ik} = l_{ik}^o \left\{ 1 + \left(\frac{u_k - u_i}{l_{ik}^o} \right)^2 + \left(\frac{v_k - v_i}{l_{ik}^o} \right)^2 + \left(\frac{w_k - w_i}{l_{ik}^o} \right)^2 + 2 \left(\frac{u_k - u_i}{l_{ik}^o} \cos \alpha_{ik}^o + \frac{v_k - v_i}{l_{ik}^o} \cos \beta_{ik}^o + \frac{w_k - w_i}{l_{ik}^o} \cos \gamma_{ik}^o \right) \right\}^{\frac{1}{2}}, \quad (4)$$

gdzie

$$\cos \beta_{ik}^o = \frac{x_k^o - x_i^o}{l_{ik}^o}, \quad \cos \gamma_{ik}^o = \frac{y_k^o - y_i^o}{l_{ik}^o}, \quad \cos \eta_{ik}^o = \frac{z_k^o - z_i^o}{l_{ik}^o}. \quad (5)$$



Rys. 4. Równowaga sił

Cięgno wykonane jest z materiału sprężysto-liniowego, stąd równanie fizyczne dla pręta „ ik ” przyjmuje postać:

$$\varepsilon_{ik} = \frac{l_{ik} - l_{ik}^o}{l_{ik}^o} = \frac{N_{ik}}{E_{ik} A_{ik}} + \alpha_{ik} t_{ik} + \varepsilon_{ik}^{\Delta}, \quad (6)$$

gdzie: N_{ik} - siła normalna,

$E_{ik} A_{ik}$ - sztywnością pręta na rozciąganie,

α_{ik} - współczynnikiem liniowej rozszerzalności termicznej,

t_{ik} - temperatura,

$\varepsilon_{ik}^{\Delta}$ - odkształceniem wstępnym pręta.

Ze wzoru tego można wyznaczyć siłę normalną

$$N_{ik} = E_{ik} A_{ik} (\varepsilon_{ik} - \alpha_{ik} t_{ik} - \varepsilon_{ik}^{\Delta})$$

$$\varepsilon_{ik} = \frac{l_{ik} - l_{ik}^o}{l_{ik}^o}. \quad (7)$$

Dla każdego węzła „i”, w którym schodzi się „m” prętów, układamy trzy równania równowagi (rys. 4)

$$\sum_{k=1}^m N_{ik} \cos \beta_{ik} + P_{x_i} = 0,$$

$$\sum_{k=1}^m N_{ik} \cos \gamma_{ik} + P_{y_i} = 0, \quad (8)$$

$$\sum_{k=1}^m N_{ik} \cos \eta_{ik} + P_{z_i} = 0,$$

gdzie

$$\cos \beta_{ik} = \frac{x_k - x_i}{l_{ik}}, \quad \cos \gamma_{ik} = \frac{y_k - y_i}{l_{ik}}, \quad \cos \eta_{ik} = \frac{z_k - z_i}{l_{ik}}. \quad (9)$$

Ostatecznie do równań (8) podstawiamy związki (7) i (9)

$$\sum_{k=1}^m E_{ik} A_{ik} \left(\frac{l_{ik} - l_{ik}^o}{l_{ik}^o} - \alpha_{ik} t_{ik} - \varepsilon_{ik}^{\Delta} \right) \frac{x_k - x_i}{l_{ik}} + P_{x_i} = 0,$$

$$\sum_{k=1}^m E_{ik} A_{ik} \left(\frac{l_{ik} - l_{ik}^o}{l_{ik}^o} - \alpha_{ik} t_{ik} - \varepsilon_{ik}^{\Delta} \right) \frac{y_k - y_i}{l_{ik}} + P_{y_i} = 0, \quad (10)$$

$$\sum_{k=1}^m E_{ik} A_{ik} \left(\frac{l_{ik} - l_{ik}^o}{l_{ik}^o} - \alpha_{ik} t_{ik} - \varepsilon_{ik}^{\Delta} \right) \frac{z_k - z_i}{l_{ik}} + P_{z_i} = 0.$$

Równanie (10) układamy dla wszystkich węzłów z wyłączeniem węzłów podporowych. Uzupełnienie stanowią wzory (2) + (5) i ponadto warunki brzegowe.

4. PRZYKŁADY OBLICZEŃ

Równania (10) charakteryzują się silną nieliniowością geometryczną. Opracowano iteracyjną metodę rozwiązywania układów złożonych z równań (10). W n -tej iteracji dla kolejnego węzła „ i ” równania (10) sprowadza się do postaci liniowej poprzez przyjęcie części współrzędnych tego węzła z iteracji $n-1$ (w przypadku 1 iteracji przyjmuje się współrzędne konfiguracji początkowej). Na podstawie tak zlinearyzowanych równań wyznacza się poprawki współrzędnych i -tego węzła. Zmienione współrzędne wykorzystuje się przy obliczeniach poprawek kolejnego węzła. Proces powtarza się aż do uzyskania zgodności równowagi sił we wszystkich węzłach układu z żadaną dokładnością. Metodę zastosowano w autorskim programie komputerowym. Program pozwala wyznaczać przemieszczenia i siły w prętach przestrzennych układów cięgnowych. Jednym z zadań użytych do testowania programu jest przykład z pozycji literaturowej [5]. Zadanie i wyniki testu przedstawiono poniżej.

Przedmiotem analizy jest nieważka, bez wstępnego napięcia siatka cięgnowa (rys. 5) złożona z trzech cięgien nośnych i trzech cięgien napinających. Do obliczeń przyjęto następujące wartości sztywności podłużnej:

- 1) cięgna nośne: $EA = 150\,000$ kN
- 2) cięgna napinające: $EA = 120\,000$ kN.

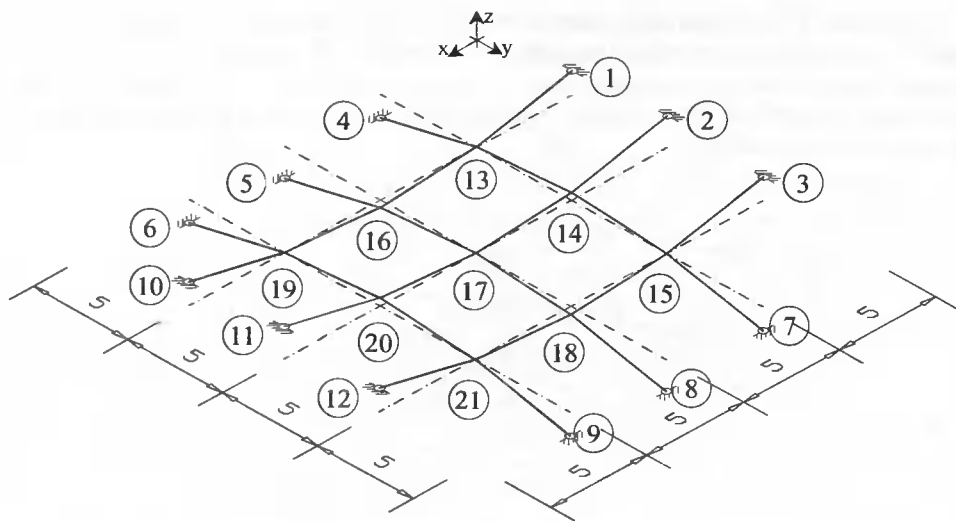
W tabelicy 1 podano współrzędne pionowe węzłów dla konfiguracji nieobciążonej siatki (ze względu na symetrię ograniczono się do podania współrzędnych tylko dla jednej ćwiartki).

Tabela 1. Współrzędne węzłów siatki [m]

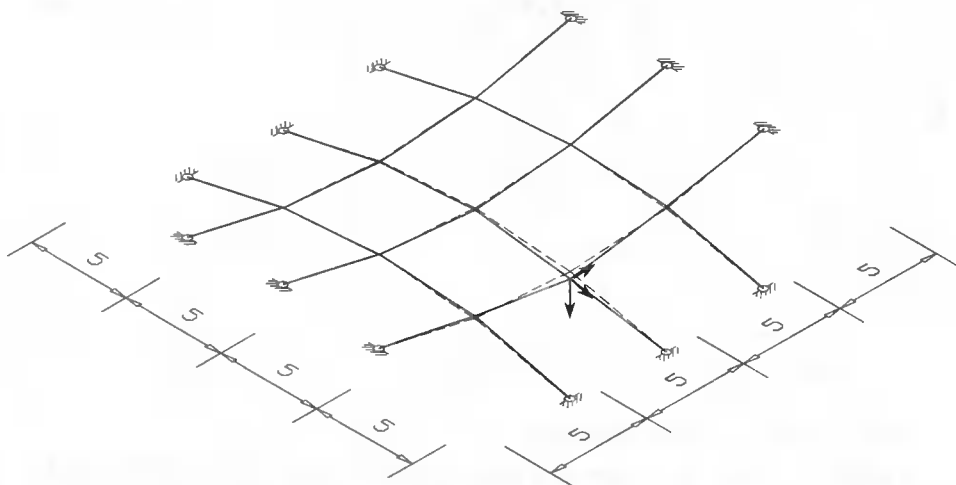
Węzeł	Współrzędna x	Współrzędna y	Współrzędna z
17	10	10	0,000
18	15	10	-0,375
8	20	10	-1,500
20	10	15	0,375
21	15	15	0,000
9	20	15	-1,125
11	10	20	1,500
12	15	20	1,125

W węzle 18 przyłożono siłę, której składowe wynoszą: $P_x = P_y = 100$ kN, $P_z = 150$ kN. W tabelicy 2 zestawiono wartości składowych x , y , z przemieszczeń węzłów (z wyjątkiem węzłów podporowych). Prezentację graficzną wyników przedstawiono na rysunku 6.

Otrzymane wyniki są identyczne z podanymi w pracy [5]. Należy nadmienić, że odległość między węzłami 8 i 18 uległa skróceniu, tak więc pręt rozciągnięty między tymi węzłami został wyłączony z obliczeń.



Rys. 5. Siatka ciągnowa w konfiguracji początkowej (nieobciążonej)

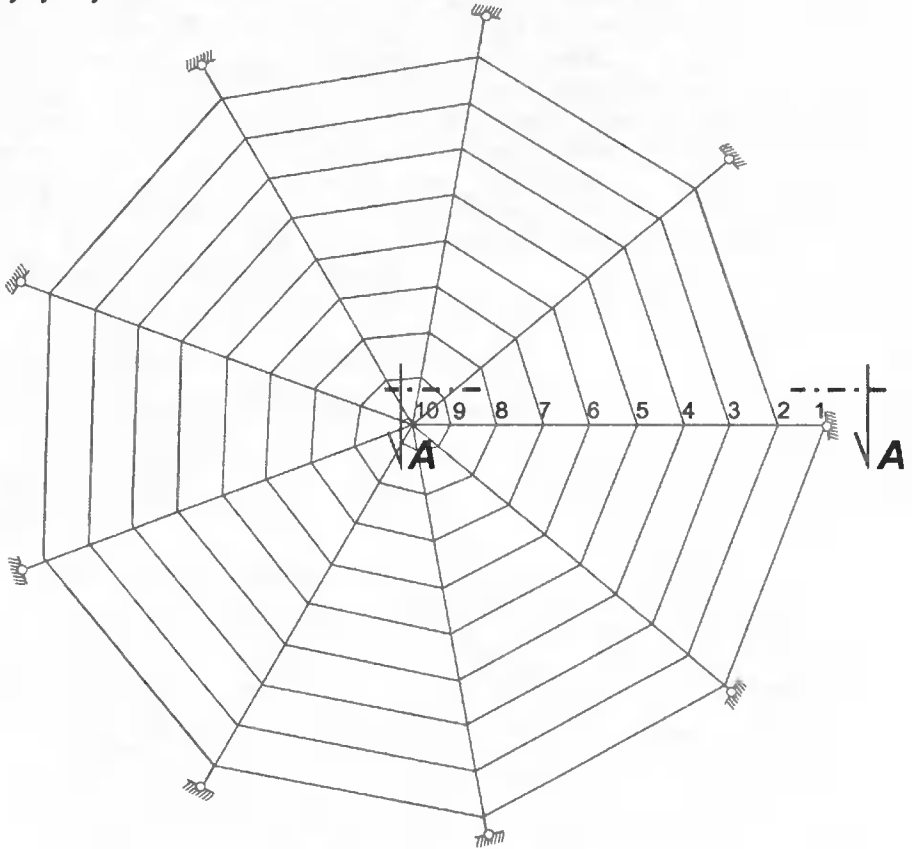


Rys. 6. Siatka ciągnowa w konfiguracji końcowej (obciążonej)

Tablica 2. Wartości przemieszczeń węzłów siatki (m)

Węzeł	u	v	W
13	0,0061	-0,0011	-0,0093
14	0,0081	-0,0066	0,0134
15	0,0169	-0,0326	0,0894
16	0,0163	-0,0006	-0,0537
17	0,0237	-0,0003	-0,0974
18	0,0051	0,0038	-0,3297
19	0,0082	-0,0008	-0,0179
20	0,0101	0,0053	0,0079
21	0,0202	0,0390	0,1036

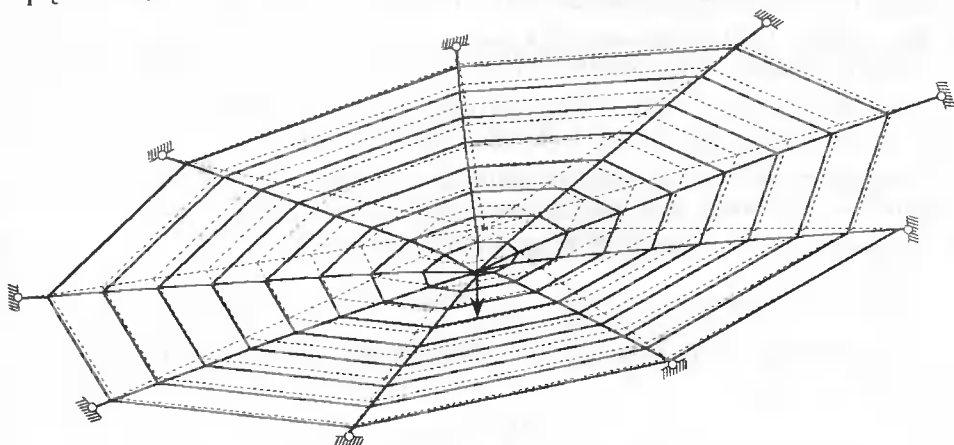
Przykład 2 – to konstrukcja złożona ze 166 cięgien rozciągniętych między 89 węzłami kształtem przypominająca pajęczynę – rysunek 7. Ze względu na dużą liczbę węzłów zrezygnowano z zamieszczenia w pracy wszystkich współrzędnych oraz wszystkich składowych przemieszczeń, ograniczono się do podania najbardziej charakterystycznych cech zadania.



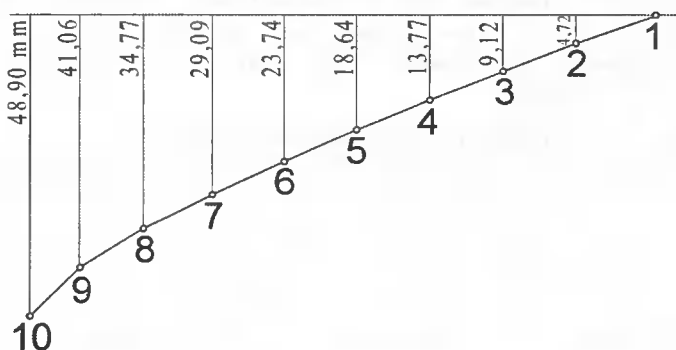
Rys. 7. Rzut poziomy siatki cięgnowej w konfiguracji początkowej (nieobciążonej)

„Pajęczyna” składa się z dziewięciu cięgien promieniowych długości 5,0 m każde, rozłożonych na jednej płaszczyźnie i zamocowanych na końcach. Pomiedzy cięgna promieniowe wprowadzono cięgna równoleżnikowe układające się w spiralę (rys. 7). Sztywność podłużna EA wszystkich elementów siatki wynosi 50000 kN. Układ został wstępnie napięty poprzez skrócenie wszystkich odcinków o 10 cm z wyjątkiem trzech najkrótszych odcinków położonych w centrum siatki, których długość nie przekracza 10 cm. W środkowym punkcie układu przyłożono pionową siłę o wartości 1000 kN. Na rysunku 8 cienką linią przerywaną przedstawiono kształt siatki cięgnowej w konfiguracji początkowej (siatka nieobciążona) oraz grubą linią ciągłą zdeformowaną postać siatki po wstępnym napięciu i przyłożeniu siły pionowej. Na rysunku 9 przedstawiono kształt wybranego cięgna promieniowego w konfiguracji obciążonej. Składowe pionowe przemieszczeń węzłowych na rysunku 8 zostały powiększone dziesięciokrotnie w stosunku do wymiarów siatki, natomiast na rysunku 9 - pięćdziesięciokrotnie.

Wartości składowych przemieszczenia środkowego punktu są następujące: $u = 4,76$ cm, $v = 7,44$ cm, $w = 4,89$ cm. Niewielka rzędna pionowa to efekt wstępnego napięcia układu.



Rys. 8. Siatka cięgnowa – aksonometria (linia ciągła – siatka w konfiguracji końcowej)



Rys. 9. Przekrój A-A. Przemieszczenia wybranego cięgna promieniowego

5. PODSUMOWANIE

W pracy przedstawiono zastosowanie dyskretyzacji pojedynczych cięgien wiotkich o dowolnych strzałkach zwisu na odcinku prętów prostych, do rozwiązywania dowolnych układów cięgowych, dowolnie obciążonych. Dla tak wymodelowanej konstrukcji cięgnowej otrzymano układ równań algebraicznych silnie nieliniowych. Do rozwiązania tego układu opracowano oryginalną metodę iteracyjną, polegającą na linearyzacji równań w procesie iteracji. Metoda ta okazała się bardzo efektywna z uwagi na krótki czas obliczeń i wysoką dokładność otrzymanych wyników. Zastosowana metoda rozwiązywania może być skutecznie stosowana do rozwiązywania dowolnych układów cięgowych i uogólniona na zagadnienia brzegowo-początkowe.

LITERATURA

- [1] Kabat T., 1977. Numeryczna analiza statyczna układówciągnowych. Inż. i bud. Nr 1.
- [2] Pałkowski S., 1979. Obliczanie siatekciągnowych metodą elementów skończonych. Arch. Inż. Lądowej - Tom XXV, z. 2/1979.
- [3] Husiar B., Świtka R., 1979. Quasistatyczne pełzanie ciągu lepko-sprężystego w ujęciu dyskretnym, Arch. Inż. Lądowej - Tom XXV, z. 1/1979.
- [4] Pałkowski S., 1978. Iteracyjno-przyrostowa metoda obliczania wstępnie sprężonych ustrojówciągnowych. Arch. Inż. Lądowej - Tom XXIV, z. 2/1978.
- [5] Pałkowski S., 1994. Konstrukcjeciągnowe. WNT Warszawa 1994.

STATIC CALCULATIONS OF TENSION MEMBERS SCHEMES

Summary

This paper analyzes flabby tension members of linear elastic material. A model of the tension member was presented, equations derived and examples of analysis of two cables schemes demonstrated. Obtained equations are strongly nonlinear, to solve them elaborate iteration method was developed. The examples were calculated using the author's own computer program.

Keywords: cable, structural mechanics, suspended constructions

MODELOWANIE I ANALIZA DYNAMIKI TRAKTORA MTZ-80

Henryk Holka

Akademia Techniczno-Rolnicza
Wydział Mechaniczny, Katedra Mechaniki Stosowanej
ul. Prof. S. Kaliskiego 7, 85-796 Bydgoszcz

W artykule analizowano drgania traktora. Do opisu ruchu nie zastosowano zwykle używanych równań ruchu lecz metodę strukturalnej syntezy podatności.

Polega ona na podzieleniu układu na podsystemy a następnie na połączeniu podatności podsystemów w jeden schemat strukturalny. Wyniki obliczeń były analizowane i dyskutowane.

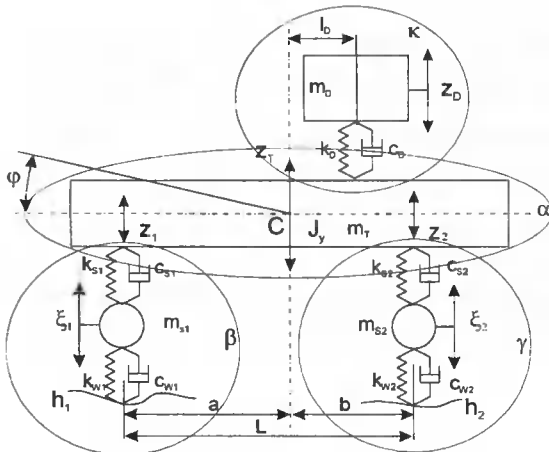
Słowa kluczowe: podatność dynamiczna, drgania, schemat strukturalny, macierz podatności, sztywność, tłumienie

1. WPROWADZENIE

Treścią rozważań w niniejszej pracy są wybrane zagadnienia syntezy i analizy drgań modelu traktora metodą strukturalnej syntezy podatności. Zadania te wykonywano na rzeczywistym obiekcie w warunkach eksploatacyjnych jak i w laboratorium.

Metoda strukturalnej syntezy podatności (SSP) polega na podzieleniu modelu fizycznego traktora na odpowiednie podukłady opisane za pomocą podatności dynamicznych (receptancji) a następnie na połączenia otrzymanych podatności w jeden schemat strukturalny.

Podatności podukładów można obliczyć analitycznie lub zmierzyć doświadczalnie, co jest niewątpliwie zaletą tej metody.



Rys. 1. Model mechaniczny traktora

Mając schemat strukturalny układu tworzymy macierz podatności dynamicznej która pozwala wyznaczyć odpowiedzi układu w interesujących nas współrzędnych przy danych wymuszeniach kinematycznych od podłoża.

Wyniki pracy zostały porównanie przez producenta z obiektem rzeczywistym i posłużyły konstruktorom do dalszych prac modernizacyjnych.

2. MODEL MECHANICZNY I MATEMATYCZNY TRAKTORA

Model mechaniczny traktora przedstawiono na rysunku 1.

Przedstawiony model ma pięć stopni swobody i opisany może być za pomocą współrzędnych Z_w , Z_T , φ i ξ_1 , ξ_2 . Zamiast współrzędnych Z_T i φ można wprowadzić alternatywnie współrzędne Z_1 i Z_2 . Równania ruchu traktora dla tak przyjętych współrzędnych mają postać (1).

$$\begin{aligned}
 m_k \ddot{Z}_w + c_k \left[\dot{Z}_k - \frac{b-l_k}{L} \left(\dot{Z}_1 - \dot{Z}_2 \right) + k_k \left[Z_k - \frac{b-l_k}{L} (Z_1 - Z_2) \right] \right] &= 0 \\
 M_1 \ddot{Z}_1 + M_3 \ddot{Z}_2 + 2c_{s1} \left(\dot{Z}_1 - \dot{\xi}_1 \right) + 2k_{s1} (Z_1 - \xi_1) &= 0 \\
 M_2 \ddot{Z}_2 + M_3 \ddot{Z}_1 + 2c_{s2} \left(\dot{Z}_2 - \dot{\xi}_2 \right) + 2k_{s2} (Z_2 - \xi_2) &= 0 \\
 m_{s1} \ddot{\xi}_1 - 2c_{s1} \left(\dot{Z}_1 - \dot{\xi}_1 \right) + 2c_{w1} \left(\dot{\xi}_1 - \dot{h}_1 \right) - 2k_{s1} (Z_1 - \xi_1) + 2k_{w1} (\xi_1 - h_1) &= 0 \\
 m_{s2} \ddot{\xi}_2 - 2c_{s2} \left(\dot{Z}_2 - \dot{\xi}_2 \right) + 2c_{w2} \left(\dot{\xi}_2 - \dot{h}_2 \right) - 2k_{s2} (Z_2 - \xi_2) + 2k_{w2} (\xi_2 - h_2) &= 0 \\
 M_1 = \frac{(b^2 + \rho^2)m}{L^2}; \quad M_2 = \frac{(a^2 + \rho^2)m}{L^2} \\
 M_3 = \frac{(ab - \rho^2)m}{L^2}
 \end{aligned}
 \tag{1}$$

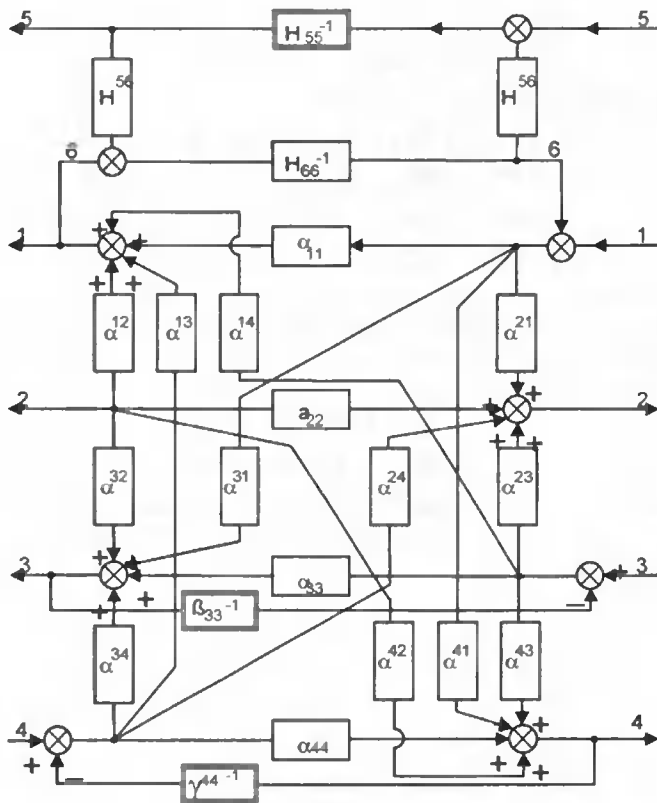
gdzie: ρ - promień bezwładności.

Ponieważ niektóre parametry przedniego i tylnego zawieszenia (np. sztywność i tłumienie opon) należało wyznaczyć doświadczalnie, zastosowano metodę syntezy podatności.

Poza tym w metodzie tej wyraźnie wyróżniamy wydzielone podsystemy, co w przypadku traktora ułatwia analizę (np. podsystem zawieszenia) i daje wyraźniejsze wskazania konstruktorom.

Zgodnie z powyższym model traktora podzielono na cztery podsystemy „ α ”, „ β ”, „ γ ”, „ κ ”, które opisane są przez ich podatności.

Schemat strukturalny syntezy podatności poszczególnych bloków traktora przedstawiono na rys.2.



Rys. 2. Schemat strukturalny syntezy podatności

Podatność „ α ” opisana jest macierzą 4x4 a poszczególne jej elementy obliczamy z zależności:

$$\alpha_m(i\omega) = \frac{\Delta_m}{|U_\alpha(i\omega)|} \quad (2)$$

gdzie: Δ_m jest minorem macierzy sztywności dynamicznej $U_\alpha(i\omega)$.

Sztywność dynamiczną $U_\alpha(i\omega)$ wyznaczamy na podstawie rys.1 i ma ona postać:

$$U_\alpha(s) = \begin{bmatrix} m_7 s^2 2k_{s1}^* + 2k_{s2}^* & 2k_{s2}^* b - 2k_{s1}^* a & -2k_{s1}^* & -2k_{s2}^* \\ \circ & I_7 s^2 + 2k_{s2}^* b^2 + 2k_{s1}^* a^2 & 2k_{s1}^* a & -2k_{s2}^* b \\ \circ & \circ & 2k_{s1}^* & 0 \\ \circ & \circ & \circ & 2k_{s2}^* \end{bmatrix}_{s=i\omega} \quad (3)$$

Macierz $U_\alpha(s)$ jest macierzą symetryczną, $U_{\alpha ij} = U_{\alpha ji}$.

Podatności „ β ” i „ γ ” obliczamy z wyrażeń:

$$\beta_{33}(s) = \frac{1}{m_{s1} s^2 + c_{s1} s + k_{s1}} \quad (4)$$

$$\gamma_{44}(s) = \frac{1}{ms_2s^2 + c_{s2}s^2 + k_{s2}} \quad (5)$$

Odpowiedź układu obliczamy z zależności:

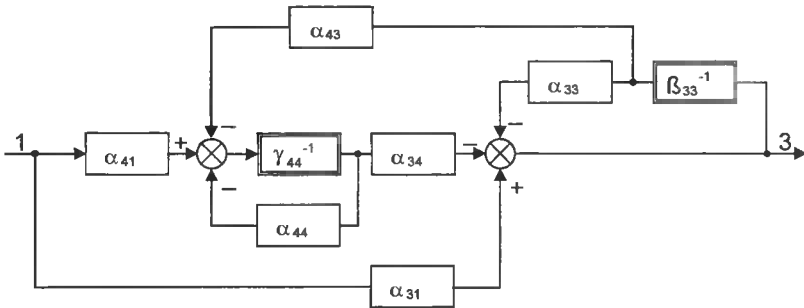
$$\begin{Bmatrix} \mathbf{Z}_T \text{ (1)} \\ \varphi_T \text{ (2)} \\ \xi_1 \text{ (3)} \\ \xi_2 \text{ (4)} \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} \mathbf{G}_{11} & \mathbf{G}_{12} & \mathbf{G}_{13} & \mathbf{G}_{14} \\ \mathbf{G}_{21} & \mathbf{G}_{22} & \cdot & \cdot \\ \mathbf{G}_{31} & \cdot & \cdot & \cdot \\ \mathbf{G}_{41} & \cdot & \cdot & \mathbf{G}_{44} \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \mathbf{0} \\ \mathbf{0} \\ \mathbf{F}_1(t) \\ \mathbf{F}_2(t) \end{Bmatrix} \quad (6)$$

gdzie G_{ij} jest elementem macierzy podatności między współrzędnymi „i” i „j”. Poszczególne podatności otrzymujemy ze schematu strukturalnego z rys.2. a $F_1(t)$ i $F_2(t)$ są to siły działające od wymuszenia kinematycznego $h_1(t)$ i $h_2(t)$.

Z równania (6) otrzymujemy, np.:

$$\begin{aligned} \mathbf{Z}_T &= \mathbf{G}_{13} \cdot \mathbf{F}_1(t) + \mathbf{G}_{14} \cdot \mathbf{F}_2(t) \\ \xi_2 &= \mathbf{G}_{43} \cdot \mathbf{F}_1(t) + \mathbf{G}_{44} \cdot \mathbf{F}_2(t) \end{aligned} \quad (7)$$

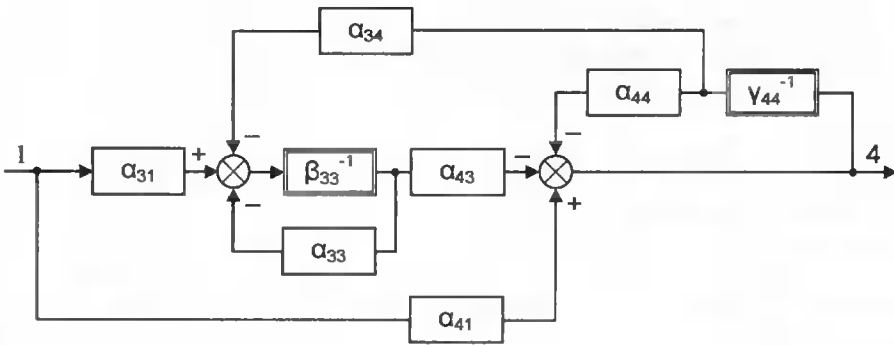
Na rysunkach 3,4 i 5 przedstawiono - dla przykładu schematy strukturalne podatności G_{13} , G_{14} , G_{34} otrzymane ze schematu ogólnego oraz odpowiadające tym wzorom zależności analityczne.



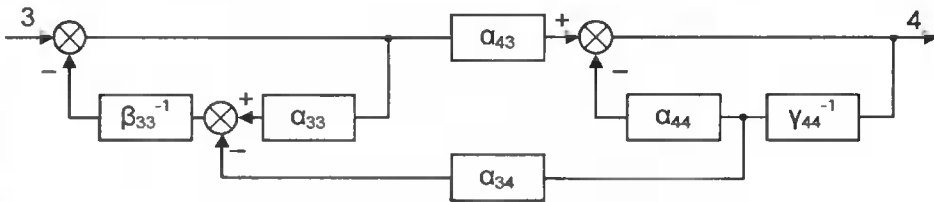
Rys 3. Schemat strukturalny podatności $G_{13}(i\omega)$

$$G_{13}(i\omega) = \frac{\alpha_{31} \cdot \beta_{33} (\gamma_{44} + \alpha_{44}) - \alpha_{34} \cdot \alpha_{41} \cdot \beta_{33}}{(\gamma_{44} + \alpha_{44})(\alpha_{33} + \beta_{33}) - \alpha_{34}^2} = \frac{L_{13}(i\omega)}{M(i\omega)} \quad (8)$$

$$G_{14}(i\omega) = \frac{\alpha_{41} \cdot \gamma_{44} (\beta_{33} + \alpha_{33}) - \alpha_{14} \cdot \alpha_{31} \cdot \gamma_{44}}{(\gamma_{44} + \alpha_{44})(\alpha_{33} + \beta_{33}) - \alpha_{34}^2} = \frac{L_{14}(i\omega)}{M(i\omega)} \quad (9)$$



Rys. 4. Schemat strukturalny podatności $G_{14}(i\omega)$



Rys. 5. Schemat strukturalny podatności $G_{34}(i\omega)$

$$G_{34}(i\omega) = \frac{\alpha_{43} \cdot \gamma_{44} \cdot \beta_{33}}{(\gamma_{44} + \alpha_{44})(\alpha_{33} + \beta_{33}) - \alpha_{34}^2} = \frac{L_{34}}{M(i\omega)} \quad (10)$$

Należy zauważyć, że przedstawione powyżej wzory na podatność mają jednakowe mianowniki i jest to swoiste sprawdzenie poprawności wyprowadzonych wzorów. Po przyrównaniu mianownika do zera otrzymujemy częstotliwości drgań własnych układów.

3. ROZWIĄZANIE RÓWNAŃ

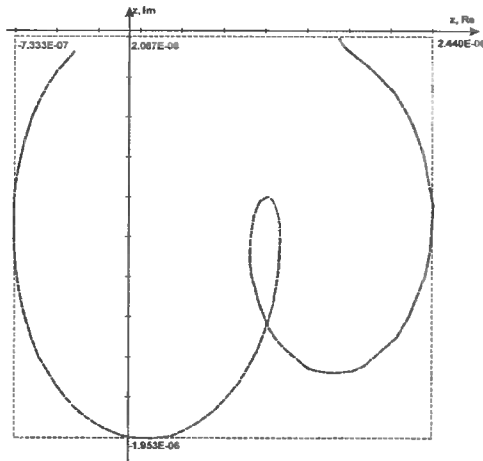
Badania drgań traktora przeprowadzono na modelu białoruskiego traktora MTZ-80. Poniżej przedstawiono ważniejsze parametry tego traktora.

1. Masa reserwana M	2690	kg
2. Masa reserwana przypadająca:		
na przednie zawieszenie M_1	1020	kg
na tylne zawieszenie M_2	1670	kg
3. Niereserwana masa:		
przedniego mostu	150	kg
tylnego mostu	630	kg
4. Baza traktora L	2,37	m
5. Współrzędne położenia środka ciężkości		
do przedniej osi	1,17	m
do tylnej osi	0,87	m
6. Moment bezwładności masy reserwanej J	3295	kgm ²

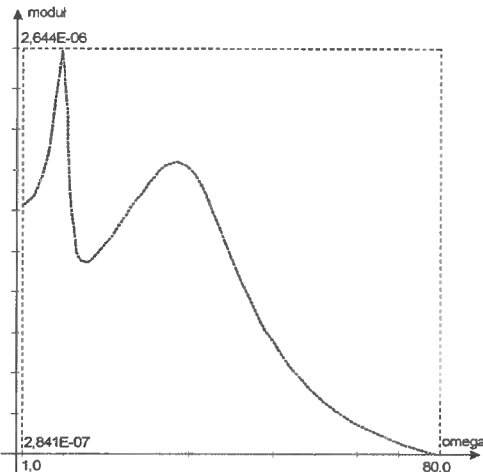
7.	Promień bezwładności ρ	1,1	m
8.	Charakterystyka zawieszenia		
	przedniego: $2k_{s1} =$	200	kN/m
	$2c_{s1} =$	4,14	kN-s/m
	tylnego: $2k_{s2} =$	160	kN/m
	$2c_{s2} =$	7,31	kN-s/m
9.	Charakterystyki opon		
	przedniej: $k_{\omega 1} =$	450	kN/m
	$c_{\omega 1} =$	4,32	kN s/m
	tylnej: $k_{\omega 2} =$	580	kN/m
	$c_{\omega 2} =$	4,81	kN-s/m

Poniżej przedstawiono wybrane wyniki obliczeń. Aby obliczyć np. współrzędną ξ_2 zgodnie ze wzorem (7) należy wyznaczyć podatności $G_{43}(i\omega)$ i $G_{44}(i\omega)$.

a)



b)



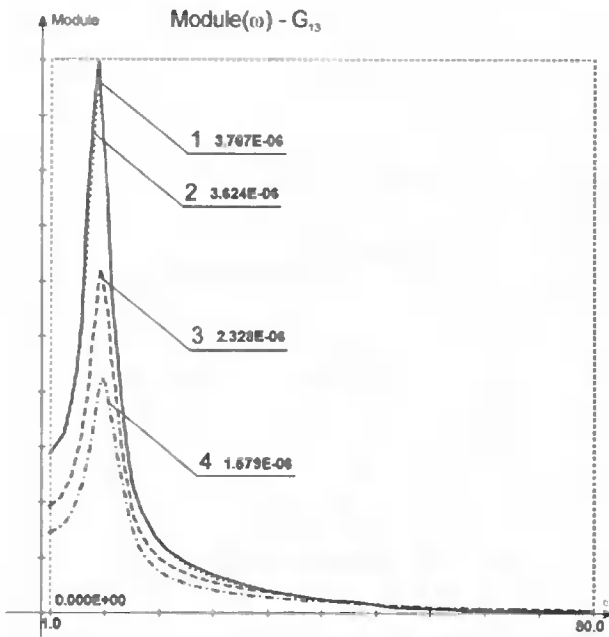
Rys. 6. Podatność $G_{44}(i\omega)$: a - charakterystyka amplitudowo-fazowo-częstotliwościowa, b - charakterystyka amplitudowo-częstotliwościowa

Na rysunku 6 przedstawiono obliczoną podatność $G_{44}(i\omega)$. Charakterystykę „b” obliczono z wykresu „a” zgodnie z zależnością:

$$|G_{44}(i\omega)| = \sqrt{(ReG_{44})^2 + (Im+G_{44})^2} \quad (11)$$

Z powyższego wykresu otrzymano dwie częstotliwości rezonansowe $\omega_1 = 8,4 \left| \frac{rad}{s} \right|$ i $\omega_2 = 29,6 \left| \frac{rad}{s} \right|$

Na rysunku 7 przedstawiono moduł podatności G_{14} w zależności od parametrów opon.

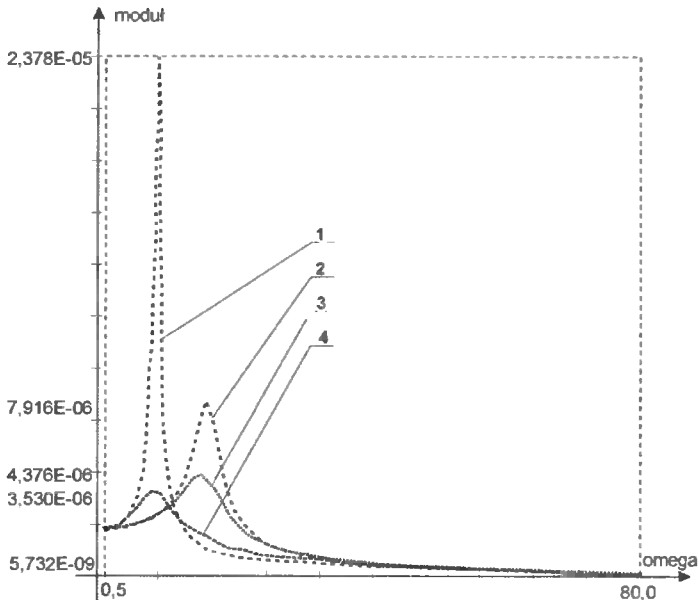


Rys. 7. Podatności $G_{14}(i\omega)$ w zależności od różnych wartości parametrów opon

1.	$2k_{w1} = 450 \text{ kN/m}$	$2c_{w1} = 4,32 \text{ kN}\cdot\text{s/m}$
	$2k_{w2} = 580 \text{ kN/m}$	$2c_{w2} = 6,97 \text{ kN}\cdot\text{s/m}$
2.	$2k_{w1} = 450$	$2c_{w1} = 6,48$
	$2k_{w2} = 580$	$2c_{w2} = 10,44$
3.	$2k_{w1} = 675$	$2c_{w1} = 4,32$
	$2k_{w2} = 870$	$2c_{w2} = 6,97$
4.	$2k_{w1} = 900$	$2c_{w1} = 8,64$
	$2k_{w2} = 1160$	$2c_{w2} = 1394$

Przyjęte wyżej parametry sprężystości i tłumienia opon nie uwzględniają rzeczywistego kontaktu opon z podłożem. Jeżeli traktor porusza się z oponami zanurzonymi, np. w gęstym błocie, wówczas parametry opon będą odbiegać od założonych. Stosowana metoda podatności umożliwia badania takich realnych parametrów.

Na rysunku 8 przedstawiono podatność G_{32} w zależności od tłumienia tylnego zawieszenia

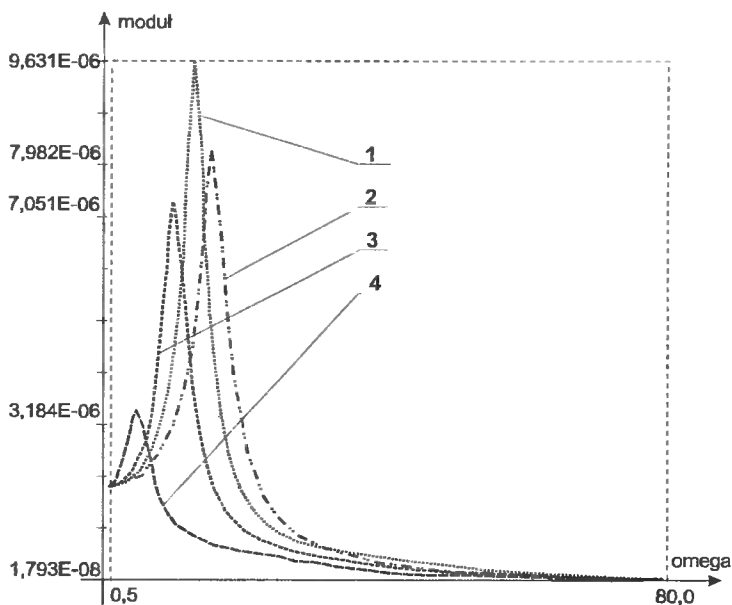


Rys. 8. Podatności $G_{32}(i\omega)$ przy zmianie tłumienia tylnego zawieszenia:

1. $2c_{s2} = 0$ kN·s/m	$\omega = 8,45$ rad/s
2. $2c_{s2} = \infty$	$\omega = 15,6$ rad/s
3. $2c_{s2} = 100$	$\omega = 14,81$ rad/s
4. $2c_{s2} = 15$ kN·s/m	$\omega = 7,61$ rad/s
$2k_{s2} = 160$ kN/m = const	

Z wykresu wynika, że przy zerowym tłumieniu częstotliwość drgań własnych $\omega = 8,45$ rad/s. Zwiększenie tłumienia (krzywa 4) powoduje wyraźne zmniejszenie amplitudy i nieznaczne zmniejszenie częstotliwości. Tłumienie krytyczne $C_k = 16,34$ kN·s/m. Powyżej tego tłumienia nie możemy mówić o częstotliwości drgań a szybkim asymptotycznym powrocie do położenia równowagi.

Podobną analizę, lecz przy zmieniającej się sztywności tylnego zawieszenia przedstawiono na rysunku 9.



Rys. 9. Podatność G_{32} przy zmianie sztywności tylnego zawieszenia:

$$1. 2k_{s2} = 800 \text{ kN/m} \quad \omega = 13,22 \text{ rad/s}$$

$$2. 2k_{s2} = \infty \quad \omega = 15,6 \text{ rad/s}$$

$$3. 2k_{s2} = 300 \text{ kN/m} \quad \omega = 10,0 \text{ rad/s}$$

$$4. 2k_{s2} = 50 \text{ kN/m} \quad \omega = 4,48 \text{ rad/s}$$

$$2c_{s2} = 7,31 \text{ kN/m}$$

Obserwujemy prawidłowość – zwiększenie sztywności powoduje wzrost częstotliwości. Przedstawione zależności pozwalają ocenić wpływ sztywności i tłumienia na drgania konkretnego traktora i były wykorzystane w pracach projektowych nowych rozwiązań.

4. WNIOSKI

1. W wyniku podziału układu na podsystemy można było analizować całe bloki konstrukcyjne, np. zawieszenie tylne, przednie, podukład mas niereserowanych itp. przez co otrzymano czytelniejsze rezultaty dla konstruktorów.
2. Metoda SSP daje możliwości łatwego wkomponowania w tok obliczeń eksperymentów.
3. Rezultaty obliczeń porównano dla wybranych danych z układem rzeczywistym. Porównania wykazały zgodność modelu z układem rzeczywistym.

LITERATURA

- [1] H. Holka, 1987. Receptance synthesis by Means of Block Diagrams. VIIth World Congress of IFToMM, Sevilla.
- [2] H. Holka, 1995. Układy dyskretne ciągle jako wielowymiarowe obiekty sterowania. Wyd. Uczeln. ATR Bydgoszcz, Zesz. Nauk, Mechanika 37.
- [3] T. Kaczorek, 1999. Teoria sterowania i Zesz. Nauk. systemów. PWN Warszawa.

MODELLING AND ANALYSIS OF TRACTOR MTZ-80 DYNAMICS

Summary

In this paper the vibrations of the tractor were analyzed. The traditional method of motion description uses differential equations.

This time the structural synthesis of the receptance was used. This method consists in dividing the tractor model into the individual subsystems and then in connecting the subsystems receptance into one structural scheme.

The results of the calculations were presented and discussed.

Keywords: receptance, vibrations, structural scheme, damping, receptance matrix

BADANIA SYMULACYJNE REZONANSU W DRGANIACH KONTAKTOWYCH

Robert Kostek, Karol Grudziński

Politechnika Szczecińska, Katedra Mechaniki i Podstaw Konstrukcji Maszyn
Wydział Mechaniczny
Al. Piastów 19, 70-310 Szczecin

W pracy przedstawiono opis i wyniki symulacyjnych badań kontaktowych drgań normalnych układu dynamicznego o jednym stopniu swobody. Badany układ składał się ze sztywnej bryły, spoczywającej na nieliniowo sprężystym podłożu, modelującym połączenie stykowe obrobionych mechanicznie powierzchni stalowych. Celem tej pracy było zbadanie zjawiska rezonansu kontaktowego dla wybranego obszaru zadanych parametrów, dotyczących wartości siły i częstotliwości wymuszeń.

Słowa kluczowe: mechanika kontaktu, drgania nieliniowe, krzywa rezonansu

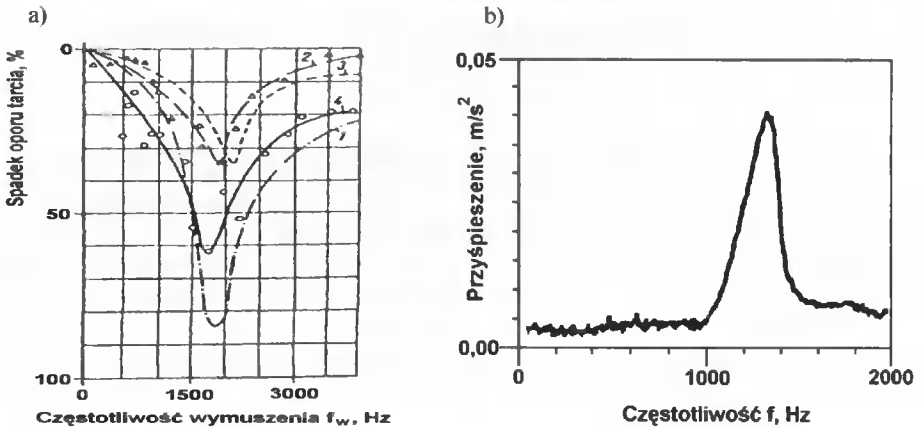
1. WPROWADZENIE

Zjawiska zachodzące w połączeniach stykowych elementów maszyn mogą wpływać na wytrzymałość i trwałość połączeń tarciovych, sztywność statyczną oraz przebieg zjawisk dynamicznych, a w szczególności na amplitudę i częstotliwość drgań własnych złożonych układów mechanicznych [4,6,14,17,19] (np. obrabiarek). Dokładny opis zjawisk dynamicznych, występujących w kontakcie, jest więc potrzebny do lepszego zrozumienia dynamiki i trwałości maszyn.

Łączone ze sobą powierzchnie elementów maszyn nie są idealnie gładkie. Powstałe na nich, w wyniku obróbki, odchylenia geometryczne od założonego stanu idealnego (chropowatość, falistość, błędy kształtu) powodują, że stykają się one w oddzielnych „punktach” (mikroobszarach), rozmieszczonych w sposób przypadkowy, a poszczególne pola styku mają bardzo małe wartości. Rzeczywista powierzchnia styku stanowi niewielki procent nominalnej powierzchni styku i zależy od obciążenia normalnego [6]. Ma to istotny wpływ na jego mechaniczne własności i zachowanie się w warunkach obciążeń roboczych, w szczególności zaś na wystąpienie kontaktowych drgań normalnych. Drgania te są nieliniowe i niesymetryczne [7,10,11,15,18].

Istotnym zagadnieniem w badaniach kontaktowych drgań normalnych, wymuszonych siłą harmoniczną, jest sprawa rezonansu. Powoduje on zwykle znaczny spadek sił tarcia [8,18], luzowanie się połączeń tarciovych i prowadzi do utraty stabilności układu mechanicznego. Rezonować może bryła (przy wysokich częstotliwościach $\sim 10^4$ Hz [5,16]) albo też połączenie stykowe (przy średnich częstotliwościach $\sim 10^3$ Hz [7,11,18]). Spadek oporów tarcia można zaobserwować także poza obszarem rezonansowym, przy niskich częstotliwościach (~ 10 Hz) w przypadku, gdy siła wymuszająca jest odpowiednio duża.

Dynamiczne zjawiska kontaktowe były przedmiotem zainteresowania wielu badaczy. Prace [8,18] zawierają wyniki badań doświadczalnych wpływu częstotliwości siły wymuszającej drgania kontaktowe na spadek oporu tarcia (rys. 1a). Badania te wykazały wyraźny spadek oporu tarcia w zakresie częstotliwości rezonansowej. Badaniom własności dynamicznych kontaktu poświęcone były także prace [10,11]. Badania doświadczalne dotyczyły między innymi wyznaczenia odpowiedzi kontaktowego układu drgającego na zakłócenia impulsowe (rys. 1b), natomiast badania teoretyczne mieściły się w obszarze poszukiwania krzywej rezonansu przybliżoną metodą analityczną.

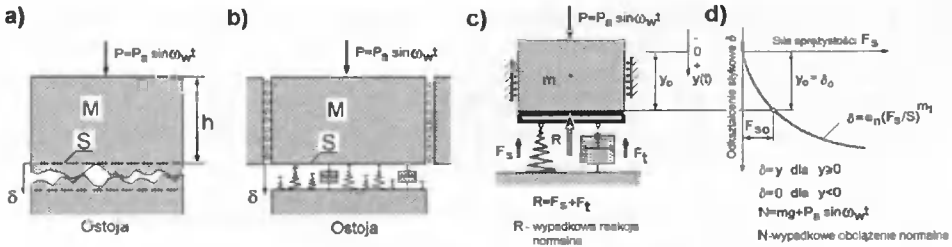


Rys. 1. Procentowy spadek oporu tarcia w funkcji częstotliwości wymuszenia (a) [18], widmo przyspieszenia powstałe po uderzeniu w środek bloku (b) [11]

Celem tej pracy jest wyznaczenie metodą symulacji komputerowej kontaktowych drgań normalnych, przy uwzględnieniu nieliniowej podatności połączenia stykowego i zbadanie zjawiska rezonansu kontaktowego dla wybranego obszaru zmiennych dotyczących wartości siły i częstotliwości wymuszeń.

2. PODSTAWY TEORETYCZNE

Obiektem badań jest układ dynamiczny przedstawiony na rysunku 2a. Składa się on z prostopadłościennego obrobionego mechanicznie bloku stalowego, o masie M i wysokości h , spoczywającego na chropowatej (podatnej) przeciwpowierzchni. W układzie tym zarówno blok stalowy, jak i ostoję traktuje się jako ciała doskonale sztywne, a oddziaływanie występów nierówności stykających się powierzchni zastępuje się oddziaływaniem dużej liczby mikrosprężyn o różnej wysokości. Własności tłumiące połączenia stykowego modelują mikrołumiki. W ten sposób otrzymuje się model fizyczny rozważanego układu jak na rysunku 2b, gdzie S oznacza nominalne pole powierzchni styku. Dokonując dyskretyzacji tego modelu otrzymuje się model jak na rysunku 2c, z pojedynczą sprężyną i tłumikiem, o nieliniowych charakterystykach. Charakterystykę sprężystą tego modelu, w ujęciu schematycznym, przedstawiono na rysunku 2c, gdzie F_s oznacza siłę sprężystości, δ - odkształcenie stykowe normalne, e_n i m_f - są wielkościami stałymi, charakteryzującymi dane połączenie stykowe, wyznaczonymi doświadczalnie.



Rys. 2. Schemat rozważanego układu (a) i jego modele (b, c, d)

Uwzględniając nieliniowe własności połączenia stykowego, wynikające z badań doświadczalnych, równanie konstytutywne dla przyjętego modelu (rys.2c) można zapisać w następującej postaci:

$$R = F_s + F_t = Sc_n \delta^{m_2} + Sh_n \delta^l \delta' \tag{1}$$

gdzie: F_s - siła sprężystości, F_t - siła tłumienia, S - nominalne pole powierzchni styku, δ - odkształcenie stykowe normalne, δ' - prędkość odkształcenia stykowego, c_n , m_2 , h_n , l - wielkości stałe wyznaczone doświadczalnie.

Wskutek istnienia sprężystej podatności kontaktowej, możliwe jest wystąpienie mikrodrgań masy M (rys. 2c), zarówno swobodnych jak i wymuszonych, w kierunku normalnym do powierzchni styku. Możliwe jest więc także wystąpienie zjawiska rezonansu. Zakładając, że na bryłę o masie M działa dynamiczna siła wymuszająca $P(t) = P_n \sin(\omega t)$, równanie ruchu drgającego dla przyjętego modelu (rys. 2c) można zapisać w następującej ogólnej postaci:

$$My'' - F_t(y, y') - F_s(y) - mg - P(t) = 0 \tag{2}$$

gdzie:

$$\begin{cases} F_s = -Sc_n \delta^{m_2}, & \text{dla } y = \delta > 0 \\ 0, & \text{dla } y \leq 0 \end{cases} \tag{3}$$

$$\begin{cases} F_t = -Sh_n \delta^l \delta', & \text{dla } y = \delta > 0 \\ 0, & \text{dla } y \leq 0 \end{cases} \tag{4}$$

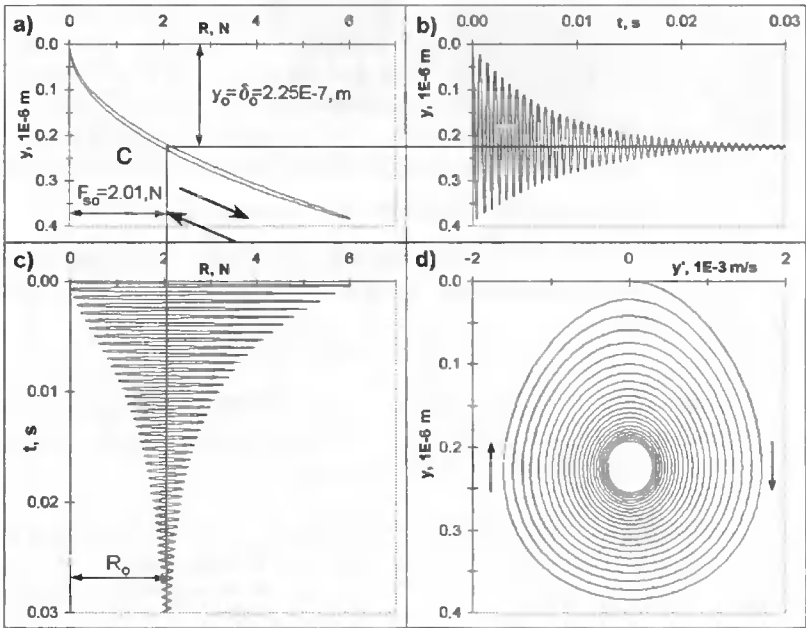
W powyższych wzorach (2)-(4) y oznacza przemieszczenie normalne powierzchni kontaktowej rozważanego ciała drgającego, a y' - prędkość przemieszczenia się powierzchni kontaktowej; odkształcenie stykowe: $\delta = y$ gdy $y > 0$, $\delta = 0$ gdy $y \leq 0$.

Ponieważ zarówno równanie konstytutywne (1) jak i równanie ruchu (2) są nieliniowe, do ich rozwiązania zastosowano metody numeryczne.

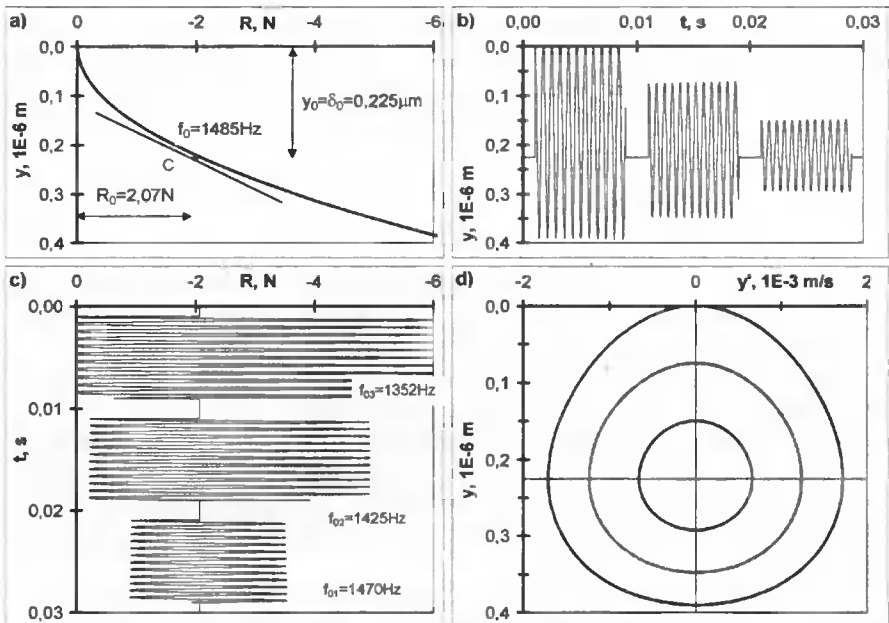
Do obliczeń numerycznych przyjęto następujące dane: $h = 0,03\text{m}$, $S = 0,0009\text{m}^2$, $c_n = 4,52\text{E}16\text{N/m}^4$, $m_2 = 2$, $h_n = 3,5\text{E}11\text{Ns/m}^4$, $l = 1$, $\rho = 7800\text{kg/m}^3$. Wartość stałych dotyczących połączenia stykowego dobrano tak, aby uzyskać charakterystykę podobną do charakterystyki odkształceń stykowych wyznaczonej doświadczalnie, o nieco zwiększonej pętli histerezy.

Charakterystykę podatnościową opisaną równaniem (1) wyznaczoną numerycznie dla przyjętych danych, przedstawiono na rysunku 3a. Rysunki 3b,c,d przedstawiają drgania swobodne zanikające, wyznaczone z równania (2) przy uwzględnieniu zależno-

ści (3) i (4) i przyjęciu siły wymuszającej $P(t) = P_a \sin(\omega t) = 0$ oraz warunkach początkowych dla $t=0$, $y=0$ i $y'=0$.



Rys. 3. Wyniki symulacji komputerowej obrazujące charakterystykę podatności kontaktowej z pętlą histerezy (a) oraz nieliniowe swobodnie zanikające drgania kontaktowe normalne (b,c,d)



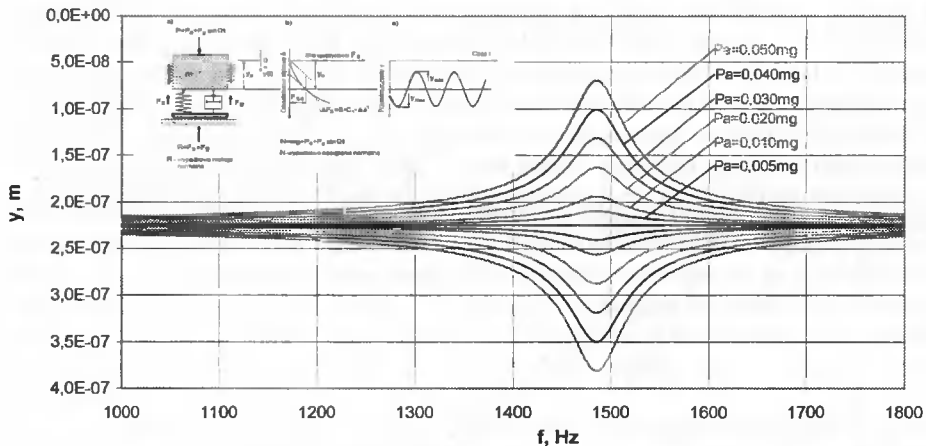
Rys. 4. Wyniki symulacji komputerowej obrazujące charakterystykę podatności kontaktowej (a) oraz nieliniowe swobodnie nie zanikające drgania kontaktowe normalne (b,c,d)

Wskutek nieliniowej podatności stykowej, drgania kontaktowe normalne są nieliniowe i niesymetryczne, względem położenia równowagi spoczynkowej. Częstotliwość kontaktowych drgań własnych zależy nie tylko od położenia punktu równowagi C na charakterystyce (rys. 3a) ale także od ich amplitudy. Ze wzrostem amplitudy częstotliwość drgań własnych maleje (rys. 4). Ma to określony wpływ na zjawisko rezonansu.

3. REZONANS GŁÓWNY

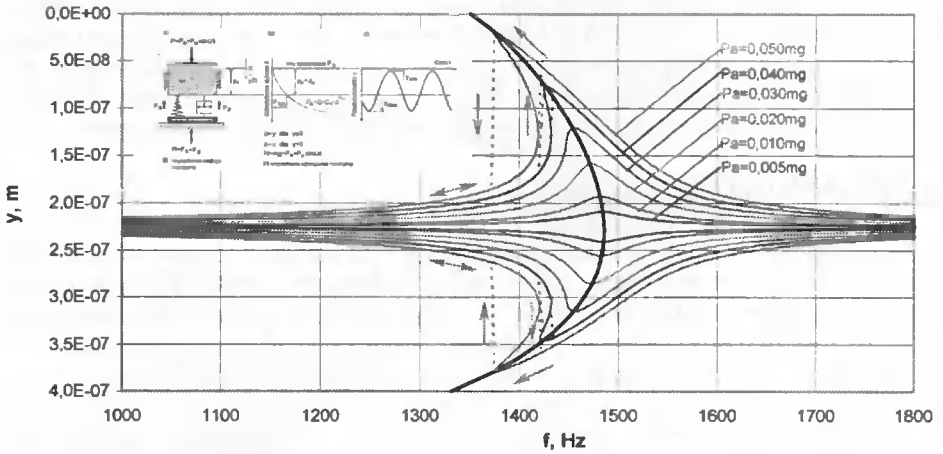
W przypadku nieliniowych kontaktowych drgań normalnych uwaga badaczy skupiona jest zazwyczaj na rezonansie głównym. Do badania tego zjawiska wykorzystuje się często analityczne metody przybliżone [10,11]. Metody te zawierają jednak pewne uproszczenia, które powodują błędy. Przedstawione w tej pracy krzywe rezonansowe są wynikiem obliczeń numerycznych. Przy obliczeniach stabilnych części krzywej rezonansu nie przyjęto założeń upraszczających, typowych dla analitycznych metod przybliżonych. Wykresy rezonansowe wykonano jak wykresy bifiurkacyjne, dla których wielkością zmienną była częstotliwość wymuszenia, natomiast kryterium zanotowania punktu było osiągnięcie ekstremum. Wykresy, wykonane dla kilku wartości amplitudy wymuszenia, przedstawiono na rysunkach 5 i 6.

Rysunek 5 przedstawia rezonans drgań kontaktowych układu zlinearyzowanego (linearyzację sił przeprowadzono dla położenia równowagi spoczynkowej), natomiast rysunek 6 obrazuje rezonans układu nieliniowego.



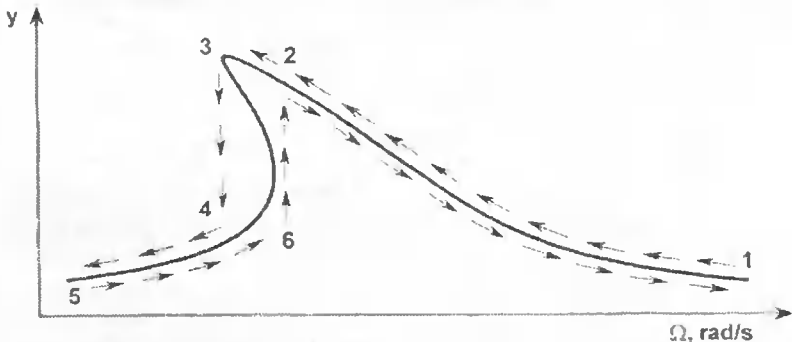
Rys. 5. Krzywe rezonansu modelu liniowego dla różnych wartości siły wymuszającej

W przypadku układu zlinearyzowanego (rys. 5), krzywe rezonansowe są symetryczne względem położenia równowagi spoczynkowej, natomiast na krzywych rezonansowych układu nieliniowego (rys. 6) można wyraźnie zauważyć niesymetryczność wychyleń z położenia równowagi. Wynika to z nieliniowej charakterystyki podatnościowej.



Rys. 6. Krzywe rezonansu modelu nieliniowego dla różnych wartości siły wymuszającej

Częstotliwość drgań własnych układu liniowego nie zależy od amplitudy, natomiast w przypadku układu nieliniowego, wraz ze wzrostem amplitudy drgań swobodnych ich częstotliwość maleje (rys. 4 [7]). Wskutek tego charakterystyka kontaktowych drgań rezonansowych odchyła się w kierunku mniejszych częstotliwości (rys. 6). Wynika z tego, że odpowiedź układu na zadane wymuszenie może być niejednoznaczna. Zagadnienie to ilustruje schematycznie rysunek 7. Rozpoczynając eksperyment w punkcie 1, (rys. 7) i zmniejszając powoli częstość Ω , dochodzi się do punktu 3, po czym następuje skokowa zmiana amplitudy drgań do punktu 4, (na krzywej rezonansowej). Jeżeli eksperyment rozpoczyna się w punkcie 5, to skokowa zmiana amplitudy wystąpi w punkcie 6, po czym jej zmiana będzie miała znowu przebieg ciągły. Skokowym zmianom amplitudy drgań kontaktowych towarzyszą często zjawiska utraty stabilności, tzw. "klekotania" (chatter).



Rys. 7. Charakterystyka kontaktowych drgań rezonansowych (w ujęciu schematycznym)

Przy zmianie częstości wymuszenia Ω , amplituda drgań może zmieniać się w sposób ciągły lub też skokowo. Te dwa ostatnie zjawiska nie występują w przypadku układu zlinearyzowanego. Warto także zwrócić uwagę na fakt wpływu modelu układu na wartości amplitud drgań kontaktowych. W przypadku modelu nieliniowego amplituda drgań jest nieco większa niż w przyjętym modelu zlinearyzowanym.

Czy zawsze warto uwzględniać nieliniowości? Przy dostatecznie małych drganiach kontaktowych, różnice uzyskanych wyników symulacji dla modelu nieliniowego i liniowego są nieistotne. W miarę wzrostu amplitudy siły wymuszającej, różnice pomiędzy drganiami liniowymi i nieliniowymi rosną i stają się istotne, zarówno w sensie ilościowym jak i jakościowym.

Jak już wcześniej zauważono, w przypadku układu z nieliniową charakterystyką podatnościową, częstotliwość swobodnych drgań własnych maleje ze wzrostem amplitudy (rys.4). Wierzchołek krzywej rezonansowej odchyła się w lewo, w stronę mniejszych częstotliwości. Zależność wiążącą częstotliwość drgań własnych f_0 , z położeniem ekstremum przebiegu czasowego $y=F(t)$, przyjęto jako krzywą szkieletową $f_0=F(y)$. Niestabilną gałąź rezonansu wyznaczono przez przeniesienie symetrycznie względem krzywej szkieletowej stabilnej gałęzi rezonansu. Obliczenie numeryczne niestabilnej gałęzi jest zagadnieniem trudnym z uwagi na fakt, że niestabilność gałęzi jest typu siodło [3.9].

4. REZONANS ULTRAHARMONICZNY

Według autorów [1,2] oprócz opisanego wyżej rezonansu głównego w układach nieliniowych występują także inne rezonanse, gdy częstotliwość wymuszenia f_w znajduje się w pewnej proporcji z częstotliwością własną f_0

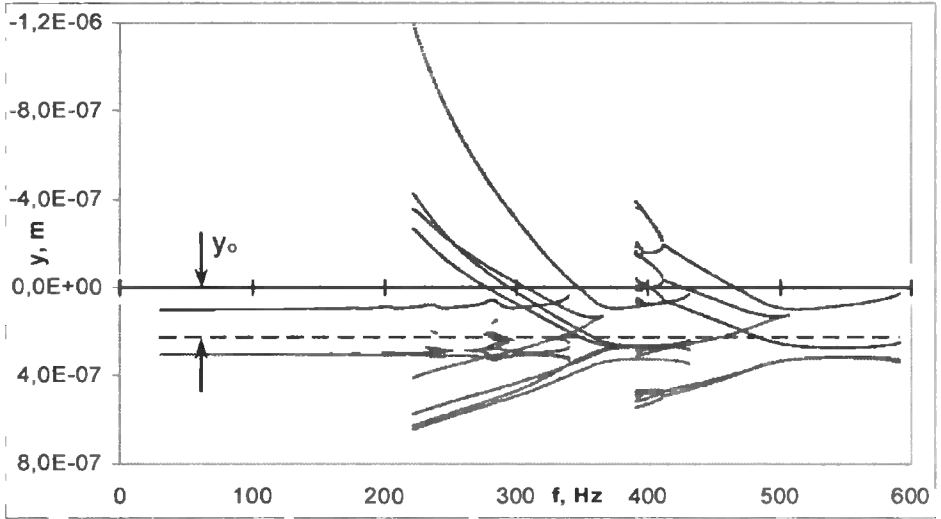
$$f_w = m/n f_0, \quad (5)$$

gdzie: m i n są pewnymi liczbami całkowitymi. W zależności od wartości parametrów m i n rezonansowe dzieli się [1] na:

- rezonans główny ($m=n=1$),
- rezonans subharmoniczny ($m>1, n=1$),
- rezonans ultraharmoniczny ($m=1, n>1$),
- rezonans ultrasubharmoniczny ($m>1, n>1$)

Ten fakt wynika stąd, że w drganiach swobodnych takiego układu występują wyższe harmoniczne. Dlatego jeżeli częstotliwość n -tej harmonicznej okresowego wymuszenia będzie bliska częstotliwości m -tej harmonicznej drgań swobodnych, to obciążenie zewnętrzne może poprzez te harmoniczne doprowadzić energię do układu kompensując straty i pobudzając drgania z częstotliwością własną. W przypadku rezonansu głównego częstotliwość głównej harmonicznej odpowiedzi układu pokrywała się z częstotliwością wymuszenia [2].

Na rysunku 8 przedstawiono wykresy rezonansów ultraharmonicznych otrzymane z obliczeń numerycznych. Częstotliwości rezonansowe tworzą szereg $f_w \approx 1/n f_0$. Autorem udało się zaobserwować rezonanse dla n od 1 do 8. Powstaje jednak pewna wątpliwość. Rezonanse te powinny być wywołane wyższą harmoniczną wymuszenia, a wymuszenie nie było poliharmoniczne. Można uznać, że rezonanse te są wynikiem występującej nieliniowości układu.



Rys. 8. Wykres rezonansu ultraharmonicznego dla przyjętego modelu nieliniowego przy wymuszeniu siłą o znacznej amplitudzie $P_a=0,8$ mg

Obszar częstotliwości poniżej rezonansu głównego nie jest częstym obiektem zainteresowania badaczy. Jak jednak widać na rys.8, w obszarze tym zachodzą dość ciekawe zjawiska: piki rezonansowe, bifurkacje typu widły, ruch o złożonej kinematyce. Zagadnienia te mogą mieć istotne znaczenie poznawcze i praktyczne w przypadku drgań kontaktowych i będą przedmiotem dalszych szczegółowych badań.

5. PODSUMOWANIE

Wykazano istotny wpływ nieliniowości na zjawiska dynamiczne zachodzące w obszarze kontaktu dwóch ciał oraz przydatność metod numerycznych do badania zjawiska rezonansu kontaktowego. Zwrócono uwagę na fakt ograniczonego zastosowania modeli zlinearyzowanych. Ponadto przedstawione wykresy ultraharmonicznego rezonansu kontaktowego rzucają nowe światło na drgania kontaktowe w sensie jakościowym jak i ilościowym na tle dostępnej literatury i odsłaniają nowy ciekawy obszar badań.

LITERATURA

- [1] J. Awrejcewicz, 1996. Drgania deterministyczne układów dyskretnych. WNT Warszawa.
- [2] W. Bogusz, Z. Engel, J. Giergiel, 1974. Drgania i szумы. AGH skrypty uczelniane Nr 347 ss.97-98. Wydawnictwa Geologiczne, Warszawa.
- [3] W.J. Cunningham, 1962. Analiza układów nieliniowych. WNT Warszawa, s. 171.
- [4] M.P. Dolbey, R. Bell, 1971. The contact stiffness of joints at low apparent interface pressure. Ann. CIRP, 19, No 1, 67-79.
- [5] H.D. Fridman, P. Levesque, 1959. Reduction of static friction by sonic vibrations. Journal of Applied Physics, Vol. 30, Nr 10, October.

- [6] K. Grudziński, 1987. Rola. niedomagania i obliczanie połączeń elementów w konstrukcjach maszynowych. XII Sympozjon Podstaw Konstrukcji Maszyn, Politechnika Szczecińska, Szczecin-Świnoujście 1987, Referaty problemowe, ss. 61-87.
- [7] K. Grudziński, R. Kostek. Symulacyjne badania zależności siły tarcia od kontaktowych mikrodrogań normalnych. XX Sympozjon Podstaw Konstrukcji Maszyn, Polanica-Zdrój, Zesz. Nauk. Politechniki Opolskiej 270. Mechanika 68, ss. 353-360.
- [8] С.Э. Хайкин, Л. Н. Лисовский, А. Е. Соломонович, 1939. О силах сухого трения. Докл. АН СССР, 24, N 2, с. 134-138.
- [9] С. Hayashi, 1953. Forced oscillations in nonlinear systems. Nippon Printing and Publishing Company, Osaka, Japan.
- [10] D.P. Hess. A. Soom, 1991. Normal vibrations and friction under harmonic loads: part I Hertzian contact. Journal of Tribology, 113, January, ss.80-86.
- [11] Hess D.P., Soom A, 1991. Normal and angular motions at rough planar contacts during sliding with friction. Journal of Tribology, 114, July, ss. 567-578.
- [12] R. Kostek, 2001. Oszacowanie częstotliwości drgań własnych ciała z uwzględnieniem podatności kontaktowej i różnych modeli jego dyskretyzacji. V Seminarium Naukowe i Młodych Inżynierów Mechaników, Gdańsk, Grudzień (w druku).
- [13] R. Kostek, 2002. Modelowanie i analiza częstotliwości drgań własnych ciała sprężystego spoczywającego na chropowatej powierzchni. Zesz. Nauk. Katedry Mechaniki Stosowanej Politechniki Śląskiej, nr 18/2002. Wisła, Grudzień (w druku).
- [14] K. Marchelek, 1991. Dynamika obrabiarek. WNT Warszawa.
- [15] J.A.C. Martins, J.T. Odwen, F.M.F. Simoes, 1990. A study of static and kinetic friction. Recent Advances in Engineering Science, ss. 29-94.
- [16] N. Sase, T. Kurahashi, M. Fujii, H. Kutomi, H. Fujii, 1997. Control of friction coefficient between metal surfaces. International Conference AMPT'97.
- [17] R.H. Thornley, F. Koenigsberger, 1971. Dynamic characteristics of machined joints loaded and excited normal to the joint face. Ann. CIRP, Vol 19, ss. 459-469.
- [18] D.M. Tolstoi, 1967. Significance of the normal degree of freedom and natural normal vibrations in contact friction. Wear 10, ss. 199-213.
- [19] M. Wösle, F. Pfeiffer, 1996. Dynamics of multibody systems containing dependent unilateral constraints with friction. Journal of Vibration and Control 2, ss. 161-192.

SIMULATION INVESTIGATION OF RESONANCE IN CONTACT VIBRATIONS

Summary

The paper presents a description and some results of simulative investigations of normal contact vibrations in a dynamic system with one degree of freedom. The investigated system consisted of a rigid block resting on a nonlinear elastic foundation, modelling the interface of machined steel surfaces. The aim of this work was to investigate the phenomenon of the contact resonance for the selected range of given parameters concerning the value of force and excitation frequency.

Keywords: frequency-response curve, contact mechanics, nonlinear vibrations

ZASTOSOWANIE ANALIZY MODALNEJ W BADANIU STANU PRZEKŁADNI ZĘBATYCH

Marcin Łukasiewicz

Akademia Techniczno-Rolnicza
Wydział Mechaniczny, Katedra Maszyn Roboczych i Pojazdów
ul. Prof. S. Kaliskiego 7, 85-796 Bydgoszcz

Przedstawiona w opracowaniu metoda diagnozowania stanu przekładni zębatach metodą eksperymentalnej analizy modalnej, pozwala na uproszczenie identyfikacji wykonanego eksperymentu, zapewniając dostateczną dokładność szacowania parametrów modelu modalnego. Dzięki modelowemu podejściu do obiektu mechanicznego, możliwe staje się przewidywanie rozwijających się uszkodzeń, a tym samym wcześniejsze im przeciwdziałanie, w istotny sposób poprawiając bezpieczeństwo pracy i niezawodność.

Słowa kluczowe: analiza modalna, wnioskowanie diagnostyczne, diagnostyka wibroakustyczna

1. WSTĘP

Współczesne trendy rozwojowe nauki i techniki stwarzają zapotrzebowanie na środki diagnostyczne umożliwiające skuteczny wgląd w przebieg procesów eksploatacyjnych coraz bardziej skomplikowanych pojazdów, maszyn i urządzeń. Problematyka identyfikacji stanu dynamicznego maszyn z jej opisem modelowym i metodami badawczymi tych modeli jest umocowana w konstruowaniu i eksploatacji współczesnych maszyn i urządzeń technicznych.

Poszukiwania zmierzają w kierunku nieinwazyjnych metod diagnostycznych, obywatujących się bez ingerencji w strukturę lub normalną pracę badanego obiektu. Do takich metod, z całą pewnością, można zaliczyć diagnostykę wibroakustyczną, wykorzystującą jako źródła informacji sygnały dźwiękowe i drgania.

Prace badawcze zmierzają w kierunku udoskonalania istniejących metod diagnozowania stanu obiektu zwłaszcza z wykorzystaniem sztucznej inteligencji. W opracowaniu podjęto próbę doskonalenia metodyki badań wibroakustycznych dla potrzeb identyfikacji, w szczególności oceny metodami analizy modalnej [6].

2. TWORZENIE MODELU DYNAMICZNEGO UKŁADU

W wielu zagadnieniach technicznych, istotna jest znajomość ich własności dynamicznych, np.: w zadaniu minimalizacji drgań układów rzeczywistych, przy określeniu bezpiecznego zakresu ich pracy ze względu na odpowiedź obiektu na występujące wymuszenia, przy optymalizacji konstrukcji pod względem wytrzymałościowym i w wielu innych przypadkach. Złożoność budowy wielu układów rzeczywistych powoduje, że również ich modele fizyczne i matematyczne charakteryzują się dużą złożonością. Dla-

tego też, w pierwszym przybliżeniu, układy takie zastępuje się modelami prostszymi, np.: układami o jednym lub wielu stopniach swobody i dla nich określa się parametry dynamiczne.

Układ mechaniczny, o jednym stopniu swobody jest najprostszym modelem fizycznym reprezentującym całą klasę układów rzeczywistych określonych następującymi parametrami: masą – m , stałą sprężystości – k , współczynnikiem tłumienia – c , i siłą wymuszającą – P . Po wykorzystaniu wprowadzonych parametrów otrzymano równanie różniczkowe ruchu drgającego układu o jednym stopniu swobody, wyrażone zależnością:

$$m\ddot{x} + c\dot{x} + kx = P(t) \quad (1)$$

gdzie:

\ddot{x} , \dot{x} , x - wektory przyspieszeń, prędkości i przemieszczeń.

Na podstawie tak przyjętego modelu wprowadzono pojęcie częstotliwości własnej, określono wpływ tłumienia na drgania układu oraz przeanalizowano jego reakcje na działanie siły wymuszającej. Modelowanie układów, zwłaszcza dynamicznych jest utrudnione ze względu na ich opis matematyczny [1]. Istnieje możliwość ich zastąpienia analizą modalną.

3. ANALIZA MODALNA

Analiza modalna układów mechanicznych jest metodą badania własności dynamicznych konstrukcji. Jest ona realizowana jako analiza teoretyczna, eksperymentalna lub eksploatacyjna modalna (operacyjna analiza modalna). W wyniku przeprowadzenia analizy modalnej otrzymuje się model modalny stanowiący uporządkowany zbiór częstości własnych, odpowiadających im współczynników tłumienia oraz postaci drgań własnych. Na podstawie znajomości modelu modalnego można przewidzieć reakcje obiektu na dowolne zaburzenie zarówno w czasie, jak i częstotliwości.

Teoretyczną analizę modalną definiuje się jako problem własny macierzy, zależny od macierzy mas, sztywności i tłumienia. Teoretyczna analiza modalna wymaga rozwiązania zagadnienia własnego dla przyjętego modelu strukturalnego badanej konstrukcji. Wyznaczone zbiory częstości własnych, współczynników tłumienia dla częstości własnych oraz postaci drgań własnych pozwalają na symulacje zachowania się konstrukcji przy dowolnych wymuszeniach, doborze sterowań, modyfikacji konstrukcji i innych. Ma ona zastosowanie w procesie projektowania, gdy nie ma możliwości realizacji badań na podobnym obiekcie [4,5].

Eksperymentalna analiza modalna stosowana w diagnozowaniu stanu konstrukcji umożliwia estymację modeli dynamicznych oraz ich analizę opierając się na danych pomiarowych umożliwiających, estymację parametrów modelu modalnego, symulację modyfikacji strukturalnych oraz syntezę odpowiedzi obiektu na zadane wymuszenie. Przeprowadzenie eksperymentalnej analizy modalnej wymaga pomiaru drgań konstrukcji wyłączonej z ruchu w wielu jej punktach przy wymuszeniu działającym w jednym lub wielu punktach wyznaczonej sieci punktów pomiarowych. Jednocześnie musi być mierzony przebieg siły wymuszającej drgania. Estymacja parametrów modelu modalnego polega na aproksymacji zmierzonych charakterystyk konstrukcji za pomocą funkcji, dla której zmiennymi są parametry modelu modalnego [4,5].

Ekspluatacyjna analiza modalna realizowana jest w rzeczywistych warunkach (przy wymuszeniach eksploatacyjnych) pracy obiektu. Stosuje się ją w przypadkach, gdy nie ma możliwości zastosowania zewnętrznego sterowanego wymuszenia oraz gdy nie można wyłączyć konstrukcji z normalnej eksploatacji. Takie rozwiązanie cechuje się krótkim czasem badań i niskimi kosztami, gdyż nie ma potrzeby stosowania aparatury pobudzającej, a pomiary nie zakłócają trybu pracy badanego obiektu, zmierzone sygnały odpowiedzi reprezentują zaś rzeczywiste warunki pracy obiektu. W odniesieniu do stanu metodologii badań diagnostyki technicznej istnieje odniesienie do diagnostyki poprzez identyfikację oraz odpowiednio do diagnostyki symptomowej (eksperymenty) i holistycznej (modele strukturalne) [4,5].

Zastosowanie analizy modalnej do diagnozowania konstrukcji mechanicznych pozwala na:

- wyznaczenie modelu modalnego obiektu (częstości, postaci drgań, współczynniki tłumienia) i śledzenie ich zmian w czasie eksploatacji;
- dostrojenie na bazie modelu modalnego elementów skończonych konstrukcji w stanie zdatności oraz śledzenie zmian tego modelu w czasie;
- wyznaczenie wymuszeń działających na układ i ich widm częstotliwościowych.

W diagnostyce obiektów technicznych coraz częściej stosuje się modele modalne, a diagnostykę maszyn określa się jako diagnostykę z wykorzystaniem modelu. Ideą tej metody jest śledzenie zmian parametrów modelu modalnego, powstających na skutek rozregulowań, zużycia, uszkodzeń lub awarii, na podstawie bieżących obserwacji obiektu. W metodzie tej tworzy się model modalny w postaci zbioru częstości własnych, postaci drgań oraz współczynników tłumienia, dla obiektu bez uszkodzeń, jako wzorzec. Następnie w czasie eksploatacji identyfikuje się model modalny i bada jego korelację z modelem dla obiektu nieuszkodzonego. W przypadku, gdy korelacja taka występuje można stwierdzić, że obiekt jest w stanie zdatności. W przypadku braku korelacji obiekt jest w stanie niezdatności, spowodowanym np. uszkodzeniem [6].

4. DIAGNOSTYKA TECHNICZNA PRZEKŁADNI ZĘBATYCH

Szukając techniki analizy sygnałów dla diagnostyki przekładni, należy przede wszystkim zbadać takie sygnały, które odtworzą nam jej błąd transmisji, a następnie pozwolą rozłożyć błąd sumaryczny na składowe, względem poszczególnych ząbów. Nie jest to proste, gdyż wymaga zaawansowanych technik odbioru i przetwarzania sygnałów drganiowych.

Generalny trend zużyciowy przekładni zębatych jest taki, że amplituda drgań od różnych rodzajów błędów będzie narastać w wyniku „bicia” na skutek mimośrodowości kół i nieosiowości osi przekładni. Niejednakowa sztywność zębów i wynikające stąd nierówne ugięcie pod wpływem przenoszonego obciążenia spowoduje wzrost błędu podziałki, który przybierze wartości maksymalne na skutek wykruszenia lub wyłamania zęba. Zużycie cierne powierzchni bocznych zębów będzie powiększać błąd ewolwenty, natomiast jamki pittingu doprowadzą do wzrostu błędów lokalnych. Całość procesu zużyciowego doprowadzi w efekcie do randomizacji amplitudy i częstotliwości ciągu zdarzeń elementarnych, wynikających z obrotu koła zębatego. Mówiąc obrazowo, jeśli dla nowej przekładni z niewielkim błędem ewolwenty ciąg zdarzeń elementarnych wygląda jak sinusoida o liczbie pików równej liczbie zębów, to na skutek zużycia zostanie ona wygięta przez bicie koła i nieosiowość, poszczerbiona z powodu ubytków w zębach i zużycia boków zębów.

Diagnostyka techniczna przekładni zębatych z uwagi na skomplikowany charakter drgań przekładni jest trudna i tylko niewiele z proponowanych metod diagnozowania stanu może mieć szersze zastosowanie techniczne. Podczas badań, zakłada się, że na skutek uszkodzenia zmienia się lokalnie sztywność konstrukcji, co powoduje zmiany parametrów modelu modalnego. Za pomocą śledzenia zmian postaci drgań własnych można określić obszar, w którym występuje uszkodzenie [6].

Ocenę wpływu rozwijającego się uszkodzenia na parametry modelu modalnego można oszacować, stosując teorię wrażliwości do modelu strukturalnego w postaci:

$$M\ddot{x} + Kx = 0 \quad (2)$$

gdzie:

M, K – macierze mas i sztywności,
 \ddot{x}, x - wektory przyspieszeń i przemieszczeń.

W celu wyznaczenia parametrów modelu modalnego należy rozwiązać zagadnienie własne w postaci:

$$K\{\Psi_i\} - \Lambda_i M\{\Psi_i\} = \{0\} \quad (3)$$

gdzie:

Λ_i - wartości własne,
 $\{\Psi_i\}$ - wektory własne.

Po serii przekształceń uzyskano w efekcie zależność:

$$\frac{\partial f_i}{\partial p} = \frac{1}{8\Pi^2 f_i} \{\Psi_i\}^T \frac{\partial K}{\partial p} \{\Psi_i\} - \frac{f_i}{2} \{\Psi_i\}^T \frac{\partial M}{\partial p} \Psi_i \quad (4)$$

Pierwszy składnik równania opisuje wpływ zmian sztywności, a drugi efekt zmian masy układu.

Analiza charakterystyk dynamicznych układu, tj. podatności dynamicznej przekładni zębatej wskazuje na dużą efektywność ich zmian w zależności od zakresu częstotliwości:

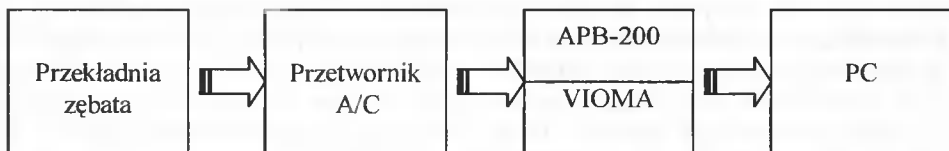
- niskie częstotliwości – zmiana sprężystości k ,
- wysokie częstotliwości – zmiana masy m ,
- częstotliwości rezonansowe – zmiana miary tłumienia c .

W wyniku przeprowadzonych modyfikacji można uzyskać informacje o zmianie następujących parametrów modalnych przekładni zębatej: wartości częstotliwości i tłumienia, wyznaczonych dla modelu oryginalnego i zmodyfikowanego, przebiegi częstotliwości modalnych i tłumień w funkcji większości zmian modyfikacji, porównanie przebiegów funkcji transmitancji między dowolnie wybranymi punktami, wyznaczonej w modelu oryginalnym, z transmitancjami obliczonymi kolejno dla poszczególnych modyfikacji.

5. BADANIA DRGANIOWE I ANALIZA OTRZYMANYCH WYNIKÓW

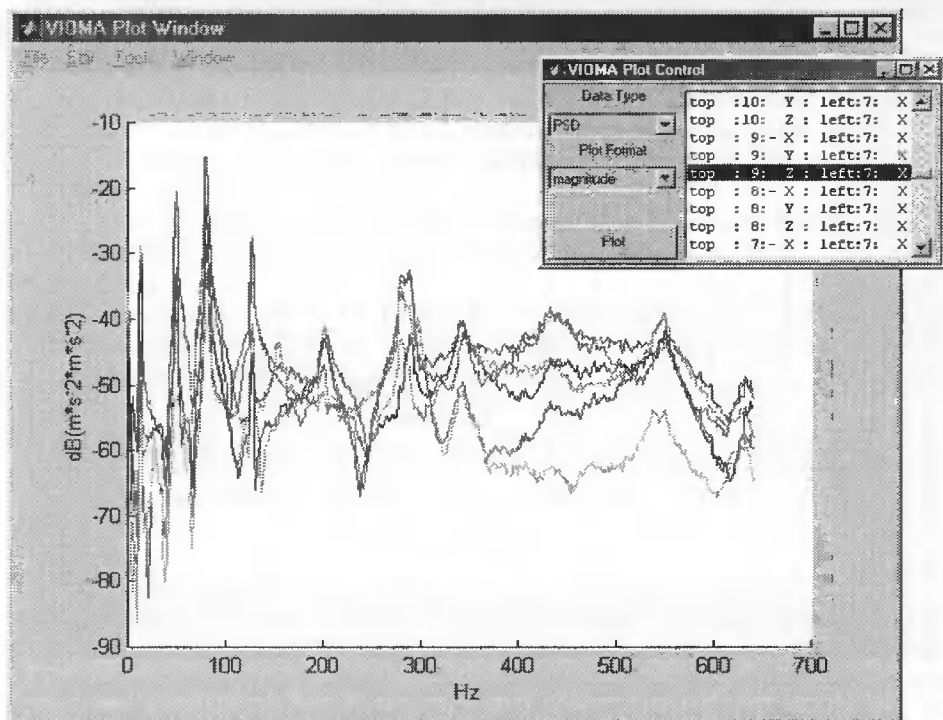
Badania drganiowe przekładni zębatej dokonano na podstawie przeprowadzonego eksperymentu czynnego z użyciem modelu przekładni zębatej DMG-1 (wykonanej w ITE Radom). Podczas przeprowadzania eksperymentu zastosowano pakiet pomiarowo – przetwarzający APB – 200 oraz oprogramowanie VIOMA, będące narzędziem komputerowej analizy modalnej, bazującej na środowisku obliczeniowym Matlab [2, 3].

Przeprowadzone badania polegały na wyznaczeniu miar drganiowych dla sprawnego układu i porównaniu ich z miarami wyznaczonymi dla układu uszkodzonego (wylamano zęb w przekładni zębatej) oraz dokonaniu oceny otrzymanych wyników metodami analizy modalnej. Cały proces przeprowadzonego eksperymentu przedstawiono na rysunku 1.



Rys. 1. Schemat blokowy procesu badawczego

Przeprowadzenie analizy modalnej badanego obiektu wymaga pomiaru drgań konstrukcji w wielu jej punktach przy wymuszeniu działającym w jednym lub kilku punktach wyznaczonych z sieci punktów pomiarowych. W większości zastosowań zakłada się, że na skutek uszkodzenia zmienia się lokalnie sztywność konstrukcji, co powoduje zmiany parametrów modelu modalnego. Poprzez śledzenie zmian postaci drgań własnych można określić obszar, w którym występuje uszkodzenie.



Rys. 2. Graficzne przebiegi gęstości widmowej mocy, przedstawione dla przykładowych dwóch punktów pomiarowych w trzech płaszczyznach pomiarowych wraz z oknem wyboru danych

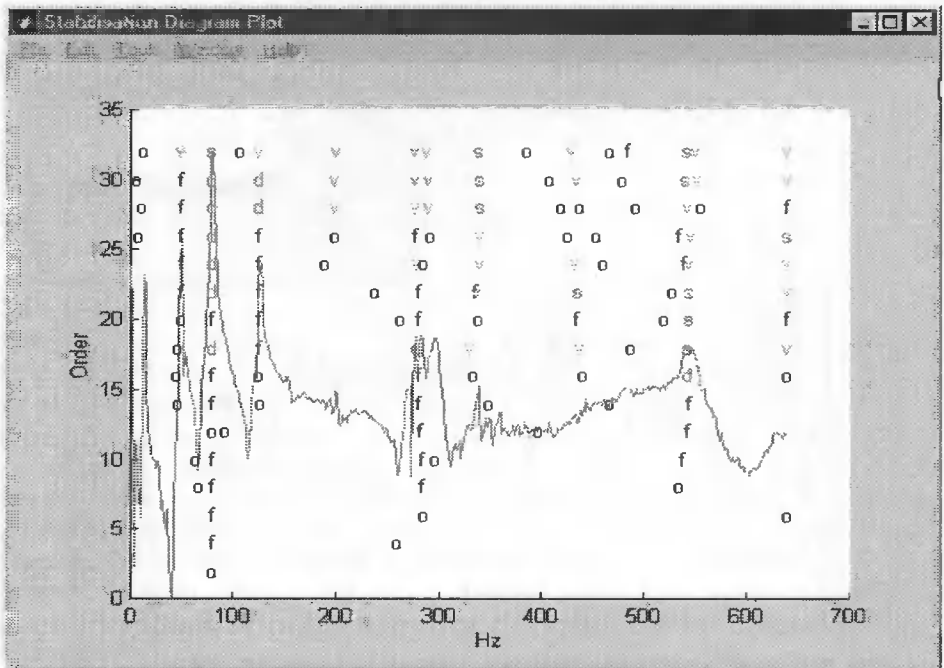
Wyniki badań stanowiskowych - po przetworzeniu - stanowią podstawę do wnioskowania o zmieniającym się stanie technicznym przekładni. Ich porównanie z wy-

kami analizy modalnej przeprowadzonych programem VIOMA doskonali metodykę badań wibroakustycznych obiektów technicznych.

Wszystkie dane pomiarowe, które będą przetwarzane i analizowane przez narzędzia programu VIOMA, są zapisane w formacie obiektów typu „amdata”. Dane wczytywano z plików pomiarowych, a następnie zachowywano je na dysku w formie plików programowych. Po wczytaniu danych pomiarowych do programu istnieje możliwość wykreślenia danych pomiarowych pod postacią graficznych przebiegów [2]. Przykładowy przebieg przedstawiono na rysunku 2.

Po czynnościach związanych z wprowadzaniem danym do narzędzia przystępuje się do analizy otrzymanych wyników. W celu dokonania poprawnej analizy w programie należy zamodelować strukturę badanego obiektu, określić punkty węzłowe, w których dokonuje się pomiary oraz należy opisać własności całej badanej struktury, na które składa się określenie sztywności konstrukcji, współczynniki tłumienia i wzajemne powiązania konstrukcyjne pomiędzy określonymi punktami pomiarowymi.

Po wykonaniu powyższych czynności, VIOMA dokonuje estymacji modalnej otrzymanych wyników. W wyniku estymacji otrzymuje się diagram stabilizacji badanej konstrukcji, na podstawie którego można określić obszary stabilne obiektu dla różnych częstotliwości [2]. Przykładowy diagram przedstawiono na rysunku 3.



Rys. 3. Przykładowy diagram stabilizacji, uzyskany dzięki estymacji wyników doświadczalnych metodą analizy modalnej: s - obszar stabilny, v - częstotliwość wibracji oraz wektor modalny są stabilne, d - częstotliwość wibracji oraz tłumienie są stabilne, f - tylko częstotliwość wibracji jest stabilna, o - obszar niestabilny

Godnym uwagi jest fakt, że estymowane obszary dla pewnych częstotliwości posiadają pewne stałe linie pionowe (szczytowe). Linie te przedstawiają częstotliwości,

dla których maksymalne wartości pojawiają się w charakterystykach częstotliwościowych (narysowane w tle).

Można przyjąć, że zaznaczone obszary w rzeczywistości są obszarami testowanego obiektu, jeśli:

- a) obserwowana częstotliwość, współczynnik tłumienia i wektor modalny są stabilne - zaznaczone są literą „s” na diagramie stabilizacji,
- b) pojawiająca się częstotliwość, posiada wartość maksymalną na charakterystyce częstotliwościowej (jest wykreślona w tle okna).

6. PODSUMOWANIE

Rzeczony rozwój nauki i techniki stwarza zapotrzebowanie na środki diagnostyczne umożliwiające skuteczny wgląd w przebieg procesów eksploatacyjnych coraz bardziej skomplikowanych pojazdów, maszyn i urządzeń. Wiąże się to z coraz większymi kosztami napraw, jak i stratami z powodu ich wyłączenia z procesu produkcyjnego. Dzięki modelowemu podejściu do obiektu mechanicznego, możliwe staje się przewidywanie rozwijających się uszkodzeń, a tym samym wcześniejsze im przeciwdziałanie. W istotny sposób poprawia się bezpieczeństwo pracy i jej niezawodność, a eksperymentalna analiza modalna w znaczący sposób obniża koszty badań eksperymentalnych.

LITERATURA

- [1] Cz. Cempel, 1982. Podstawy wibroakustycznej diagnostyki maszyn. WNT Warszawa.
- [2] T. Uhl, P. Kurowski, 2001. VIOMA – przewodnik użytkownika. AGH, Kraków.
- [3] A. Zalewski, R. Cegiela, 2000. Matlab – obliczenia numeryczne i ich zastosowanie. Poznań.
- [4] B. Żółtowski, 2002. Elementy dynamiki maszyn. Wyd. Uczeln. ATR Bydgoszcz.
- [5] B. Żółtowski, Z. Ćwik, 1996. Leksykon diagnostyki technicznej. Wyd. Uczeln. ATR Bydgoszcz.
- [6] B. Żółtowski, H. Tylicki, M. Jankowski, W. Kupraszewicz, 2000. Implementacja i walidacja analizy modalnej w diagnozowaniu przekładni zębatej. Sprawozdanie z I etapu badań grantu KBN, nr 7, styczeń 2000.

THE APPLICATION OF THE MODAL ANALYSIS IN EXAMINING THE CONDITION OF A TOOTHED GEAR

Summary

The development of science and technique makes demands on diagnostic issues, enabling at the same time effective insight into the course of operational processes of compiled vehicles, machines and devices. It is connected with larger costs of repairs, as well as their losses being a reason of their withdrawal from productive process. Thanks to the model approach to a mechanical object it is possible to predict potential damages, and so-earlier precautions can be taken. The safety of work and its reliability is improved essentially, and the experimental modal analysis, in a significant way, lowers the costs of experimental investigations.

Keywords: modal analysis, diagnostic inference, flutter analysis

PARAMETRY STRUKTURY MODELOWYCH MATERIAŁÓW POROWATYCH

Janusz Łukowski, Jan Kołodziej

Wydział Matematyki Techniki i Nauk Przyrodniczych,
Akademia Bydgoska im. Kazimierza Wielkiego
Instytut Techniki, 85-064 Bydgoszcz, ul. Chodkiewicza 30

Przedstawiono wyniki modelowania analityczno-numerycznego przepływu prądu jonowego przez układ złożony z wiązki równoległych prętów zanurzonych w elektrolicie wykorzystując metodę kolokacji brzegowej. Analizowano przepływ prądu jonowego wzdłuż oraz w poprzek prętów. Wyznaczono parametry opisujące architekturę wewnętrzną układu: współczynnik uformowania i krętość w funkcji porowatości dla trzech różnych regularnych konfiguracji prętów.

Słowa kluczowe: jonowy, porowaty, analityczno-numeryczny

1. WSTĘP

Zazwyczaj materiał porowaty jest rozumiany jako ośrodek, który oprócz szkieletu stałego posiada przestrzeń porowe, wypełnione gazem lub cieczą. Struktura materiałów porowatych jest charakteryzowana i opisywana poprzez szereg parametrów podstawowych. Do najważniejszych z nich zalicza się: współczynnik uformowania (FF), krętość (T), przepuszczalność (k) oraz porowatość objętościową (f_v). Powyższe parametry struktury mają istotne znaczenie dla analitycznego opisu zjawisk konwekcyjnego i dyfuzyjnego transportu masy, procesów dynamicznych zachodzących w nasyconych materiałach porowatych oraz przewodzenia prądu [5,6,7].

Począwszy od Archie'go [1] wykonano szereg badań eksperymentalnych na materiałach geologicznych i materiałach modelowych, stosując pomiary elektryczne dla wyznaczenia krętości i współczynnika uformowania określenie zależności pomiędzy współczynnikiem uformowania a porowatością objętościową, $FF = f_v^{-m}$, gdzie m jest określane jako współczynnik cementacji ośrodka porowatego. Oprócz badań eksperymentalnych przeprowadzono również badania teoretyczne, których celem było wyjaśnienie fizycznego znaczenia współczynnika uformowania i porowatości dla modeli kanalikowych [8]. W niniejszej pracy przedstawiono wyniki modelowania analityczno-numerycznego dla wybranych regularnych struktur prętowych celem wyznaczenia współczynnika uformowania, krętości i porowatości oraz określenia zakresu stosowności zależności typu Archie'go [3].

2. DEFINICJE WSPÓLCZYNNIKA UFORMOWANIA I KRĘTOŚCI ORAZ ZALEŻNOŚCI POMIĘDZY PARAMETRAMI

Najczęściej wyznaczenia współczynnika uformowania i krętości dokonuje się opierając się na pomiarze elektrycznym materiału porowatego wypełnionego płynem przewodzącym, którego szkielet jest dielektrykiem. Współczynnik uformowania definiowany jest jako iloraz przewodności elektrolitu wypełniającego materiał porowaty, σ do przewodności próbki wypełnionej płynem przewodzącym, σ_p .

$$FF = \sigma / \sigma_p \quad (1)$$

Parametr ten jest wielkością bezwymiarową, charakterystyczną dla danej struktury porów, jest on zależny wprost proporcjonalnie od długości średniej drogi nośników prądu w przestrzeni porowej i odwrotnie proporcjonalny do względnego pola powierzchni porów lub porowatości objętościowej. Z kolei krętość definiowana jest jako iloczyn współczynnika uformowania i porowatości objętościowej [2].

$$T = FF \cdot f_v \quad (2)$$

Tak rozumiane pojęcie krętości wprowadzone jest niezależnie od pojęcia definiowanego w kontekście analizy przepływu płynu, gdzie krętość rozumie się jako iloraz lub kwadrat ilorazu średniej drogi cząstek płynu przepływających przez próbkę materiału porowatego do grubości próbki.

3. NUMERYCZNE WYZNACZANIE WSPÓLCZYNNIKA UFORMOWANIA, KRĘTOŚCI I POROWATOŚCI DLA UKŁADU PRĘTÓW RÓWNOLEGLYCH ZANURZONYCH W ELEKTROLICIE

3.1. Model matematyczny i założenia ogólne

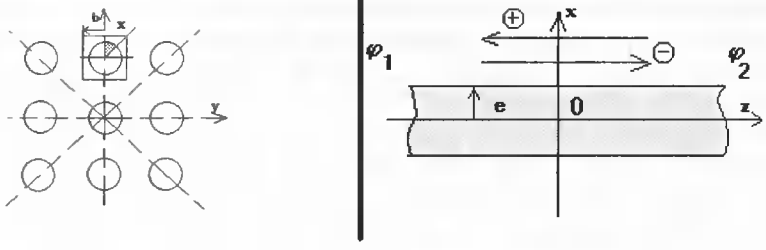
W ramach symulacji numerycznej podjęto się wyznaczenia współczynnika uformowania, porowatości i krętości dla wybranych układów prętowych. W modelu numerycznym przyjmuje się, że materiał prętów jest dielektrykiem, wpływ elektrycznej warstwy podwójnej na brzegu elektrolit-ciało stałe jest zaniedbywalny, przepływ prądu elektrycznego jest ustalony w czasie i lokalnie jest spełniony warunek elektroobojętności.

3.2. Przepływ prądu jonowego wzdłuż prętów

W przypadku przepływu prądu elektrycznego drugiego rodzaju (prądu jonowego) przez układ prętów równoległych wzdłuż osi z (rys. 1), potencjał elektryczny w płaszczyźnie xOy jest niezmienny $\varphi(y) = const$, natomiast wzdłuż osi prętów (kier. z) potencjał elektryczny jest opisany funkcją liniową, zależną od wartości potencjału na brzegach $\Phi = \varphi_1 - \varphi_2$ oraz długości pręta według zależności $\varphi(z) = Az + B$. Dla powyższego układu wartość krętości wynosi jeden, a współczynnik uformowania i porowatość są opisane zależnościami:

$$FF = f_v^{-1}, \quad f_v = (1 - \pi e^2 / 4b^2), \quad (3)$$

gdzie: e jest promieniem pręta, a b jest wymiarem komórki elementarnej.



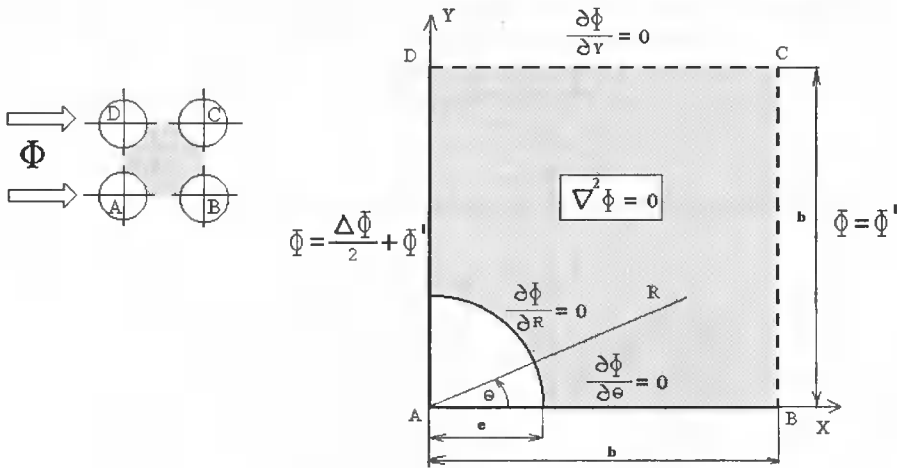
Rys. 1. Układ prętów równoległych i schemat przepływu prądu jonowego

3.3. Przepływ prądu jonowego w poprzek prętów

W przypadku przepływu prądu prostopadle do osi prętów przyjęte założenia prowadzą do dwuwymiarowego równania Laplace'a dla potencjału elektrycznego [4].

$$\nabla^2 \Phi = 0 \tag{4}$$

Rozważając ułożenie prętów w siatce trójkątnej, kwadratowej oraz sześciokątnej, zagadnienie brzegowe formułuje się w powtarzającym elemencie układu – komórce.



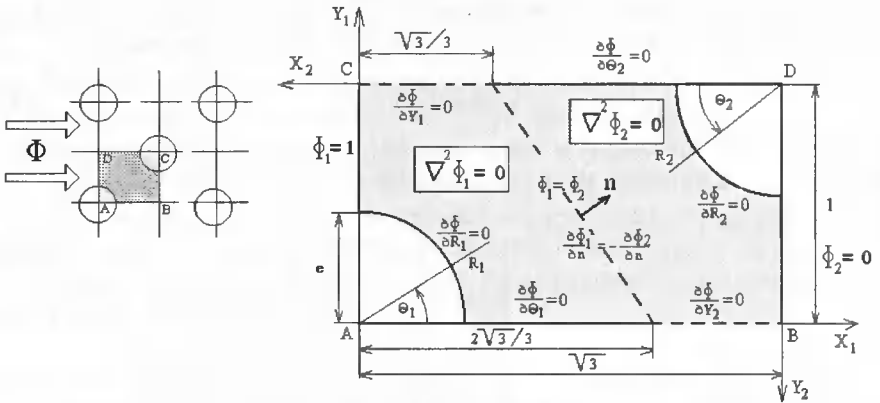
Rys. 2. Układ prętów równoległych i komórka elementarna w siatce kwadratowej

Równania rządzące oraz część warunków brzegowych na granicy komórki spełnia się w sposób ścisły, natomiast pozostałe warunki brzegowe są spełnione w sposób przybliżony (przez przyjętą postać funkcji próbnych).

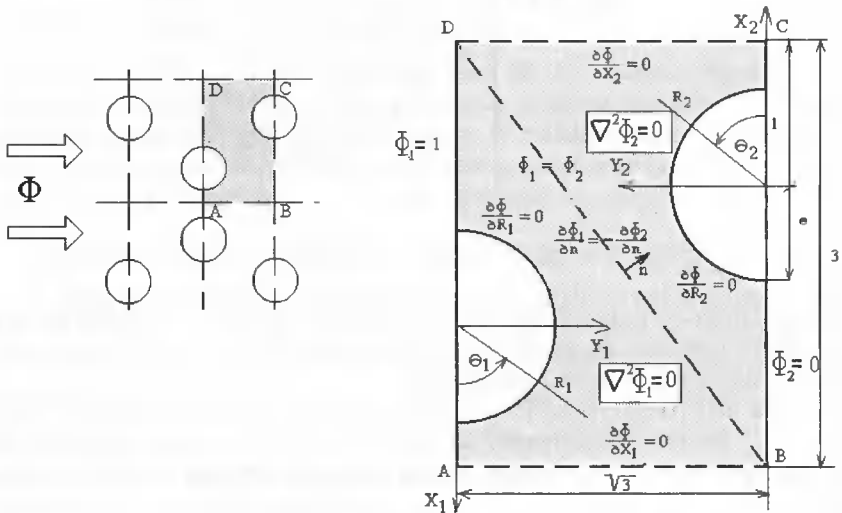
Zastosowana metoda nazywana jest metodą Trefftza z funkcjami próbnymi specjalnego celu [4], i jest to wariant metody kolokacji brzegowej, które ma zastosowanie w obszarach, gdzie występują osie symetrii, cylindryczne wycięcia lub wtrącenia, proste odcinki brzegu.

Warunki brzegowe spełnione w sposób przybliżony (linia kreskowa) spełnia się kolokacyjnie, stosując kolokację prostą lub kolokację w sensie najmniejszych kwadratów.

Elementarną komórkę dla siatki kwadratowej pokazano na rysunku 2, gdzie R – współrzędna punktu kolokacji, e – promień pręta, b – wymiar komórki, θ – kąt współrzędnej punktu kolokacji względem osi układu. W przypadku ułożenia prętów w siatce trójkątnej (rys. 3) i sześciokątnej (rys. 4) obszar komórki elementarnej, dla której sformułowano zagadnienie brzegowe, podzielono na dwa podobszary (wielkości fizyczne w tych podobszarach zaznaczone symbolami 1 i 2). W oparciu o twierdzenia Duhema [4], które głosi, iż możliwa jest konstrukcja funkcji harmonicznej w obszarze Ω poprzez ‘zszycie’ dwóch harmonicznych funkcji definiowanych w dwóch sąsiadujących podobszarach obszaru Ω , na odcinkach, które rozgraniczają podobszary określono warunki ‘zszycia’. Warunkiem zszycia jest równość wartości funkcji oraz ich pochodnych normalnych na brzegu, który dzieli obszar Ω .



Rys. 3. Układ prętów równoległych w siatce trójkątnej i komórka elementarna



Rys. 4. Układ prętów równoległych w siatce sześciokątnej i komórka elementarna

Rozwiązania opisujące pole potencjału elektrycznego w powtarzającym się elemencie układu, które spełniają ściśle równanie różniczkowe (4) (w biegunowym ukła-

dzie współrzędnych) oraz część warunków brzegowych (wynikających z symetrii układu) przyjmuje się w postaci następujących szeregów funkcji próbnych.

Siatka kwadratowa:
$$\phi = 1 + \sum_{j=1}^{\ell} X_j (R_2^{2j-1} + e^{4j-2} \cdot R_2^{-2j+1}) \cos[(2j-1)\theta] \quad (6)$$

Siatka trójkątna:
$$\phi_{II} = \sum_{j=1}^{\ell} X_j (R_2^{-2j-1} + e^{4j-2} \cdot R_2^{-2j+1}) \cos[(2j-1)\theta_2] \quad (7)$$

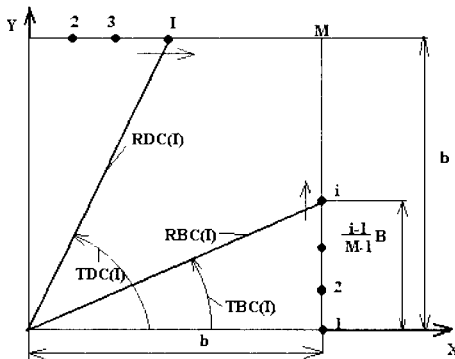
$$\phi_I = 1 + \sum_{j=1}^{\ell} X_j (R_1^{2j-1} + e^{4j-2} \cdot R_1^{-2j+1}) \cos[(2j-1)\theta_1]$$

Siatka sześciokątna:
$$\phi_{II} = \sum_{j=1}^{\ell} X_j (R_2^{2j-1} + e^{2j} \cdot R_2^{-j}) \sin[j\theta_2] \quad (9)$$

$$\phi_I = 1 + \sum_{j=1}^{\ell} X_j (R_1^{2j-1} + e^{2j} \cdot R_1^{-j}) \sin[j\theta_1] \quad (10)$$

gdzie: X_j - współczynniki rozkładu, R, R_1, R_2 - współrzędne punktów kolokacji, e - promień pręta, $\theta, \theta_1, \theta_2$ - kąty współrzędnych punktów kolokacji względem osi układu.

Na brzegach, gdzie warunki brzegowe są spełniane w sposób przybliżony (linia kreskowa, rys. 2-4) punkty kolokacji wybrano założono równą odległość pomiędzy punktami. Na każdym odcinku brzegu, gdzie warunki spełnia się kolokacyjnie przyjęto M punktów kolokacji (przykład dla siatki kwadratowej pokazano na rys. 5) i liczbę punktów M dobiera się w taki sposób, aby błąd rozwiązania zagadnienia brzegowego na brzegach spełnianych kolokacyjnie był dopuszczalny [4].



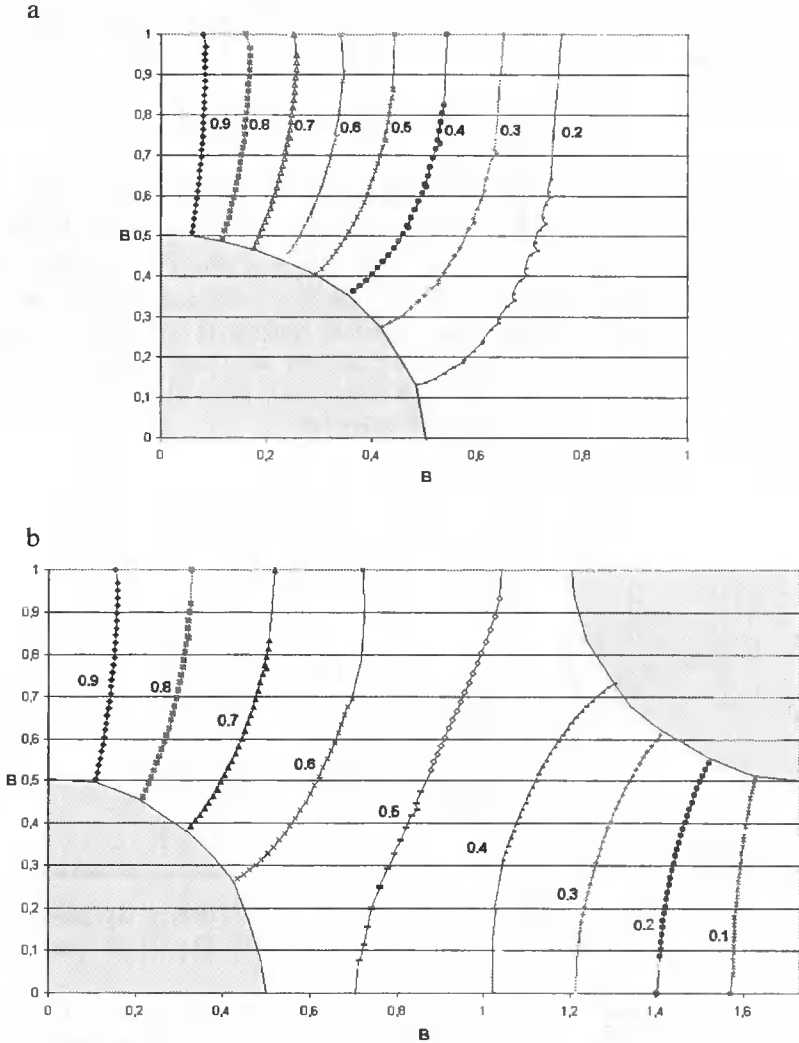
Rys. 5. Rozmieszczenie punktów kolokacji w powtarzającym się obszarze siatki kwadratowej

Nieskończone szeregi funkcji próbnych obcięto do N pierwszych wyrazów ciągów (6)-(10) dla siatki kwadratowej ($N = 2M-1$), trójkątnej ($N = 4M - 8$) i sześciokątnej ($N = 4M-2$).

Po zastosowaniu warunków brzegowych do obciętych szeregów funkcji próbnych (6)-(10) w punktach kolokacji otrzymano układ równań liniowych dla współczynników szeregów. Po rozwiązaniu tych równań metodą eliminacji Gaussa otrzymano współczynniki w rozwiązaniach zagadnień brzegowych dla potencjału elektrycznego. Na rysunku 6 pokazano przykłady rozwiązań ilustrujące linie stałego potencjału elektrycznego w wybranych komórkach.

3.4. Współczynnik uformowania, krętość i porowatość

Uwzględniając zagadnienia brzegowego potencjału i średni prąd jonowy obliczono współczynnik uformowania i krętość wykorzystując związki (2, 11÷13). Porowatość wyliczono opierając się na zależności geometrycznej w obszarze komórki (mając średnicę komórki oraz średnicę wtrącenia). Wartości parametrów struktury porów wyznaczono dla różnych porowatości oraz przy liczbie punktów kolokacji, dla których błąd metody jest najmniejszy.



Rys. 6. Linie stałego potencjału elektrycznego: a - siatka kwadratowa, b - siatka trójkątna

siatka kwadratowa

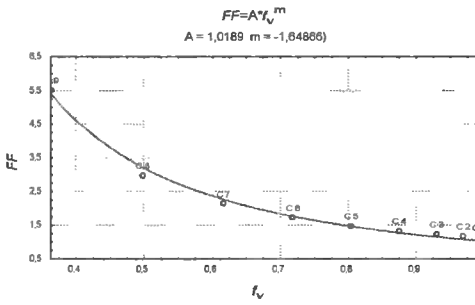
$$FF = \frac{\Delta\Phi}{2} \left(\int_E^B \partial\Phi/\partial x dR \right)^{-1} \tag{11}$$

siatka trójkątna

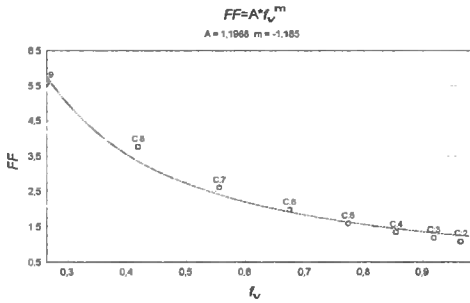
$$FF = \frac{\Delta\Phi}{2\sqrt{3}} \left(\int_E^B \partial\Phi/\partial x dR \right)^{-1} \tag{12}$$

siatka sześciokątna

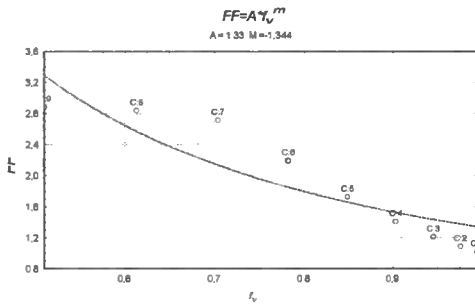
$$FF = \frac{\Delta\Phi}{2\sqrt{3}} \left(\int_E^B \partial\Phi/\partial y dR \right)^{-1} \tag{13}$$



a. – siatka kwadratowa



b. – siatka trójkątna



c. – siatka sześciokątna

Rys. 7. Krzywe estymacyjne i wartości współczynnika uformowania w funkcji porowatości

4. WYNIKI

Na rysunku 6 przedstawiono rozkłady pola potencjału elektrycznego w dwóch z rozpatrywanych komórek elementarnych, które otrzymano przez rozwiązanie zagadnienia brzegowego. Do rozwiązania zagadnienia zastosowano najprostszą odmianę metody kolokacji brzegowej, w której liczba punktów kolokacji pokrywa się z liczbą niewiadomych współczynników w szeregach funkcji. Eksperymenty numeryczne pozwoliły stwierdzić, że liczba punktów nie musi być duża, aby otrzymać odpowiednio mały maksymalny błąd spełnienia warunku brzegowego w przedziale pomiędzy punktami kolokacji.

Na rysunku 7 przedstawiono wyznaczone na drodze symulacji numerycznej wyniki zależności współczynnika uformowania od porowatości dla rozpatrywanych układów prętów. Wykorzystując te zależności współczynnika uformowania od porowatości znaleziono parametry w zależności Archie'go przy zastosowaniu metody estymacji nieliniowej (funkcja estymowana $FF = A * f_v^m$).

Postać zależności współczynnika uformowania od porowatości dla układu prętów w siatce kwadratowej odpowiada zależności wyznaczonej eksperymentalnie dla skał wapiennych (w zakresie porowatości objętościowych dla badanych skał wapiennych [1]).

LITERATURA

- [1] G.E. Archie, 1942. Electrical resistivity - an aid in core analysis interpretation Bull. Am. Assoc. Petrol. Geologists, 31, ss. 350-366.
- [2] R.J.S. Brown, 1980. Connection between formation factor for electrical resistivity and fluid-solid coupling factor in Biot's equations for acoustic waves in fluid-filled porous media. Geophysics, 45, ss. 1269-1275.
- [3] J. Łukowski, M. Kaczmarek, J. Kubik, 1999. Wyznaczanie i analiza współczynników uformowania i krętości materiałów ziarnistych. Zesz. Nauk. Katedry Mechaniki Stosowanej, Politechnika Śląska. Nr 9, ss. 161-167.
- [4] J.A. Kołodziej, 2001. Zastosowanie metody kolokacji brzegowej w zagadnieniach mechaniki. Wydawnictwo Politechniki Poznańskiej.
- [5] D. Johnson, T. Plona, C. Scala, 1982. Tortuosity and Acoustic Slow Wave. Physical Review Letters, Vol 49, Number 25.
- [6] M. Dubas M. Kaczmarek, 2001. Rola struktury porów w prawach przepływu. Przegląd modeli przepuszczalności. Wyd. Uczeln. Zesz. Nauk. ATR.
- [7] E.J. Garboczi, 1990. Permeability, diffusivity and microstructural parameters: Critical review, Cement and Concrete Res., 20, ss. 591-601.
- [8] J. Van Brakel, 1975. Pore space Models for Transport Phenomena in Porous Media. Review and Evaluation with Special Wmphasis on Capillary Liquid Transport. Powder technology, 11, ss. 205-236.
- [9] J. Łukowski, M. Kaczmarek, 2000. Laboratory methods of determination of pore structure parameters formation factor and tortuosity of permeable media by electric methods. Engineering Transactions, praca w druku.

PARAMETERS OF THE STRUCTURE OF MODEL POROUS MATERIALS

Summary

The paper presents the results of analytic-numerical modelling of ionic current flow through an array composed of a bundle of parallel rods, submerged in electrolyte, using the boundary collocation method. The flow of ionic current along and across the rod was analyzed. The parameters were determined, describing internal architecture of the array: formation coefficient and tortuosity relative to three varied regular rod configurations.

Keywords: ionic, porous, analytic-numerical

METODA EMISJI AKUSTYCZNEJ
W BADANIACH EKSPERYMENTALNYCH
KATEDRY PODSTAW KONSTRUKCJI MASZYN

Stanisław Mroziński, Zbigniew Lis, Marek Szczutkowski

Wydział Mechaniczny, Katedra Podstaw Konstrukcji Maszyn,
ul. Prof. S. Kaliskiego 7, 85-796 Bydgoszcz

W pracy dokonano przeglądu badań eksperymentalnych prowadzonych w Katedrze Podstaw Konstrukcji Maszyn ATR przy wykorzystaniu metody emisji akustycznej (EA). Przegląd obejmuje opis warunków badań oraz analizę przebiegu zjawiska emisji akustycznej dla wybranych przebiegów obciążenia i materiałów konstrukcyjnych. Podczas badań stwierdzono występowanie charakterystycznych efektów EA takich jak efekt Kaisera czy Felicity. Na podstawie przeprowadzonych badań wykazano przydatność parametrów EA do oceny stopnia uszkodzenia elementów poddanych obciążeniom cyklicznym.

Słowa kluczowe: badania wytrzymałościowe, emisja akustyczna, trwałość zmęczeniowa

1. WPROWADZENIE

Przebieg procesu uszkodzenia (np. zmęczenia) elementu podczas eksploatacji można oceniać na podstawie analizy różnych procesów i zjawisk zachodzących w materiale. Mogą to być procesy: cieplne, magnetyczne, akustyczne itp.. Efekty akustyczne - pojawiające się w materiale na skutek obciążenia - stały się podstawą opracowania metody badań materiałów zwanej metodą emisji akustycznej (EA). Przydatność metody EA do badania różnych materiałów została już dawno potwierdzona. Rozwój aparatury pomiarowej powoduje ciągły wzrost zakresu zastosowań i doskonalenie metody EA [1].

Sygnał EA generowany jest w materiale w wyniku wyzwolenia zmagazynowanej energii wewnętrznej. Każdy materiał posiada pierwotny lub nabyty w trakcie eksploatacji niejednorodny rozkład energii wewnętrznej, który w procesie cyklicznego obciążenia ulega skomplikowanym przemianom. Źródłem emisji akustycznej podczas badań może być zarówno interesujący nas proces zmian zachodzących w materiale jak, również inne procesy związane z działaniem urządzeń badawczych (maszyn wytrzymałościowych). Urządzenia te (najczęściej hydrauliczne lub śrubowe) są źródłem emisji akustycznej o częstotliwości występowania zjawiska EA w materiale lub elemencie i będącej parametrem mierzonym. Trudności pomiarowe spowodowane są tym, że:

- Sygnały EA uzyskane podczas pomiarów rozłożone są w szerokim widmie częstotliwości zależnie od rodzaju badanego materiału. Aby wiernie oddać kształt impulsów EA operuje się w pomiarach od ułamka Hz do 100 MHz.
- Sygnały EA są z reguły bardzo słabe i najczęściej zakłócone przez trudne do uchwycenia tło szumów, np. zacisk próbek w szczękach maszyny wytrzymałościowej.

W celu uniknięcia zakłóceń należy stosować przy pomiarach filtry wycinające szumy i specjalne izolacje akustyczne urządzenia pomiarowego.

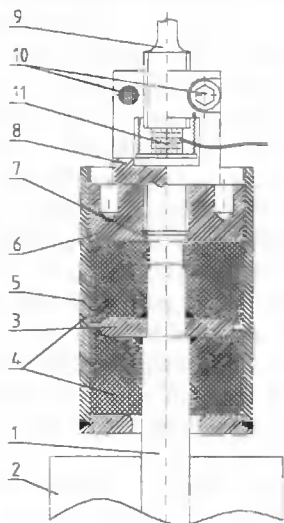
- Źródła EA znajdują się najczęściej wewnątrz materiału, a odbiornik jest z reguły na jego powierzchni, gdyż wykonanie otworu dla założenia odbiornika EA zmieniałoby obraz zjawiska. W rezultacie odebrany sygnał jest zniekształcony przez tłumienie ośrodka i wielokrotne odbicie od granic materiału.

Celem tej pracy jest dokonanie przeglądu prac badawczych realizowanych w katedrze Podstaw Konstrukcji Maszyn ATR i wykorzystaniem metody emisji akustycznej.

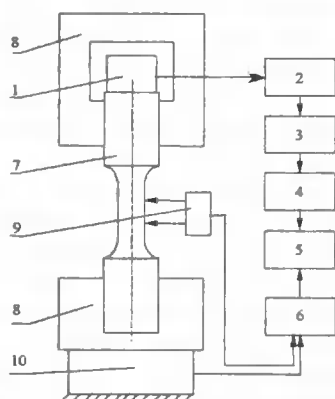
2. OPIS BADAŃ

2.1. Stanowisko badawcze

Warunkiem prowadzenia badań na hydraulicznej maszynie wytrzymałościowej przy wykorzystaniu metody EA jest opracowanie układu izolującego próbkę od układu obciążenia i mocowania na maszynie. Na rys. 1 przedstawiono schematycznie wykonany uchwyt izolujący do badań wytrzymałościowych i zmęczeniowych na hydraulicznej maszynie wytrzymałościowej z wykorzystaniem metody EA. Jeden z końców trzpienia 1, uchwytu izolującego jest mocowany w uchwycie 2, maszyny wytrzymałościowej. Drugi koniec zakończony pierścieniem 3, jest zamocowany w korpusie uchwytu 5, pomiędzy dwiema wkładkami gumowymi 4. Napięcie wstępne wkładek gumowych oraz zacisk pierścienia jest realizowane przy wykorzystaniu nakrętki 6. W nakrętce zaopatrzonej w gniazdo gwintowane 7, mocowany jest łącznik 8, wraz z badaną próbką 9. Właściwy zacisk próbki w gnieździe łącznika następuje przy wykorzystaniu śrub zaciskowych 10. Przetwornik EA 11, jest mocowany do szlifowanego czoła próbki przy wykorzystaniu sprężynek naciagowych. Drugi z uchwytów izolujących różni się w stosunku do opisanego tym, że nie posiada w łączniku otworu do mocowania przetwornika EA.



Rys. 1. Schemat uchwytu do badań zmęczeniowych z rejestracją EA



Rys. 2. Układu pomiarowo-rejestrującego do badań z wykorzystaniem metody EA: 1-przetwornik EA, 2 - przedwzmacniacz, 3 - analizator EA, 4 - przetwornik AC, 5 - komputer pomiarowy, 6 - komputer Instron, 7 - próbka, 8 - łącznik uchwytu, 9-ekstensometr, 10 - siłomierz

Na rysunku 2 przedstawiono schemat zastosowanego podczas badań układu do pomiaru i rejestracji wyników badań. Układ pomiarowy zastosowany podczas badań weryfikacyjnych umożliwiał rejestrację sygnałów EA o amplitudach przekraczających poziom dyskryminacji (próg czułości). Jako zdarzenie fizyczne zostaje zliczona pewna liczba amplitud, czyli tzw. zliczeń. Układ pomiarowy może rejestrować również obwiednie amplitud zliczając, tzw. zdarzenia fizyczne emisji akustycznej lub krótko zdarzenia EA. Do najważniejszych i najczęściej wykorzystywanych parametrów EA należą: suma zliczeń, tempo zliczeń, suma zdarzeń, tempo zdarzeń, amplituda zdarzeń. W pracy do analizy przyjęto dwa z wymienionych, tj. amplitudę zdarzenia oznaczanej dalej jako EA i sumę zdarzeń ΣEA . Amplituda zdarzenia EA jest sygnałem napięciowym proporcjonalnym do energii impulsu odbieranego przez przetwornik piezoelektryczny. Ze względu na trudności związane z wzorcowaniem tego sygnału oraz jakościowy charakter przeprowadzanych badań przyjęto w poniższej pracy przedstawiać ten parametr bez miana. Suma zdarzeń ΣEA przedstawia liczbę wszystkich zdarzeń EA zachodzącą w badanym materiale podczas trwania próby.

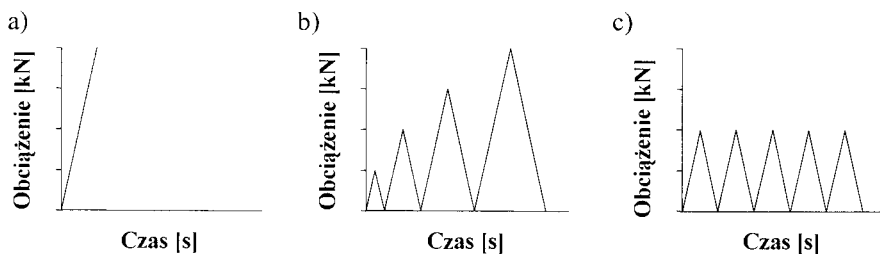
2.2. Próbkki do badań i realizowane obciążenia

Podczas badań weryfikacyjnych wykorzystywano różnorodne materiały konstrukcyjne. W poniższej pracy przedstawiono wyniki badań z wykorzystaniem próbek wykonanych ze stali 45, stopu aluminium PA7 i kompozytu poliestrowego. Własności monotoniczne materiałów przyjętych do badań zestawiono w tabeli 1.

Tabela 1. Własności wytrzymałościowe materiałów przyjętych do badań

Materiał	R_e	R_m	R_u	A_5
	MPa			%
45	408,9	643,0	1100	20,8
PA7	354,8	520,0	634,1	15,5
Kompozyt	-	230	-	2,8

Badania przeprowadzono na maszynie wytrzymałościowej Instron wraz z oprządowaniem omówionym w punkcie 1. Podczas badań stosowano obciążenia statyczne, stopniowo narastające oraz obciążenia stałomplitudowe (rys. 3).



Rys. 3. Obciążenia realizowane podczas badań : statyczne a), stopniowo narastające b), stałomplitudowe

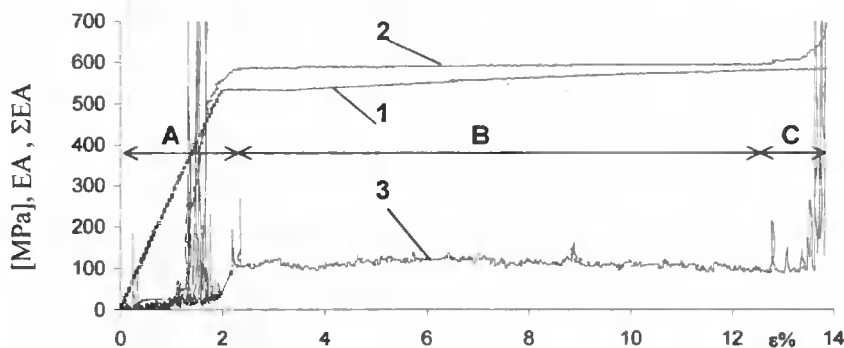
Próby prowadzono w warunkach kontrolowanego obciążenia próbki. Prędkość przyrostu obciążenia podczas realizowanych rodzajów obciążeń była stała i wynosiła 5 kN/s dla metali oraz 0,25 kN/s dla kompozytu. Podczas obciążeń stopniowo narastających próbek metalowych kolejne stopnie obciążenia zwiększano o 10 kN w przypadku kompozytu o 0,5 kN. Podczas prób rejestrowano wartości siły obciążającej, odkształcenie części pomiarowej, amplitudę zdarzeń EA oraz sumę zdarzeń ΣEA . Znaczenie fizyczne wymienionych parametrów, szczegółowy opis stanowiska badawczego, kształt próbek oraz sposób ich mocowania w maszynie wytrzymałościowej zamieszczono w pracach [2], [3].

3. WYNIKI BADAŃ

Ze względu na ograniczoną objętość poniższej pracy oraz jej przeglądowy charakter przyjęto przedstawić wyniki badań uzyskanych dla każdego rodzaju obciążenia na przykładzie jednego materiału i tak wyniki prób statycznych zostaną omówione na przykładzie badań stopu PA7, wyniki badań w warunkach obciążeń stopniowo narastających na przykładzie stali 45 a wyniki badań stałoaamplitudowych na przykładzie kompozytu.

3.1. Obciążenia statyczne

Wyniki próby statycznego rozciągania pokazano na rysunku 4 w formie wykresów parametrów EA w funkcji odkształcenia względnej części pomiarowej próbki.



Rys. 4. Wyniki prób monotonicznego obciążenia próbki wykonanej ze stopu PA7: 1-wykres naprężeń, 2- wykres sumy zdarzeń ΣEA , 3-wykres amplitud EA

Zmiany parametrów EA analizowano w kontekście zmian naprężenia rozciągającego w próbce σ (σ =siła obciążająca/przekrój początkowy próbki). Na podstawie analizy wykresów zamieszczonych na rysunku 4 można stwierdzić, że zarówno wykresy zmian amplitud EA, jak również suma zdarzeń ΣEA zależą od odkształcenia próbki. W przebiegu aktywności EA (amplituda zdarzeń i suma zdarzeń) można wyróżnić trzy fazy. Faza pierwsza (A) - pojawienie się pierwszych zdarzeń, których częstość występowania rośnie wraz ze wzrostem naprężenia. O liniowym przyroście liczby zdarzeń świadczy charakter przebiegu wykresu sumy zdarzeń w zakresie odkształceń sprężys-

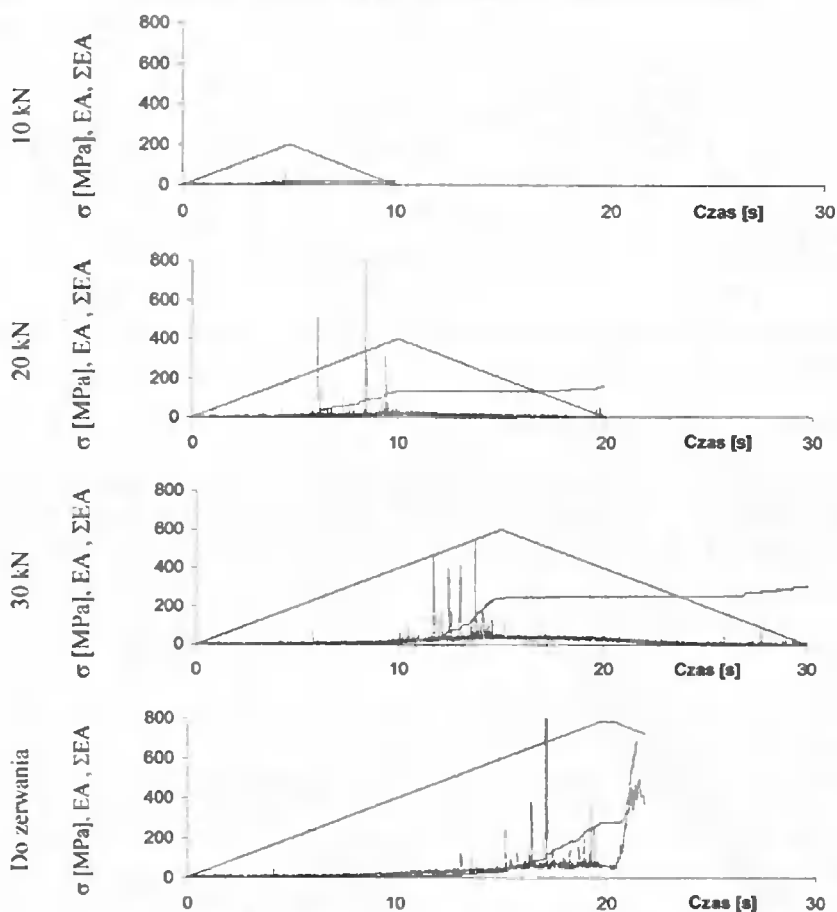
tych. W okresie tym obserwuje się najwyższą aktywność emisji akustycznej mierzonej amplitudą i liczbą zarejestrowanych zdarzeń. Źródłem sygnału emisji akustycznej w tym etapie mogą być np. ruchy dyslokacji a następnie mikropęknięcia materiału. Faza ta kończy się przy obciążeniu odpowiadającym granicy plastyczności.

Faza druga (B) - znaczne zmniejszenie wzrostu sumy zdarzeń. Faza występuje podczas odkształceń plastycznych.

Faza trzecia (C) - niewielki wzrost emisji akustycznej związany z początkiem procesu zniszczenia materiału i pojawieniem się niestabilnych mikropęknięć materiału.

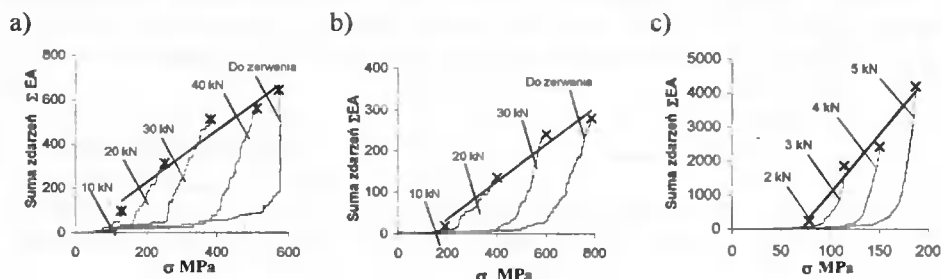
3.2. Obciążenia stopniowo narastające

Wyniki badań w warunkach obciążeń stopniowo narastających opracowano w formie wykresów zmienności parametrów EA w funkcji czasu. Dla trzech materiałów konstrukcyjnych obserwowano podobny charakter zmienności aktywności EA. Na rysunku 5 przedstawiono uzyskane wyniki badań dla stali 45.



Rys. 5. Emisja akustyczna podczas obciążenia narastającego próbek ze stali 45

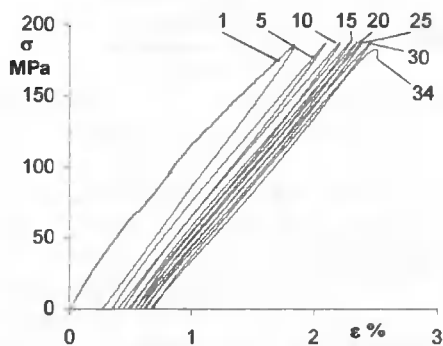
Na podstawie wykonanych wykresów można stwierdzić, że aktywność EA w stali 45 występuje głównie podczas wzrostu obciążenia. Podczas procesu odciążania EA jest bardzo niewielka. Przy kolejnych powtarzających się cyklach obciążenia aktywność EA ulega zmniejszeniu. Zmniejszenie EA występuje na etapie wzrostu naprężenia do poziomu uzyskanego w próbce podczas poprzedniego cyklu. Wyraźny wzrost emisji zaobserwować można dopiero po przekroczeniu poziomu maksymalnego naprężenia zrealizowanego w poprzednim cyklu. Zjawisko to określane jest w literaturze jako, tzw. efekt Kaisera [4]. Przeprowadzona analiza aktywności emisji akustycznej podczas obciążenia stopniowo narastającego dla wszystkich badanych materiałów wykazała podobne tempo wzrostu liczby zdarzeń dN/dt po przekroczeniu poziomu maksymalnego realizowanego w poprzednim cyklu. Uzyskane w poszczególnych cyklach obciążenia narastającego sumy zdarzeń ΣEA wykazują liniową zależność od obciążenia. Na rysunku 6 przez punkty opisujące sumy zdarzeń ΣEA w kolejnych cyklach obciążenia przeprowadzono proste regresji $\Sigma EA=f(\sigma)$. Jak należało się spodziewać najwyższe wartości sumy zdarzeń uzyskano dla kompozytu a najmniejsze dla stali 45.



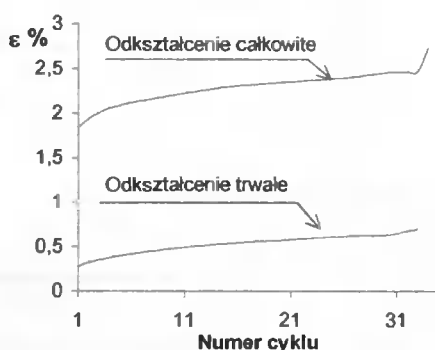
Rys. 6. Przebieg sumy zdarzeń podczas obciążenia narastającego: stali 45 a), stopu PA7 b), kompozytu c)

3.3. Obciążenia stałoaamplitudowe

Wyniki obciążeń stałoaamplitudowych przyjęto przedstawiać w formie wykresów zmienności odkształceń, naprężeń oraz liczby zdarzeń EA w funkcji liczby cykli obciążenia. Na rysunku 7 pokazano zarejestrowane podczas badań - dla wybranych cykli ob-



Rys. 7. Zarejestrowane pętle histerezy



Rys. 8. Odkształcenia próbek

OPTIMALIZACJA KRATOWNICY PRZY UŻYCIU ALGORYTMÓW GENETYCZNYCH

Dariusz Skibicki, Krzysztof Nowicki

Akademia Techniczno-Rolnicza w Bydgoszczy, Wydział Mechaniczny,
Katedra Sterowania i Konstrukcji,
ul. Prof. S. Kaliskiego 7, 85-796 Bydgoszcz

W artykule przeprowadzono optymalizację kratownicy płaskiej z wykorzystaniem trzech metod optymalizacji. Były to: algorytm genetyczny, metoda gradientu prostego z zewnętrzną funkcją kary oraz metoda „first order” pakietu ANSYS. Na tej podstawie porównania przebiegu procesów optymalizacji i ich wyników, szczegółowo opisano własności metody genetycznej.

Słowa kluczowe: kratownica, optymalizacja, algorytmy genetyczne

1. WPROWADZENIE

Wykorzystanie nowoczesnych metod obliczeniowych ułatwiło i przyspieszyło proces projektowania konstrukcji mechanicznych. Jednakże numeryczna realizacja niektórych modeli matematycznych wymaga dużej ilości czasu nawet przy wykorzystaniu mocy obliczeniowej najszybszych komputerów. Stąd konieczność poszukiwania alternatywnych metod realizacji obliczeń. Uwaga autorów skupiła się na procesach optymalizacji konstrukcji modelowanych z wykorzystaniem metody elementów skończonych. Podstawowym celem pracy była propozycja alternatywnej metody optymalizacji złożonych konstrukcji, która miała się charakteryzować podobnymi do metod „klasycznych” parametrami przy znacznym skróceniu czasu obliczeń.

Optymalizowanym obiektem była kratownica złożona z 16 prętów, podparta w trzech węzłach, obciążona dwiema siłami [1]. Zadanie optymalizacji polegało na znalezieniu najlżejszej kratownicy, która spełnia narzucone warunki wytrzymałościowe: $k_{rc}=90$ MPa i sztywnościowe: maksymalne pionowe przemieszczenie węzła nr 16: $f_y < 0.8$ mm. Za zmienne decyzyjne przyjęto pola przekrojów prętów. Model matematyczny powyższego zagadnienia przedstawia się następująco:

Zmienne decyzyjne:

$$a_i \quad i = 1 \dots 16; \quad (1)$$

Funkcja celu:

$$Q(a_i)_{\min} = \sum_{i=1}^{16} a_i; \quad (2)$$

Ograniczenia:

$$\begin{aligned} q_1 &= k_{rc} - \sigma_i > 0; \\ q_{17} &= f_y - f_{y(16)} > 0. \end{aligned} \quad (3)$$

obciążenia jest wykorzystywany do oceny stopnia uszkodzenia kompozytu. Miarą jest tzw. współczynnik Felicity (F) definiowany jako stosunek obciążenia, przy którym pojawia się emisja do maksymalnego obciążenia w poprzednim cyklu przy którym wystąpiła EA. Wartość tego współczynnika w realizowanych badaniach zmienia się od 1 do 0,78 (rys. 10). Przyjmuje się, że do eksploatacji dopuszcza się konstrukcje kompozytowe dla których $F > 0,95$.

4. PODSUMOWANIE

Przedstawione w pracy badania miały charakter rozpoznawczy i weryfikacyjny stanowiska badawczego. Na podstawie uzyskanych wyników oraz przeprowadzonej analizy można sformułować kilka wniosków ogólnych.

Przyjęte do badań materiały konstrukcyjne o zróżnicowanych własnościach cyklicznych cechuje podobieństwo jakościowe przebiegu aktywności emisji akustycznej podczas obciążenia statycznego i wielokrotnego.

Wykorzystywane podczas badań materiały cechuje tylko emisja obciążeniowa (metale) oraz emisja obciążeniowa i odciążeniowa (kompozyt). Podczas obciążenia wielokrotnego charakterystyczną dla badanych materiałów jest prawidłowość zwaną efektem Kaisera. Prawidłowość ta w połączeniu liniową zależnością aktywności EA od wartości obciążenia jest to niewątpliwie zaletą przydatną dla wielu zastosowań podczas poszukiwania zależności pomiędzy aktywnością EA a np. historią obciążenia.

W badaniach potwierdzona została możliwość oceny stopnia uszkodzenia materiałów konstrukcyjnych przy wykorzystaniu wybranych parametrów sygnału EA. Kumulacja sumy zdarzeń podczas obciążenia stałoamplitudowego kompozytu ma podobny charakter jak kumulacja odkształceń podczas cyklicznego pełzania. Parametrami EA dobrze odzwierciedlającymi stopień uszkodzenia wydaje się być przebieg zmian emisji akustycznej podczas procesu obciążania odciążania oraz wartość współczynnika Felicity.

LITERATURA

- [1] I. Malecki, J. Ranachowski, 1994. Emisja akustyczna. Źródła, metody, zastosowania. Praca PAN Warszawa.
- [2] S. Mroziński, 2001. Badania materiałów konstrukcyjnych z wykorzystaniem emisji akustycznej. Projekt stanowiska badawczego. Zesz. Nauk. Politechniki Opolskiej nr 271/2001, Zeszyt 69, ss 259-266.
- [3] Emisja akustyczna w materiałach konstrukcyjnych poddanych obciążeniu monotonicznemu i stopniowo narastającemu, Zesz. Nauk. Politechniki Opolskiej nr 271/2001, Zeszyt 69, ss 267-274.
- [4] J. Kaiser, 1950. Untersuchungen über Auftreten von Gerauschen bei Zugversuch. Das. T.H., München.

ACOUSTIC EMISSION METHOD IN EXPERIMENT RESEARCH
CONDUCTED IN THE DEPARTMENT OF BASIC PRINCIPLES
OF MACHINE CONSTRUCTION

The paper reviewed experimental research carried out in the Department of Basic Principles of Machine Construction at ATR, acoustic emission method. The review comprises the description of the experiments conditions and the analysis of the pattern of acoustic emission phenomenon for selected loading processes and constructional materials. The research demonstrated suitability of AE parameters for determining the extent of damage in the elements subjected to load in cycles.

Keywords: fatigue life, acoustic emission, strength examination

MECHANIKA WIELOWARSTWOWYCH BELEK I PŁYT KOMPOZYTOWYCH

Wiesław Ostachowicz

Instytut Maszyn Przepływowych PAN w Gdańsku

Praca poświęcona jest tematyce mechaniki wielowarstwowych belek i płyt kompozytowych. W szczególności przedstawiono w niej modele uszkodzonych belek i płyt i wpływ tych uszkodzeń na dynamikę układów. Przyjęto założenie, że znane jest położenie uszkodzeń w rozpatrywanych konstrukcjach. Przedstawiono także modele belek i płyt wzmacnianych dodatkowo włóknami z pamięcią kształtu. Opisano możliwości sterowania drganiami takich elementów konstrukcyjnych. Ważnym punktem niniejszej pracy jest opis detekcji uszkodzeń na podstawie zmian własności dynamicznych obiektów. Przedstawiono uwagi na temat dokładności obliczeń.

Słowa kluczowe: mechanika konstrukcji kompozytowych, modele uszkodzeń, elementy z pamięcią kształtu

1. WPROWADZENIE

Tematyce mechaniki wielowarstwowych belek i płyt kompozytowych poświęcono wiele opracowań monograficznych i bardzo dużo publikacji w czasopismach naukowych. Badania zmierzają do tworzenia nowych i doskonalenia istniejących modeli analitycznych i numerycznych. W drugim przypadku dominuje metoda elementów skończonych. W wielu ośrodkach prowadzi się na szeroką skalę badania eksperymentalne.

W niniejszej pracy zawężono tematykę mechaniki belek i płyt kompozytowych do kilku punktów, które obejmują najczęściej uprawiane badania w ostatniej dekadzie. W szczególności będą przedstawione modele uszkodzonych belek i płyt i wpływ tych uszkodzeń na dynamikę układów. W dalszej części przedstawione będą modele belek i płyt wzmacnianych dodatkowo włóknami z pamięcią kształtu (SMA – czyli *Shape Memory Alloys*). W szczególności zaznaczony będzie fakt możliwości sterowania drganiami takich elementów konstrukcyjnych. Ważnym punktem niniejszej pracy jest opis detekcji uszkodzeń na podstawie zmian własności dynamicznych obiektów.

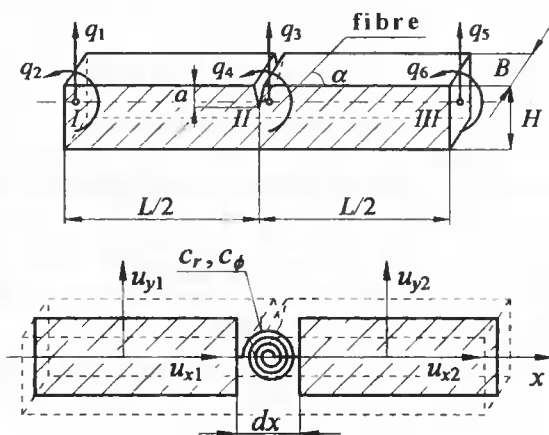
Przedstawione badania są w dominującej przewadze autorstwa zespołu z IMP PAN w Gdańsku, a także kilku zespołów badawczych współpracujących z IMP PAN.

2. MODELOWANIE USZKODZEŃ W WARSTWOWYCH ELEMENTACH KOMPOZYTOWYCH

2.1. Modelowanie belek kompozytowych z pęknięciem poprzecznym

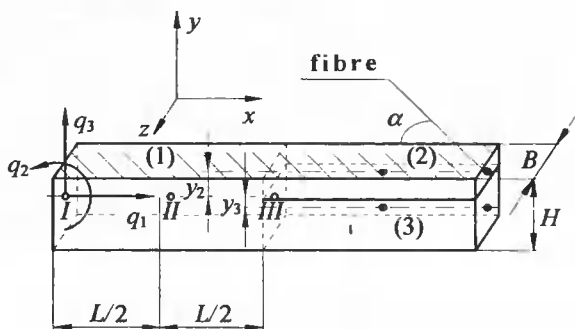
Tematyka uszkodzonych konstrukcji kompozytowych była przedmiotem intensywnych prac w wielu ośrodkach badawczych. Krawczuk, Ostachowicz, i Żak (1997) przed-

stawili belkowy kompozytowy element skończony z pęknięciem. Uszkodzony fragment belki modelowano specjalnym elementem skończonym (rys. 2.1) natomiast nieuszkodzoną część belki modelowano elementami skończonymi o trzech węzłach. Pęknięcie widoczne jest w środkowej części belki i pozostaje otwarte. Kąt pomiędzy włóknami kompozytu oraz osią belki oznaczono przez α . Element posiada trzy węzły a każdy z nich posiada dwa stopnie swobody: przemieszczenie poprzeczne oraz obrót. We wspomnianej wyżej pracy przedstawiono wyniki obliczeń dla przypadku płaskiego zginania.



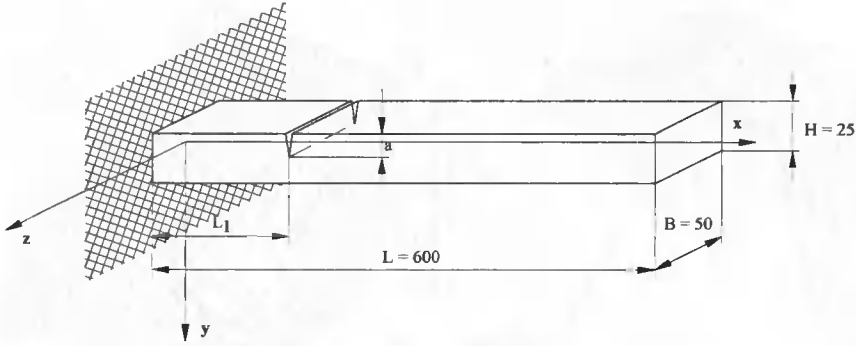
Rys. 2.1. Kompozytowy belkowy element skończony z pęknięciem poprzecznym

Krawczuk, Ostachowicz i Żak (1996) opracowali model wielowarstwowej belki kompozytowej z delaminacją. Obszar delaminacji modelowano trzema elementami skończonymi. Każdy z nich posiada trzy węzły i trzy stopnie swobody w węzle (rys. 2.2). W strefie delaminacji przyjęto dodatkowe warunki brzegowe opisane szczegółowo w pracy Krawczuka *et al.* (1996). W obliczeniach przyjęto, że delaminacja jest otwarta, co oznacza, że zaniedbano siły kontaktowe pojawiające się pomiędzy dolną i górną warstwą kompozytu.



Rys. 2.2. Wielowarstwowa belka kompozytowa z delaminacją modelowana elementami skończonymi

Niżej przedstawiono przykłady analizy numerycznej opisanych modeli belek. Na rysunku 2.3 przedstawiono wymiary wspornikowej belki kompozytowej z pęknięciem poprzecznym. Przedmiotem badań była analiza wpływu lokalizacji pęknięcia (L_1) oraz wielkości uszkodzenia na zmiany częstości drgań własnych belki.



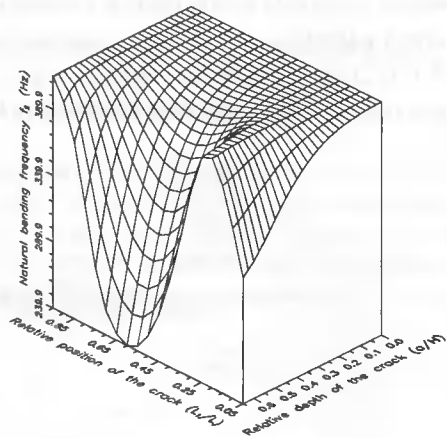
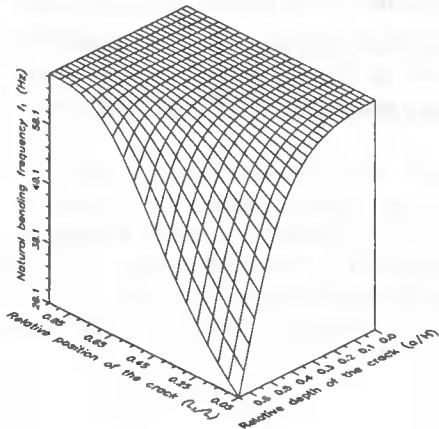
Rys. 2.3. Wspornikowa belka kompozytowa z pęknięciem poprzecznym

Przyjęto założenie, że belkę wykonano z jednokierunkowego materiału kompozytowego (graphite/polyamide). Własności materiału belki przedstawiono w tabeli 2.1.

Tabela 2.1. Własności kompozytu graphite/polyamide

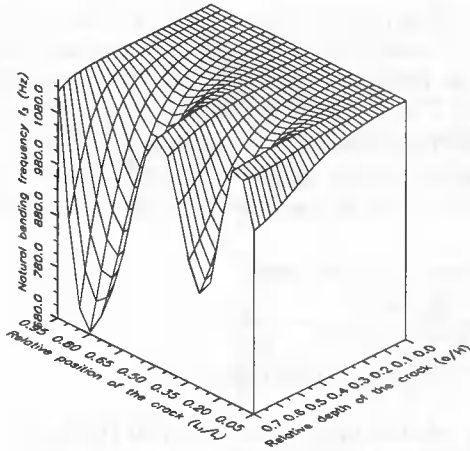
	Osnowa (epoxy)	Włókna (graphite)
Moduł Young'a (GPa)	$E_m = 3.43$	$E_f = 275.6$
Liczba Poissona	$\nu_m = 0.35$	$\nu_f = 0.2$
Gęstość (kg/m^3)	$\rho_m = 1250$	$\rho_f = 1900$

Na rysunkach 2.4-2.6 przedstawiono wpływ położenia i wielkości uszkodzenia na zmiany trzech pierwszych częstości drgań własnych belki. Obliczenia wykonano przy założeniu, że belka modelowana jest 10 elementami skończonymi, objętość włókien wzmacniających stanowi 30% kompozytu i włókna ułożone są pod kątem 30° . Na rysunku 2.7 przedstawiono zmianę pierwszej częstości drgań własnych w funkcji kąta ułożenia włókien grafitowych oraz procentowego udziału tych włókien w objętości kompozytu.

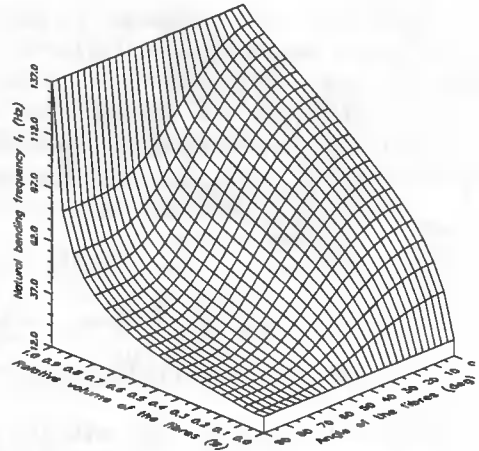


Rys. 2.4. Pierwsza częstość drgań własnych belki w funkcji położenia i głębokości pęknięcia

Rys. 2.5. Druga częstość drgań własnych belki w funkcji położenia i głębokości pęknięcia



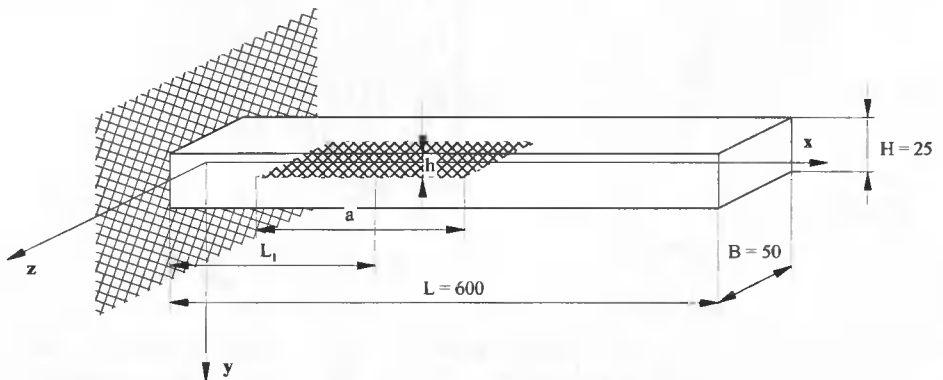
Rys. 2.6. Trzecia częstość drgań własnych belki w funkcji położenia i głębokości pęknięcia



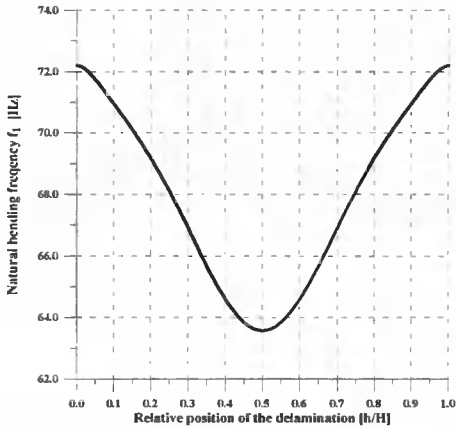
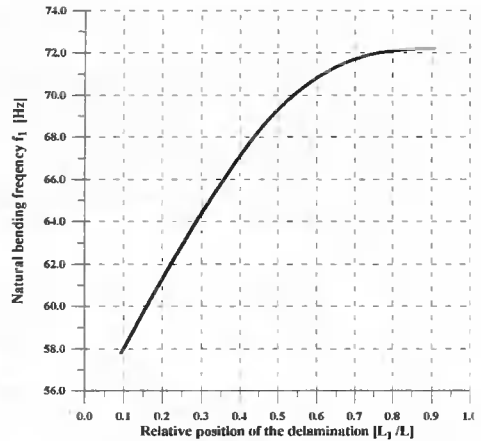
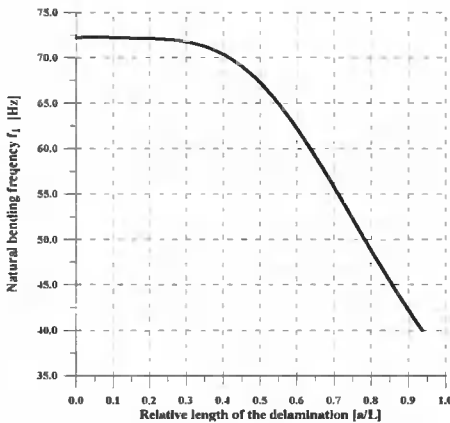
Rys. 2.7. Pierwsza częstość drgań własnych belki w funkcji objętości włókien wzmacniających i kąta ułożenia tych włókien

Na rysunku 2.8 przedstawiono wspornikową belkę kompozytową z delaminacją. Przedmiotem badań była analiza wpływu długości delaminacji (a) a także jej położenia w kierunku osi x , (L_1) i osi y , (h) na zmiany częstości drgań własnych. Przyjęto założenie, że belka posiada 24 warstwy (graphite/epoxy) o własnościach według tabeli 2.1. Procentowy udział włókien wzmacniających w objętości kompozytu wynosił 20%. Włókna ułożono na przemian pod kątem $\pm 45^\circ$. Belkę modelowano 18 elementami skończonymi. Przyjęto, że długość delaminacji stanowi 6.25% długości belki.

Na rysunku 2.9 przedstawiono wpływ położenia delaminacji w kierunku osi y , (h/H) na zmianę pierwszej częstości drgań własnych. Na rysunku 2.10 przedstawiono wpływ położenia delaminacji w kierunku osi x , (L_1/L) na zmianę pierwszej częstości drgań własnych. Na rys. 2.11 przedstawiono wpływ względnej długości delaminacji (a/L) na zmianę pierwszej częstości drgań własnych. Więcej szczegółów na ten temat można znaleźć w pracy Ostachowicza i Krawczuka (2001).

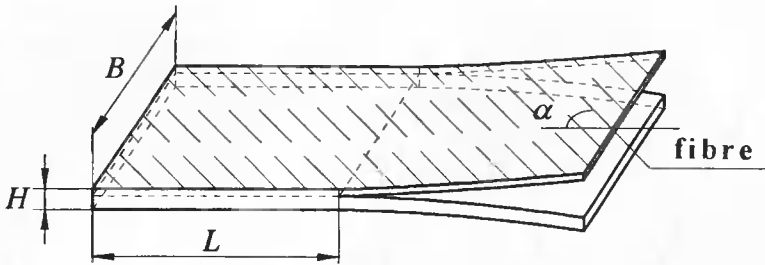


Rys. 2.8. Wymiary belki kompozytowej z delaminacją

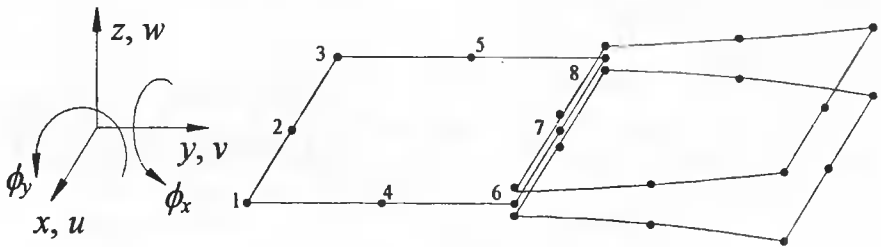
Rys. 2.9. Pierwsza częstota drgań własnych w funkcji położenia delaminacji (h/H)Rys. 2.10. Pierwsza częstota drgań własnych w funkcji położenia delaminacji (L_1/L)Rys. 2.11. Pierwsza częstota drgań własnych w funkcji długości delaminacji (a/L)

2.2. Modelowanie belek kompozytowych z pęknięciem poprzecznym

Model wielowarstwowej płyty kompozytowej z delaminacją był opracowany przez Żaka, Krawczuka i Ostachowicza (2000). Rysunki 2.12-2.13 ilustrują sposób modelowania obszaru delaminacji wspomnianej wyżej płyty. Obszar delaminacji modelowano trzema elementami skończonymi. Na krawędzi delaminacji wprowadzono dodatkowe warunki brzegowe. Każdy z elementów skończonych posiada osiem węzłów a każdy węzeł pięć stopni swobody.



Rys. 2.12. Wielowarstwowa płyta kompozytowa z delaminacją

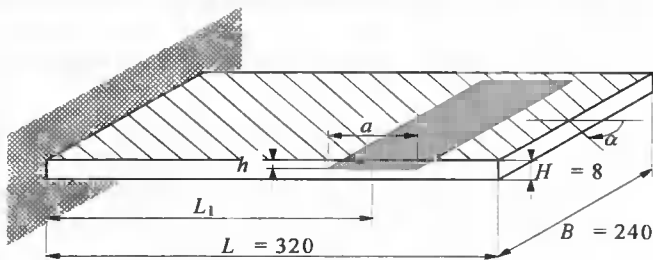


Rys. 2.13. Obszar delaminacji modelowany trzema elementami skończonymi

Przykłady obliczeń numerycznych wykonano dla 8-warstwowej kompozytowej płyty wspornikowej (rys. 2.14). Własności materiału płyty przedstawiono w tabelicy 2.2.

Tabela 2.2. Własności kompozytu glass/epoxy

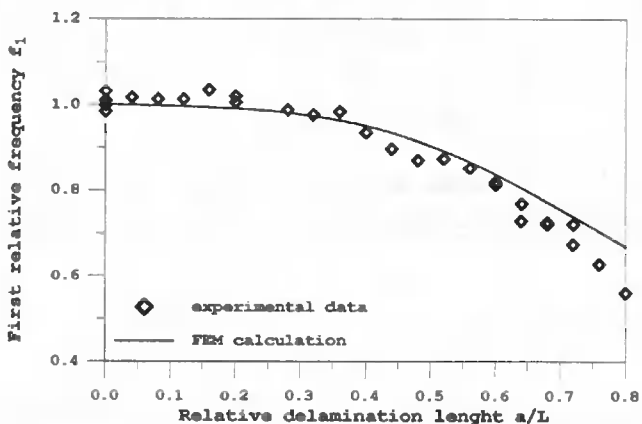
	Osnowa (epoxy)	Włókna (glass)
Moduł Young'a (GPa)	$E_m = 3.43$	$E_f = 66.5$
Moduł Kirchhoffa (GPa)	$G_m = 1.27$	$G_f = 27.0$
Liczba Poissona	$\nu_m = 0.35$	$\nu_f = 0.23$
Gęstość (kg/m^3)	$\rho_m = 1250$	$\rho_f = 2250$



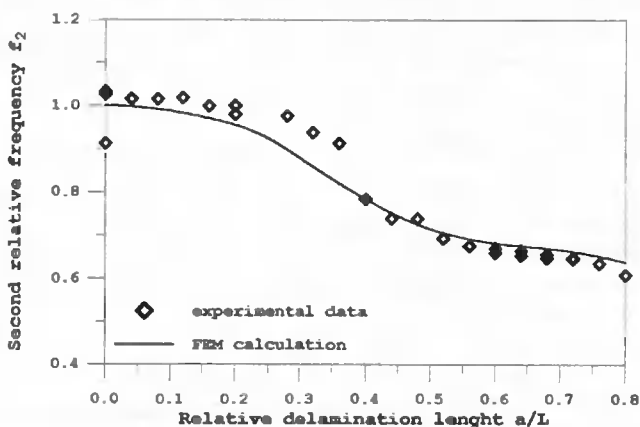
- L length
- B width
- H thickness
- a delamination (length)
- L_1 delamination (middle point)
- h delamination (location between layers)
- α angle of reinforced fibres

Rys. 2.14. Wymiary warstwowej płyty kompozytowej z delaminacją

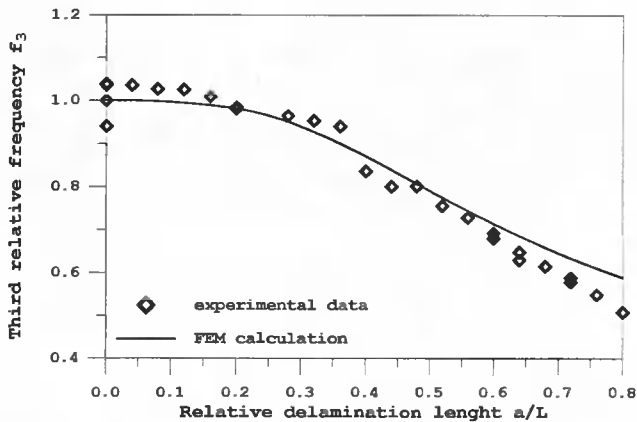
Procentowy udział włókien wzmacniających wynosił w tym przypadku 20%. Na rysunku 2.15 przedstawiono zmiany pierwszej częstości drgań własnych płyty w funkcji długości delaminacji. Na rysunkach 2.16 i 2.17 przedstawiono zmiany drugiej i trzeciej częstości drgań własnych w funkcji względnej długości delaminacji. Z rysunków 2.15 i 2.18 wynika, że wyniki obliczeń numerycznych są zgodne z wynikami badań eksperymentalnych, które przeprowadzono w IMP-PAN. Więcej szczegółów na ten temat można znaleźć w pracy Żaka *et al.* (2000).



Rys. 2.15. Zmiany pierwszej częstości drgań własnych w funkcji względnej długości delaminacji



Rys. 2.16. Zmiany drugiej częstości drgań własnych w funkcji względnej długości delaminacji



Rys. 2.17. Zmiany trzeciej częstości drgań własnych w funkcji względnej długości delaminacji

3. MECHANIKA KONSTRUKCJI KOMPOZYTOWYCH WZMACNIANYCH ELEMENTAMI Z PAMIĘCIĄ KSZTAŁTU

Jedną z ważniejszych aplikacji w nowoczesnych konstrukcjach kompozytowych są elementy wykonane z materiałów z pamięcią kształtu. Elementy te można w stosunkowo prosty sposób uaktywniać i tym samym zmieniać parametry mechaniczne konstrukcji. Taka idea znajduje wiele zastosowań praktycznych. Istnieje możliwość stabilizacji drgań, stabilizacji przepływu strumienia gazu (likwidacja turbulencji), niwelowanie uszkodzeń konstrukcji i wiele innych. Nic więc dziwnego, że stosowanie tych materiałów znajduje szczególne zainteresowanie w lotnictwie i niektórych, zaawansowanych technologicznie zagadnieniach budowy maszyn.

Elementy z pamięcią kształtu (*SMA – shape memory alloys*) cechują duże zmiany modułów Younga (Otsuka i Wayman, 1998 oraz Ford i White 1996), współczynników tłumienia (Piedboeuf *et al.*, 1998 oraz Gandhi i Wolons, 1999) a przede wszystkim elementy SMA generują olbrzymie siły wewnętrzne (Rogers *et al.* 1989^a). Powyższe cechy pozwalają na aktywne sterowanie własnościami mechanicznymi przede wszystkim materiałów kompozytowych.

Rogers *et al.*, 1989^b oraz Fuller *et al.*, 1996 opisali metodę precyzyjnego sterowania wspomnianych wyżej konstrukcji takich jak maksymalne przemieszczenia, kształt, częstości drgań własnych a także sterowanie postaciami drgań i amplitudami drgań wymuszonych oraz parametrami tłumienia.

Elementy SMA mogą być łączone z materiałami kompozytowymi w dwojaki sposób. Pierwszy sposób polega na wykorzystaniu jedynie zmian sztywności elementów SMA podczas procesu ich aktywacji. Metoda ta oznaczana literami APT (*Active Property Tuning*) została opisana w pracach Rogersa *et al.*, 1989^b oraz Fullera *et al.*, 1996. Druga metoda polega na wykorzystaniu pseudo-plastycznych właściwości elementów SMA. W elementach podczas procesu aktywacji generowane są duże naprężenia wykorzystywane w procesie sterowania konstrukcjami kompozytowymi. Metoda ta oznaczana literami ASET (*Active Strain Energy Tuning*) została opisana w pracach Rogersa *et al.*, 1989^b oraz Fullera *et al.*, 1996.

3.1. Mechaniczne i fizyczne własności materiałów z pamięcią kształtu

Własności fizyczne i mechaniczne materiałów z pamięcią kształtu w zdecydowany sposób zależą od temperatury i naprężeń początkowych (Epps i Chopra, 1997 oraz Ro i Baz, 1995). Zmiany temperatury oraz poziom naprężeń początkowych powodują zmiany procentowego udziału frakcji martenzytycznej w stopie SMA. Podczas przemiany martenzytycznej pojawiają się duże naprężenia w materiale.

W literaturze przedmiotu spotyka się najczęściej trzy modele stopów z pamięcią kształtu. W tym miejscu zostanie przedstawiony model Brinsona, który opisany jest równaniem:

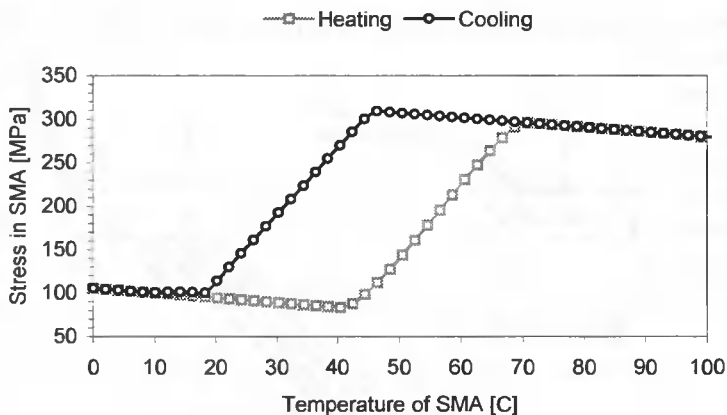
$$(\sigma - \sigma_0) = E(\xi)\varepsilon - E(\xi_0)\varepsilon_0 + \Omega(\xi)\xi_s - \Omega(\xi_0)\xi_{0s} + \Theta(T - T_0) \quad (3.1)$$

gdzie σ , σ_0 oznaczają naprężenia i naprężenia początkowe, ε , ε_0 odkształcenia i odkształcenia początkowe, T i T_0 temperaturę i temperaturę początkową, Θ współczynnik termosprężystości. Przyjęto dalej, że zarówno moduł Younga E jak i współczynnik transformacji fazowej Ω są zależne od względnego udziału fazy martenzytycznej ξ w stopie. Współczynnik ξ określamy następująco:

$$\xi = \xi_s + \xi_T \quad (3.2)$$

gdzie ξ_s oraz ξ_T oznaczają udziały fazy martenzytycznej zależne od naprężeń i temperatury. W tabeli 3.1 przedstawiono własności materiałowe obowiązujące w przypadku modelu Brinsona.

Na rysunku 3.1 przedstawiono naprężenia aktywowane w stopie SMA w funkcji temperatury stopu przy naprężeniach początkowych $\varepsilon_0 = 0,005$. Łatwo zauważyć, że wzrost naprężeń początkowych powoduje odpowiednio znaczny wzrost naprężeń aktywacji włókien SMA.



Rys. 3.1. Zmiany naprężeń wewnętrznych σ w funkcji temperatury T podczas nagrzewania i chłodzenia próbki ze stopu Nitinolu przy stałych naprężeniach początkowych $\varepsilon_0 = 0.005$

Tabela 3.1. Własności fizyczne stopu Nitinolu

Moduły, gęstość	Temperatury transformacji	Stałe transformacji	Maksymalne odkształcenie
$E_A = 67.0 \times 10^3 \text{ MPa}$	MF = 9.0°C	CM = 8.0 MPa/°C	$\epsilon_L = 0.067$
$E_M = 26.3 \times 10^3 \text{ MPa}$	MS = 18.4°C	CA = 13.8 MPa/°C	
$\Theta = 0.55 \text{ MPa/°C}$	AS = 34.5°C	$\sigma_S = 100.0 \text{ MPa}$	
$\rho = 6448.1 \text{ kg/m}^3$	AF = 49.0°C	$\sigma_F = 170.0 \text{ MPa}$	

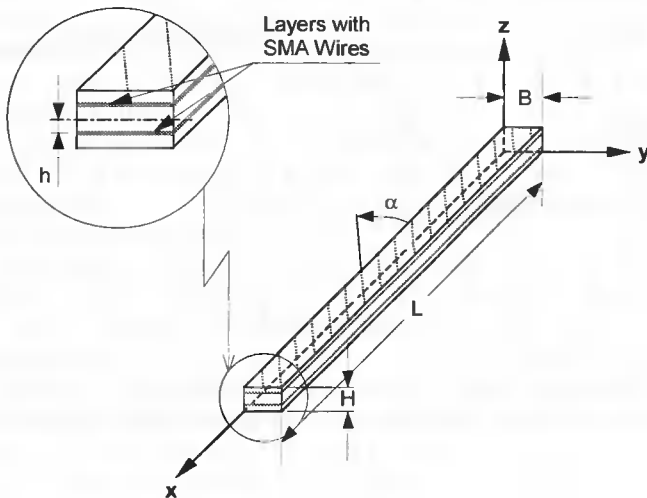
3.2. Belki i płyty z włóknami z pamięcią kształtu

W praktyce spotyka się najczęściej elementy SMA wykonane w postaci drutów, folii, taśm lub rurek. Elementy te wkomponowane w materiały kompozytowe umożliwiają skuteczne sterowanie parametrami statyki i dynamiki konstrukcji (Rogers *et al.*, 1989^b oraz Ro i Baz, 1995).

Jak wspomniano wyżej elementy SMA można wykorzystać na dwa sposoby. Pierwszy, oznaczany przez APT (*Active Property Tuning*) wykorzystuje jedynie zmiany modułu Younga. W tym przypadku elementy wykonane z SMA wkomponowuje się bezpośrednio w strukturę kompozytu lub umieszcza w specjalnych rękawach, które z kolei umieszcza się w kompozycie (Otsuka i Wayman, 1998). Drugi sposób to ASET, czyli *Active Strain Energy Tuning*. W tym przypadku elementy SMA poddane są wstępnym odkształceniom a następnie umieszczane są w elementach kompozytowych i po aktywacji generują olbrzymie siły wewnętrzne. Jak poprzednio stosowane są dwie metody łączenia elementów SMA z kompozytem: bezpośrednie zespolenie lub poprzez umieszczenie w specjalnych rękawach (Otsuka i Wayman, 1998).

3.3. Belka kompozytowa z włóknami z pamięcią kształtu

Na rysunku 3.2 przedstawiono belkę kompozytową wzmocnianą włóknami z pamięcią kształtu (SMA).



Rys. 3.2. Wielowarstwowa belka kompozytowa z włóknami SMA

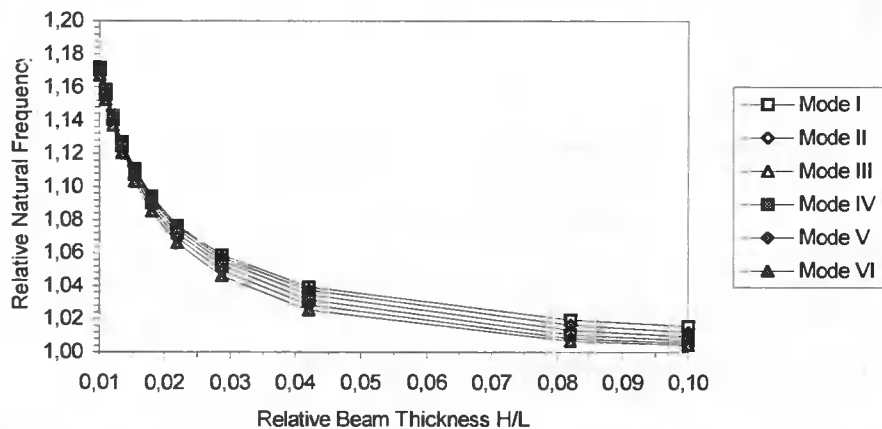
W tym przypadku dokonano analizy zakładając, że elementy SMA są aktywowane według metody APT oraz ASET (Żak *et al.*, 2001). Rozpatrywaną belkę o wymiarach: długość 500 mm, szerokość 30 mm, grubość 9 mm wykonano z 12 warstw materiału kompozytowego (10 warstw Graphite/Epoxy oraz 2 warstwy SMA/Epoxy). Włókna wzmacniające grafitowe (Graphite) i SMA są ułożone w każdej z warstw kompozytu pod kątem α . Przyjęto także założenie, że warstwy SMA/Epoxy są umieszczone symetrycznie w stosunku do płaszczyzny obojętnej belki (rys. 3.2). Grubość każdej z warstw (SMA/Epoxy) wynosi 0.5 mm i względny udział włókien SMA w tych dwóch warstwach wynosi 0.57. Względny udział włókien grafitowych w warstwach Graphite/Epoxy wynosi 0.5 a grubość każdej warstwy 0.8 mm. Kąty ułożenia włókien w poszczególnych warstwach określa formuła $[0^\circ/(\pm 45^\circ)_s/0^\circ]$.

Właściwości mechaniczne materiału kompozytowego oraz włókien SMA przedstawiono w tabeli 3.2.

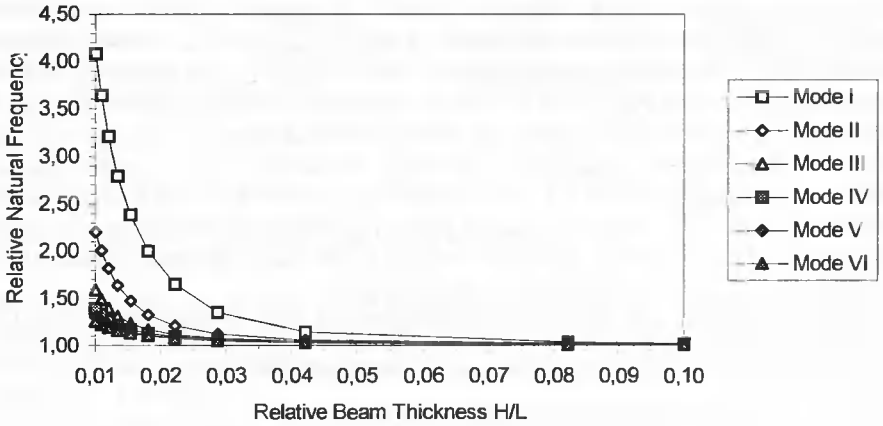
Tabela 3.2. Właściwości mechaniczne kompozytu i włókien SMA

Materiał	Moduł Young'a	Liczba Poisson'a	Gęstość
Epoxy Resin	3.43 GPa	0.35	1250.0 kg/m ³
Aluminium	70.0 GPa	0.33	2800.0 kg/m ³
SMA - Martensite	26.3 GPa	0.30	6448.1 kg/m ³
SMA - Austenite	67.0 GPa	0.30	6448.1 kg/m ³
Glass Fibres	65.5 GPa	0.23	2250.0 kg/m ³
Kevlar Fibres	130.0 GPa	0.22	1450.0 kg/m ³
Graphite Fibres	275.6 GPa	0.20	1900.0 kg/m ³
Boron Fibres	399.6 GPa	0.21	2580.0 kg/m ³

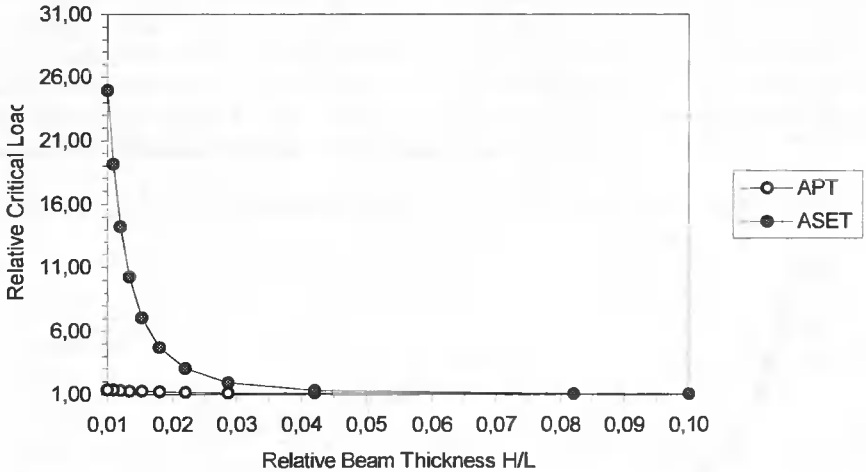
Wyniki obliczeń numerycznych przedstawiono na rysunkach 3.3-3.5.



Rys. 3.3. Wpływ względnej grubości belki na częstotliwości drgań własnych wielowarstwowej, wspornikowej belki kompozytowej wzmacnianej włóknami SMA (przypadek APT)



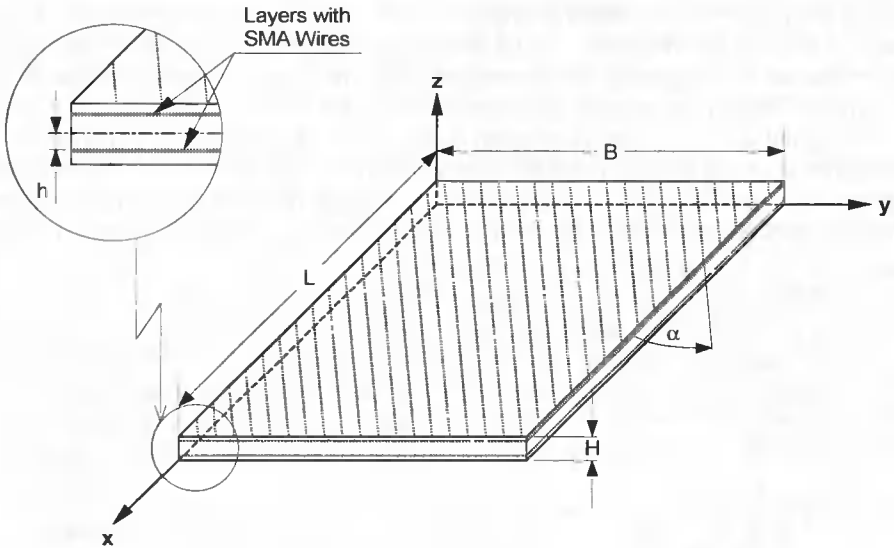
Rys. 3.4. Wpływ względnej grubości belki na częstotliwości drgań własnych wielowarstwowej, wspornikowej belki kompozytowej wzmocnionej włóknami SMA (przypadek ASET)



Rys. 3.5. Wielowarstwowa, wspornikowa belka kompozytowa wzmocniona włóknami SMA. Wpływ względnej grubości belki na wartości obciążenia krytycznego przy wyboczeniu

3.3. Płyta kompozytowa z włóknami z pamięcią kształtu

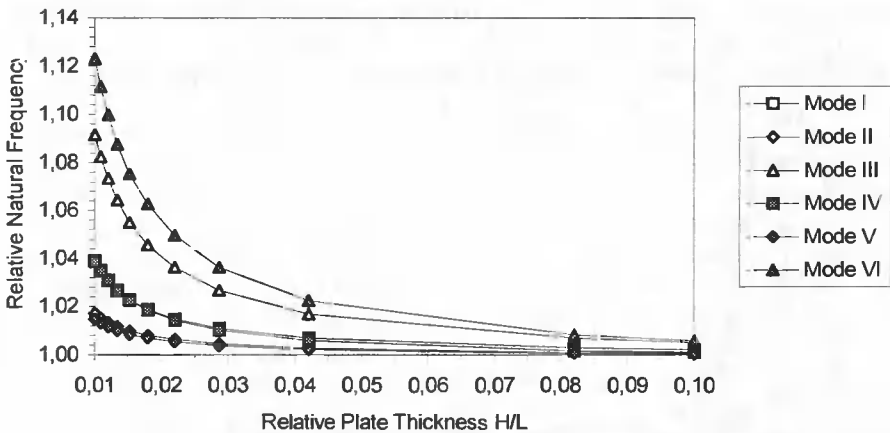
Na rysunku 3.6 przedstawiono wielowarstwową, wspornikową płytę kompozytową wzmocnianą włóknami z pamięcią kształtu. Żak *et al.*, 2001 przedstawili szczegóły modelowania tej płyty i obliczenia numeryczne dla dwóch przypadków zastosowań: APT oraz ASET. W przypadku metody APT zmiany sztywności włókien SMA powodowały zmiany sztywności płyty a tym samym zmiany statycznych i dynamicznych parametrów konstrukcji.



Rys. 3.6. Wielowarstwowa, wspornikowa płyta kompozytowa z włóknami SMA

W przypadku metody ASET aktywacja włókien z pamięcią kształtu powoduje zmiany sztywności płyty jak też generuje duże siły w płaszczyźnie warstwy SMA/Epoxy.

Obliczana w pracy Żaka *et al.*, 2001 płyta ma następujące parametry: długość 500 mm, szerokość 500 mm, grubość 9 mm. Przyjęto założenie, że płyta jest 12 warstwowa (10 warstw Graphite/Epoxy oraz 2 warstwy SMA/Epoxy). Włókna wzmacniające grafitowe (Graphite) i SMA są ułożone w każdej z warstw kompozytu pod kątem α .

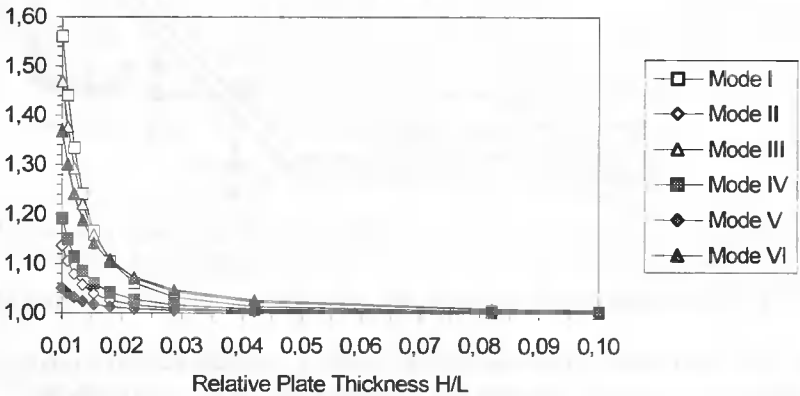


Rys. 3.7. Wpływ względnej grubości płyty na częstości drgań własnych wielowarstwowej, swobodnie podpartej płyty wzmacnianej włóknami SMA (przypadek APT)

Przyjęto także założenie, że warstwy SMA/Epoxy są umieszczone symetrycznie w stosunku do płaszczyzny obojętnej płyty (rys. 3.6). Grubość każdej z warstw

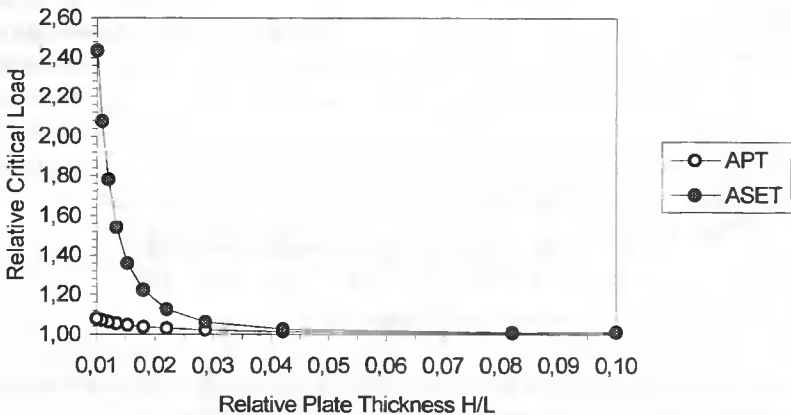
(SMA/Epoxy) wynosi 0.5 mm i względny udział włókien SMA w tych dwóch warstwach wynosi 0.57. Względny udział włókien grafitowych w warstwach Graphite / Epoxy wynosi 0.5 a grubość każdej warstwy 0.8 mm. Kąty ułożenia włókien w poszczególnych warstwach określa formuła $[0^\circ/(\pm 45^\circ)_s/0^\circ]$.

Na rysunkach 3.7-3.9 przedstawiono wyniki obliczeń numerycznych. Podobnie jak poprzednio większe zmiany częstości drgań własnych i sił krytycznych obserwujemy w przypadku metody ASET. Zależności w przypadku płyty są bardziej złożone niż w przypadku belki gdyż dużego znaczenia nabiera w tym przypadku rodzaj postaci drgań.



Rys. 3.8. Wpływ względnej grubości płyty na częstości drgań własnych wielowarstwowej, swobodnie podpartej płyty wzmacnianej włóknami SMA (przypadek ASET)

Wyniki obliczeń numerycznych wskazują, że w obydwu przypadkach (APT i ASET) zmiany parametrów charakteryzujących statykę i dynamikę płyty są w dużym stopniu zależne od względnej objętości włókien grafitowych w warstwie Graphite/Epoxy. Efekt ten wynika bezpośrednio ze stosunku modułu Younga zewnętrznych warstw kompozytu (SMA/Epoxy) do modułu Younga warstw wewnętrznych (Graphite/Epoxy).



Rys. 3.9. Wpływ względnej grubości wielowarstwowej, swobodnie podpartej płyty kompozytovej z włóknami SMA na wartości obciążeń krytycznych przy wyboczeniu

Należy zaznaczyć, iż w rozpatrywanych wyżej przypadkach nie wzięto pod uwagę efektów termicznych warstw Graphite/Epoxy jak też nie uwzględniono efektów nasycania materiału wilgocią. W rzeczywistości obydwie te przypadki mają duże znaczenie, co opisano w pracach Ostachowicza *et al.* (1999) oraz Ostachowicza *et al.* (2000).

4. ALGORYTMY GENETYCZNE W METODZIE DETEKCJI USZKODZEŃ KONSTRUKCJI

Metody monitorowania stanu technicznego konstrukcji nabrały szczególnego znaczenia w związku z postępem w kilku dziedzinach nauki. Wyniki badań są oczekiwane w przemyśłach zaawansowanych technologii a więc przede wszystkim w przemyśle aeronautyki, lotnictwa lecz także w przemyśle budowy maszyn i inżynierii lądowej. Wczesne wykrywanie uszkodzeń takich jak pęknięcia zmęczeniowe, delaminacje, rozwarstwianie materiału, korozja może nie tylko zapobiec katastrofie konstrukcji lecz także przedłużyć okres jej eksploatacji i zmniejsza liczbę kosztownych w wielu przypadkach przeglądów.

W niniejszej pracy przedstawiono metodę algorytmu genetycznego (GA *Genetic Algorithm*) do detekcji pęknięć zmęczeniowych oraz delaminacji.

Metoda GA jest bardzo interesująca w przypadkach rozwiązywania zagadnień odwrotnych w mechanice a właśnie taki problem pojawia się w przypadku poszukiwania wyżej wspomnianych uszkodzeń w konstrukcjach wykonanych z materiałów o cechach izotropowych i anizotropowych. Należy także zauważyć, iż w przypadku metody GA nie jest wymagany proces trenowania sieci jak to ma miejsce w przypadku metody NN, czyli *Neural Networks*. Metoda GA jest także konkurencyjna w stosunku do klasycznych metod optymalizacji gdyż szybko zmierza do ustalenia ekstremalnych wielkości funkcji celu w ujęciu globalnym.

4.1. Opis metody algorytmu genetycznego

Algorytmy genetyczne z założenia są algorytmami optymalizacyjnymi. Proces optymalizacji GA następuje według zasady naturalnej selekcji Darwina (Goldberg, 1989). Różnica metody GA w stosunku do tradycyjnych metod optymalizacji polega na tym, że proces poszukiwania optymalnego rozwiązania rozpoczyna się w całym obszarze zakodowanych rozwiązań. Zbiór zakodowanych początkowych rozwiązań nazywamy populacją początkową GA. Inicjacja procesu optymalizacji następuje w momencie losowego utworzenia populacji początkowej. W chwili tworzenia populacji początkowej niezbędne są jedynie dwie informacje: liczba chromosomów, które stanowią populację początkową a także wymiar każdego z chromosomów. Wymiar chromosomu zależy od liczby przekazywanych w nim informacji a także dokładności obliczeń. W chromosomie przekazujemy np. lokalizację pęknięcia a także wielkość pęknięcia.

Każde kolejne rozwiązanie jest zapamiętywane przez program komputerowy i program tworzy kolejną, lepszą populację chromosomów, bardziej przystosowaną do rozwiązania optymalnego. Każda następna populacja (zwana nową generacją) przybliża nas do rozwiązania optymalnego.

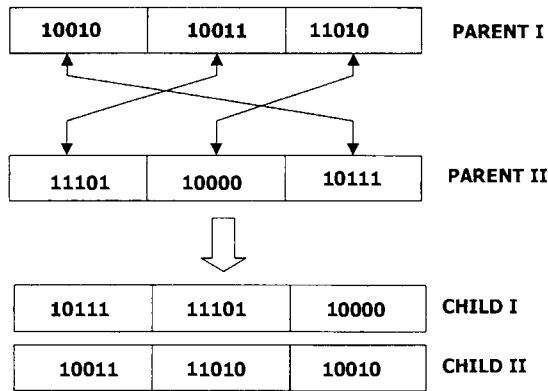
Najprostszy algorytm genetyczny zawiera trzy podstawowe operacje: reprodukcję, krzyżowanie i mutację. Pierwsza generacja tworzona jest losowo. Binarne kodowanie chromosomów wymaga użycia wyłącznie liczb naturalnych. Transformacja liczb rzeczywistych jest możliwa w zakresie od $[0, 2^N - 1]$ przy ustaleniu wartości minimalnej

i maksymalnej $[U_{\min}, U_{\max}]$. W ten sposób wartość rozwiązywanego parametru może być określona z zależności:

$$\lambda = \frac{U_{\max} - U_{\min}}{2^N - 1} \quad (4.1)$$

Poszczególne składowe chromosomów nazywamy genami. W genach zapisywane są informacje o zmiennych, których poszukujemy w rozwiązywanym obszarze. Geny stanowią składową część funkcji celu, która ściśle wyznacza kierunek poszukiwań optymalnego rozwiązania zagadnienia (Goldberg, 1989).

Na rys. 4.1 przedstawiono prosty przykład krzyżowania dwóch chromosomów, przy czym każdy z nich zawiera trzy geny. Istnieją więc dwa punkty podziału. Stan początkowy (przed podziałem) przedstawiono na rysunku wyżej (*Parent I* i *Parent II*). W wyniku procesu krzyżowania powstały dwa chromosomy (*Child I* i *Child II*), które zawierają geny poprzedniej generacji.



Rys. 4.1. Proces krzyżowania dwóch chromosomów

4.2. Formułowanie funkcji celu

Funkcję celu formułuje się na podstawie następujących kryteriów:

- Zmian częstości drgań własnych (Adams i Cawley, 1979 oraz Messina *et al.*, 1992)
- Zmian postaci drgań własnych (Krawczuk i Ostachowicz, 1996 oraz Rytter, 1993)
- Zmian częstości i postaci drgań własnych (Mares i Surace, 1996)
- Zmian amplitud drgań wymuszonych (Sampaio *et al.*, 1999).

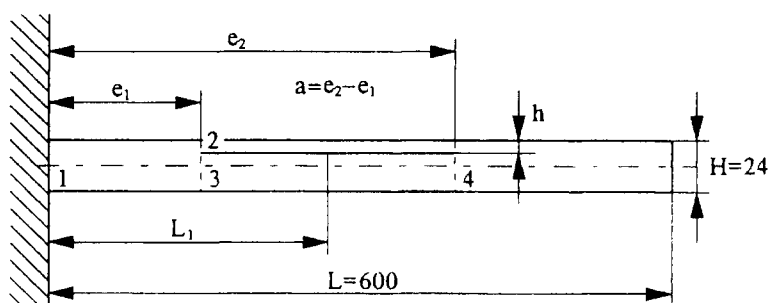
Najbardziej powszechną metodą formułowania funkcji celu jest metoda Cawleya – Adamsa (Adams i Cawley, 1979) oraz metoda DLAC (*Damage Location Assurance Criterion*) opisana przez Messina *et al.*, 1992). Powyższe metody wykorzystują różnice zmian częstości drgań własnych mierzonych i obliczanych. Więcej informacji na ten temat można znaleźć w pracy Ostachowicza, Krawczuka i Cartmella, 2001.

W literaturze przedmiotu można znaleźć dwa kryteria sformułowane na podstawie zmian postaci drgań własnych. Pierwsze oznaczone przez MAC (*Modal Assurance Criterion*) opisano w pracy Krawczuka i Ostachowicza (1996). Drugie oznaczone, COMAC (*Co-ordinate Modal Assurance Criterion*) opisał Rytter (1993).

Kryterium RFC (*Residual Force Criterion*) formułuje funkcję celu na podstawie zmian częstości i postaci drgań własnych. Proces formowania tej funkcji opisano w pracy Maresa i Surace (1996). Kryterium FRCM (*Frequency Response Curvature Method*) wykorzystuje zmiany amplitud drgań wymuszonych (Sampaio *et al.*, 1999). Więcej szczegółów na ten temat można znaleźć w pracy Ostachowicza, Krawczuka i Cartmella, 2001.

4.3. Przykłady liczbowe

Opisaną wyżej metodę wykorzystano do poszukiwania uszkodzeń w belkach wspornikowych. W pierwszym przypadku poszukiwano delaminacji, w drugim pęknięcia poprzecznego. Na rys. 4.2 przedstawiono 12-warstwową belkę kompozytową złożoną z warstw glas-epoxy, przy czym zawartość włókien szklanych wynosi 30%. Własności mechaniczne materiałów warstw kompozytu przedstawiono w tabeli 4.1.



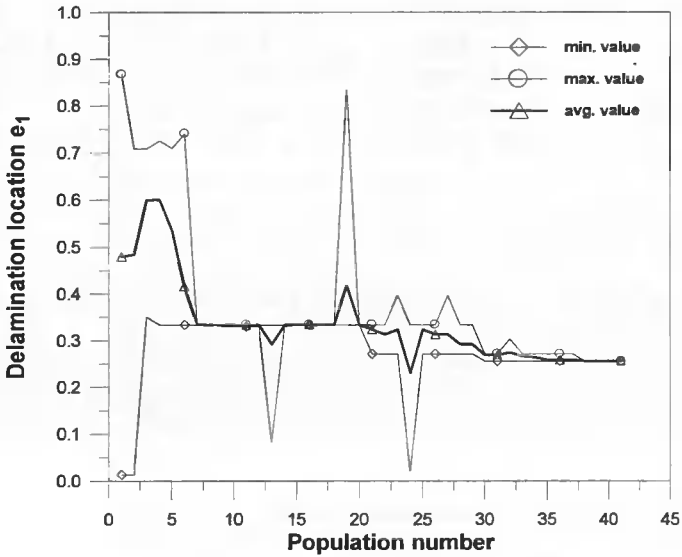
Rys. 4.2. Wielowarstwowa belka kompozytowa (glass-epoxy)

Przyjęto założenie, że belka ma symetryczny przekrój poprzeczny. Kąty ułożenia włókien w poszczególnych warstwach opisuje związek $(+45^\circ / -45^\circ)$. W rozpatrywanym przypadku długość delaminacji stanowi 35% długości belki i jest zlokalizowana pomiędzy 6 i 7 warstwą (w płaszczyźnie obojętnej belki).

Tablica 4.1. Własności materiałowe kompozytu

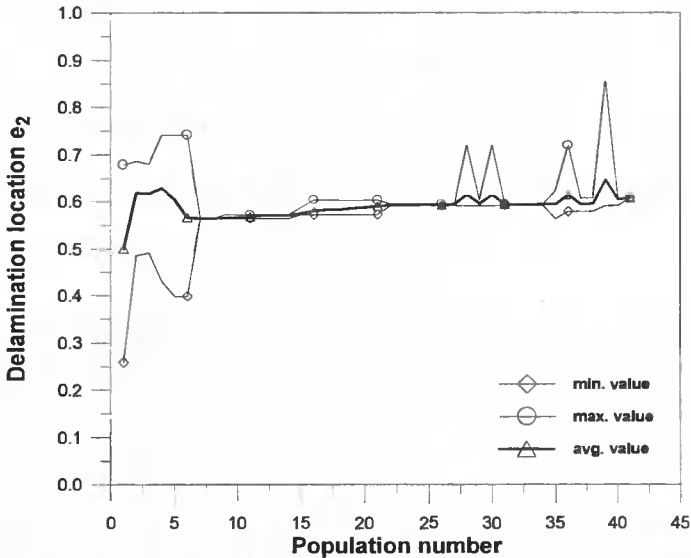
	Matrix-Epoxy	Glass-Fibre
Moduł Younga	$E_m=3.43$ GPa	$E_f=66.5$ GPa
Liczba Poisson'a	$\nu_m=0.35$	$\nu_f=0.23$
Moduł Kirchoffa	$G_m=1.27$ GPa	$G_f=27.0$ GPa
Gęstość	$\rho_m=1250$ kg/m ³	$\rho_f=2250$ kg/m ³

Początek delaminacji zlokalizowano w punkcie $e_1 = L_1/L = 0.25$ a drugi koniec znajduje się w punkcie o współrzędnej $e_2 = L_2/L = 0.6$. We wszystkich przypadkach populacja składała się z 6 chromosomów a każdy z chromosomów zawierał 33 bity informacji (po 11 bitów opisujących 3 zmienne: e_1, e_2 oraz położenie delaminacji w kierunku prostopadłym do warstw belki).



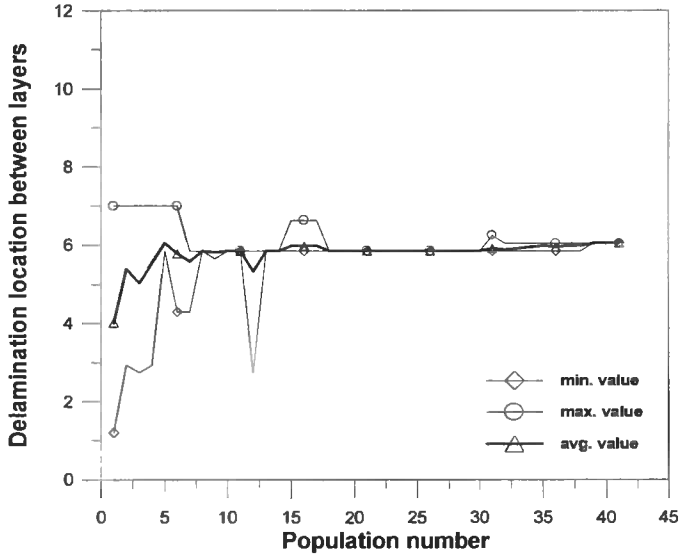
Rys. 4.3. Lokalizacja punktu e_1 delaminacji w funkcji liczby populacji

Stopień prawdopodobieństwa krzyżowania chromosomów wynosił 95% natomiast stopień mutacji 0.05%. Wyniki obliczeń przedstawiono na rysunkach 4.3-4.5.



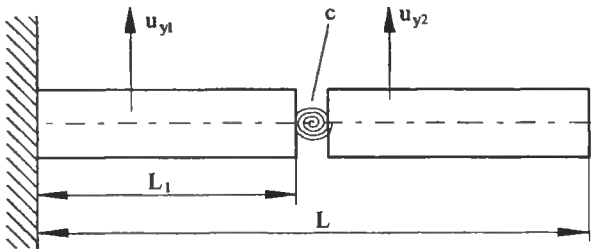
Rys. 4.4. Lokalizacja punktu e_2 delaminacji w funkcji liczby populacji

Proces obliczeń wykazał, że zbieżność wyników do wartości rzeczywistych następuje bardzo szybko i po 45 iteracjach (populacjach) otrzymujemy dokładne informacje o położeniu i rozmiarach delaminacji.



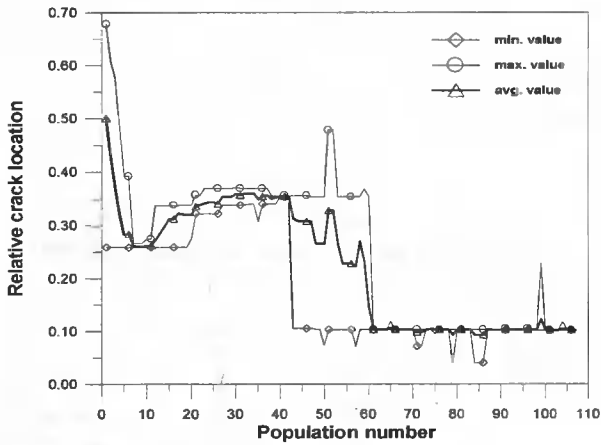
Rys. 4.5. Lokalizacja położenia delaminacji w kierunku prostopadłym do płaszczyzny obojętnej belki w funkcji liczby populacji

Drugi przykład dotyczy poszukiwania pęknięcia poprzecznego w belce wspornikowej o wymiarach: długość 600 mm, szerokość 10 mm, wysokość 20 mm (rys. 4.6). W tym przypadku populacja zawierała sześć chromosomów a każdy z nich zawierał 30 bitów informacji (15 bitów określało wartość każdej z dwóch zmiennych: położenie pęknięcia i jego głębokość). Na rysunkach 4.7- 4.8 przedstawiono zbieżność procesu iteracyjnego.

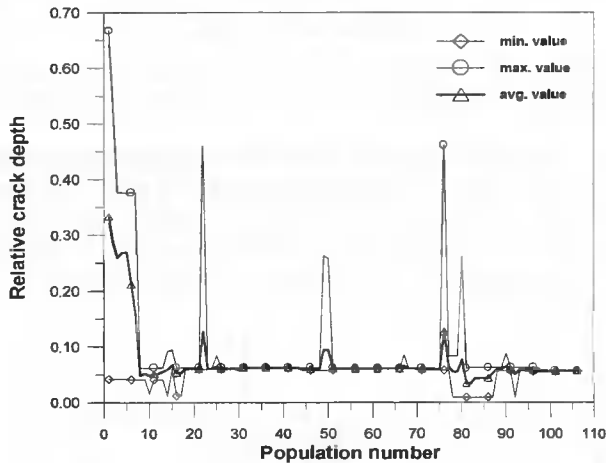


Rys. 4.6. Schemat belki wspornikowej z pęknięciem poprzecznym

Z rysunków tych wynika, że zbieżność procesu iteracji następuje po mniej więcej 100 populacjach.



Rys. 4.7. Względne położenie pęknięcia w funkcji liczby populacji



Rys. 4.8. Względna głębokość pęknięcia w funkcji liczby populacji

Na rysunku 4.7 widoczna jest zbieżność wyników do wartości $L_1 = 0.1$ m (położenie pęknięcia) a na rys. 4.8 do wartości $a = 0.05$ m (głębokość pęknięcia). Można zatem przyjąć stwierdzenie, że metoda identyfikacji uszkodzenia jest w tym przypadku skuteczna.

5. ZAKOŃCZENIE

Tematyka dynamiki konstrukcji kompozytowych rozwija się w tempie imponującym. Wspomnę o kilku najbardziej interesujących kierunkach poszukiwań. Jednym z nich jest zastosowanie elementów piezoelektrycznych (PZT) do poszukiwań różnego typu uszkodzeń. W tym przypadku elementy PZT stosuje się jednocześnie jako wzbudniki i czujniki. Wzbudniki inicjują propagację fal naprężeń, czujniki rejestrują te fale. Uszkodzenia zmieniają charakter fal a tym samym wskazują na możliwość wystąpienia uszkodzeń. Zastosowanie tej techniki umożliwia rejestrację w systemie *on-line* miejsca wy-

stapienia uszkodzeń a także ich wielkość. Podobne metody stosuje się do rejestracji miejsca uderzeń (*low impact*) a także siły uderzenia w elementy konstrukcji kompozytowej. Można także stosować elementy PZT do sterowania parametrami dynamiki samej konstrukcji. Elementy PZT są bardzo czułe (małe stałe czasowe) – niestety siły wzbudzone w tych elementach są znacznie mniejsze niż siły aktywacji włókien z pamięcią kształtu.

LITERATURA

- [1] R.D. Adams, P. Cawley, 1979. The localisation of defects in structures from measurements of natural frequencies. *Journal of Strain Analysis*, 14(2), ss. 49-57.
- [2] J.J. Epps, I. Chopra, 1997. Comparative evaluation of shape memory alloy constitutive models with test data. [In:] *Proceedings of 38th AIAA Structures, Structural Dynamics and Material Conference and Adaptive Structures Forum*, Kissimmee, Florida, ss. 7-10.
- [3] D.S. Ford, S.R. White, 1996. Thermomechanical behavior of 55Ni45Ti Nitinol. *Acta Materialia* 44(6), ss. 2295-2307.
- [4] C.R. Fuller, S. J. Elliott, P.A. Nelson, 1996. *Active Control of Vibration*. Academic Press Ltd., London.
- [5] F. Gandhi, D. Wolons, 1999. Characterization of the pseudoelastic damping behavior of shape memory alloy wires using complex modulus. *Journal of Smart Material Structures* 8, ss. 49-56.
- [6] D. Goldberg, 1989. *Genetic Algorithms in Search, Optimisation and Machine Learning*. Addison-Wesley Publishing Company, Reading.
- [7] M. Krawczuk, W. Ostachowicz, 1996. Damage indicators for diagnostic of fatigue cracks in structures by vibration measurements – a Survey. *Journal of Theoretical and Applied Mechanics*, 34, ss. 307-326.
- [8] M. Krawczuk, W. Ostachowicz, A. Żak, 1996. Natural vibration frequencies of delaminated composite beams. *Computer Assisted Mechanics and Engineering Sciences*, 3, ss. 233-243.
- [9] M. Krawczuk, W. Ostachowicz, A. Żak, 1997. Modal analysis of cracked, unidirectional composite beam. *Composites Part B: 28B*, ss. 641-650.
- [10] C. Mares, C. Surace, 1996. An application of genetic algorithms to identify damage in elastic structures. *Journal of Sound and Vibration*, 192, ss. 195-214.
- [11] A. Messina, A.I. Jones, E.J. Williams, 1992. Damage detection and localisation using natural frequency changes. *Proceedings of the 1st Conference on Identification*, Cambridge, ss. 67-76.
- [12] W. Ostachowicz, M. Krawczuk, A. Żak, 1999. Natural frequencies of a multilayer composite plate with shape memory alloy wires. *Finite Elements in Analysis and Design* 32, ss. 71-83.
- [13] W. Ostachowicz, M. Krawczuk, A. Żak, 2000. Dynamics and buckling of a multi-layer composite plate with embedded SMA wires. *Composite Structures* 48, ss. 163-167.
- [14] W. Ostachowicz, M. Krawczuk, 2001. Dynamics of cracked and delaminated composite material structures. *Advanced Course on Structural Control and Health Monitoring SMART'01*, Warsaw, May 22-25, ss.109-122.
- [15] W. Ostachowicz, M. Cartmell, A. Żak, 2001. Statics and dynamics of composite structures with embedded shape memory alloys. *Advanced Course on Structural Control and Health Monitoring SMART'01*, Warsaw, May 22-25, ss. 123-133.

- [16] W. Ostachowicz, M. Krawczuk, M. Cartmell, 2001. Genetic algorithms in health monitoring of structures. Advanced Course on Structural Control and Health Monitoring SMART'01, Warsaw, May 22-25, ss. 469-479.
- [17] K. Otsuka, C.M. Wayman, 1998. Shape Memory Materials, Cambridge University Press, Cambridge.
- [18] M.C. Piedboeuf, R. Gauvin, M. Thomas, 1998. Damping behavior of shape memory alloys: strain amplitude, frequency and temperature effects. Journal of Sound and Vibration 214, 5, ss. 885-901.
- [19] J. Ro, A. Baz, 1995. Nitinol-reinforced plates. Part I-III. Composites Engineering, 5(1), ss. 61-66.
- [20] C.A. Rogers, D.K. Baker, C.A. Jaeger, 1989^a. Introduction to smart materials and structures. Smart Materials, Structures, and Mathematical Issues. Technomic Publishing Company, Inc.
- [21] C.A. Rogers, C. Liang, D.K. Baker, 1989^b. Dynamic control concepts using shape memory alloy reinforced plates. Smart Materials, Structures, and Mathematical Issues. Technomic Publishing Company, Inc.
- [22] A. Rytter, 1993. Vibration based inspection of Civil Engineering Structures. PhD Thesis. University of Aalborg.
- [23] R.P. Sampaio, N. Maia, A.M.R. Riberio, J.M. Silva, 1999. Damage detection using the transmissibility. Sixth International Congress on Sound and Vibration, Copenhagen, ss. 2559-2568.
- [24] A. Żak, M. Krawczuk, W. Ostachowicz, 2000. Numerical and experimental investigation of free vibration of multilayer delaminated composite beams and plates. Computational Mechanics 26 (3), ss. 309-315.
- [25] A. Żak, M.P. Cartmell, W. Ostachowicz, 2001. Dynamics of multi-layered, composite beams and plates with SMA wires. 2nd Report, Department of Mechanical Engineering, University of Glasgow, Glasgow, U.K.

MECHANICS OF MULTILAYER COMPOSITE BEAMS AND PLATES

Summary

The paper is focused on the models of multilayer composite beams and plates. Several models of damage have been described and the impact of the damages on dynamics of structures. The damages occur at arbitrary locations and at arbitrary layers of the structures. Also a model and investigations into the dynamics of a multilayer composite plate reinforced with SMA (*Shape Memory Alloys*) fibres have been presented. The influence of the SMA fibre reinforcements, and the defects upon the dynamic characteristics of the structure has been established. The consequences of modelling, and finally their accuracy are also discussed.

Keywords: Mechanics of composite structures, models of damage, shape memory alloys

SYMULACJA KOMPUTEROWA PROCESU ECM W OPARCIU O DWUWYMIAROWY MODEL PRZEPIYWU ELEKTROLITU MIĘDZY PŁASKIMI ELEKTRODAMI

Tomasz Paczkowski, Jerzy Sawicki

Katedra Inżynierii Produkcji, Katedra Mechaniki Stosowanej, Wydział Mechaniczny ATR
ul. Prof. S. Kaliskiego 7, 85-796 Bydgoszcz

W pracy przedstawiono symulację komputerową procesu ECM w oparciu o dwuwymiarowy model przepływu mieszaniny elektrolitu i wodoru w szczelinie międzyelektrodowej. Zagadnienie rozwiązano częściowo analitycznie, częściowo numerycznie uzyskując rozkłady: grubości szczeliny międzyelektrodowej, gęstości prądu, ciśnienia, prędkości przepływu elektrolitu, temperatury, koncentracji objętościowej wodoru.

Słowa kluczowe: obróbka elektrochemiczna, przepływ laminarny, elektrolit

1. WPROWADZENIE

Drażenie elektrochemiczne jest odmianą obróbki elektrochemicznej bezstykowej i należy do podstawowych i najbardziej rozpowszechnionych operacji technologii elektrochemicznej części maszyn i narzędzi [2].

Obróbka w wyniku kształtowania elektrochemicznego (ECM) wymaga, aby do ujemnego bieguna stałego źródła prądu podłączyć elektrodę roboczą, a do bieguna dodatniego przedmiot obrabiany. Do szczeliny międzyelektrodowej doprowadza się elektrolit. W czasie ECM przepływając szczeliną elektrolit odprowadza z powierzchni elektrod produkty roztwarzania. Głównie są to cząsteczki wodoru oraz jony roztworzonego metalu [3]. Można więc uznać, że w szczelinie międzyelektrodowej powstaje mieszanina elektrolitu, cząsteczek wodoru oraz produktów roztwarzania elektrochemicznego. O zjawiskach fizycznych przepływu decydują zatem procesy wymiany masy, pędu i energii, które mają istotny wpływ na dokładność operacji drażenia elektrochemicznego [3].

Projektując proces technologiczny drażenia należy wyróżnić następujące zadania:

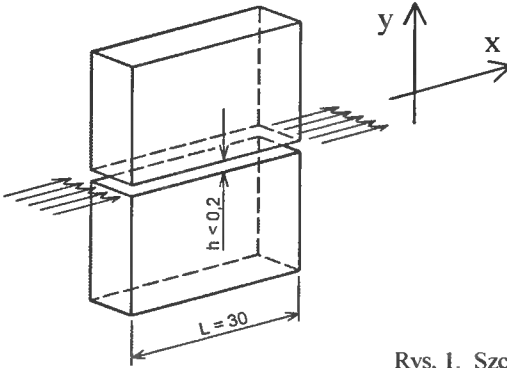
- dobór warunków procesu ECM (skład elektrolitu, parametry obróbki, wymogi technologiczne),
- wyznaczenie geometrii narzędzia elektrody roboczej,
- analiza dokładności obróbki.

Należy zaznaczyć, że wymienione zadania są wzajemnie ściśle sprzężone, a rozwiązanie wymienionych zadań związane jest z wyznaczeniem ewolucji kształtu powierzchni obrabianej tj. anody w czasie [4].

Niniejsza praca to próba realizacji postawionych zadań w oparciu o analizę płaskiego przepływu elektrolitu między dwiema równoległymi powierzchniami.

2. RÓWNANIA RUCHU MIESZANINY

Układ równań opisujący dwuwymiarowy bezpoślizgowy przepływ mieszaniny elektrolitu i wodoru w szczelinie międzyelektrodowej (rys. 1) wynika z podstawowych zasad zachowania tj. masy, pędu i energii [1].



Rys. 1. Szczelina międzyelektrodowa

Równania ruchu wynikające z zasady zachowania masy odpowiednio dla elektrolitu oraz wodoru są następujące:

$$\frac{\partial}{\partial t}(\rho_e) + \frac{\partial}{\partial x}(\rho_e v_x) + \frac{\partial}{\partial y}(\rho_e v_y) = 0 \quad (1)$$

$$\frac{\partial}{\partial t}(\rho_h) + \frac{\partial}{\partial x}(\rho_h v_x) + \frac{\partial}{\partial y}(\rho_h v_y) = j \eta_H k_H h^{-1} \quad (2)$$

Równania wynikające z zasady zachowania pędu dla elektrolitu i wodoru przyjmują odpowiednio postać:

$$\rho_e \left(\frac{\partial v_x}{\partial t} + v_x \frac{\partial v_x}{\partial x} + v_y \frac{\partial v_x}{\partial y} \right) = - \frac{\partial p_e}{\partial x} + \mu_e \left(\frac{\partial^2 v_x}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 v_x}{\partial y^2} \right) \quad (3)$$

$$\rho_e \left(\frac{\partial v_y}{\partial t} + v_x \frac{\partial v_y}{\partial x} + v_y \frac{\partial v_y}{\partial y} \right) = - \frac{\partial p_e}{\partial y} + \mu_e \left(\frac{\partial^2 v_y}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 v_y}{\partial y^2} \right) \quad (4)$$

$$\rho_H \left(\frac{\partial v_x}{\partial t} + v_x \frac{\partial v_x}{\partial x} + v_y \frac{\partial v_x}{\partial y} \right) = - \frac{\partial p_H}{\partial x} + \mu_H \left(\frac{\partial^2 v_x}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 v_x}{\partial y^2} \right) \quad (5)$$

$$\rho_H \left(\frac{\partial v_y}{\partial t} + v_x \frac{\partial v_y}{\partial x} + v_y \frac{\partial v_y}{\partial y} \right) = - \frac{\partial p_H}{\partial y} + \mu_H \left(\frac{\partial^2 v_y}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 v_y}{\partial y^2} \right) \quad (6)$$

gdzie:

- v_x, v_y - składowe wektora prędkości,
- p_e - ciśnienie elektrolitu,
- p_H - ciśnienie gazu,
- F_x, F_y - składowe jednostkowej siły masowej,

- $\rho_e = \rho_{eo}(1-\beta)$ - gęstość elektrolitu,
 $\rho_H = \rho_{Ho} \beta$ - gęstość wodoru,
 μ_e - dynamiczny współczynnik lepkości elektrolitu,
 μ_H - dynamiczny współczynnik lepkości wodoru,
 β - objętościowa koncentracja fazy gazowej,
 j, η_H, k_H - to odpowiednio gęstość prądu, wydajność prądowa wydzielania wodoru, równoważnik elektrochemiczny wodoru,

Równanie wynikające z zasady zachowania energii dla elektrolitu ma postać:

$$\frac{\partial}{\partial t}(\rho_e T_e) + \frac{\partial}{\partial x}(\rho_e v_x T_e) + \frac{\partial}{\partial y}(\rho_e v_y T_e) = a \frac{\partial^2 T}{\partial y^2} + \frac{Q}{c_p} \quad (7)$$

gdzie:

- a - dyfuzyjność cieplna elektrolitu,
 c_p - ciepło właściwe.

Dla rozwiązania przedstawionego układu równań (1)-(6) wprowadzono następujące założenia:

- przepływ elektrolitu jest ustalony dwuwymiarowy, laminarny,
- ciśnienia $p_e = p_H = p$,
- objętościowa koncentracja fazy gazowej $\beta = \beta(x)$
- grubość szczeliny jest mała w porównaniu z długością szczeliny międzyelektrodowej ($h \ll L$)

Dodając równania ruchu obu faz stronami oraz zaniedbując człony zawierające ρ_H/ρ_e jako pomijalnie małe oraz ograniczając się do przybliżenia Reynoldsa układ równań ruchu mieszaniny (1)-(6) jest teraz następujący:

$$\frac{\partial}{\partial x}(\rho_e v_x) + \frac{\partial}{\partial y}(\rho_e v_y) = 0 \quad (8)$$

$$\frac{\partial}{\partial x}(\rho_h v_x) + \frac{\partial}{\partial y}(\rho_h v_y) = j \eta_H k_H h^{-1} \quad (9)$$

$$\frac{\partial^2 v_x}{\partial y^2} = \frac{1}{\mu} \frac{\partial p}{\partial x} \quad (10)$$

$$\frac{\partial p}{\partial y} = 0 \quad (11)$$

$$v_x \frac{\partial T}{\partial x} + v_y \frac{\partial T}{\partial y} = a \frac{\partial^2 T}{\partial y^2} + \frac{Q}{\rho_e c_p} \quad (12)$$

Równania (8÷11) powinny spełniać następujące warunki brzegowe:

- dla prędkości
 $v_x, v_y = 0$ dla $y=0$ i $y=h$
- dla ciśnienia
 $p = p_0$ dla $x = x_0$
- dla temperatury:
 - na ściankach:
 $T = T_0$ dla $x \geq x_i$ i $y = 0$ i $y = h$
 - na wlocie
 $T = T_i$

gdzie:

- x_i - współrzędna początku szczeliny międzyelektrodowej,
- x_0 - współrzędna końca szczeliny międzyelektrodowej,
- T_0 - temperatura elektrod, T_i - temperatura na wlocie.

3. CAŁKI RÓWNAŃ RUCHU

Z równania (11) wynika, że:

$$p = p(x)$$

Całkując równanie (10) i uwzględniając warunki brzegowe mamy:

$$v_x = \frac{1}{2\mu} \frac{dp}{dx} (y^2 - yh) \quad (13)$$

Wprowadzając do formuły (13) pojęcie strumienia objętości:

$$Q_V = \int_0^h v_x dy \quad (14)$$

po przekształceniach otrzymamy:

$$\frac{dp}{dx} = -\frac{12\mu Q_V}{h^3} \quad (15)$$

Zatem rozkład prędkości jest teraz postaci:

$$v_x = \frac{6Q_V}{h^3} (y^2 - yh) \quad (16)$$

Wprowadzając do równania ciągłości przepływu elektrolitu (8) rozkład prędkości (16) a następnie całkując określamy składową v_y w postaci:

$$v_y = \frac{-6Q_V}{h^6} (h^2 h y^3 - h h^3 y^2) \quad (17)$$

gdzie: $h' = \frac{\partial h}{\partial x}$

Całkując równanie (15) i uwzględniając warunki brzegowe dla ciśnienia otrzymamy:

$$p = p_o - \frac{12\mu Q_V}{h^3}(x - x_o) \quad (18)$$

Całkując równanie (9) w poprzek szczeliny mamy:

$$\frac{\partial}{\partial x} \rho_H \int_0^h v_x dy + \rho_H v_y \Big|_0^h = \eta_H k_H j \quad (19)$$

stad:

$$\frac{\partial \rho_H}{\partial x} = \frac{\eta_H k_H j}{Q_V} \quad (20)$$

przy czym:

$$\rho_H = \beta \rho_{Ho}, \quad \rho_{Ho} = \frac{\mu_H P}{R_H T}$$

gdzie:

- μ_H - masa molowa wodoru,
- R_H - stała gazowa,
- $h(x)$ - lokalna wysokość szczeliny międzyelektrodowej,
- ρ_{Ho} - gęstość właściwa wodoru,

Wprowadzając do równania (19) zależności (20) oraz funkcję opisującą gęstość prądu [2]:

$$j = \frac{\kappa_0 \Phi_{TG}^{-1}(U - E)}{h} \quad (21)$$

teraz mamy:

$$\frac{\partial \beta}{\partial x} = \frac{\eta_H k_H R_H}{\mu_H} \frac{\kappa_0 \Phi_{TG}^{-1}(U - E) T}{Q_V h p} \quad (22)$$

Całkując równanie (22) i uwzględniając, że $\beta=0$, gdy $x = x_o$ otrzymamy formułę opisującą rozkład objętościowej koncentracji fazy gazowej:

$$\beta = \frac{\eta_H k_H R_H}{\mu_H} \frac{\kappa_0 \Phi_{TG}^{-1}(U - E) T}{Q_V h p} x \quad (23)$$

gdzie:

- U - napięcie międzyelektrodowe,
- E - spadek napięcia w warstwie przyelektrodowej.

Równanie pozwalające wyznaczyć rozkład temperatury w szczelinie (11) rozwiązano numerycznie metodą różnic skończonych wykorzystując określone analitycznie formuły dla prędkości.

Wyznaczenie ewolucji kształtu powierzchni obrabianej (anody) w czasie opisuje równanie określające rzeczywistą zmianę kształtu obrabianej powierzchni, które w układzie współrzędnych prostokątnych związanych z nieruchomą powierzchnią (anodą) jest postaci [2]:

$$\frac{\partial Y_A}{\partial t} = k_v \kappa_0 \Phi_{TG}^{-1} \frac{U-E}{d_{min}} \sqrt{1 + \left(\frac{\partial Y_A}{\partial x} \right)^2} \quad (24)$$

$$\Phi_{TG} = \frac{1}{h} \left[\int_0^h \frac{dy}{(1 + \alpha_T (T - T_0)) (1 - \beta)^{3/2}} \right] \quad (25)$$

gdzie:

- k_v - współczynnik obrabialności elektrochemicznej,
 - α_T - współczynnik temperaturowy konduktywności elektrycznej,
 - κ_0 - konduktywność właściwa ośrodka,
 - d_{min} - najmniejsza odległość danego punktu anody do katody.
- $y = Y_A(x, t)$.

Do symulacji komputerowej ewolucji kształtu powierzchni obrabianej (24) zastosowano metodę kroków czasowych. Proces iteracyjny powtarza się aż do osiągnięcia zadanego czasu obróbki, bądź praktycznego ustalenia się procesu ECM tj spełnienia warunku stacjonarności:

$$\frac{\partial}{\partial t} \left(\kappa k_v \frac{U-E}{V_f} \right) = 0 \quad (26)$$

gdzie:

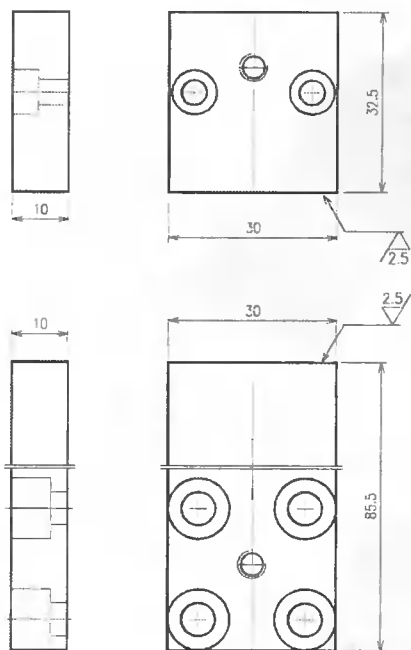
V_f - prędkość ruchu posuwowego elektrody roboczej.

4. Dyskusja wyników

Obliczenia przeprowadzono dla płaskich elektrod o cechach geometrycznych przedstawionych na rysunku 2. Obliczenia prowadzono do uzyskania stanu ustalonego. Ważniejsze parametry obróbki przedstawiono w tabeli 1.

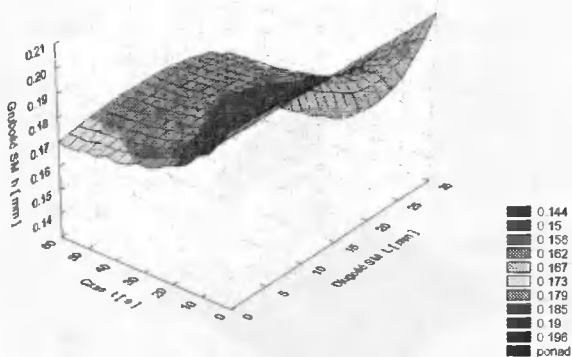
Tabela 1

Szczelina początkowa	0.2	mm
Prędkość ruchu posuwowego ER	0.015	mm/s
Napięcie międzyelektrodowe	15	V
Czas realizacji obliczeń	60	s

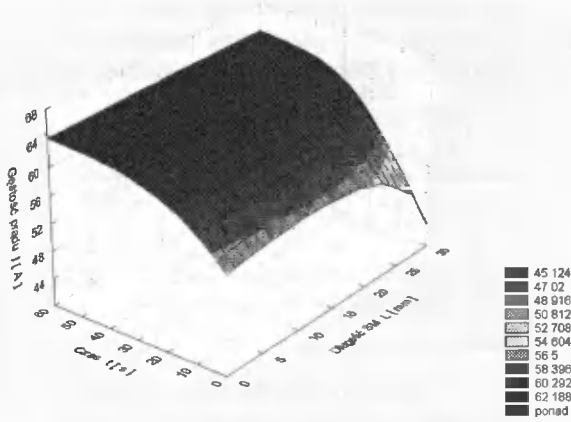


Rys. 2. Cechy geometryczne elektrod

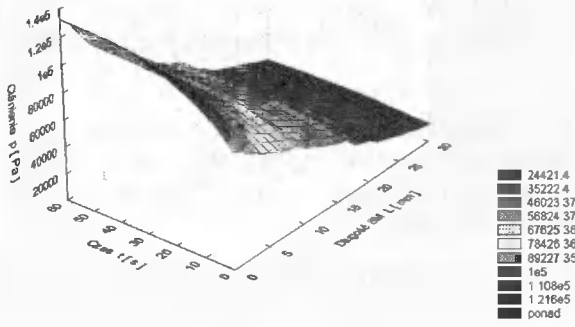
Wyniki symulacji procesu ECM przedstawiono na wykresach (rys. 3÷8) w postaci rozkładów grubości szczeliny h , gęstości prądu j , ciśnienia p , średniej prędkości przepływu elektrolitu V , średniej temperatury T oraz objętościowej koncentracji gazu β wzdłuż szczeliny międzyelektrodowej.



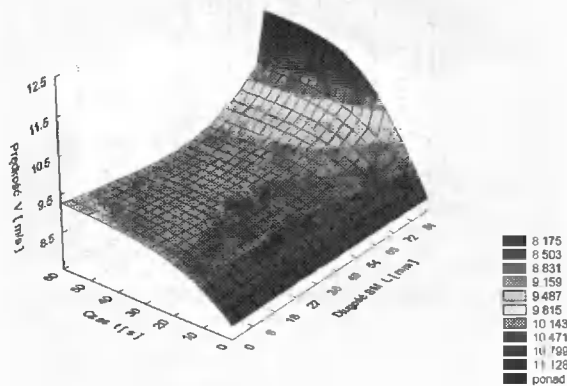
Rys. 3. Rozkład grubości szczeliny międzyelektrodowej



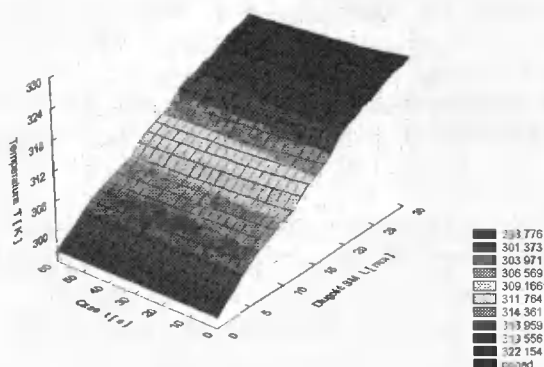
Rys. 4. Rozkład gęstości prądu



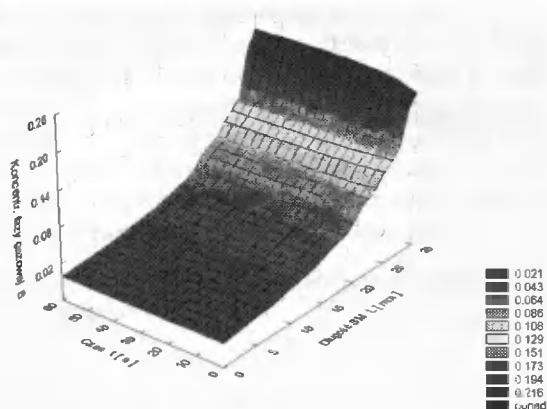
Rys. 5. Rozkład ciśnienia



Rys. 6. Rozkład prędkości przepływu elektrolitu



Rys. 7. Rozkład temperatury



Rys. 8. Rozkład koncentracji objętościowej wodoru

Na podstawie uzyskanych wyników obliczeń zilustrowanych wykresami można sformułować następujące wnioski:

- zmiana grubości szczeliny międzyelektrodowej (rys. 3) wynika z zachodzących procesów elektrochemicznych oraz hydrodynamicznych i rzutuje na rozkłady innych wielkości fizycznych, takich jak rozkład gęstości prądu (rys. 4), ciśnienia elektrolitu w szczelinie międzyelektrodowej (rys. 5), prędkości przepływu (rys. 6), temperatury (rys. 7), oraz koncentracji fazy gazowej (rys. 8),
- rozkładu gęstości prądu (rys. 4) wykazuje, że proces obróbki ECM podlega zjawiskom samoregulacji, tj. po pewnym czasie wartość gęstości prądu przyjmuje stałą wartość. Oznacza to ustalenie się na stałym poziomie wartości innych wielkości fizycznych.

LITERATURA

- [1] R. Gryboś, 1998. Podstawy mechaniki płynów. PWN Warszawa.
- [2] J. Kozak. Komputerowe wspomaganie technologii drążenia elektrochemicznego. SNOE nr 5, Warszawa 1999.

- [3] J. Kozak. Kształtowanie powierzchni obróbką elektrochemiczną bezstykową (ECM). Pr. Naukowe PW, Mechanika nr 41, Wyd. Politechniki Warszawskiej, 1976.
- [4] T. Paczkowski, J. Sawicki, 2000. Curvilinear surfaces shaping by electrochemical machining with vibration electrode tool, The 2nd international conference on machining and measurements of sculptured surfaces, 10-22 september, Kraków.

COMPUTER SIMULATION OF ECM PROCESS BASED ON 2D MODEL OF ELECTROLYTE FLOW BETWEEN FLAT ELECTRODES

Summary

This paper presents the computer simulation of the ECM process, on the basis of two-dimensional model of the flow of electrolyte and hydrogen mixture in the gap between the electrodes. This problem was solved partly analytically, partly numerically, obtaining distributions of: thickness of the gap, density current, pressures, speeds of flow of electrolyte, temperatures, of concentration of hydrogen by volume.

Keywords: electrochemical machining, laminar flow, electrolyte

KONCEPCJA OKREŚLANIA TRWAŁOŚCI ZMĘCZENIOWEJ W UJĘCIU ENERGETYCZNYM PRZY WYKORZYSTANIU MATEMATYCZNEGO MODELU ZACHOWANIA SIĘ MATERIAŁU

Julian Polański, Tomasz Karasiewicz

Akademia Bydgoska im. Kazimierza Wielkiego
Wydział Matematyki, Techniki i Nauk Przyrodniczych,
Instytut Techniki, 85-064 Bydgoszcz, ul. Chodkiewicza 30

W pracy dokonano krótkiego przeglądu energetycznych kryteriów zmęczenia. Bazują one na sporządzanych doświadczalnie pętach histerezy obciążenia cyklicznego, na podstawie których określana jest energia odkształcenia cyklicznego, a następnie trwałość zmęczeniowa materiału. W pracy zaproponowano matematyczny model zachowania się materiału przy obciążeniach cyklicznych do określania energii. Przedstawiona metoda nie wymaga sporządzania pętli histerezy, których wykonanie wiąże się z przeprowadzeniem badań eksperymentalnych. Model matematyczny uwzględnia również wpływ prędkości obciążania na zachowanie się materiału pod cyklicznym obciążeniem

Słowa kluczowe: cykliczne obciążenie, kryterium energetyczne, trwałość zmęczeniowa

1. WSTĘP

Zachowanie się materiałów konstrukcyjnych przy obciążeniach cyklicznych ma istotne znaczenie w konstrukcjach inżynierskich, zwłaszcza w przemyśle maszynowym, gdzie obciążenia prawie zawsze mają charakter cykliczny. Problem ten uwidacznia się szczególnie podczas opracowywania i eksploatacji takich konstrukcji jak: turbiny, zbiorniki ciśnieniowe, czy samoloty. Inżynier opracowujący projekt musi uwzględniać zjawisko zmęczenia materiału. Z tego powodu od wielu lat podejmowane są działania mające na celu zrozumienie zjawiska jak również szacowania uszkodzeń zmęczeniowych.

Cykliczny typ obciążeń powoduje występowanie w materiale określonych zmian zmęczeniowych, które rozwijają się, aż do pęknięcia zmęczeniowego elementu. Jednym z podstawowych określeń materiału jest jego trwałość zmęczeniowa, wyrażona zwykle liczbą cykli obciążenia do zniszczenia. Przy trwałości rzędu: 10^3 do 10^5 liczby cykli do zniszczenia mamy do czynienia z zakresem niskocyklowego zmęczenia. W zakresie tym pękaniu zmęczeniowemu towarzyszą duże naprężenia i relatywnie duże odkształcenia plastyczne. Wynika z tego, że zakres wytrzymałości niskocyklowej różni się od zakresu wytrzymałości wysokocyklowej przede wszystkim wielkością występujących odkształceń plastycznych lub wielkością pętli histerezy. W stosowanych obliczeniach trwałości zmęczeniowej wykorzystuje się analizę stanu naprężenia, odkształcenia lub rozpraszanej energii w zależności od liczby cykli.

Przy sporządzaniu wykresów zmęczeniowych w ujęciu naprężeniowym lub odkształceniowym wielkości kryterialne są jasno określone: w pierwszym przypadku jest nią amplituda σ_a lub zakres $\Delta\sigma$ naprężenia, w drugim przypadku amplituda odkształcenia całkowitego ϵ_{ac} lub zakres odkształcenia całkowitego $\Delta\epsilon_{ac}$, względnie amplituda odkształcenia plastycznego. Ujęcie energetyczne natomiast wymaga uwzględnienia zarówno zmienności naprężenia, jak i odkształcenia. Opis ten daje również możliwość sumowania energii w trakcie cyklicznego odkształcania. Cecha ta stwarza możliwości formułowania hipotez sumowania uszkodzeń, w których wielkością kryterialną jest skumulowana energia. Miarą energii rozproszonej w materiale podczas cyklu obciążenia jest pole pętli histerezy. W ujęciu tym podstawowym problemem jest określenie części energii odpowiedzialnej za zmęczeniowe uszkodzenie materiału. Z tego powodu powstało szereg hipotez szacowania trwałości zmęczeniowej w ujęciu energetycznym.

Podstawowe równanie charakteryzujące trwałość zmęczeniową materiału przedstawiamy w postaci:

$$\Delta W = kN_f^\alpha + C \quad (1.1)$$

gdzie:

ΔW - gęstość energii odkształcenia,

N_f - liczba cykli do zniszczenia,

k - stała materiałowa,

C - energia odkształcenia przy obciążeniach równych granicy zmęczenia,

α - stała materiałowa.

2. HIPOTEZY ZMĘCZENIOWE W UJĘCIU ENERGETYCZNYM

Jedną z pierwszych hipotez energetycznych jest hipoteza zaproponowana przez M.A. Minera [7]. Według tej teorii liczba cykli do zniszczenia przy ustalonym poziomie naprężenia jest ułamkiem czasu trwałości elementu. Gdy całkowite uszkodzenie osiągnie wartość 100 %, element musi ulec pęknięciu.

$$\frac{\Delta W_1}{W} + \frac{\Delta W_2}{W} + \dots + \frac{\Delta W_l}{W} = 1 \quad (2.1)$$

Hipoteza ta posłużyła następnie do budowy kumulacyjnego modelu trwałości zmęczeniowej, poprzez wprowadzenie liniowego związku pomiędzy energią, a żywotnością w postaci:

$$\frac{\Delta W_1}{W} = \frac{n_1}{N_1} \quad (2.2)$$

Z kolei kryterium Feltnera i Morrowa [1] uznać można za pierwsze energetyczne kryterium trwałości zmęczeniowej zweryfikowane doświadczalnie. Autorzy założyli, że ilość energii rozproszonej na jednostkę objętości materiału D_C do chwili zniszczenia próbki jest stała i równa energii dyssypacji w czasie statycznego rozciągania D_S .

$$D_C = \sum_{N=1}^{N_f} D_N = D_S \quad (2.3)$$

W dalszych swoich pracach Morrow przedstawił kryterium w następującej postaci

$$W_f = N_f \Delta W = N_f \frac{4\varepsilon'_f \frac{1-n'}{1+n'}}{(\sigma'_f)^{\frac{1+n'}{n'}}} \quad (2.4)$$

gdzie:

- W_f - sumaryczna energia odkształcenia plastycznego wywołująca zmęczenie,
- ΔW - energia pętli histerezy,
- N_f - żywotność próbki,,
- σ'_f - współczynnik wytrzymałości zmęczeniowej,
- ε'_f - współczynnik odkształcenia zmęczeniowego.

W 1961 roku Martin [6] zaproponował hipotezę wg której, zniszczenie zmęczeniowe następuje wtedy, gdy całkowita wartość energii wzmocnienia osiągnie wartość krytyczną. Do opisu kryterium przyjęto uproszczony schemat równoległobocznej pętli histerezy.

Energia wzmocnienia D_U w pełnym cyklu wyniesie:

$$D_U = 2 \left[\frac{1}{2} E_{pl} (\Delta\varepsilon_{ap})^2 \right] \quad (2.5)$$

gdzie:

$$E_{pl} = \operatorname{tg} \alpha .$$

Po przyjęciu zgodnie z założeniami kryterium równości energii całkowitej W_U i energii odkształcenia przy statycznym obciążeniu U , energia całkowita wyniesie:

$$W_U = N_f D_U = N_f E_{pl} (\Delta\varepsilon_{ap})^2 = U \quad (2.6)$$

Romanow [10] zaproponował kryterium zniszczenia zmęczeniowego założywszy, że zniszczenie nastąpi gdy różnica między energią rozproszoną w półcyklu rozciągania i ściskania osiągnie wartość krytyczną równą polu pod krzywą statycznego rozciągania. Warunek zniszczenia dla tej hipotezy możemy zapisać jako:

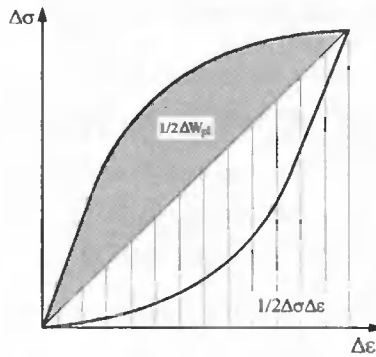
$$U = \sum_{n_i=1}^{n_i=N_f} (\Delta W_r - \Delta W_c) \quad (2.7)$$

gdzie:

- U - energia odkształcenia podczas rozciągania statycznego,
- ΔW_r - pole pętli histerezy w półcyklu rozciągania,
- ΔW_c - pole pętli histerezy w półcyklu ściskania.

Wraz ze wzrostem żywotności materiału całkowity zakres odkształceń $\Delta\varepsilon$ zmniejsza się, dlatego trudniej jest mierzyć energię histerezy. Aby tego uniknąć Kujawski zaproponował kryterium wytrzymałości zmęczeniowej [5] , w którym za miarę zniszczenia przyjęto sumę połowy energii dyssypowanej i połowę iloczynu zakresów naprężenia i odkształcenia.

$$\Delta W = \frac{1}{2} \Delta W_{pl} + \frac{1}{2} \Delta \sigma \Delta \epsilon \quad (2.8)$$



Rys. 2.1 Ilustracja hipotezy Kujawskiego.

Gołoś w pracach [2,3] zaproponował zastosowanie jako parametru zniszczenia – gęstości energii odkształcenia całkowitego, równej sumie gęstości energii rozproszonej w cyklu w wyniku powstawania odkształceń plastycznych, w stanie nasycenia materiału, oraz gęstości energii odkształcenia sprężystego w półcyklu rozciągania. Badania doświadczalne w zakresie małej liczby cykli wykazały, że istnieje zależność pomiędzy energią wyznaczoną z pola pętli histerezy w stanie nasycenia – gęstością energii rozproszonej, a liczbą cykli do zniszczenia. Stan nasycenia dla materiałów ulegających cyklicznemu umocnieniu lub osłabieniu ustala się już po kilkudziesięciu cyklach, najpóźniej jednak pomiędzy 1/3 a 1/2 liczby cykli do zniszczenia. W ogólnej postaci kryterium to można opisać następującą zależnością

$$\Delta W^t = \Delta W^p + \Delta W^{e+} \quad (2.9)$$

gdzie:

- ΔW^t - gęstość energii odkształcenia,
- ΔW^p - odkształcenie podczas statycznego rozciągania,
- ΔW^{e+} - gęstość energii sprężystej w półcyklu rozciągania.

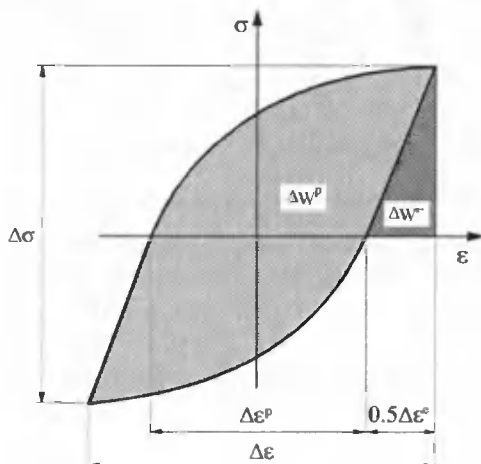
Na rysunku 2.1 przedstawiono interpretację geometryczną parametru zniszczenia. Dla materiałów podlegających zasadzie Masinga pole powierzchni pętli oraz energię odkształcenia sprężystego w półcyklu rozciągania można wyrazić zależnościami:

$$\Delta W^p = \frac{1-n'}{1+n'} \Delta \sigma \Delta \epsilon^p \quad \Delta W^{e+} = \frac{\Delta \sigma \Delta \epsilon^e}{8} = \frac{1}{8E} \Delta \sigma^2 \quad (2.10)$$

gdzie:

- n' - wykładnik umocnienia cyklicznego,
- $\Delta \sigma$ - zakres naprężeń,
- $\Delta \epsilon^p$ - zakres odkształceń plastycznych,
- $\Delta \epsilon^e$ - zakres odkształceń sprężystych,
- E - moduł sprężystości podłużnej.

Szerszy przegląd hipotez znaleźć można w szeregu publikacjach dotyczących trwałości zmęczeniowej w ujęciu energetycznym. Liczba tych publikacji świadczy o istnieniu zależności pomiędzy energią odkształcenia a zmęczeniem materiału. Mimo, że liczba hipotez energetycznych stale wzrasta brak jest hipotezy uniwersalnej.



Rys. 2.2. Interpretacja geometryczna kryterium

2. OPIS MODELU MATEMATYCZNEGO

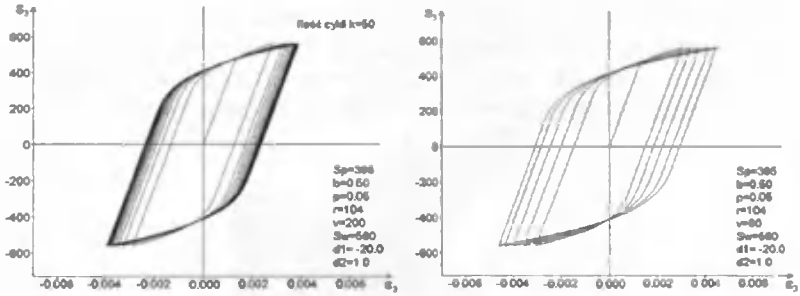
Istniejące kryteria energetyczne bazują na sporządzanych doświadczalnie pętlach histerezy obciążenia cyklicznego, na podstawie których poprzez pomiar ich pola powierzchni, określana jest energia odkształcenia cyklicznego, a następnie trwałość zmęczeniowa materiału. Uzyskanie pętli w sposób doświadczalny jest kosztowne i pracochłonne. Następnym problemem jest wyodrębnienie jednej pętli histerezy w stanie ustalonym spośród wiązki wszystkich pętli i określenie jej pola powierzchni.

W pracy zaproponowano wykorzystanie modelu matematycznego [8,9] zachowania się materiału pod wpływem obciążeń cyklicznych do teoretycznego sporządzania pętli histerezy i określania jej pola powierzchni.

Stosowanie tego modelu pozwala uzyskać dowolną n-tą pętlę oraz szybko obliczać jej pole powierzchni, gdyż znane jest równanie ją opisujące. Pozwoli to zastąpić część kosztownych i pracochłonnych badań eksperymentalnych, badaniami teoretycznymi.

Ponadto z badań eksperymentalnych wynika, że na zachowanie się materiałów poddanych obciążeniom cyklicznym (cykliczne umocnienie lub osłabienie) jest uzależnione między innymi od prędkości obciążania. Istniejące kryteria trwałości zmęczeniowej zarówno w ujęciu energetycznym, naprężeniowym jak i odkształceniowym nie uwzględniają wpływu prędkości obciążania na zachowanie się materiału.

Stosowany przez nas model matematyczny do opisu zachowania się materiału pod wpływem obciążeń cyklicznych uwzględnia wpływ prędkości obciążania na trwałość zmęczeniową materiału rysunek 3.1.



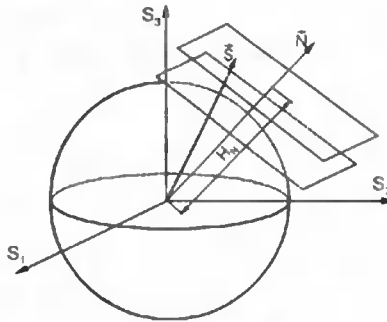
Rys. 3.1 Wpływ prędkości obciążania na zachowanie się materiału

Do opracowania modelu matematycznego wykorzystano określanie odkształceń w przestrzeni Iljuszyna [4]. Według niego elementarne odkształcenia określa ruch płaszczyzny stycznej do powierzchni plastyczności, a całkowite odkształcenie równe jest ich sumie.

$$\varepsilon_{ip} = \iiint_{\alpha\beta\gamma} N_i F(H_N) \cos\beta d\alpha d\beta d\lambda \quad (3.1)$$

gdzie:

- F - charakterystyczna funkcja materiału zależna od H_N ,
- H_N - odległość od początku układu do płaszczyzny stycznej do powierzchni plastyczności, składowa wektora N (normalnego do płaszczyzny stycznej),
- λ - kąt między normalnymi N i n,
- α, β - kąty określające normalną n.



Rys. 3.2. Przemieszczenie płaszczyzny wcześniej stycznej do powierzchni plastyczności po normalnej N

Po wykonaniu całkowania wzór będzie miał postać:

$$\varepsilon_{p\Sigma} = \sum_{i=0}^{k-1} \varepsilon_{ip} (-1)^i + \varepsilon_{kp} (-1)^k \quad (3.2)$$

gdzie:

ε_{ip} - odkształcenie pełnego i- tego półcyklu;

ε_{kp} - odkształcenie k - tego półcyklu, $\varepsilon_{kp} = 2gF_2(a_k)$ dla $k \geq 1$, $g = \frac{\pi S_0^2}{6r}$

$$F_2(a_k) = \frac{1}{a_k^2} \left(2\sqrt{1-a_k^2} - 5a_k^2\sqrt{1-a_k^2} + 3a_k^4 \ln \frac{1+\sqrt{1-a_k^2}}{a_k} \right)$$

$$a_k = \frac{\sqrt{2}S_0}{\sqrt{S_3^2 + S_A^2 - I_{(k-1)(-1)}^{k-1} - I_{k(-1)}^k}}$$

$$I_{k(-1)}^k = \frac{bv}{p} \left[1 + 2 \sum_{i=1}^k e^{-p(t-t_{i-1})} (-1)^{i+k+1} + e^{-pt} (-1)^{k+1} \right]$$

$$t_{i-1} = (2i - 1)t_0$$

gdzie:

- p, b - stałe,
- v - prędkość obciążenia,
- S₀ - granica plastyczności,
- S_A - amplituda naprężenia.

Całkowita deformacja:

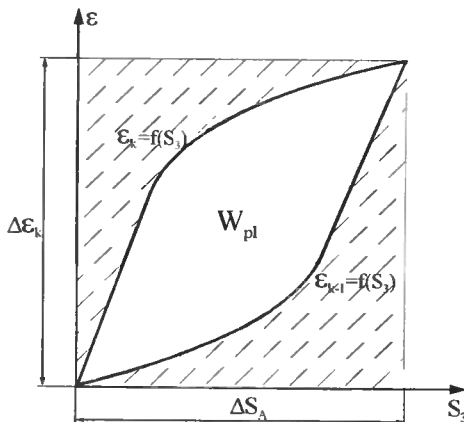
$$\epsilon_k = \frac{S_3}{2G} + \epsilon_{p\Sigma} \tag{3.3}$$

Znając równania na deformację, które są zarazem równaniami opisującymi gałęzie pętli histerezy obliczyć można pole teoretycznej pętli histerezy:

$$W_{pl} = \Delta S_A \Delta \epsilon_k - \int_0^{\Delta S_A} \epsilon_{k-1} dS_3 - \int_0^{\Delta S_A} \epsilon_k dS_3 \tag{3.4}$$

gdzie:

- ΔS_A - zakres naprężenia,
- Δε_k - zakres odkształcenia.



Rys. 3.3. Schemat obliczenia energii odkształcenia plastycznego

3. WNIOSKI

1. Przedstawiony sposób określania energii jest prosty i łatwy w realizacji.
2. Do określania trwałości zmęczeniowej metoda nie wymaga badań eksperymentalnych, ponieważ pętle histerezy można otrzymać na podstawie modelu matematycznego.
3. Model matematyczny uwzględnia prędkość obciążania, od której zależy zachowanie się materiału pod wpływem obciążeń cyklicznych.
4. Model został zastosowany do hipotez zmęczeniowych w ujęciu energetycznym, które znajdują się w fazie rozwoju, stąd celowa jest dalsza jego weryfikacja i modyfikacja.

LITERATURA

- [1] C.E. Feltner, J.D. Morrow. Microplastic strain hysteresis energy as a criterion for fatigue fracture. *J. Basic Engineering ASME* 110, 15-22.
- [2] K. Gołoś, 1988. Energetic formulation of fatigue strength criterion. *Archiwum Budowy Maszyn, Tom XXXV, z. 1-2, Warszawa, ss. 5-15.*
- [3] K. Gołoś, 1989. Trwałość zmęczeniowa metali w ujęciu energetycznym. *Prace Naukowe, Mechanika, z.123, Politechnika Warszawska.*
- [4] A.A. Iljuszin, 1961. Ob osnovach obszczej matematycznej teorii płasticznosti. *Wopr.teorii płasticznosti. - M, Izd-wo AN CCCP, ss. 3-29*
- [5] D. Kujawski, 1991. Modelowanie trwałości zmęczeniowej i propagacji pęknięć w metalach. *Prace Naukowe, Mechanika, z.133, Politechnika Warszawska.*
- [6] D.E. Martin, 1961. An energy criterion for low-cycle fatigue. *Transactions of the American Society of Mechanical Engineers. Journal of Basic Mechanics, 12, ss. 565-571.*
- [7] M.A. Miner, 1945. Cumulative damage in fatigue. *Journal of Applied Mechanics, 12, ss. 159-164.*
- [8] J. Polański, 1999. Analitycznie opisania znakozminnoj deformacji. *Maszynoznawstwo, No 1, ss. 9-12.*
- [9] J. Polański, K.M. Rusinko, 2000. Sintezowa teoria płasticznoj deformacji z wrachowaniam szwidkosti nawantażenia. *Fiz. Chim. Mech. Mater, No. 1, ss. 39-42.*
- [10] A.N. Romanow, 1974. Energeticzeskije kriterii razruszenija pri malociklovom nagruženii. *Soobszczenie 1, Energia razruszenija pri malom cisle ciklov nagruženija. Problemy Procznosti, Nr 1, ss. 3-10.*

CONCEPTION OF ENERGY FATIGUE LIFE WITH A MATHEMATICAL MATERIAL MODEL

Summary

This paper presents a mathematical model of energy fatigue life. Analysis of energy criterion with load in cycles was carried out. The influence of velocity was important.

Keywords: load in cycles, energy criterion, fatigue life

МЕТОДИКА РАСЧЕТА ВЫХОДНЫХ ХАРАКТЕРИСТИК ДИСКОВЫХ ТОРМОЗНЫХ МЕХАНИЗМОВ С САМОУСИЛЕНИЕМ

Александр Сергеевич Поварехо

Кафедра «Тракторы»
Белорусский национальный технический университет
проспект Ф.Скорины, 65, г. Минск 220027 Беларусь

На основе анализа конструктивных особенностей многодисковых тормозных механизмов с разжимным механизмом шарикового типа предложена методика определения их выходных характеристик, позволяющая учесть дополнительный сервоэффект за счет использования связи активного разжимного диска с несколькими промежуточными тормозными дисками. Получены математические выражения для определения величин моментов, создаваемых различными парами трения дисковых тормозных механизмов с учетом потерь при разжиге дисков и дополнительного сервоэффекта. Предложены критерии выбора конструктивных параметров тормозных механизмов. Проведен вычислительный эксперимент, позволивший проверить корректность предложенной методики.

Ключевые слова: тормозной механизм, момент, сервоэффект, самоаклинивание, допустимое давление

1. ВВЕДЕНИЕ

Приоритетным направлением развития тормозных систем является использование многодисковых тормозных механизмов, работающих в масле, особенно для высокоэнергонасыщенных машин. При этом принятие фундаментального решения разработки тормозной системы с многодисковыми тормозными механизмами, работающими в масле, не исчерпывает всех вопросов. Существует два направления принципиальной реализации системы преобразования управляющего воздействия в сжимающее пакет дисков усилие: использование тормозных механизмов с самоусилением (с шариковым механизмом разжима дисков) и тормозных механизмов прямого действия (чаще всего с нажимным устройством в виде кольцевого поршня).

Несмотря на относительно широко распространенное применение тормозных механизмов с кольцевым поршнем, данная конструкция обладает рядом недостатков:

- данный тормозной механизм не может быть выполнен как законченная система, а лишь имеется возможность снабдить проектировщика отдельными компонентами, которые они могли бы интегрировать в их собственные конструкции;
- при всей простоте и функционально надежной структуре, эта система имеет неудобство, связанное с затрудненной ее адаптацией к различным концепциям тормозной системы транспортного средства (установка в колесных редукторах и т.д.);
- так как в тормозном механизме отсутствует эффект самоусиления, требуются относительно высокие уровни давления в системе и большие размеры силового поршня.

- данный тип тормозного механизма в случае гидравлического привода требует минимального зазора между поверхностями трения, чтобы свести объем исполнительной системы к минимуму. Это ведет к высоким потерям энергии при движении, особенно, когда масло холодное и имеет высокую вязкость,
- имеются проблемы реализации стояночного торможения, когда в качестве привода должен использоваться механический привод.

Тормозной механизм с шариковым механизмом разжима дисков (рис. 1) решает указанные проблемы. В этой системе тормоз и исполнительная система составляют два отдельных модуля, которые могут использоваться независимо. Установка исполнительной системы вне корпуса тормозного механизма дает важное преимущество в отношении гибкости и простоты реализации системы и ее обслуживания.

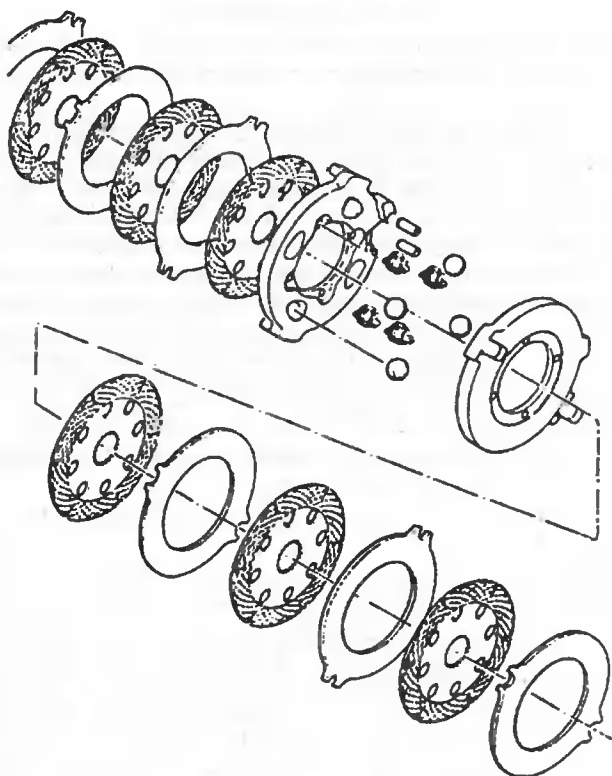


Рис. 1. Конструктивные элементы многодискового тормозного механизма

В отличие от тормозных механизмов с кольцевым поршнем данная конструкция позволяет большие зазоры для фрикционных пар, которые в свою очередь уменьшают потери на движение трактора.

Для повышения сервоэффекта и снижения мощности привода тормозного механизма, на разжимных дисках выполняются выступы, на которых установлено несколько промежуточных дисков. Это приводит к тому, что в создании сервоэффекта участвуют не только нажимные диски, но и пары трения, связанные с вышеуказанными промежуточными дисками.

Однако при проектировании указанных тормозных механизмов следует иметь в виду ряд существенных вопросов, игнорирование которыми приведет к снижению качества работы тормозной системы, а, соответственно и эффективности и безопасности торможения:

- необходима реализация привода разжимных дисков, имеющего постоянное передаточное отношение;
- исключение эффекта самозаклинивания фрикционных пар;
- обеспечение допустимого уровня давлений на поверхностях трения, определяемого прочностными характеристиками фрикционных материалов.

При этом необходимо разработать методику расчета тормозных механизмов с самоусилением, учитывающую их конструктивные особенности и обеспечивающую выбор конструктивных параметров с точки зрения требуемой эффективности и надежности.

2. МЕТОДИКА РАСЧЕТА МНОГОДИСКОВЫХ ТОРМОЗНЫХ МЕХАНИЗМОВ С САМОУСИЛЕНИЕМ

При расчете дискового тормозного механизма с самоусилением примем следующие допущения:

- коэффициенты трения элементов фрикционных пар одинаковы для всех пар трения;
- коэффициенты трения фрикционных дисков в шлицевом соединении с тормозным валом одинаковы для всех дисков;
- коэффициентом трения при качении шариков в лунках нажимных дисков пренебрегаем вследствие его малости по сравнению с коэффициентом трения при перемещении нажимных дисков по выступам корпуса.

У данного тормозного механизма имеет место разность осевых усилий на активном (перемещается в процессе торможения) и пассивном (прижимается к упору корпуса) нажимных дисках. Т.е.

$$Q_1 - Q_2 > 0$$

где:

Q_1 и Q_2 - осевые усилия, действующие на первые пары трения со стороны соответственно активного и пассивного нажимных дисков.

Будем рассматривать многодисковый тормозной механизм с числом пар трения со стороны активного разжимного диска n_a и со стороны пассивного диска n_p . При этом будем учитывать, что в конструкциях тормозных механизмов с шариковым механизмом разжима для повышения сервоэффекта используется соединение разжимного диска с несколькими промежуточными дисками. Тем в создании сервоэффекта участвует не одна, а несколько пар трения.

Осевое усилие на активном нажимном диске состоит из двух составляющих, одна из которых создается приводным усилием, а другая - силами трения, действующими на активный нажимной диск, и может быть определено следующим образом (рис. 2):

$$Q_1 = \frac{F_a \cdot r_a}{r_{in} \cdot \operatorname{tg} \Theta} + \frac{M_a^\Sigma}{r_{in} \cdot \operatorname{tg} \Theta}, \quad (1)$$

где:

F_a - усилие со стороны тяги привода активного нажимного диска;

r_a - плечо действия силы

r_a - относительно центра вращения дисков;

$r_{ш}$ - радиус расположения шариков разжимного устройства;

α - угол наклона лунок;

M_a^{Σ} - суммарный тормозной момент, создаваемый парами трения со стороны активного нажимного диска, взаимодействующими с промежуточными дисками, связанными с активным нажимным диском.

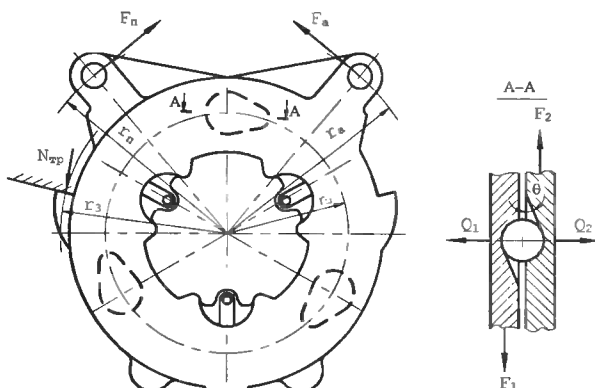


Рис. 2. Расчетная схема тормозного механизма

Тормозной момент, создаваемый 1-й парой трения со стороны активного нажимного диска:

$$M_a^{(1)} = Q_l \cdot \mu \cdot R_{TP},$$

где:

μ - коэффициент трения фрикционных пар,

R_{TP} - радиус трения.

Тормозной момент, создаваемый второй парой трения со стороны активного нажимного диска:

$$M_a^{(2)} = (Q_1 - F_{мп.}) \cdot \mu \cdot R_{мп.} = \left(Q_1 - \frac{M_a^{(1)} + M_a^{(2)}}{r_1} \cdot \mu_1 \right) \cdot \mu \cdot R_{мп.} = \frac{Q_1 \cdot \left(1 - \mu \cdot \mu_1 \cdot \frac{R_{мп.}}{r_1} \right) \cdot \mu \cdot R_{мп.}}{\left(1 + \mu \cdot \mu_1 \cdot \frac{R_{мп.}}{r_1} \right)},$$

где:

$F_{тр}$ - сила трения в шлицевом соединении фнкционного диска с вращающимся валом,

μ_1 и r_1 - коэффициент трения и радиус приложения силы трения в шлицевом соединении.

Для третье пары трения, используя аналогичный подход, имеем

$$M_a^{(3)} = Q_1 \cdot \frac{\left(1 - \mu \cdot \mu_1 \cdot \frac{R_{мп.}}{r_1}\right) \cdot \left(1 - \mu \cdot \mu_2 \cdot \frac{R_{мп.}}{r_2}\right)}{\left(1 + \mu \cdot \mu_2 \cdot \frac{R_{мп.}}{r_2}\right) \cdot \left(1 + \mu \cdot \mu_1 \cdot \frac{R_{мп.}}{r_1}\right)} \cdot \mu \cdot R_{мп.},$$

где:

μ_2 и r_2 - коэффициент трения и радиус приложения силы трения в направляющих промежуточных дисков.

Аналогичным образом получают выражения для определения усилий сжатия для всех пар трения.

Если в полученных выражениях ввести обозначения:

$$\begin{aligned} A &= 1 - \mu \cdot \mu_1 \cdot \frac{R_{мп.}}{r_1}; & B &= 1 - \mu \cdot \mu_2 \cdot \frac{R_{мп.}}{r_2}; \\ C &= 1 + \mu \cdot \mu_1 \cdot \frac{R_{мп.}}{r_1}; & D &= 1 + \mu \cdot \mu_2 \cdot \frac{R_{мп.}}{r_2} \end{aligned} \quad (2)$$

Анализируя полученные выше выражения для определения моментов, развиваемых парами трения, для произвольной четной пары трения можно записать:

$$M_a^{(n)} = Q_1 \cdot \frac{A^n \cdot B^{n-1}}{C^n \cdot D^{n-1}} \cdot \mu \cdot R_{мп.}, \quad \text{где } n=1,2,3,\dots \quad (3)$$

Для нечетных пар трения

$$M_a^{(m)} = Q_1 \cdot \frac{A^{m-1} \cdot B^{m-1}}{C^{m-1} \cdot D^{m-1}} \cdot \mu \cdot R_{мп.}, \quad \text{где } m=1,2,3,\dots \quad (4)$$

Суммарный момент, развиваемый парами трения, взаимодействующими с промежуточными дисками, связанными с активным нажимным диском:

$$M_a^\Sigma = \sum_{n=1}^{n_{\text{сч}}} M_a^{(n)} + \sum_{m=1}^{n_{\text{неч}}} M_a^{(m)} = Q_1 \cdot \mu \cdot R_{мп.} \cdot K_a, \quad (5)$$

Коэффициент K_a может быть назван коэффициентом самоусиления и определяется следующим образом

$$K_a = \left(\sum_{n=1}^{n_{\text{сч}}} \frac{A^n \cdot B^{n-1}}{C^n \cdot D^{n-1}} + \sum_{m=1}^{n_{\text{неч}}} \frac{A^{m-1} \cdot B^{m-1}}{C^{m-1} \cdot D^{m-1}} \right)$$

где:

$P_{\text{неч.}}, P_{\text{чет.}}$ - число нечетных и четных пар трения соответственно, взаимодействующими с промежуточными дисками, связанными с активным нажимным диском.

Сопоставляя (5) и (1) можно определить осевое усилие, действующее на активный разжимной диск.

$$Q_1 = \frac{F_a \cdot r_a}{r_{\text{ш}} \cdot \text{tg} \Theta - \mu \cdot R_{\text{мп}} \cdot K_a} \quad (6)$$

Для нахождения тормозного момента, создаваемого парами трения со стороны активного разжимного диска, следует воспользоваться выражениями (3) и (4). Так как обычно применяются фрикционные устройства с четным количеством пар трения, то выражение для суммарного тормозного момента можно записать в виде:

$$M_a = \sum_{n=1}^{z_a/2} M_a^{(n)} + \sum_{m=1}^{z_a/2} M_a^{(m)} = Q_1 \cdot \mu \cdot R_{\text{мп}} \cdot \frac{A+C}{C} \cdot \sum_{n=1}^{z_a/2} \left(\frac{A \cdot B}{C \cdot D} \right)^{n-1} \quad (7)$$

где:

z_a - число пар трения тормозного механизма со стороны активного нажимного диска.

Тормозной момент, создаваемый 1-й фрикционной парой со стороны пассивного нажимного диска:

$$M_n^{(1)} = (Q_1 - N_{\text{мп}} \cdot \mu_3) \cdot \mu \cdot R_{\text{мп}},$$

где:

$N_{\text{тр.}}$ - сила реакции опоры пассивного нажимного диска;

μ_3 - коэффициент трения между выступом пассивного нажимного диска и выступом корпуса.

Для определения $N_{\text{тр.}}$ составим уравнение равновесия пассивного нажимного диска:

$$F_n \cdot r_n + N_{\text{мп.}} \cdot r_3 - Q_1 \cdot \text{tg} \Theta \cdot r_{\text{ш}} - M_n^{\Sigma} = 0,$$

где:

F_n - усилие со стороны тяги привода пассивного нажимного диска;

r_n - плечо действия силы F_n относительно центра вращения дисков;

M_n^{Σ} - тормозной момент, создаваемый парами трения, взаимодействующими с промежуточными дисками, связанными с пассивным нажимным диском;

r_3 - радиус расположения упора пассивного нажимного диска.

Выражая значение $N_{\text{тр.}}$, имеем:

$$N_{\text{мп}} = \frac{Q_1 \cdot \text{tg} \Theta \cdot r_{\text{ш}} - F_n \cdot r_n + M_n^{\Sigma}}{r_3} \quad (8)$$

Если обозначить усилие, действующее на первую пару трения со стороны пассивного нажимного диска, через $Q_2 = (Q_1 - N_{mp} \cdot \mu_3)$, тогда проведя выкладки, аналогичные активному нажимному диску, имеем следующее.

Суммарный момент, развиваемый парами трения, взаимодействующими с промежуточными дисками, связанными с пассивным нажимным диском:

$$M_n^{\Sigma} = \sum_{n=1}^{n_{\text{ср}}} M_n^{(n)} + \sum_{m=1}^{n_{\text{ср}}} M_n^{(m)} = (Q_1 - N_{mp} \cdot \mu_3) \cdot \mu \cdot R_{mp} \cdot K_a, \quad (9)$$

Подставляя (9) в (8) и разрешая относительно N_{mp} , получаем

$$N_{mp} = \frac{Q_1 \cdot (tg\Theta \cdot r_u + \mu \cdot R_{mp} \cdot K_a) - F_n \cdot r_n}{r_3 + \mu_3 \cdot \mu \cdot R_{mp} \cdot K_a} \quad (10)$$

Суммарный тормозной момент, развиваемый парами трения со стороны пассивного нажимного диска, находим по выражению, аналогичному (7):

$$M_n = \sum_{n=1}^{z_n-2} M_n^{(n)} + \sum_{m=1}^{z_n-2} M_n^{(m)} = (Q_1 - N_{mp} \cdot \mu_3) \cdot \mu \cdot R_{mp} \cdot \frac{A+C}{C} \cdot \sum_{n=1}^{z_n/2} \left(\frac{A \cdot B}{C \cdot D} \right)^{n-1}$$

где:

z_n - число пар трения со стороны пассивного разжимного диска.

Тормозной момент, развиваемый тормозным механизмом:

$$M_m = M_n + M_a = (Q_1 - N_{mp} \cdot \mu_3) \cdot \mu \cdot R_{mp} \cdot \frac{A+C}{C} \cdot \sum_{n=1}^{z_n-2} \left(\frac{A \cdot B}{C \cdot D} \right)^{n-1} + \quad (11)$$

$$Q_1 \cdot \mu \cdot R_{mp} \cdot \frac{A+C}{C} \cdot \sum_{n=1}^{z_n-2} \left(\frac{A \cdot B}{C \cdot D} \right)^{n-1}$$

Таким образом, получено выражение (11), которое может быть использовано для определения тормозного момента многодискового тормозного механизма с шариковым разжимным механизмом. Данное выражение является универсальным для любого числа пар трения и позволяет учесть дополнительный сервоэффект за счет связи с разжимными дисками промежуточных дисков.

При выводе формул, чтобы не загромождать выкладки не учитывалось усилие стяжных пружин, установленных между разжимными дисками. При необходимости их можно легко учесть уменьшив величину Q_1 в формуле (11) на величину осевой составляющей суммарного усилия стяжных пружин, а величины F_a и F_n на приведенную к радиусам приложения разжимных сил тангенциальную составляющую суммарного усилия стяжных пружин.

3. РАСЧЕТ МНОГОДИСКОВЫХ ТОРМОЗНЫХ МЕХАНИЗМОВ

Анализ полученных выражений позволяет заключить следующее: для получения требуемой эффективности работы тормозного механизма возможно изменение радиуса расположения разжимных шариков, угла наклона лунок и числа пар трения, связанных с активным нажимным диском, увеличивающих эффект самоусиления.

Как следует из выражения (6) эти параметры являются взаимосвязанными и они выбираются исходя из двух условий:

- 1) отсутствие самозаклинивания тормозного механизма;
- 2) обеспечение допустимого уровня давления на поверхностях трения.

Максимальный уровень давления для фрикционных пар сталь по спеченным материалам при работе в масле составляет до 4,0 МПа [1].

Условие отсутствия самозаклинивания тормозного механизма может быть найдено из (6) и имеет вид

$$r_{ш} \cdot \operatorname{tg} \Theta - \mu \cdot R_{mp} \cdot K_a > 0 \quad (12)$$

В качестве примера был проведен поверочный расчет выходных характеристик тормозных механизмов, работающих в масле трактора "Беларус" мощностью 200 л.с. с гидравлическим приводом. Конструктивные параметры тормозного механизма приведены в таблице 1.

Таблица 1. Параметры тормозного механизма

Тип	многодисковый, работающий в масле	
Количество пар трения	12	
Диаметры фрикционных накладок, м		
наружный, D_n	0,222	
внутренний, D_b	0,173	
Коэффициенты трения		
фрикционных пар, μ	0,085	
шлицевого соединения фрикционных дисков, μ_1	0,1	
упоров промежуточных и разжимных дисков в корпусе, μ_2 и μ_3	0,1	
Радиусы расположения, м		
упоров промежуточных дисков, r_2	0,117	
упоров нажимных и промежуточных дисков, r_2	0,117	
разжимных шариков, $r_{ш}$	0,083	
приложения разжимного усилия на активном нажимном диске	0,136	
приложения разжимного усилия на пассивном нажимном диске	0,136	
шлицевого соединения фрикционных дисков	0,023	

На рис. 3 приведены кривые, соответствующие критическим значениям параметров тормозного механизма с точки зрения эффекта самозаклинивания.

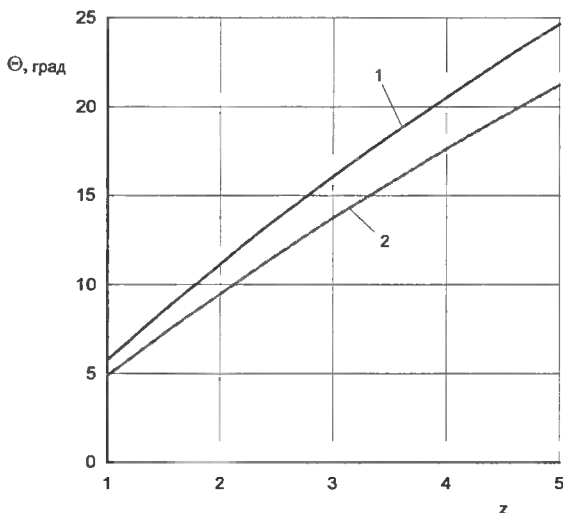


Рис. 3. Предельные значения угла наклона лунок при различном числе пар трения, увеличивающих сервоэффект: 1 – $r_{ш} = 83$ мм; 2 – $r_{ш} = 98$ мм

Как следует из данных графических зависимостей, при принятых конструктивных параметрах, допустимо использовать до пяти пар трения для увеличения сервоэффекта.

Для определения осевого усилия на разжимных дисках и, соответственно, давления на поверхностях трения необходимо задаться передаточным отношением от штока исполнительного цилиндра гидропривода до разжимных дисков, которое равно 3,07.

После проведения расчетов по вышеприведенной методике, получено, что условиям обеспечения требуемого уровня давлений на поверхностях трения соответствует только вариант с $z=1$ и $r_{ш}=0,098$ м. При этом давление составляет $q=2,876$ МПа, а тормозной момент создаваемый тормозным механизмом, $M_{т2}=2519$ Н·м. Полученные данные соответствуют результатам экспериментальных исследований эффективности тормозных механизмов данного типа [2].

4. ВЫВОДЫ

На основе анализа конструктивных особенностей многодисковых тормозных механизмов с разжимным механизмом шарикового типа предложена методика определения их выходных характеристик, позволяющая учесть дополнительный сервоэффект за счет использования связи активного разжимного диска с несколькими промежуточными тормозными дисками, а также потери на трение при замыкании фрикционных элементов.

Установлено, что при проектном расчете тормозных механизмов необходимо согласованный учет приводного усилия, угла наклона лунок и числа пар трения, участвующих в создании сервоэффекта, во избежание превышения допустимых уровней давления на поверхностях трения и самозаклинивания тормозного механизма.

ЛИТЕРАТУРА

- [1] И.М. Зельцерман, Д.М. Каминский, А.Д. Онопко, 1965. Фрикционные муфты и тормоза гусеничных машин. М.:Машиностроение.
- [2] А.С. Поварехо, 1993. Нагруженность тормозных механизмов полноприводного универсально-пропашного трактора кл. 1,4 и повышение их долговечности. Дис. ... канд. техн. наук. - Мн.: БПИ.

EXPERIMENTAL RESEARCH ON THE WORKINGS OF A MULTI-DISK BRAKE

Summary

On the basis of the analysis of constructional properties of multi-disk brakes, a methodology was proposed to determine the starting characteristics enabling to establish, among other things, additional servo-effect occurring between the brakes. Mathematical relations were derived to obtain momentum values between pairs of co-operating disks. Criteria for selecting constructional properties of the examined mechanism were shown. A calculation formula was presented that allows ensuring the correctness of the presented method

Keywords: brake mechanism, brake momentum, servo-effect, self-wedging

OCENA MOŻLIWOŚCI WYKORZYSTANIA PROCESÓW WIBROAKUSTYCZNYCH GENEROWANYCH PRZEZ ZESPOŁY OCZYSZCZARKI WIRNIKOWEJ DO OKREŚLENIA JEJ STANU TECHNICZNEGO

Ryszard Poznań

.Zespół Szkół Zawodowych nr 1 w Chojnicach

W artykule przeanalizowano drgania mechaniczne i fale akustyczne generowane przez oczyszczarkę wirnikową. Dokładne badanie procesów wibroakustycznych umożliwiło realizację systemowej eksploatacji dużej maszyny. Pomiary wykonano za pomocą nowoczesnej aparatury SVAN 912 E. Wnikliwa analiza wibroakustyczna zapewniła właściwy remont i zabezpieczenie przed awarią.

Słowa kluczowe: drgania mechaniczne, akustyczne, eksploatacja, wibroakustyczna

1. WSTĘP

Utrzymanie maszyn i urządzeń technologicznych w wielu zakładach produkcyjnych oparte jest na zasadzie kierowania tych maszyn lub ich zespołów do obsługi (przeglądu, naprawy itp.) w chwili gdy uległy awarii albo też takiemu uszkodzeniu, które powoduje wyraźne obniżenie ich sprawności i wydajności produkcji. Stosowany w dużych zakładach przemysłowych - w minionym okresie ustrojowym państwa, system utrzymania maszyn oparty na zasadzie planowo - zapobiegawczych usług był mało efektywny, a także posiadał szereg wad, do których zaliczyć można takie jak [6]:

- Okresy napraw, przeglądów były z góry określone bez względu na stan techniczny maszyn (zespołów).
- Zakres poszczególnych usług były normowane, nie miały ścisłego związku ze stanem technicznym maszyny.
- Momenty przeprowadzania usług oraz ich zakres ustalane były dla maszyny jako całości, a nie w odniesieniu do poszczególnych jej zespołów.

Względy organizacyjne systemu planowo - zapobiegawczych usług sprawiały łatwość i powszechność jego stosowania. Względy te sprawiały też, że do czynności obsługowych trafiały maszyny o zróżnicowanym stanie technicznym wynikało to z różnych warunków eksploatacyjnych.

Unowocześnianie systemu utrzymania maszyn wynika z rozwoju diagnostyki technicznej [7, 8]. W wyniku prowadzonych prac usprawniających ten system - przez wprowadzenie diagnostyki technicznej - diagnozowanie zapewnia uzyskanie oceny rzeczywistego stanu technicznego maszyn i urządzeń - zwiększa się efektywność systemu utrzymania maszyn. Podejmowanie właściwych decyzji eksploatacyjnych dzięki zastosowaniu diagnostyki zapewnia zmniejszenie kosztów związanych z utrzymaniem ma-

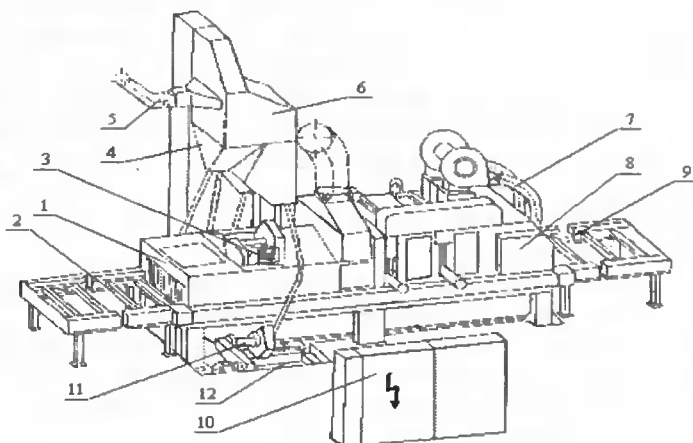
szyn i urządzeń. W literaturze naukowej dotyczącej eksploatacji maszyn, zalecane są obecnie dwie metody obsługiwanie obiektów technicznych.

Metoda quasi-dynamiczna, w której obowiązują wymiany profilaktyczne według ściśle określonej strategii (stałe terminy obsługiwanie i diagnozowanie). Metoda dynamiczna, która polega na obsługiwanie maszyn według stanu technicznego i zakłada odnowę obiektu technicznego w odniesieniu do zespołów czy elementów wskazanych w wyniku przeprowadzonej diagnozy.

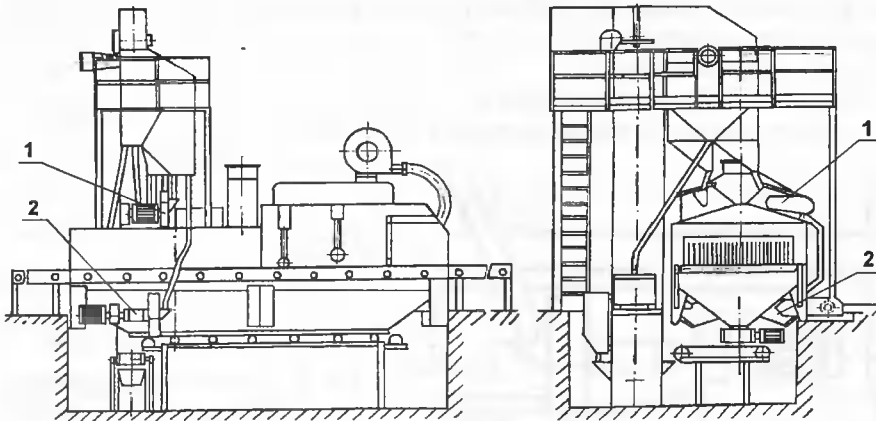
W niniejszym opracowaniu wskazano na możliwości zastosowania procesów wibroakustycznych do oceny stanu technicznego i przydatności eksploatacyjnej oczyszczarki wirnikowej.

2. METODYKA BADAŃ

Na podstawie analizy niezawodnościowej i ekonomicznej do badań wybrano zespoły wirników rzutowych, które wyróżniały się największą intensywnością uszkodzeń i dużymi kosztami napraw w obranym okresie eksploatacji oczyszczarki wirnikowej. Badania przeprowadzono na dwóch wirnikach znajdujących się po prawej stronie oczyszczarki - w komorze wejściowej (wirnik górny) oraz w rejonie podajnika śrutu (wirnik dolny). Pomiary drgań wirników rzutowych wykonywano w warunkach eksperymentu biernego na terenie Zakładu Budowy Maszyn ZREMB Chojnice S.A. w Chojnicach. Wybór tego rodzaju eksperymentu diagnostycznego podyktowany jest możliwościami jego realizacji. Eksperyment bierny polega bowiem na obserwacji parametrów sygnału diagnostycznego bez znajomości parametrów stanu z możliwością kontroli sterowania i zakłóceń. Zaletą tego eksperymentu jest nie zakłócanie normalnej pracy przy przyjętych warunkach - w ZBM ZERMB Chojnice S.A. - eksploatacji oczyszczarki wirnikowej do blach OWB - 2000 (rys. 1 i 2).



Rys. 1. Widok oczyszczarki OWB-2000 z prawej strony: 1 - komora robocza wejściowa, 2 - przenośnik rolnkowy przedni, 3 - wirnik rzutowy górny, 4 - zbiornik śrutu, 5 - przewody odciągowe, 6 - elewator, 7 - zespół zgarniacza śrutu oraz zabezpieczenia zgarniacza, 8 - komora wyjściowa, 9 - przenośnik rolnkowy tylny, 10 - szafy wyposażenia elektrycznego, 11 - wirnik rzutowy dolny, 12 - zespół przenośników do transportu śrutu

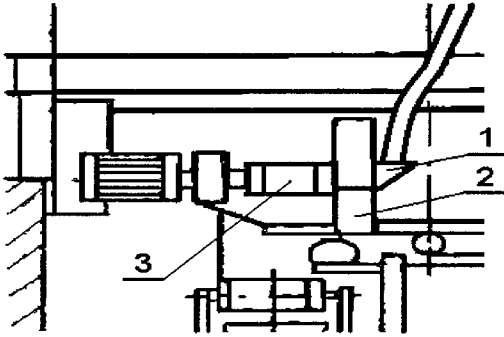


Rys. 2. Położenie badanych wirników rzutowych oczyszczarki OWB-2000: 1 - wirnik rzutowy górny, 2 - wirnik rzutowy dolny

Do realizacji pomiarów sygnałów wibroakustycznych (WA) - drgań i hałasu - przyjęto następujące warunki badań oczyszczarki:

- Pomiar drgań jednej strony maszyny (prawa) obejmowały:
 1. Wartości średnie, skuteczne i szczytowe dla przemieszczeń, prędkości i przyspieszeń drgań.
 2. Przemieszczenia, prędkości i przyspieszenia drgań w widmie tercjomym dokonano dwóch stanów obciążenia maszyny.
- Pomiar hałasu wykonano mikrofonem o czułości 50 mV/Pa w zakresie pomiarowym do 100 dB. Uzyskane wyniki pomiarów poziomu hałasu mieściły się w przedziale min. 69 dB max. 99 dB. Pomiarów tych dokonano dla 8 pasm częstotliwości w zakresie 63-8000 Hz uwzględniając dwa stany obciążenia maszyny w następujących strefach (rys. 1):
 1. Komora przednia (wejście do przestrzeni roboczej oczyszczarki dla przedmiotów obrabianych),
 2. Część środkowa oczyszczarki (prawa i lewa),
 3. komora tylna (wyjście z przestrzeni roboczej gotowych przedmiotów po obróbce oczyszczania);
- Zastosowano sprzęt pomiarowy - SVAN 912 E - z Laboratorium Zakładu Dynamiki i Wibroakustyki Katedry Mechaniki Stosowanej Wydziału Mechanicznego Akademii Techniczno-Rolniczej w Bydgoszczy, który umożliwia dokonywanie pomiarów WA, ich rejestrację, tworzenie katalogów danych, obróbkę wyników z ich wydrukiem oraz jest kompatybilny z typowym komputerem klasy PC [4];
- Obciążenie oczyszczarki:
 1. praca z obciążeniem (śrut podawany na łopatki obracających się wirników).
 2. praca bez obciążenia (włączone wirniki rzutowe, przy wyłączonym podajniku śrutu)
- Prędkość obrotowa silnika w stosunku do wału napędu wału wirnika rzutowego - 2960 obr/min [3];
- Przedział czasowy eksploatacji - pomiary dokonywano wybiórczo w okresie trzech miesięcy (dla stanów zdatności maszyny).

- Ilość punktów pomiarowych - dla każdego wirnika rzutowego (rys. 3) przyjęto trzy punkty odbioru sygnału:
 1. Korpus leja wlotu śrutu.
 2. Obudowę koła łopatkowego wirnika.
 3. Część środkową wału wirnika (pomiędzy łożyskami).



Rys. 3. Rozmieszczenie punktów pomiarowych na zespole wirnika rzutowego. 1 - lej wlotu śrutu, 2 - obudowa koła łopatkowego, 3 - wał wirnika

Sygnal drganiowy odbierano za pomocą czujnika specjalnej sondy mocowanej magnetycznie do korpusu zespołu wirnika rzutowego. Równoległe do pomiarów diagnostycznych zbierano dla wszystkich zespołów oczyszczarki oddzielne informacje o zdarzeniach eksploatacyjnych, a mianowicie:

- Data uszkodzenia,
- Nazwa zespołu lub elementu, które uległy uszkodzeniu,
- Zakres prowadzonych prac obsługowych,
- Czas przestojów,
- Ilość roboczogodzin,
- Koszt naprawy według cen na dany rok kalendarzowy (określany kwartalnie).

3. WYBRANE WYNIKI POMIARÓW

W poniższych tabelach zamieszczono tylko niektóre dane (wyniki pomiarów) dotyczące pracy oczyszczarki pod obciążeniem oraz bez obciążenia. Pomiarów te obejmują następujące wielkości:

- CRF - (Crest Factor) współczynnik szczytu zdefiniowany jako stosunek wartości szczytowej przebiegu do wyniku pomiaru,
- Peak - wartość szczytowa przebiegu w mierzonym przedziale czasowym (czas całkowania detektora wartości szczytowej wynosi ok. 2 ms.
- Max. - wartość maksymalna przebiegu na wyjściu detektora RMS w mierzonym przedziale czasowym (wartość skuteczna dla czasu integracji).
- Min. - skuteczna wartość minimalna przebiegu na wyjściu detektora RMS w mierzonym przedziale czasowym (wartość skuteczna dla czasu integracji),
- Wartości średnie - l, v, a - odpowiednio dla przemieszczeń, prędkości i przyspieszeń drgań.

Tabele 1, 2 i 3 przedstawiają powyższe wielkości dla pracy oczyszczarki, natomiast tabele 4, 5 i 6 przedstawiają powyższe wielkości dla pracy pod obciążeniem - srut podawany jest na obracające się wirniki rzutowe.

3.1. Praca oczyszczarki bez obciążenia

Tabela 1. Przesunięcia drgań - wirnik dolny

METER MODE						
FUNCTION: Dil		DISPLAY			INPUT Charge	
A. REPEAT: Off		SCALE			CHANNEL: Dil. 1	
AVERAG: Lin		Linear			RANGE: 31,6 m	
INT. TIME: >10s					FILTER: Lin	
ΔINTEGR: 1/8s					LP-FILT. On/Off	
Składowe drgań z. y. z	CRF	Peak mm	Max. mm	Min. mm	L mm	Badany obiekt Zespół badanego obiektu
X1	3.16	0.966	0.871	0.0385	0.305	obudowa
X2	2.82	0.442	0.398	0.0202	0.157	lej
X3	3.98	17.6	17.2	0.0194	4.420	wał
Y1	2.79	1.66	1.55	0.0285	0.596	obudowa
Y2	3.16	2.51	2.43	0.0700	0.794	lej
Y3	2.95	22.9	21.6	0.4220	0,776	wał
Z1	2.66	1.22	1.08	0,0452	0.457	obudowa
Z2	2.79	1.35	1.20	0,0525	0.484	lej
Z3	3.63	1.05	0.861	0.0462	0.288	wał

WIRNIK DOLNY

Tabela 2. Prędkości drgań - wirnik górny

METER MODE						
FUNCTION: Vel		DISPLAY: Vel			INPUT Charge	
A. REPEAT: Off		SCALE			RANGE:	
AVERAG: Lin		Linear			A. RANGE: Off	
INT. TIME: >10s		FILTER: HP				
ΔINTEGR: 1/8s						
Składowe drgań z. y. z	CRF	Peak mm/s	Max. mm/s	Min. mm/s	V mm/s	Badany obiekt Zespół badanego obiektu
X1	3.63	25.5	9.02	5.96	6.92	obudowa
X2	3.59	46.2	30.5	6.99	12.9	lej
X3	3.89	46.2	31.6	6.03	11.9	wał
Y1	3.59	92.3	70.8	12.4	25.7	obudowa
Y2	4.03	183.0	110.0	8.32	33.1	lej
Y3	4.27	33.5	13.8	5.96	7.85	wał
Z1	3.57	343.0	313.0	8.81	96.6	obudowa
Z2	2.45	29.2	12.6	11,2	11.9	lej
Z3	3.05	331.0	313.0	5.75	108.0	wał

WIRNIK GÓRNY

Tabela 3. Przyspieszenia drgań - wirnik górny

METER MODE						
FUNCTION: Val		DISPLAY: Val		INPUT: SV 06		CHANNEL: 4 Ch
SCALE		1,2,3,4 – accel				
A. REPEAT: Off		Linear RANGE: 31,6ms-2				
AVERAG: Lin		FILTER: H – A				
INT. TIME: >10s		LP-FILT. On/Off				
Δ INTEGR: 1/8s						
Składowe drgań z, y, z	CRF	Peak ms ⁻²	Max ms ⁻²	Min ms ⁻²	Λ ms ⁻²	Badany obiekt Zespół badanego obiektu
X1	4.27	96.6	25.1	19.5	22.6	obudowa
X2	4.37	84.1	24.3	14.5	19.3	lej
X3	4.32	124.0	31.3	26.3	28.8	wał
Y1	3.39	61.7	19.1	17.4	18.2	obudowa
Y2	4.03	32.4	9.12	6.92	8.04	lej
Y3	4.95	15.8	38.5	28.2	32.0	wał
Z1	4.84	245.0	57.5	45.2	50.7	obudowa
Z2	5.01	191.0	40.7	34.7	38.0	lej
Z3	5.07	50.0	164.0	132.0	148.0	wał

WIRNIK GÓRNY

3.2. Praca oczyszczarki pod obciążeniem

Tabela 4. Przemieszczenia drgań - wirnik górny

METER MODE						
FUNCTION: Val		DISPLAY		INPUT Charge		
		CHANNEL: Dil. 1				
		SCALE				
A. REPEAT: Off		Linear		RANGE: 31.6 m		
AVERAG: Lin		FILTER: Lin				
INT. TIME: >10s		LP-FILT. On/Off				
Δ INTEGR: 1/8s						
Składowe drgań z, y, z	CRF	Peak ms ⁻²	Max mm	Min mm	L mm	Badany obiekt Zespół badanego obiektu
X1	2.79	0.452	0.305	0.089	0.162	obudowa
X2	4.17	0.933	0.794	0.079	0.224	lej
X3	2.88	0.355	0.224	0.093	0.123	wał
Y1	2.79	8.41	7.94	0.266	3.020	obudowa
Y2	2.32	2.04	1.95	0.104	0.881	lej
Y3	2.26	21.9	21.4	0.495	9.660	wał
Z1	3.63	1.84	1.74	0.025	0.507	obudowa
Z2	2.32	19.2	12.6	0.245	5.690	lej
Z3	2.66	9.65	9.12	0.146	3.630	wał

WIRNIK GÓRNY

Tabela 5. Prędkości drgań - wirnik górny

METER MODE						
FUNCTION: Vel			DISPLAY: Vel		INPUT Charge	
SCALE						
A. REPEAT: Off Linear RANGE:						
AVERAG: Lin			FILTER: HP			
INT. TIME: >10s					A. RANGE: Off	
Δ INTEGR: 1/8s						
Składowe drgań z, y, z	CRF	Peak mm/s	Max. mm/s	Min. mm/s	V mm/s	Badany obiekt Zespół badanego obiektu
X1	7.82	40.3	22.6	21.4	22.1	obudowa
X2	2.48	53.9	23.7	20.9	21.6	lej
X3	1.88	39.8	21.6	20.1	21.1	wał
Y1	5.19	48.5	43.5	0.452	9.44	obudowa
Y2	3.63	47.9	29.9	2.61	13.2	lej
Y3	2.29	124.0	105.0	18.6	54.3	wał
Z1	3.47	11.1	6.53	1.07	3.20	obudowa
Z2	2.66	50.2	49.5	6.76	21.9	lej
Z3	3.85	43.7	29.5	0.412	11.4	wał

WIRNIK GÓRNY

Tabela 6. Przyspieszenia drgań - wirnik dolny

METER MODE						
FUNCTION: Val		DISPLAY: Val			INPUT: SV 06	
A. REPEAT: Off		SCALE			CHANNEL: 4 Ch	
AVERAG: Lin		Linear			1,2,3,4 - accel	
INT. TIME: >10s					RANGE: 31.6ms ⁻²	
Δ INTEGR: 1/8s					FILTER: H - A	
					LP-FILT. On/Off	
Składowe drgań z, y, z	CRF	Peak ms ⁻²	Max. ms ⁻²	Min. ms ⁻²	A ms ⁻²	Badany obiekt Zespół badanego obiektu
X1	8.9	10.4	1.4	0.8	1.1	obudowa
X2	16.0	19.6	1.1	0.6	0.8	lej
X3	9.5	7.9	1.3	0.4	0.8	wał
Y1	7.0	14.0	2.7	0.8	2.0	obudowa
Y2	8.6	15.0	2.2	1.2	1.7	lej
Y3	11.7	12.2	1.4	0.4	1.0	wał
Z1	10.0	32.7	3.6	2.4	3.0	obudowa
Z2	37.6	106.0	6.2	.9	2.8	lej
Z3	14.3	47.3	5.9	1.0	3.3	wał

WIRNIK GÓRNY

4. WNIOSKI KOŃCOWE

Na podstawie analizy konstrukcji oczyszczarki OWB-2000 oraz przeprowadzonych pomiarów z sygnałami wibroakustycznymi i zebranych informacji o zdarzeniach eksploatacyjnych wynika, że najbardziej zawodnym zespołem oczyszczarki OWB-2000 jest zespół wirnika rzutowego. Do dalszych badań diagnostycznych wykorzystano ten zespół, aby ocenić stan techniczny ocenianej oczyszczarki wirnikowej. Na podstawie przeprowadzonych analiz dokonano wyboru sposobu pomiarów oraz punktów pomiarowych zespołu wirnika [5] rzutowego. Wybrano pomiary w warunkach eksperymentu biernego przy niezakłóconym cyklu pracy produkcyjnej na terenie Zakładu Budowy Maszyn „ZREMB Chojnice” S.A. w Chojnicach. Punkty pomiarowe przedstawiono na rys. 3, a wybrane wyniki pomiarów zaprezentowano w metodyce badań. Przedstawione w niniejszym opracowaniu: metodyka i wyniki badań wskazują, że sygnał WA generowany przez zespół wirnika rzutowego, który posiada duże gabaryty i napędzany jest przez silnik elektryczny dużej mocy, może być wykorzystany do oceny przydatności eksploatacyjnej oraz oceny stanu technicznego oczyszczarki wirnikowej OWB-2000. Ocena taka jest możliwa dzięki zaproponowanej metodyce badań i przedstawionym wynikom pomiarów, zbieranym sukcesywnie informacjom o zdarzeniach eksploatacyjnych, a dodatkowo dzięki analizie wskaźników niezawodnościowo - ekonomicznych ocenianej maszyny. Uzyskane wyniki oraz wnioski potwierdzają spotykaną w literaturze przedmiotu [1, 2, 6, 9] tezę, że sygnał WA stanowi odzwierciedlenie procesów zużywania się obiektu technicznego.

5. LITERATURA

- [1] C. Cempel, 1982. Podstawy wibroakustycznej diagnostyki maszyn. WNT Warszawa.
- [2] C. Cempel, 1987. Wibroakustyka stosowana. PWN, Warszawa - Poznań.
- [3] DOZAMET S.A. w Nowej Soli. DTR Oczyszczarka wirnikowa OWB-2000, nr fabr. 21400 - 003, rok prod. 1985.
- [4] Instrukcja firmy SVANTEK. Rozdział 4. Funkcje pomiarowe przyrządu SVAN 912E.
- [5] R. Michalski, S. Niziński, 1997. Podstawy eksploatacji obiektów technicznych. Wyd. Uczeln. ART, Olsztyn.
- [6] F. Tomaszewski, 1998. Zagadnienia wyznaczania stanu technicznego złożonego obiektu mechanicznego za pomocą sygnału wibroakustycznego. Rozprawy P.P. Poznań.
- [7] K. Wernerowski, 1980. Mechanika techniczna. Cz. II Kinematyka Dynamika i Drgania. Wyd. Uczeln. ATR, Bydgoszcz.
- [8] B. Żółtowski, 1996. Podstawy diagnostyki maszyn. Wyd. Uczeln. ATR, Bydgoszcz.
- [9] B. Żółtowski, Z. Ćwik. 1996. Leksykon diagnostyki technicznej. Wyd. Uczeln. ATR, Bydgoszcz.

EVALUATION OF THE SUITABILITY OF VIBRO-ACOUSTIC PROCESSES GENERATED BY UNITS OF AIRLESS SHOT-BLASTING MACHINE FOR DETERMINING ITS TECHNICAL CONDITION

Summary

The paper analyzed mechanical vibrations and acoustic waves generated by an airless shot-blasting machine. Careful examination of the vibroacoustic processes enabled systemic working of the large machine. The measurements were taken using the modern equipment SVAN 912. In-depth vibroacoustic analysis ensured a proper overhaul and prevented malfunction.

Key words: mechanical vibrations, acoustic, vibroacoustic

WARUNKI POCZĄTKOWE DRGAŃ OKRESOWYCH NIELINIOWYCH UKŁADÓW DYNAMICZNYCH

Mirosław Radwański

Podchorążych 10/19. 87-100 Toruń

W artykule stwierdza się, że dla każdego układu dynamicznego tłumionego, wymuszanego okresowo istnieją warunki początkowe drgań okresowych tego układu. Można je wyznaczyć drogą obliczeń cyfrowych. Przedstawiono przykład działania takiego układu.

Słowa kluczowe: drgania, okres, warunki początkowe, układ dynamiczny

1. WPROWADZENIE

Układy dynamiczne tłumione i wymuszone okresowo drgają okresowo. Okresowość jest tu rozumiana w sensie matematycznym – musi być spełniony warunek $f(x)=f(x+T)$ – gdzie T jest okresem, x – współrzędna opisująca ruch dowolnego elementu danego układu dynamicznego. Stwierdzenie powyższe jest prawdziwe w stanie ustalonym pracy układu dynamicznego. Nie można tego powiedzieć o stanie nieustalonym, np. w czasie rozruchu układu.

Mogą zaistnieć przypadki (potrzeba), kiedy będzie nam zależało na tym, żeby układ dynamiczny drgał okresowo od momentu rozruchu. Przejście ze stanu nieustalonego w stan ustalony – w szczególności dla układów nieliniowych – może być „niebezpieczne” gdyż sposób lub jakość tego przejścia może być warunkiem poprawnej pracy danego układu dynamicznego.

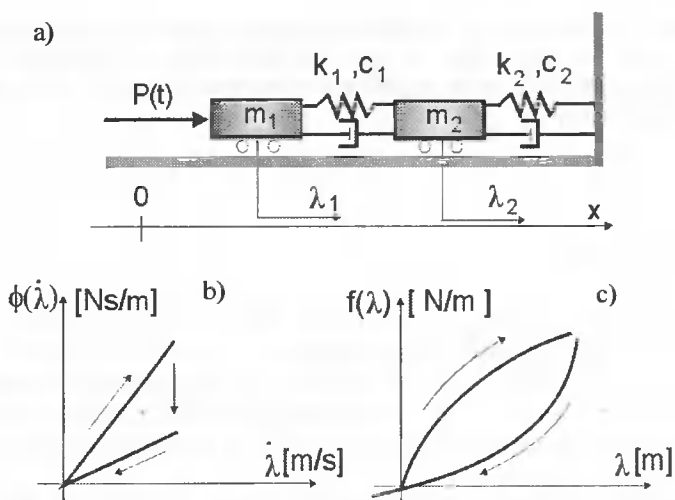
Jednym ze sposobów pokonania powyższego problemu jest wymuszenie drgań okresowych w czasie rozruchu poprzez odpowiedni dobór warunków początkowych. W opracowaniach teoretycznych Duffinga, znajdujemy rozwiązania analityczne dla układów liniowych o jednym stopniu swobody. W przypadku układów nieliniowych o wielu stopniach swobody rozwiązanie analityczne jest raczej niemożliwe, natomiast udaje się to osiągnąć metodami cyfrowymi.

2. OPIS PROBLEMU

Zakładamy, że mamy dany hipotetyczny układ dynamiczny, którego model przedstawiono na rysunku 1a. Jest to układ o dwóch stopniach swobody, w którym mamy dwie masy poruszające się wzdłuż osi x a ich ruch ograniczany jest elementami sprężystymi k_1, k_2 z tłumieniem – odpowiednio c_1 i c_2 . Zakładamy, że w chwili kiedy element m_1 znajdzie się w położeniu wyjściowym tzn. $x_1=0$, na element ten rozpoczyna działać przez pewien czas określona siła $P(t)$ (rys. 1a). Charakterystyki sprężystości i tłumienia

zmieniają się w zależności od kierunku ruchu elementów m_1 i m_2 (pokazano to strzałkami wzdłuż charakterystyk).

Należy teraz dobrać warunki początkowe tzn. położenie wyjściowe, elementów ruchomych i ich prędkości w sposób zapewniający ruch okresowy. Idea takiej realizacji jest następująca: jeżeli ruch danego elementu rozpoczyna się z pewnymi warunkami początkowymi $W_p(x_0, v_0)$ to po wykonaniu jednego cyklu parametry tego elementu można określić jako $W_k(x_1, v_1)$. Chcemy dobrać parametry x_0 i v_0 tak, żeby po wykonaniu cyklu było $x_1 = x_0$ oraz $v_1 = v_0$, wtedy oczywiście $W_k = W_p$. W takim przypadku kolejny cykl rozpocząłby się i był realizowany w identycznych warunkach jak cykl poprzedni. W efekcie realizowany będzie ruch okresowy danego elementu układu dynamicznego.



Rys. 1. Model hipotetycznego układu dynamicznego (a) oraz postaci charakterystyk elementów tłumiących (b) i sprężystych (c).

Pozostaje zadanie wyznaczenia wartości parametrów, stanowiących opisane warunki początkowe. Można to wykonać metodą kolejnych przybliżeń przy pomocy maszyny cyfrowej i przynajmniej na dwa sposoby. Jeden sposób to - rozpocząć obliczenia przyjmując dla cyklu pierwszego zerowe warunki początkowe. W kolejnym cyklu, za warunki początkowe przyjmując uzyskane warunki końcowe z cyklu poprzedniego i kontynuować obliczenia do momentu kiedy warunki końcowe cyklu będą takie jak na początku. Inaczej mówiąc - obliczenia rozpoczynamy przyjmując zerowe warunki początkowe kontynuując obliczenia do czasu, kiedy wejdziemy w stan ustalony pracy układu. Drugi sposób jest podobny - jeżeli posiadamy pewne doświadczenie, które pozwoli na przybliżone określenie wartości warunków początkowych, można je przyjmując na początku obliczeń oszczędzając czas.

3. ROZWIĄZANIE

Układ dynamiczny (rys. 1) można przedstawić w postaci następującego modelu matematycznego:

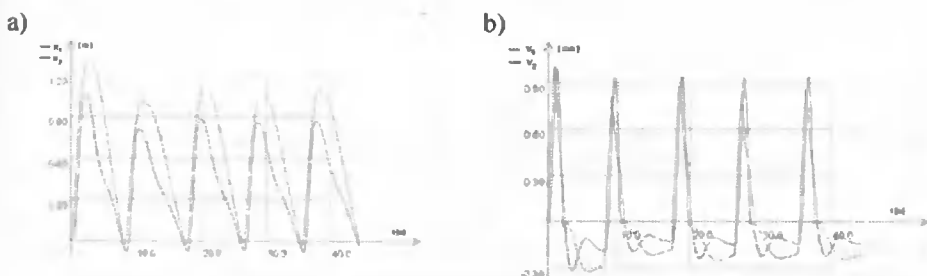
$$\begin{cases} m_1 \ddot{x}_1 + f(\lambda_1) + \phi(\dot{\lambda}_1) = P(t) \\ m_2 \ddot{x}_2 + f(\lambda_2) + \phi(\dot{\lambda}_2) = 0 \end{cases}$$

gdzie:

λ_1, λ_2 - ugięcie odpowiednich elementów sprężystych i tłumiących.

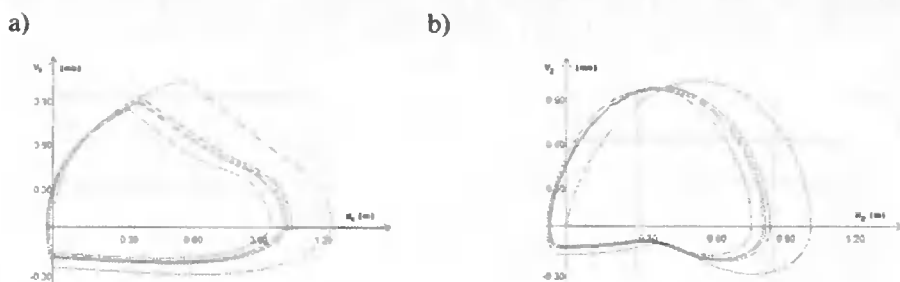
Do rozwiązania układu równań przyjęto następujące dane: - postać charakterystyk tłumiących i sprężystych jak na rys. 1 b,c - $m_1=2$ kg, $m_2=1$ kg, - siła $P(t) = 3$ N i działa w ciągu jednej sekundy od chwili, kiedy element m_1 znajduje się w położeniu wyjściowym ($x_1=0$).

Na kolejnych rysunkach przedstawiono rozwiązania.



Rys.2. Parametry ruchu elementów w czasie pierwszych pięciu cykli. Przyjęto zerowe warunki początkowe pierwszego cyklu, a) przemieszczenia, b) prędkości

Widać wyraźnie różnice przemieszczeń i prędkości w kolejnych cyklach (rys. 2) – różnica między wartościami maksymalnymi przemieszczeń w pierwszych dwóch cyklach wynosi ok. 30%. Pewne podobieństwo zauważa się w ostatnich cyklach.. Podobieństwo lub jego brak widoczne jest wyraźnie na płaszczyźnie fazowej (rys. 3).



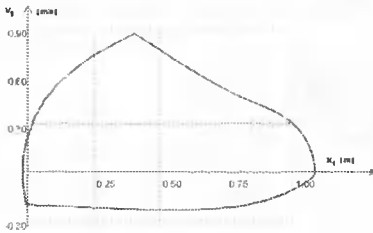
Rys. 3. Prędkości elementów w funkcji przemieszczeń w czasie pierwszych pięciu cykli. Przyjęto zerowe warunki początkowe pierwszego cyklu, a) element m_1 , b) element m_2

Jeżeli na płaszczyźnie fazowej uzyskamy obraz kilku cykli w postaci pojedynczej linii to można przyjąć, że spełniono zależności $f(x) = f(x + T)$ i $f(\dot{x}) = f(\dot{x} + T)$ dla każdego poruszającego się elementu. Świadczy to o tym, że mamy do czynienia z ruchem okresowym.

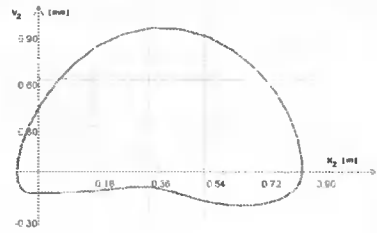
Po wykonaniu ok. piętnastu cykli na przedstawionym modelu układu dynamicznego uzyskujemy trajektorie fazowe kolejnych pięciu cykli - jak na rys. 4. Można przyjąć, że jest to obraz poszukiwanego rozwiązania.

Dalsze obliczenia pokazują nieznaczne odchylenia od przedstawionego rozwiązania. Odpowiednie wartości zmieniają się na czwartym - piątym miejscu po przecinku. Zdarza się, że kontynuując obliczenia uzyskamy ponownie wartości znalezionej rozwiązania. Należy mieć na uwadze fakt, że rozwiązania cyfrowe obarczone są pewnym błędem spowodowanym przyjętym krokiem całkowania. Pociąga to za sobą określone konsekwencje, z których trzeba sobie zdawać sprawę. Stąd też niewielkie rozbieżności między wartościami w kolejnych iteracjach uzyskanego rozwiązania.

a)



b)



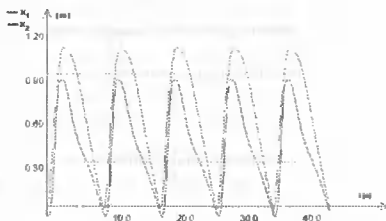
Rys. 4. Prędkości elementów w funkcji przemieszczeń pięciu kolejnych cykli z odpowiednio dobranymi warunkami początkowymi pierwszego cyklu. a) element m_1 , b) element m_2

Obliczone wartości warunków początkowych to:

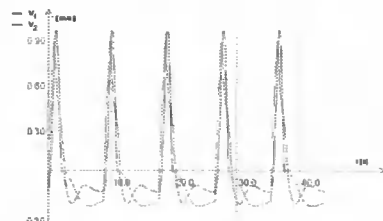
$$x_1 = -0,004065 \text{ m}, \quad \dot{x}_1 = -0,206825 \text{ m/s}, \quad x_2 = -0,028899 \text{ m}, \quad \dot{x}_2 = -0,141631 \text{ m/s}.$$

Interpretacja jest następująca: w celu uzyskania drgań okresowych od momentu uruchomienia prezentowanego układu dynamicznego - przed uruchomieniem należy nieznacznie przemieścić masy w kierunku przeciwnym do zwrotu osi x (rys. 1a) i nadać im obliczone prędkości. Na rysunku 5 przedstawiono rozwiązanie w funkcji czasu.

a)



b)



Rys 5. Parametry ruchu elementów w czasie pierwszych pięciu cykli. Przyjęto obliczone warunki początkowe pierwszego cyklu. a) przemieszczenia, b) prędkości

Rozważmy jeszcze jeden przykład w którym na ten sam układ dynamiczny działa wymuszenie sinusoidalne o amplitudzie $P_{\max} = 3 \text{ N}$ i częstotliwości $\omega = 2\pi/3$. W przykładzie tym bardzo ładnie widać jak układ dynamiczny przechodzi ze stanu nieustalonego w stan ustalony. Na kolejnych rysunkach (rys. 6,7,8), przedstawiono wybrane cykle

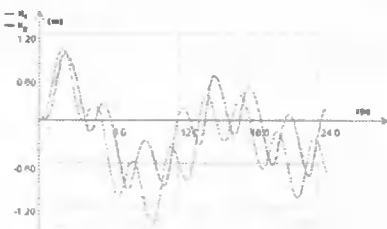
rozwiązania od chwili uruchomienia układu, do czasu kiedy układ drga okresowo. Jeden cykl trwa tutaj 3 sek.

Obliczone wartości warunków początkowych w tym przykładzie to:

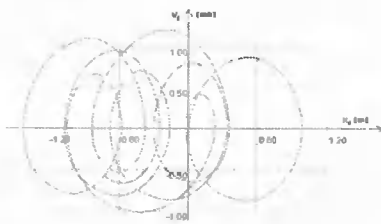
$$x_1 = -0,5351231 \text{ m}, \quad \dot{x}_1 = -0,6600348 \text{ m/s}, \quad x_2 = 0,281121 \text{ m}, \quad \dot{x}_2 = -0,251385 \text{ m/s}.$$

Siła wymuszająca w chwili $t=0$ jest równa zero $P(t)=0$.

a)

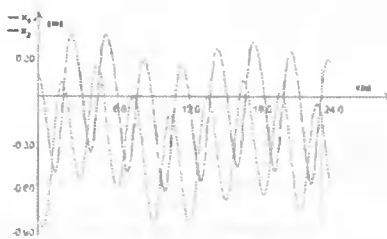


b)

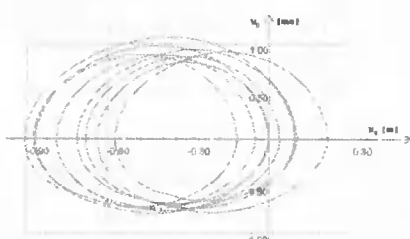


Rys. 6. Obraz ruchu elementów układu wymuszanego sinusoidalnie w czasie pierwszych ośmiu cykli: a) przemieszczenia, b) prędkość w funkcji przemieszczenia elementu m_1

a)

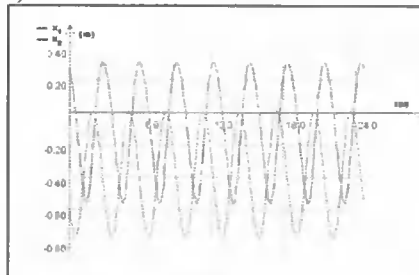


b)

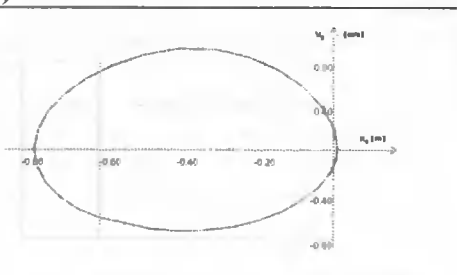


Rys. 7. Obraz ruchu elementów układu wymuszanego sinusoidalnie w czasie od szesnastego cyklu: a) przemieszczenia, b) prędkość w funkcji przemieszczenia elementu m_1

a)



b)



Rys. 8. Obraz ruchu elementów układu wymuszanego sinusoidalnie po wykonaniu kilkudziesięciu cykli od momentu uruchomienia układu: a) przemieszczenia, b) prędkość w funkcji przemieszczenia elementu m_1

4. PODSUMOWANIE

Wiadomym jest, że drgania układów nieliniowych, tłumionych, wymuszanych okresowo są okresowe. Stwierdzenie powyższe dotyczy stanu ustalonego pracy układu. W przypadku, gdyby zależało nam na drganiach okresowych od chwili uruchomienia układu, należałoby układ ten uruchomić z pewnymi warunkami początkowymi. Warunki początkowe, zapewniające drgania okresowe od chwili uruchomienia układu można wyznaczyć analitycznie, dla bardzo prostego układu liniowego. Dla układów nieliniowych o wielu stopniach swobody, trudno sobie wyobrazić rozwiązanie analityczne. W referacie przedstawiono układ silnie nieliniowy, dla którego obliczono warunki początkowe drgań okresowych. Jest to możliwe przy wykorzystaniu metod cyfrowych.

LITERATURA

- [1] B. Baron, 1999. Metody numeryczne w Delphi 4. Helion.
- [2] Ju. I. Niejmark, 1972. Metod toczecznych otobrazienij w teoriji nieliniejnych kolebanij. Moskwa.
- [3] M. Radwański, 2000. Analiza jednoczesnego trafienia celu wieloma pociskami wystrzelonymi z jednego działa z uwzględnieniem jego dynamiki. Rozprawa doktorska, WAT Warszawa.
- [4] J. Osiecki, W.M. Radwański, 1998. Dynamika broni automatycznej a czas między kolejnymi wystrzałami w serii. Materiały II międzynarodowej konferencji uzbrojenia Waplewo.

INITIAL CONDITIONS FOR PERIODIC VIBRATIONS OF DYNAMIC SYSTEMS

Summary

The article demonstrates that for each dynamic system, damped and periodically forced, there exist initial conditions for periodic vibrations of the system. They can be determined by numerical calculations. An example of how such a system works was shown.

Keywords: vibrations, period, initial conditions, dynamic system

WERYFIKACJA EKSPERYMENTALNA MODELU ZMĘCZENIA DLA OBCIĄŻEŃ NIEPROPORCJONALNYCH

Dariusz Skibicki

Katedra Sterowania i Konstrukcji, Wydział Mechaniczny
al. Kaliskiego 7, 85-796 Bydgoszcz

W artykule przedstawiono metodykę i wyniki badań eksperymentalnych, których celem była weryfikacja proponowanego modelu zmęczenia dla obciążeń nieproporcjonalnych. Istotą eksperymentu była symulacja warunków panujących podczas obciążeń nieproporcjonalnych poprzez programowane zmiany położenia osi głównych tensora naprężeń. W efekcie przeprowadzonych prób zmęczeniowych obserwowano zjawiska podobne do tych jakie zachodzą w warunkach obciążeń nieproporcjonalnych. Otrzymane rezultaty potwierdziły słuszność przyjętego modelu zmęczenia nieproporcjonalnego.

Słowa kluczowe: zmęczenie wieloosiowe, obciążenie nieproporcjonalne

1. CEL BADAŃ

Problematyka zmęczenia materiałów i konstrukcji jest niezwykle ważnym zagadnieniem projektowania maszyn i budowli. Szacuje się, że zmęczenie materiałów jest przyczyną od 60 do 80% wszystkich uszkodzeń pojazdów mechanicznych [1]. Jak przewiduje Miller [2], dążenie do zwiększania wydajności projektowanych artefaktów i jednoczesnej redukcji kosztów produkcji, a więc: nieustanne zmniejszanie wagi elementów konstrukcyjnych, dopuszczanie coraz wyższych naprężeń, wyższych temperatur i działania bardziej agresywnego środowiska przy jednoczesnych coraz szybszych metodach produkcji spowoduje rosnącą liczbę katastrof wywołanych zmęczeniem.

Dostrzegając wagę zmęczenia, podjęto do tej pory szereg prób opracowania metod obliczeniowych, obejmujących cały zakres trwałości zmęczeniowej: niskocyklowej i wysokocyklowej. Starano się opisać czynniki dotyczące wpływu cech konstrukcyjnych, charakteru obciążeń i środowiska na zachowania zmęczeniowe. Na ich podstawie określono zależności opisujące konstrukcyjne współczynniki bezpieczeństwa. Opracowano wiele metod pozwalających rozpatrywać nie tylko obciążenia o przebiegu sinusoidalnym, ale również o przebiegu stochastycznym.

W przeważającej części opracowane do tej pory metody obliczeń dotyczą zmęczenia w jednoosiowym stanie naprężenia lub też odkształcenia. Rzeczywiste elementy maszyn są jednak poddane z reguły płaskiemu albo przestrzennemu stanowi naprężenia i odkształcenia. Stan taki może być wynikiem cech geometrycznych elementu konstrukcyjnego, np. działania karbu, lub może być wynikiem wieloosiowego obciążenia, np. jednoczesnego zginania i skręcania. Poddane takim warunkom elementy konstrukcyjne podlegają procesowi zmęczenia wieloosiowego.

Jednym z niezwykle ważnych zagadnień zmęczenia wieloosiowego jest zmęczenie wywołane działaniem obciążenia nieproporcjonalnego. Owa nieproporcjonalność obciążenia odnosi się do zmian stosunku obciążeń w czasie. Jeśli stosunek ten zachowuje wartość stałą - obciążenie jest proporcjonalne, jeśli jest zmienny - obciążenie jest nieproporcjonalne. Za najbardziej istotną cechę obciążenia nieproporcjonalnego należy uznać zmianę położenia (obrót) osi głównych naprężeń bądź odkształceń. Gdy wektor największego naprężenia stycznego obejmuje wiele systemów poślizgu, mamy do czynienia ze zjawiskami zmęczeniowymi odmiennymi niż te, jakie obserwowane są w warunkach obciążeń proporcjonalnych. Dochodzi m.in. do charakterystycznej zmiany obrazu struktur dyslokacyjnych. Nieproporcjonalne struktury dyslokacyjne w stosunku do proporcjonalnych struktur dyslokacyjnych, mają się tak, jak w warunkach obciążeń proporcjonalnych, struktury odpowiadające większej liczbie cykli do struktur odpowiadających mniejszej liczbie cykli. Jedynym wyjątkiem jest fakt pozostawania dyslokacji we wnętrzu komórek i tym samym bardziej jednorodny rozkład dyslokacji. Struktury dyslokacyjne uzyskane w warunkach nieproporcjonalnego obciążenia świadczą o większej wartości skumulowanego zniszczenia zmęczeniowego. Charakterystyczne zmiany na poziomie struktur dyslokacyjnych mają swoje odbicie we własnościach zmęczeniowych. Obciążenie nieproporcjonalne prowadzi do dodatkowego umocnienia materiału, zmniejszenia się wartości plastycznego odkształcenia nasycenia, zmniejszenia trwałości zmęczeniowej czy spadku granicy zmęczenia.

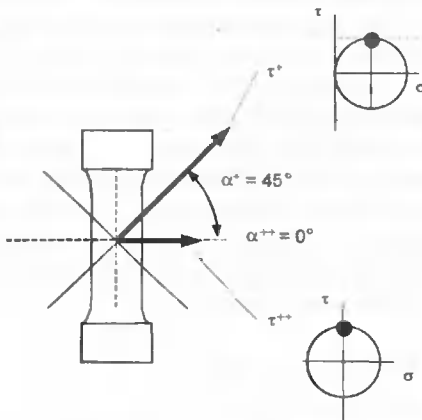
Do opisu zmęczenia proporcjonalnego z powodzeniem stosuje się model zmęczenia oparty na idei płaszczyzny krytycznej. Zakłada on, że o zmęczeniu decydują tylko te składowe naprężenia czy odkształcenia, które leżą na pewnej płaszczyźnie zwanej krytycznej. Zastosowanie tego opisu wymaga po pierwsze wskazania płaszczyzny krytycznej (najczęściej wyznacza ją kierunek działania wektora maksymalnego naprężenia stycznego) oraz po drugie, sformułowania równania wiążącego wybrane wielkości w celu obliczenia wielkości kryterialnej.

Dla zakresu nieproporcjonalnego zmęczenia brak jest do tej pory modelu tak dobrze zweryfikowanego i o tak jasnej interpretacji fizycznej. W pracy autora [3] zaproponowano więc następujący model: w warunkach obciążeń nieproporcjonalnych, podobnie jak w przypadku obciążeń proporcjonalnych, istnieje płaszczyzna krytyczna, z którą związane naprężenia normalne i styczne powodują kumulację uszkodzeń zmęczeniowych prowadzących do zniszczenia. Obrót osi naprężeń głównych sprawia, że na powyższy proces kumulacji uszkodzeń wpływają naprężenia nie związane bezpośrednio z płaszczyzną krytyczną. Ich wpływ przejawia się poprzez szereg dodatkowych zjawisk obserwowanych np. na poziomie dyslokacji.

Chcąc zweryfikować poprawność powyższego modelu na drodze eksperymentalnej zaproponowano przeprowadzenie prób zmęczeniowych w warunkach symulacji obciążenia nieproporcjonalnego poprzez programowane zmiany położenia kierunków osi głównych naprężeń. Przyjęto, że wyniki weryfikacji świadczyć będą o prawdziwości modelu, jeśli w efekcie przeprowadzonego eksperymentu, będą zachodziły zjawiska identyczne, jak w warunkach rzeczywistego zmęczenia nieproporcjonalnego. Ze względu na trwałościowy charakter prób do zjawisk tych zaliczono obniżenie trwałości zmęczeniowej i zmniejszenie się wartości plastycznego odkształcenia nasycenia.

2. METODYKA BADAŃ

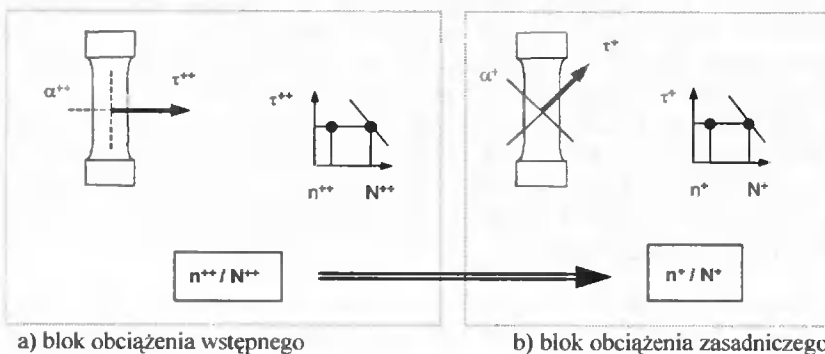
Zaproponowano aby działanie naprężeń związanych z płaszczyzną krytyczną symulowane było działaniem naprężenia stycznego τ^+ , działającego na płaszczyźnie α^+ , zaś aby wpływ obrotu tensora naprężeń, czyli działanie naprężeń na innych płaszczyznach został odwzorowany za pomocą naprężenia stycznego τ^{++} związanego z płaszczyzną α^{++} . Płaszczyzny α^+ i α^{++} obrócone są względem siebie o kat maksymalny, ze względu na symetrię tensora, równy 45° . W eksperymencie niezbędną, kontrolowaną zmianę płaszczyzny obciążenia z α^+ na α^{++} uzyskano stosując dla każdego z naprężeń: τ^+ i τ^{++} , odmienne typy obciążenia, charakteryzujące się różnym położeniem płaszczyzny maksymalnego naprężenia stycznego (rys. 1). W tym przypadku zastosowano rozciąganie ze ściskaniem i skręcanie.



Rys. 1. Wybrane kierunki działania naprężeń

W programie próby zmęczeniowej zaproponowano istnienie dwóch bloków obciążenia:

- wstępnego, złożonego z cykli zmęczeniowych naprężeń stycznych τ^{++} , związanych z płaszczyzną α^{++} (rys. 2.a),
- zasadniczego, złożonego z cykli zmęczeniowych naprężeń stycznych τ^+ , związanych z płaszczyzną maksymalnych stycznych α^+ (rys. 2.b).



Rys. 2. Ilustracja programu badań

W trakcie realizacji bloku obciążenia wstępnego, sterując wartością naprężenia τ^{++} oraz liczbą cykli n^{++} na płaszczyźnie α^{++} , kumulowano uszkodzenie zmęczeniowe o wartości n^{++}/N^{++} (rys. 2.a). W ten sposób odwzorowywano nieproporcjonalność obciążenia. W trakcie realizacji bloku obciążenia zasadniczego, sterując wartością naprężenia τ^+ na płaszczyźnie α^+ , otrzymywano liczbę cykli n^+ , czyli wartość skumulowanego na płaszczyźnie krytycznej uszkodzenia zmęczeniowego n^+/N^+ (rys. 2.b), wystarczającą do zniszczenia próbki.

Jeśli weryfikowany model zmęczenia nieproporcjonalnego miałby okazać się prawdziwy należało spodziewać się, że wraz z powiększaniem się wartości n^{++}/N^{++} symulującej nieproporcjonalność obciążenia, wartość n^+/N^+ będzie maleć.

Program próby zmęczeniowej zrealizowano w dwóch wariantach. Pierwszy skręcanie i rozciąganie-ściskanie i drugi rozciąganie-ściskanie i skręcanie.

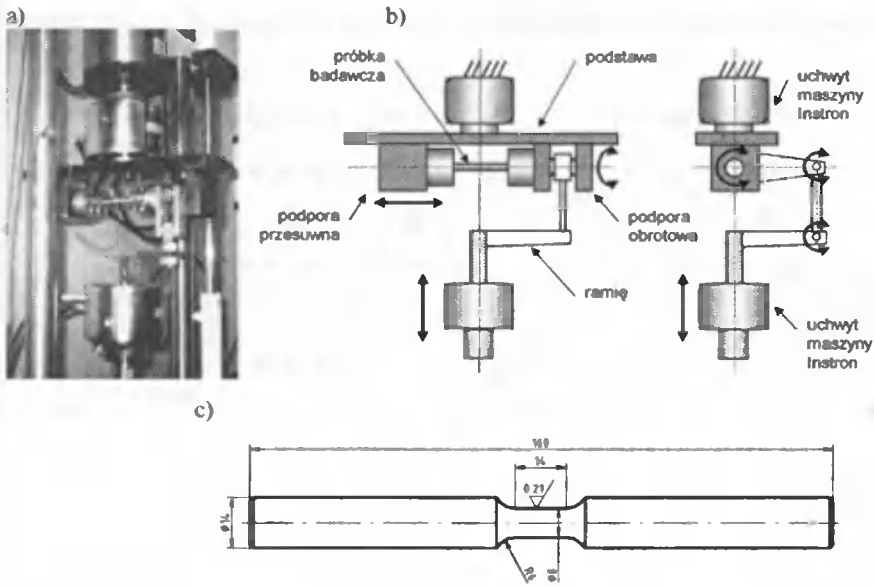
Przedstawiona metodyka badawcza nasuwa skojarzenia do programowanych badań zmęczeniowych. Istotą tych badań jest również modelowanie rzeczywistych obciążeń zmęczeniowych, polegające na zastąpieniu ich, drogą schematyzacji, z góry opracowanym, blokowym programem obciążenia. Różnica pomiędzy obiema metodykami dotyczy głównie charakteru modelowanego obciążenia: w badaniach programowanych chodzi o modelowanie obciążeń losowych, zaś w niniejszym eksperymencie zachodzi potrzeba modelowania obciążeń nieproporcjonalnych. Jest to jednak tylko różnica formalna. Z merytorycznego punktu widzenia, w obu przypadkach mamy do czynienia z zamiarem stworzenia takiego programu obciążeń, który charakteryzowałby się identycznym efektem kumulacji uszkodzeń zmęczeniowych.

3. STANOWISKO BADAWCZE I PRÓBKA BADAWCZA

Badania przeprowadzono na maszynie Instron realizującej cykle rozciągania-ściskania. W celu realizacji skręcania zaprojektowano i wykonano odpowiedni przyrząd montowany w uchwytych tej maszyny (rys. 3.a i 3.b). Oprócz standardowych pomiarów siły i przemieszczenia, realizowanych przez układ pomiarowy Instrona, zastosowanie technik tensometrycznych pozwoliło na pomiary odkształceń na badanych próbkach. Analizie poddane były również zdjęcia przełomów próbek zmęczeniowych uzyskane z pomocą mikroskopu elektronowego.

Badania przeprowadzono na próbkach ze stali 10. Wybór stali był podyktowany dwoma czynnikami: a) był to materiał, dla którego widoczny jest wpływ nieproporcjonalności obciążenia na własności zmęczeniowe oraz b) własności wytrzymałościowe stali umożliwiały osiągnięcie założonych poziomów naprężeń podczas próby skręcania (odpowiednio niska wartość Z_{50}). Kierując się powyższymi wskazaniem wybrano stal odpowiadającą składem chemicznym i własnościami wytrzymałościowymi stali wykorzystanej przez Nisiharę i Kawamoto do badań wpływu kąta przesunięcia fazowego na wytrzymałość zmęczeniową. W pracy [4] określono ten materiał jako „mild steel”.

Cechy geometryczne próbki do badań zasadniczych (rys. 3.b) zaprojektowano, kierując się: wskazaniem norm PN-74/H04327 i PN-76/H-04325 oraz budową i parametrami pracy stanowiska badawczego.



Rys. 3. Stanowisko badawcze: a) przyrząd do skręcania i maszyna wytrzymałościowa Instron, b) schemat przyrządu do skręcania, c) próbka badawcza

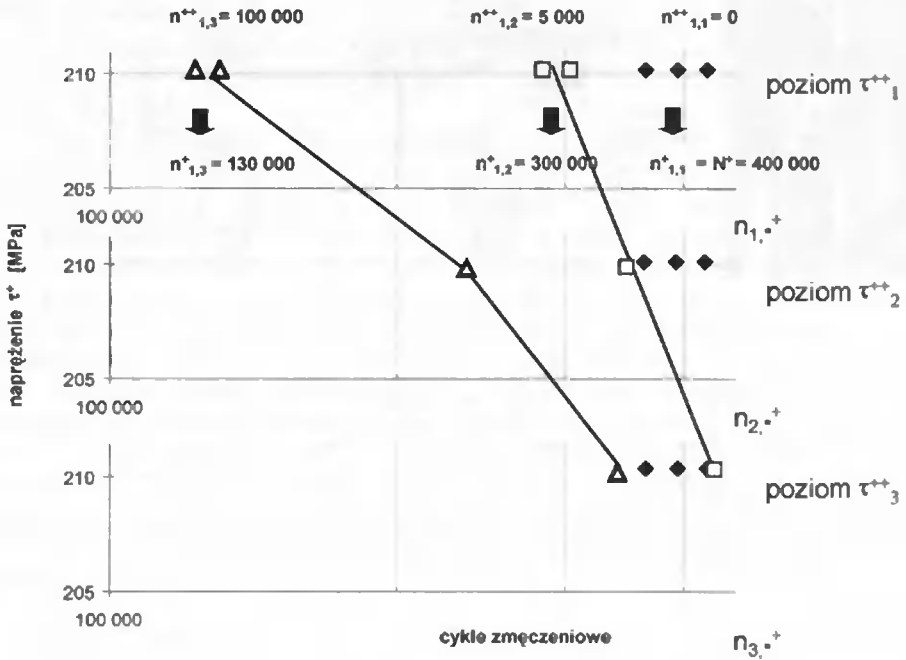
4. WYNIKI

Dla bloku obciążenia wstępnego próby wykonano na różnych poziomach naprężeń $\tau_{k,1}^{++} > \tau_{k,2}^{++} > \tau_{k,3}^{++}$, aż do momentu braku obserwowalnego wpływu na trwałość n^+ . Dla każdego poziomu $\tau_{k,1}^{++}$ w bloku obciążenia wstępnego próbki poddano działaniu różnej ilości cykli $n_{k,1}^{++} < n_{k,2}^{++} < n_{k,3}^{++}$. Po zmianie płaszczyzny w bloku obciążenia zasadniczego uzyskiwano trwałości $n_{k,1}^+, n_{k,2}^+, n_{k,3}^+$.

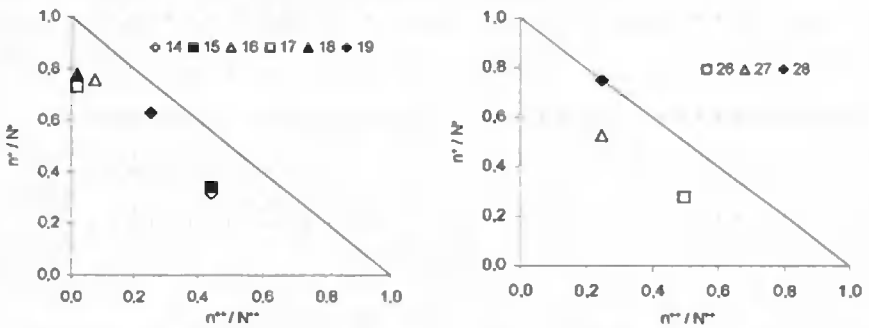
Przykładowe wyniki przeprowadzonego eksperymentu przedstawiono na rysunku 4. Nie kumulując uszkodzenia zmęczeniowego $n_{1,1}^{++}=0$ na płaszczyźnie α^{++} , na płaszczyźnie α^+ uzyskujemy trwałość bazową $n_{1,1}^+$ równoznaczną z trwałością dla obciążenia tylko proporcjonalnego. Im większa jest wartość skumulowanego uszkodzenia zmęczeniowego $n_{1,1}^{++} < n_{1,2}^{++} < n_{1,3}^{++}$ na płaszczyznach α^{++} , tym większa symulowana nieproporcjonalność obciążenia i tym mniejsza wartość uszkodzenia zmęczeniowego $n_{1,1}^+ > n_{1,2}^+ > n_{1,3}^+$ na płaszczyźnie krytycznej potrzebna do zniszczenia.

Zestawienie wszystkich wyników zawiera rysunek 5. Zakładając liniową hipotezę kumulacji uszkodzeń zmęczeniowych, osie odciętych na wykresach tego rysunku oznaczają wartość skumulowanego zmęczenia w płaszczyźnie α^{++} w bloku wstępnego obciążenia. Na osiach rzędnych naniesiono uzyskaną w trakcie eksperymentu wartość skumulowanego uszkodzenia zmęczeniowego w płaszczyźnie α^+ , potrzebną do zniszczenia próbki w bloku obciążenia zasadniczego. Zmniejszenie trwałości uzyskane dla próbek o numerach 14-19 dla skręcania i rozciągania-ściskania (5.a) oraz dla próbek 26-28 w przypadku skręcania i rozciągania-ściskania (5.b) jest proporcjonalne do wartości wstępnie skumulowanych zmian zmęczeniowych na płaszczyźnie α^{++} . Należy jednocześnie zauważyć, że nie jest to zależność wprost proporcjonalna (ciągła, czarna linia),

która sugerowałaby możliwość bezpośredniego sumowania uszkodzeń na obu płaszczyznach α^+ i α^{++} .



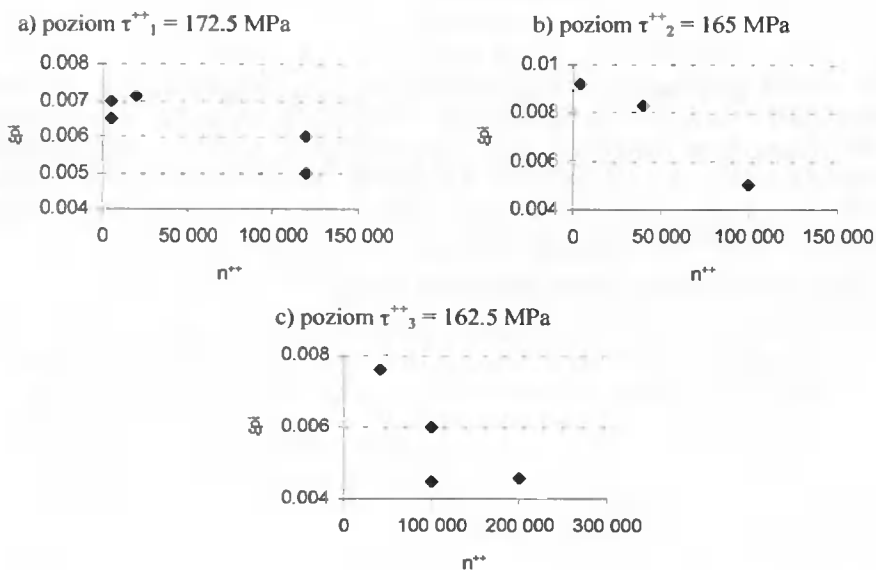
Rys. 4. Przykładowe wyniki badań



Rys. 5. Zależność pomiędzy zadaniem uszkodzeniem na płaszczyźnie α^{++} w bloku obciążenia wstępnego, a uzyskaną wartością uszkodzenia na płaszczyźnie α^+ , potrzebną do zniszczenia w bloku obciążenia zasadniczego

Wykresy na rysunku 6 zawierają z kolei zmiany wartości plastycznego odkształcenia nasycenia w zależności od liczby cykli i poziomu naprężenia bloku wstępnego obciążenia. Wraz ze wzrostem wartości wstępnie skumulowanego zmęczenia na płasz-

czyżnie α^{++} , w każdym z przypadków widoczne staje się zmniejszenie wartości tego odkształcenia.



Rys. 6. Zmiany wartości plastycznego odkształcenia nasycenia ϵ_{pl} w zależności od liczby cykli w bloku obciążenia wstępnego n^{++} dla trzech poziomów naprężeń τ^{++}

5. WNIOSKI

Symulacja warunków obciążeń nieproporcjonalnych poprzez odwzorowanie modelu zmęczenia nieproporcjonalnego przyniosła spodziewane efekty. Programowalna zmiana położenia kierunków głównych spowodowała zmieszenie trwałości oraz obniżenie plastycznego odkształcenia nasycenia. Prowadzi to do wniosku, że przyjęty model zmęczenia nieproporcjonalnego w sposób poprawny ujmuje to zjawisko.

LITERATURA

- [1] T.Langlais, 1997. Multiaxial Fatigue, <http://www.menet.umn.edu/~langlais/research/fatigue1.html>.
- [2] K.J. Miller, 1999. A Historical Perspective of the Important Parameters of Metal Fatigue; and Problems for the Next Century, Fatigue'99. Proceedings of the Seventh International Fatigue Congress, Vol. 1, June Beijing, P.R. China, 15-39.
- [3] D. Skibicki, 2000. Koncepcja parametru nieproporcjonalności złożonego stanu obciążeń zmęczeniowych. XVIII Sympozjum Zmęczenia Materiałów i Konstrukcji, Wydawnictwo Uczelniane ATR, Bydgoszcz.
- [4] T. Nisihara, M. Kawamoto, 1945. The strength of metals under combined bending and twisting with phase difference. Memoirs, College of Engineering, Kyoto Imperial university, vol. XI, 85-112.

EXPERIMENTAL VERIFICATION OF FATIGUE MODEL FOR NON-PROPORTIONAL LOADING CONDITIONS

Summary

A method and results of the experimental testing of fatigue model in non-proportional loading conditions are presented in the paper. The essence of the experiment was the simulation of conditions during non-proportional loadings by programmable changes of principal stresses directions. As a result, the phenomena similar to those which occur under non-proportional loadings were observed. The tests results confirm correctness of the accepted fatigue model.

Keywords: multi-axial fatigue, non-proportional loadings

OPTIMALIZACJA KRATOWNICY PRZY UŻYCIU ALGORYTMÓW GENETYCZNYCH

Dariusz Skibicki, Krzysztof Nowicki

Akademia Techniczno-Rolnicza w Bydgoszczy, Wydział Mechaniczny,
Katedra Sterowania i Konstrukcji,
ul. Prof. S. Kaliskiego 7, 85-796 Bydgoszcz

W artykule przeprowadzono optymalizację kratownicy płaskiej z wykorzystaniem trzech metod optymalizacji. Były to: algorytm genetyczny, metoda gradientu prostego z zewnętrzną funkcją kary oraz metoda „first order” pakietu ANSYS. Na tej podstawie porównania przebiegu procesów optymalizacji i ich wyników, szczegółowo opisano własności metody genetycznej.

Słowa kluczowe: kratownica, optymalizacja, algorytmy genetyczne

1. WPROWADZENIE

Wykorzystanie nowoczesnych metod obliczeniowych ułatwiło i przyspieszyło proces projektowania konstrukcji mechanicznych. Jednakże numeryczna realizacja niektórych modeli matematycznych wymaga dużej ilości czasu nawet przy wykorzystaniu mocy obliczeniowej najszybszych komputerów. Stąd konieczność poszukiwania alternatywnych metod realizacji obliczeń. Uwaga autorów skupiła się na procesach optymalizacji konstrukcji modelowanych z wykorzystaniem metody elementów skończonych. Podstawowym celem pracy była propozycja alternatywnej metody optymalizacji złożonych konstrukcji, która miała się charakteryzować podobnymi do metod „klasycznych” parametrami przy znacznym skróceniu czasu obliczeń.

Optymalizowanym obiektem była kratownica złożona z 16 prętów, podparta w trzech węzłach, obciążona dwiema siłami [1]. Zadanie optymalizacji polegało na znalezieniu najlżejszej kratownicy, która spełnia narzucone warunki wytrzymałościowe: $k_{rc}=90$ MPa i sztywnościowe: maksymalne pionowe przemieszczenie węzła nr 16: $f_y < 0.8$ mm. Za zmienne decyzyjne przyjęto pola przekrojów prętów. Model matematyczny powyższego zagadnienia przedstawia się następująco:

Zmienne decyzyjne:

$$a_i \quad i = 1...16; \quad (1)$$

Funkcja celu:

$$Q(a_i)_{\min} = \sum_{i=1}^{16} a_i; \quad (2)$$

Ograniczenia:

$$\begin{aligned} q_1 &= k_{rc} - \sigma_i > 0; \\ q_{17} &= f_y - f_{y(16)} > 0. \end{aligned} \quad (3)$$

Do obliczeń użyto genetycznych algorytmów optymalizacyjnych zamieszczonych w bibliotece procedur GAOT, przeznaczonej do pracy w środowisku programu MATLAB. W celach porównawczych kratownicę zoptymalizowano również w programie ANSYS, wykorzystując moduł optymalizacyjny tego pakietu. Kratownicę zoptymalizowano także za pomocą autorskiej procedury optymalizacyjnej - AUTOR, zaimplementowanej do środowiska programu MATLAB. Procedura wykorzystuje metodę gradientu prostego z zewnętrzną funkcją kary.

Zastosowanie procedur optymalizacyjnych wymaga obliczenia wartości funkcji celu dowolnego wektora zmiennych decyzyjnych. W tym celu stworzono procedurę w pakiecie MATLAB rozwiązującą powyższą postać kratownicy metodą elementów skończonych [1]. Procedura ta zwracała wartość funkcji celu w przypadku spełnienia wszystkich ograniczeń, bądź wartość nieskończoną (karę) w przypadku naruszenia ograniczenia. W przypadku autorskiej procedury optymalizacyjnej konieczne było również wyliczanie wartości funkcji kary i gradientu funkcji dla dowolnego wektora zmiennych decyzyjnych.

2. IDEA ALGORYTMÓW GENETYCZNYCH

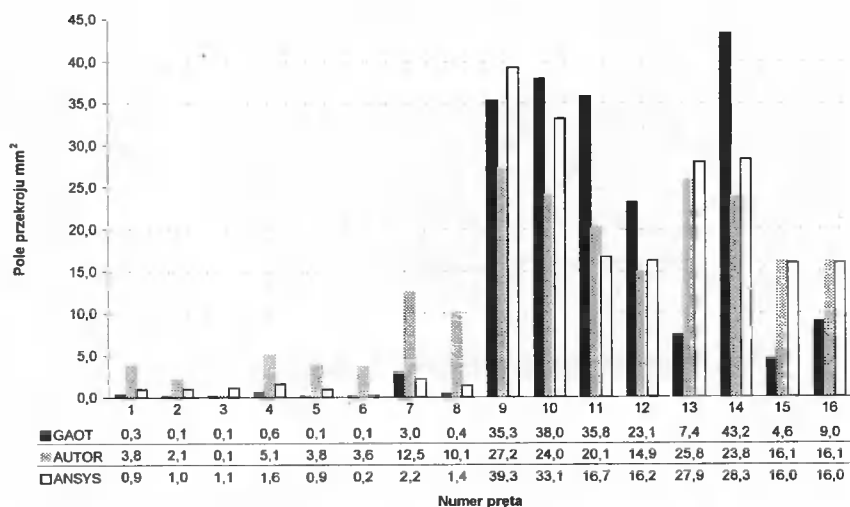
Algorytm genetyczny stanowi wzorowaną na naturalnej ewolucji metodę rozwiązywania problemów, głównie zagadnień optymalizacyjnych. Algorytmy genetyczne są procedurami poszukiwania opartymi na mechanizmach doboru naturalnego i dziedziczenia [2, 3]. Najistotniejszą cechą tych procedur jest to, że operują na genach – ciągach zer i jedynek będących binarną reprezentacją wielkości liczbowych. W analizowanym przykładzie genom kratownicy składał się z 16 ciągów binarnych, reprezentujących w systemie dwójkowym pola przekrojów prętów. Najprostszy algorytm genetyczny przedstawia się następująco:

1. Utworzenie populacji początkowej losowych osobników.
2. Obliczenie przystosowania (wartości funkcji celu) dla każdego osobnika.
3. Wybieranie puli rodzicielskiej złożonej z najlepiej przystosowanych osobników.
4. Utworzenie nowej populacji poprzez zastosowanie na genach poszczególnych osobników operacji dzielenia, łączenia z genami innych osobników oraz mutacji.
5. Obliczenie przystosowania dla każdego osobnika w nowej populacji.
6. Powtórzenie kroków od 3 do 6 aż do spełnienia kryterium zbieżności.

3. WYNIKI OBLICZEŃ

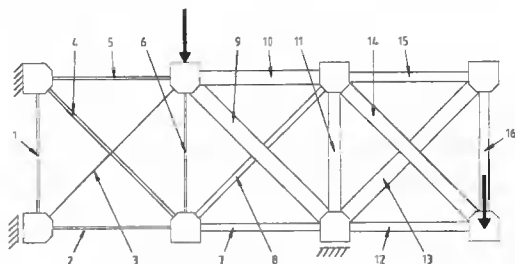
Najlepsze wyniki dla każdej z metod zamieszczono na rysunku 1. Należy zaznaczyć, że każdą z trzech metod uzyskano bardzo podobną wartość funkcji celu, a mianowicie: GAOT - 201 mm², ANSYS - 202 mm² i AUTOR - 209 mm². Pod tym względem wszystkie trzy metody okazały się równie skuteczne.

Istotne różnice stają się widoczne gdy przeanalizujemy postacie kratownic na rysunkach 2, 3 i 5. Ze względu na liniowy charakter funkcji celu, metody gradientowe dążą do zredukowania ciężaru poprzez równomierne zmniejszanie przekrojów prętów. Zróżnicowanie ich przekroju następuje dopiero po napotkaniu na ograniczenia. Ma to wpływ na ostateczną postać kratownicy, rysunek 2b.

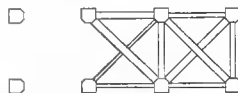


Rys. 1. Pola przekrojów prętów uzyskanymi trzema sposobami

a)



b)



Rys. 2. Postać kratownicy uzyskana z procedury AUTOR

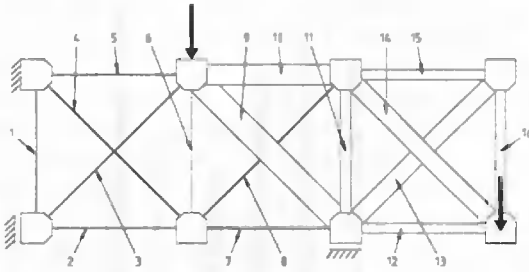
Posiadając w tym szczególnym przypadku wiedzę o tym, jak mogłaby wyglądać optymalna postać kratownicy można, wybierając odpowiedni punkt startowy (tzn. początkowe wartości pól przekrojów prętów) dla metody gradientowej spowodować otrzymanie innego rezultatu, rysunek 3b.

Postać modelu matematycznego i wybór początkowego punktu poszukiwań wpływa więc istotnie na znalezione ekstremum lokalne.

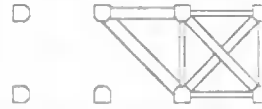
Poszukiwanie w przypadku algorytmów genetycznych ma charakter losowy. Na rysunku 4 przedstawiono zmiany funkcji celu (przystosowania) w kolejnych iteracjach (pokoleniach). Przebiegi tych funkcji są niepowtarzalne. Niewiele ma to jednak wspólnego ze ściśle losowymi metodami poszukiwań jak np. Monte Carlo. W metodzie tej, w każdym kroku następuje zawężenie obszaru poszukiwań (kostki zmienności) w pobliżu kolejnego ekstremum lokalnego.

Specyficzny charakter poszukiwań, wyjaśniony hipotezą „cegielek” [3] oraz występowaniem mutacji nie pozwala na utratę możliwości znalezienia ekstremum globalnego. Świadczą o tym przebiegi wartości zmiennych decyzyjnych w kolejnych krokach (populacjach), rysunek 4.

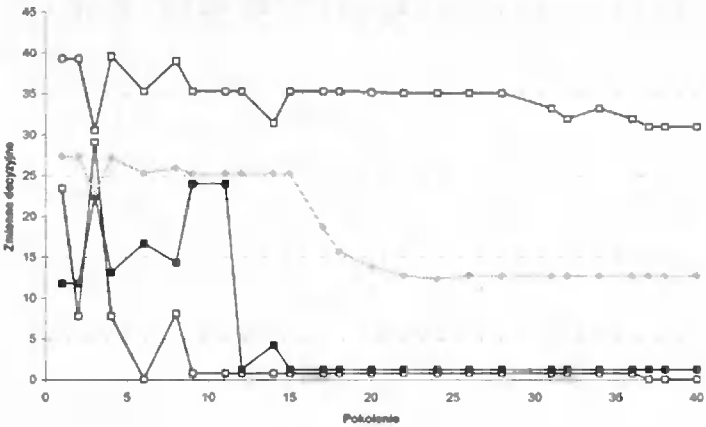
a)



b)



Rys. 3. Postać kratownicy uzyskana w programie ANSYS

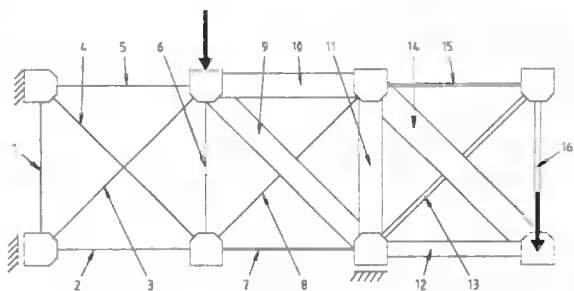


Rys. 4. Przebiegi wartości wybranych zmiennych decyzyjnych

Zmienne decyzyjne nie zmieniają się w sposób ciągły dążąc - w sposób zdeterminowany - do określonej wartości jak w metodach gradientowych. Wartości zmiennych decyzyjnych nie są określone w sztywnych ramach zmniejszającej swe rozmiary kostki zmienności, jak w metodach systematycznego lub losowego przeszukiwania. Widoczne są gwałtowne zmiany wartości niektórych zmiennych decyzyjnych, świadczące o zmianie kierunku (obszaru) poszukiwań. W efekcie otrzymać można rozwiązanie jak na rysunku 5b.

Z punktu widzenia użytkownika istotne są cechy użytkowe algorytmów genetycznych. Przeanalizowano więc wpływ parametrów użytkowych na proces optymalizacji, a mianowicie: rozmiar populacji, liczbę populacji. Okazało się, że szybkość zbliżania się do rozwiązania optymalnego w początkowej fazie obliczeń, silnie zależy od rozmiaru populacji, rysunek 6. Gdy liczba powstałych pokoleń kratownic jest wystarczająco duża, tzn. ewolucja trwa wystarczająco długo, otrzymuje się i tak podobne rozwiązanie, rysunek 7 (z pominięciem oczywiście przypadków drastycznych, jak np. populacja złożona z jednego bądź dwóch osobników).

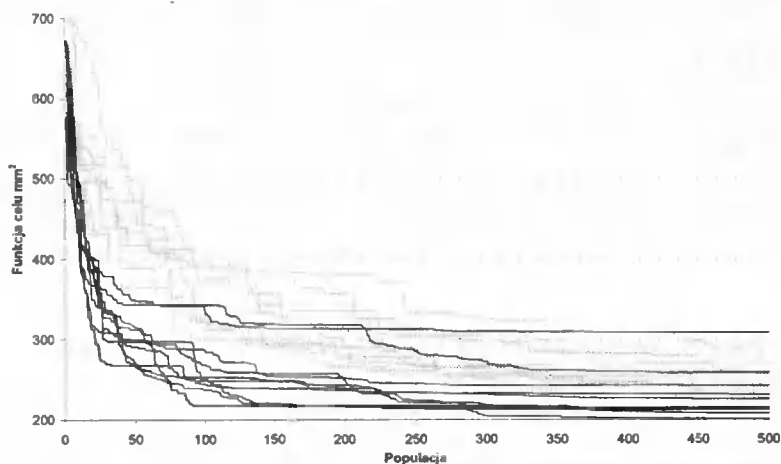
a)



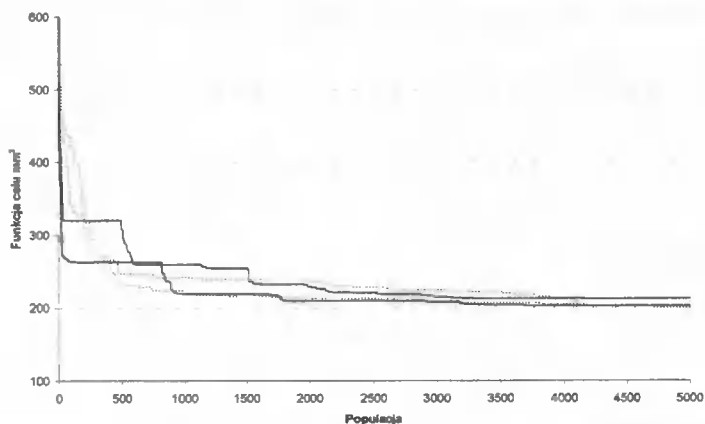
b)



Rys. 5. Postać kratownicy uzyskana z pakietu GAOT



Rys. 6. Przebiegi wartości funkcji celu w zależności od rozmiaru populacji; linie szare - 1 osobników-kratownic, linie czarne - 100



Rys. 7. Przebiegi wartości funkcji celu dla dużej liczby populacji; linie szare - 10 osobników-kratownic, linie czarne - 100

4. PODSUMOWANIE

Podsumowując można wskazać na pewne zalety i wady metody genetycznej. Do jej niewątpliwych zalet można zaliczyć:

- a) prostotę algorytmu,
- b) wymaga obliczenia tylko wartości funkcji celu,
- c) funkcja kary za naruszenie ograniczeń może mieć postać idealną tzn. przyjmuje wartości 0 lub ∞ ,
- d) nie jest konieczne wskazywanie punktu początkowego poszukiwań,
- e) ze względu na właściwy tylko tej metodzie sposób poszukiwania rozwiązania,
- f) istnieje duże prawdopodobieństwo otrzymania globalnego rozwiązania optymalnego.

Wśród wad metody można wyróżnić szczególnie jej losowy charakter, to znaczy brak powtarzalności wyników.

LITERATURA

- [1] M. Banasiak, K. Grossman, M. Trombski, 1992. Zbiór zadań z wytrzymałości materiałów. PWN Warszawa.
- [2] E. D. Goldberg, 1998. Algorytmy genetyczne i ich zastosowania. WNT Warszawa.
- [3] D. Rutkowska, M. Piliński, L. Rutkowski, 1997. Sieci neuronowe, algorytmy genetyczne i systemy rozmyte. Wydawnictwo Naukowe PWN Warszawa-Lódź.

TRUSS OPTIMIZATION USING GENETIC ALGORITHM

Summary

The paper describes the plane truss optimisation using three methods. These were: genetic algorithm, simple gradient method with outer penalty function and "first order" method of ANSYS program. On the basis of the comparison of the optimisation processes course and their results, properties of genetic algorithm were described in detail.

Keywords: truss, optimisation, genetic algorithm

MINIMALIZACJA DRGAŃ ELEKTROMECHANICZNYCH UKŁADÓW MASZYNOWYCH

Eugeniusz Świtoński

Katedra Mechaniki Stosowanej, Politechnika Śląska w Gliwicach

W pracy przedstawiono sposób modelowania zagadnień dynamicznych elektromechanicznych układów napędowych maszyn. Dla uzyskanych modeli fizycznych tych układów opracowano algorytmy analizy wrażliwości i optymalizacji cech dynamicznych. Opracowane modele dynamiczne i algorytmy zastosowano do obliczeń optymalizacyjnych układu napędowego kombajnu węglowego przy założeniu funkcji celu, która prowadzi do minimalizacji wartości maksymalnych sił dynamicznych w parach kinematycznych.

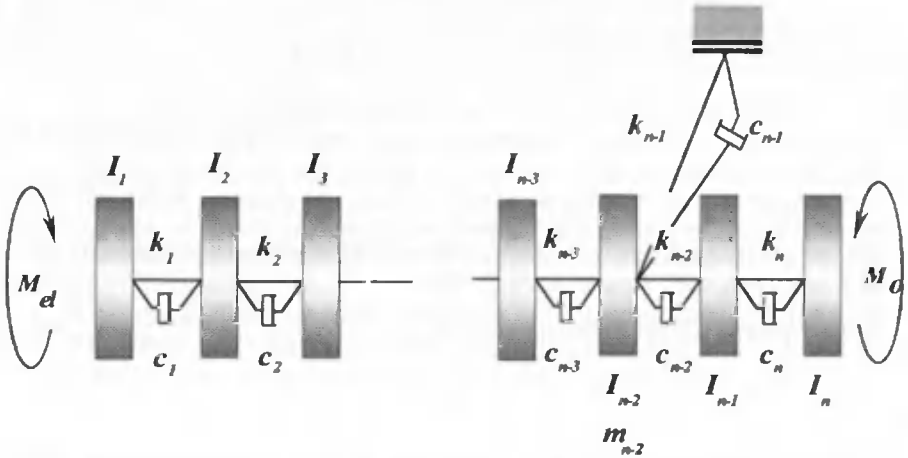
Słowa kluczowe: drgania, modele dynamiczne

1. WSTĘP

Cechy konstrukcyjne układów napędowych maszyn dużej mocy, a w szczególności górniczych kombajnów węglowych, ze względu na stan obciążenia i warunki eksploatacyjne muszą spełniać określone warunki wytrzymałościowe z punktu widzenia trwałości i niezawodności. Brak wystarczających danych z zakresu dynamiki układów napędowych w znacznym stopniu utrudnia proces projektowo-konstrukcyjny i często jest przyczyną niskiej ich trwałości. Podstawą więc procesu projektowo-konstrukcyjnego jest analiza dynamiczna układu napędowego, która przy wykorzystaniu procedur optymalizacyjnych pozwala na odpowiedni dobór cech konstrukcyjnych układu i eliminację źródła drgań. Dla praktycznych zastosowań ważne jest określenie wpływu cech konstrukcyjnych układu na jego trwałość i niezawodność opisaną pewną funkcją celu. Przyjęta funkcja celu jest na ogół funkcją wielu zmiennych decyzyjnych. Do oceny wpływu tych zmiennych decyzyjnych na przyjętą funkcję celu stosuje się analizę wrażliwości, która w znacznym stopniu upraszcza proces optymalizacyjny. Analiza wrażliwości polega na określeniu gradientu funkcji celu w przestrzeni zmiennych decyzyjnych. Wyznaczone za pomocą analizy wrażliwości gradienty funkcji celu w przestrzeni zmiennych decyzyjnych określają kierunki największego wzrostu tej funkcji odpowiadające poszczególnym zmiennym decyzyjnym. Informacje te mogą być z powodzeniem wykorzystane już na etapie procesu projektowo-konstrukcyjnego do optymalizacji cech dynamicznych rozpatrywanego układu napędowego. Niezwykle ważnym zadaniem jest więc wybór funkcji celu, która w możliwie dokładny sposób opisuje analizowane zjawiska oraz zbioru zmiennych decyzyjnych odpowiadającego technicznym możliwościom zmian konstrukcyjnych. Otrzymane wyniki analizy wrażliwości w prosty sposób można wykorzystać do poszukiwania optymalnych cech konstrukcyjnych analizowanego układu napędowego.

2. MODEL FIZYCZNY UKŁADU NAPĘDOWEGO

Łańcuch kinematyczny układu napędowego maszyny jest złożonym układem o wyraźnym skupieniu masy w postaci tarcz (kół zębatach). Ze względu na to, że elementy napędu wykonują ruch obrotowy, a w napędzie dominują pewne postacie drgań o częstotliwościach zdeterminowanych głównie parametrami mas skupionych, model fizyczny w wielu analizowanych zagadnieniach dynamicznych można przyjąć w postaci dyskretnej [7].



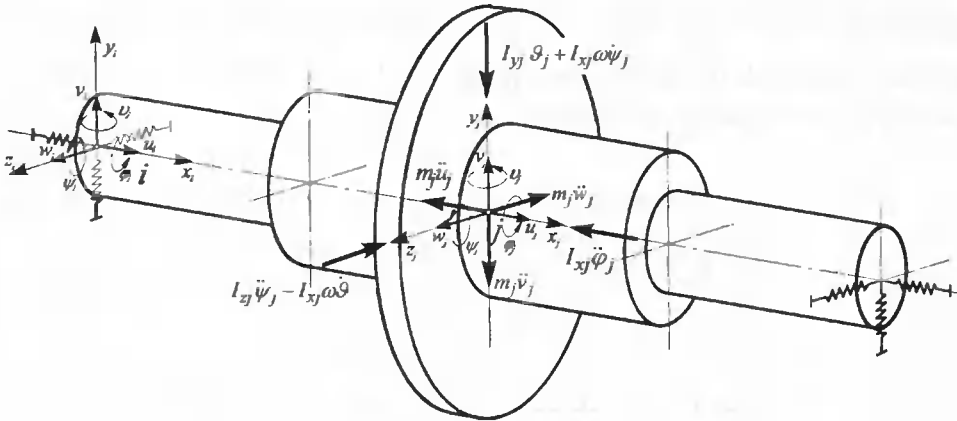
Rys. 1. Dyskretny model fizyczny układu napędowego z przekładnią planetarną

Model taki składa się ze sztywnych tarcz o momentach bezwładności I_s ($s=1..n$) połączonych bezmasowymi elementami o współczynnikach sztywności k_s i współczynnikach tłumienia c_s obciążonych na wejściu momentem silnika napędowego M_e i momentem roboczym M_o na wyjściu.

Uwzględnienie w badaniach dynamicznych sztywności giętno-skrętnej wałów i sztywności łożysk prowadzi do opisu zagadnień dynamicznych układu napędowego w postaci modelu drgań giętno-skrętnych. Do opracowania modelu dynamicznego układu napędowego, który uwzględniałby podatność wałów można zastosować metodę elementów skończonych (MES). Najbardziej popularną i efektywną reprezentacją MESu jest reprezentacja przemieszczeniowa, w której niewiadomymi są przemieszczenia. Aproxymacji poddaje się tutaj pole przemieszczeń za pomocą funkcji kształtu.

Układ mechaniczny można przedstawić jako odizolowane podukłady, którymi zazwyczaj będą poszczególne wały przekładni z osadzonymi na nich kołami zębatymi, sprzęgłami itd. Wały mogą być sprężyste podparte w miejscu osadzenia łożysk. Siłami zewnętrznymi działającymi na wyodrębnione podukłady są siły napędowe od silnika elektrycznego, stan obciążenia organu roboczego oraz siły wzajemnego oddziaływania wałów, które najczęściej są siłami międzyzębnymi lub w sprzęgłach. W ujęciu globalnym układu napędowego siły międzyzębne i siły w sprzęgłach są siłami wewnętrznymi.

W celu zbudowania fizycznego modelu układu mechanicznego, w pierwszej kolejności zajmiemy się pojedynczym wałem przedstawionym na rysunku 2.



Rys. 2. Model fizyczny wału przekładni

Podziału wału na prętowe elementy skończone należy tak dokonać, aby węzły podziału znalazły się w miejscach podparcia wału, osadzenia kół zębatych, zmian średnic wału itd. Każdy węzeł może posiadać w ogólnym przypadku 6 stopni swobody. Trzy stopnie translacyjne o kierunkach osi lokalnego układu współrzędnych oraz trzy rotacyjne względem tych osi. Przemieszczenia uogólnione węzłów przedstawmy w postaci następującej macierzy kolumnowej

$$\mathbf{q}_i = [u_i, v_i, \psi_i, w_i, \vartheta_i, \varphi_i]^T \quad (1)$$

Koło modelowane w postaci nieodkształcalnej tarczy sztywno osadzonej na wale, wykonuje ruch złożony z postępowego ruchu unoszenia środka masy z prędkością

$$\mathbf{v}_u = u_j \mathbf{i} + v_j \mathbf{j} + w_j \mathbf{k} \quad (2)$$

i ruchu kulistego względem tego środka opisanego małymi obrotami wokół osi y_j i z_j oraz prędkością obrotu własnego $\omega + \dot{\varphi}_j$, gdzie ω jest stałą prędkością kątową wału.

Siły działające na tarczę (rys.2) możemy uporządkować w następujący sposób [6]:

$$\begin{bmatrix} m_j \ddot{u}_j \\ m_j \ddot{v}_j \\ I_{zy} \ddot{\psi}_j - I_{xy} \omega \dot{\vartheta}_j \\ m_j \ddot{w}_j \\ I_{yj} \ddot{\vartheta}_j + I_{xy} \omega \dot{\psi}_j \\ I_{xj} \ddot{\varphi}_j \end{bmatrix} = \mathbf{M}_j \ddot{\mathbf{q}}_j + \mathbf{G}_j \dot{\mathbf{q}}_j, \quad (3)$$

gdzie \mathbf{M}_j jest diagonalną macierzą bezwładności tarczy o postaci

$$\mathbf{M}_j = \text{diag}(m_j, m_j, I_{zy}, m_j, I_{yj}, I_{xj}), \quad (4)$$

natomiast m_j jest masą j -tej tarczy, I_{xj}, I_{yj}, I_{zj} są masowymi momentami bezwładności tarczy, odpowiednio względem osi I_{xj}, I_{yj}, I_{zj} . Macierz \mathbf{G}_j jest antysymetryczną macierzą efektu żyroskopowego o postaci

$$\mathbf{G}_j = I_{xj} \omega \begin{bmatrix} & & & 0 & 0 & 0 \\ & \mathbf{0} & & 0 & 0 & 0 \\ & & & 0 & -1 & 0 \\ \hline 0 & 0 & 0 & & & \\ 0 & 0 & 1 & & \mathbf{0} & \\ 0 & 0 & 0 & & & \end{bmatrix}. \quad (5)$$

Dla pojedynczego wału, z osadzonymi na nim kołami zębatymi i łożyskami, możemy napisać następujące równanie ruchu

$$\mathbf{M}_w \ddot{\mathbf{q}}_w + (\mathbf{B}_w + \mathbf{G}_w) \dot{\mathbf{q}}_w + \mathbf{K}_w \mathbf{q}_w = \mathbf{Q}_w, \quad (6)$$

gdzie: $\mathbf{M}_w, \mathbf{B}_w, \mathbf{K}_w, \mathbf{G}_w$ są odpowiednio macierzami bezwładności, tłumienia, sztywności efektu żyroskopowego całego wału, $\mathbf{q}_w = [q_1, q_2, \dots, q_n]^T$ jest macierzą kolumnową uogólnionych przemieszczeń węzłowych, $\mathbf{Q}_w = [Q_1, Q_2, \dots, Q_n]^T$ jest macierzą kolumnową uogólnionych sił zewnętrznych działających w węzłach, n jest liczbą węzłów podziału wału.

W przypadku ogólnym, tj. dla przekładni wielostopniowej układ równań można zapisać jednym równaniem macierzowym

$$\mathbf{M} \ddot{\mathbf{q}}(t) + (\mathbf{B} + \mathbf{G}) \dot{\mathbf{q}}(t) + \mathbf{K} \mathbf{q}(t) = \mathbf{Q}, \quad (7)$$

które jest równaniem różniczkowym opisującym ruch całej przekładni zębatej. W równaniu tym macierze $\mathbf{M}, \mathbf{B}, \mathbf{K}, \mathbf{G}$ są globalnymi macierzami bezwładności, tłumienia, sztywności i efektu żyroskopowego, natomiast przemieszczenia uogólnione i siły uogólnione opisane są macierzami kolumnowymi [6].

3. CHARAKTERYSTYKI SZTYWNOŚCI ZAZĘBIENIA

3.1. Macierz sztywności zazębienia

Macierze sztywności i tłumienia \mathbf{K}_z i \mathbf{B}_z muszą spełniać następujące warunki:

$$-\begin{bmatrix} f_{z1}^s(t) \\ \vdots \\ f_{zm}^s(t) \end{bmatrix} = \mathbf{K}_z \mathbf{q}(t) = \frac{\partial E_{pz}}{\partial \mathbf{q}}, \quad (8)$$

$$-\begin{bmatrix} f'_{z1}(t) \\ \vdots \\ f'_{zm}(t) \end{bmatrix} = B_z \dot{q}(t) = \frac{\partial E_{dz}}{\partial \dot{q}}, \quad (9)$$

gdzie:

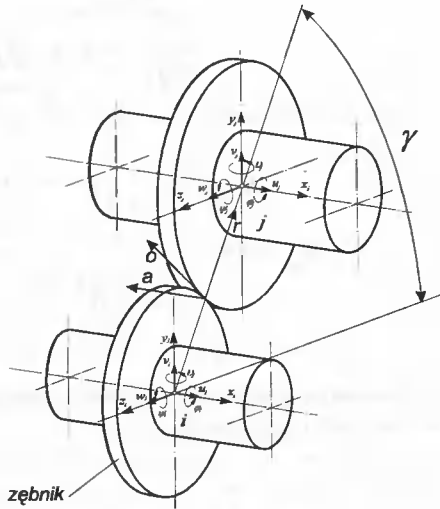
- E_{pz} - energia potencjalna odkształcenia wszystkich ząbów,
- E_{dz} - funkcja dyssypacji energii we wszystkich ząbieniach,
- $f'_{zi}(t)$ - siły sprężyste.

W celu obliczenia macierzy K_z i B_z przeanalizujemy jednostopniową przekładnię z walcowymi kołami zębatymi o uzębieniu skośnym (rys.3). Uwzględniając fakt, że wzajemne oddziaływania zębów skierowane są wzdłuż linii przyporu, siłę międzyzębną można opisać następującą zależnością

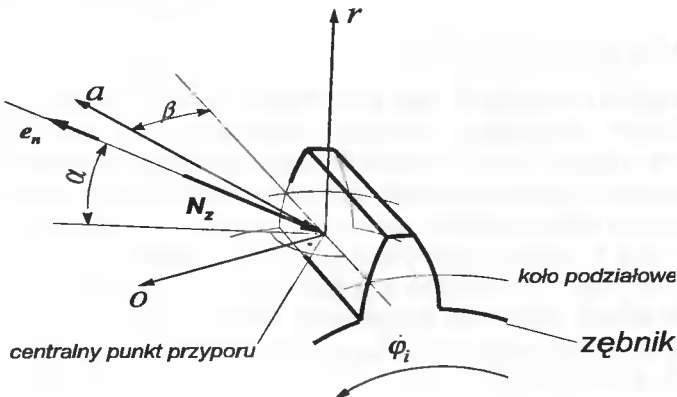
$$N_z = k_z (d_i - d_j) e_n, \quad (10)$$

gdzie: d_i, d_j są wektorami przemieszczeń punktów styku, znajdujących się w biegunie zazębienia, e_n jest wersorem osi prostopadłej do płaszczyzny przyporu w tym punkcie, k_z jest współczynnikiem średniej sztywności zazębienia sprowadzonej do linii przyporu.

Obliczając współrzędne wektorów d_i, d_j i e_n w układzie współrzędnych oraz w funkcji przemieszczeń uogólnionych węzłów, w których osadzone są współpracujące koła zębate oraz w funkcji kąta γ otrzymuje się następującą zależność na siłę międzyzębną.



Rys.3. Jednostopniowa przekładnia zębata



Rys.4. Osie układu oraz w punkcie zazębienia

$$N_z = k_z (\delta_i^T q_i - \delta_j^T q_j), \quad (11)$$

gdzie:

δ_i, δ_j - macierze kolumnowe geometrycznych parametrów kół zębatych.

Pochodne cząstkowe energii odkształcenia zazębienia względem q są różne od zera tylko dla wektorów q_i i q_j i wynoszą

$$\frac{\partial E_{pz}}{\partial q_i} = k_z (\delta_i \delta_i^T q_i - \delta_i \delta_j^T q_j) \quad (12)$$

$$\frac{\partial E_{pz}}{\partial q_j} = k_z (-\delta_j \delta_i^T q_i + \delta_j \delta_j^T q_j) \quad (13)$$

Macierz sztywności zazębienia dla przekładni jednostopniowej ma zatem postać:

$$K_z = k_z \left[\begin{array}{cc|cc} \hline & & & \\ \hline & \delta_i \delta_i^T & & -\delta_i \delta_j^T \\ \hline & & & \\ \hline & -\delta_j \delta_i^T & & \delta_j \delta_j^T \\ \hline & & & \\ \hline \end{array} \right] \left. \begin{array}{l} \} q_i \\ \\ \} q_j \end{array} \right\} q \quad (14)$$

Postępując podobnie jak przy wyznaczaniu macierzy sztywności zazębienia otrzymamy macierz tłumienia B_z

$$B_z = b_z \left[\begin{array}{cc|cc} \hline & & & \\ \hline & \delta_i \delta_i^T & & -\delta_i \delta_j^T \\ \hline & & & \\ \hline & -\delta_j \delta_i^T & & \delta_j \delta_j^T \\ \hline & & & \\ \hline \end{array} \right] \left. \begin{array}{l} \} \dot{q}_i \\ \\ \} \dot{q}_j \end{array} \right\} \dot{q} \quad (15)$$

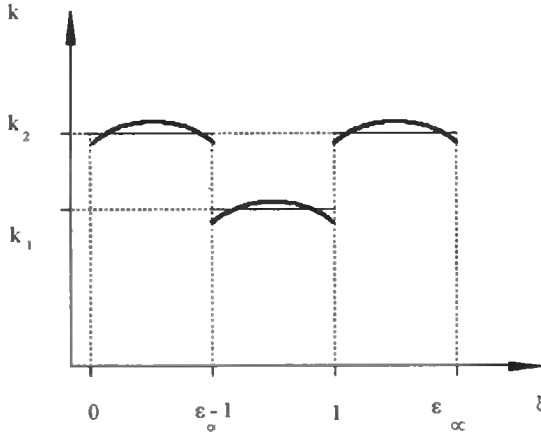
3.2. Nieliniowości charakterystyk sztywności

Jednym z głównych czynników mających wpływ na charakter zjawisk dynamicznych w przekładniach zębatych jest zmienna sztywność zazębienia. Zależy ona od sztywności jednej pary zębów zmiennej wzdłuż odcinka przyporu oraz liczby par zębów będących aktualnie w zazębieniu, wyrażonej przy pomocy liczby przyporu ε_x . Przebieg zmian sztywności zazębienia podczas współpracy dwóch kół zębatych o zębach prostych przedstawiono na rysunku 5. Wartości sztywności całkowitej zazębienia, wyznaczone dla przypadku zmiennej sztywności zazębienia jednej pary zębów można z dobrym przybliżeniem aproksymować odcinkami linii prostych. Przy założeniu stałych wartości współczynnika sztywności dla zazębienia jednoparowego i dwuparowego przebieg zmian sztywności można opisać funkcją:

$$k(\xi) = \begin{cases} k_2 & 0 \leq \xi \leq \varepsilon_\alpha - 1 \\ k_1 & \varepsilon_\alpha - 1 < \xi < 1 \end{cases} \quad (16)$$

gdzie:

ξ - względna współrzędna wzdłuż odcinka przyporu odniesiona do podziałki zazębienia.



Rys. 5. Przebieg zmian sztywności zazębienia kół zębatych o zębach prostych

Stosunek sztywności zazębienia dwuparowego do jednoparowego wynosi około 1.7 i jest mniejszy od 2. Wartość tego stosunku zależy od położenia przekładni, wartości współczynników przesunięcia zarysu oraz liczby przyporu. Zmiany sztywności zazębienia można w sposób przybliżony opisać za pomocą funkcji harmonicznnej [4]. Ten sposób modelowania przedstawia zmiany sztywności zazębienia w funkcji kąta obrotu wału:

$$k(\varphi(t)) = k_s + k_d \sin(z\varphi(t)) \quad (17)$$

gdzie:

- k_s - wartość średnia sztywności zazębienia,
- k_d - amplituda składowej dynamicznej sztywności,
- z - liczba zębów.

Ze względu na konieczność swobodnego zazębienia i wyzębienia się zębów w każdej przekładni zębatej występuje luz międzyzębny i wierzchołkowy większy od zera. W zależności od wielkości luzu może wystąpić całkowite oddzielenie się zębów od siebie lub współpraca ich przeciwległych boków. Najprostszym sposobem symulacji występowania luzu w zazębieniu jest opisanie siły dynamicznej w zazębieniu następującą funkcją:

$$F(k, \Delta q) = k(q) \begin{cases} (\Delta q - 0.5l) & \Delta q > 0.5l \\ 0 & -0.5l \leq \Delta q \leq 0.5l \\ (\Delta q + 0.5l) & \Delta q < -0.5l \end{cases} \quad (18)$$

gdzie:

- F - siła w parze kinematycznej,
- Δq - różnica współrzędnych uogólnionych,
- $k(q)$ - współczynnik sztywności,
- l - zadana wartość luzu.

Powyższa funkcja nie posiada jednak ciągłych pochodnych, co może stwarzać problemy podczas obliczeń numerycznych. Dla pewnych zastosowań korzystniejsze jest opisanie zmiany wartości siły dynamicznej w zależności od współrzędnej uogólnionej, współczynnika sztywności i wartości luzu różniczkowalną funkcją ciągłą w postaci wielomianu *i-tego* stopnia, który wystarczająco dokładnie przybliży przebieg funkcji (18):

$$F(\Delta q, k) = 0.5 k(q)l \left(a_0 + \sum_{i=1}^n a_i (\Delta q')^i \right) \quad (19)$$

gdzie: $\Delta q' = \frac{2\Delta q}{l}$.

Współczynniki wielomianu a , wyznacza się za pomocą metody najmniejszych kwadratów.

4. MODELOWANIE SILNIKA ASYNCHRONICZNEGO

W układach napędowych dużej mocy zjawiska dynamiczne zależą od wzajemnego oddziaływania układu mechanicznego i silnika elektrycznego. Zjawiska dynamiczne występujące w maszynach asynchronicznych opisane mogą być układem różniczkowych równań nieliniowych. Równania różniczkowe opisujące stan dynamiczny silnika asynchronicznego sformułowano w układzie współrzędnych (α, β) wykorzystując przy ich zapisie wektory przestrzenne wielkości elektromagnetycznych (napięcia, prądy, strumienie magnetyczne sprzężone) silnika [8]. Przy formułowaniu tych równań oprócz tradycyjnych założeń stosowanych w teorii maszyn elektrycznych dodatkowo przyjęto, że:

- pole magnetyczne główne w maszynie oraz pola magnetyczne rozprożeń uzwojeń stojana i wirnika są całkowicie niezależne od siebie, tak że zjawiska nasycenia obwodów magnetycznych dla tych pól można analizować oddzielnie,
- charakterystyki magnesowania obwodów magnetycznych dla wyżej wymienionych pól są nieliniowe, ale jednoznaczne,
- amplitudy (długości) wektorów przestrzennych strumieni magnetycznych sprzężonych z tymi polami są nieliniowymi funkcjami amplitud wektorów przestrzennych odpowiednich prądów: prądu magnesującego, prądu stojana i wirnika.

$$\Psi_m = \Psi_m(I_m); \quad \Psi_{S\sigma} = \Psi_{S\sigma}(I_S); \quad \Psi_{R\sigma} = \Psi_{R\sigma}(I_R); \quad (20)$$

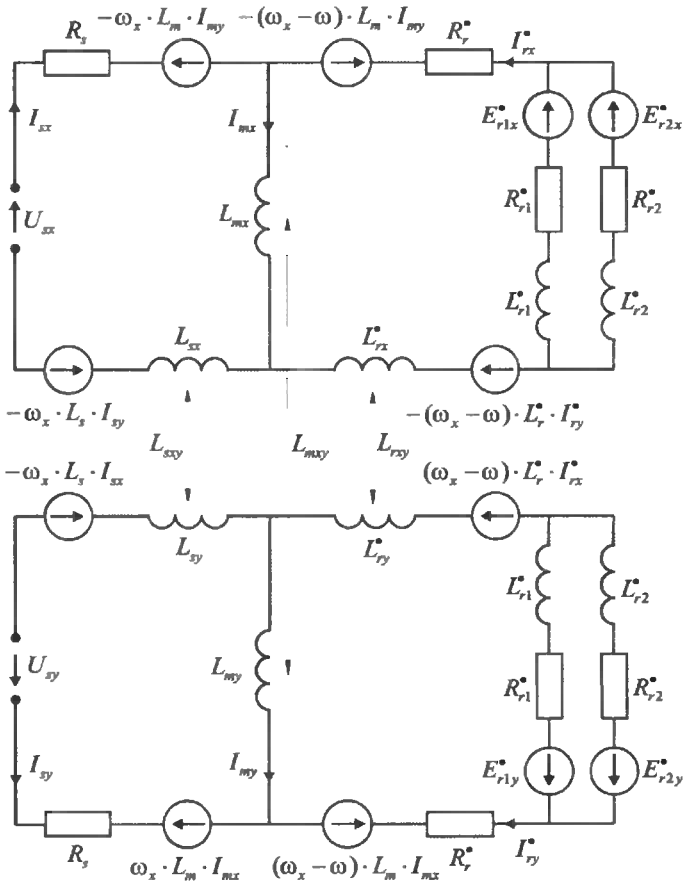
gdzie:

I_S, I_R, I_m - przestrzenne wektory prądów stojana, wirnika oraz prądu magnesowania.

Uwzględniając powyższe założenia można sformułować układ równań prądowo-napięciowych obwodu elektrycznego w postaci macierzowej:

$$\begin{bmatrix} \frac{U_s}{\theta} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} R_{SS} & R_{SR} \\ R_{RS} & R_{RR} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} I_S \\ I_R \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} L_{DSS} & L_{DSR} \\ L_{DSR}^T & L_{DRR} \end{bmatrix} \frac{d}{dt} \begin{bmatrix} I_S \\ I_R \end{bmatrix} \quad (21)$$

Na podstawie równań schemat zastępczy maszyny asynchronicznej uwzględniający zjawisko nasycenia obwodów magnetycznych maszyny dla pola głównego i pól rozproszonych stojana i wirnika przedstawiono na rysunku 6.



Rys.6 Schemat zastępczy silnika asynchronicznego

- gdzie:
- $U_{S\alpha}, U_{S\beta}, I_{S\alpha}, I_{S\beta}, I_{R\alpha}, I_{R\beta}$ - napięcia stojana, prądy stojana i wirnika we współrzędnych α, β
 - $\Psi_{S\sigma}, \Psi_{R\sigma}, \Psi_m$ - amplitudy wektorów przestrzennych sprzężeń magnetycznych silnika z polem rozproszonym stojana, wirnika, polem głównym,
 - R_S, R_R - rezystancja stojana i wirnika,

$$\omega_x, \omega = p\omega_m, p$$

- prędkość kątowna elektryczna wirowania układu współrzędnych (α, β) względem stojana, prędkość kątowna elektryczna wirnika, prędkość kątowna mechaniczna wirnika, liczba par biegunów

Występujące w równaniach (20) i (21) indukcyjności statyczne maszyny $L_{S\sigma}$, $L_{S\sigma}$, L_m oraz indukcyjności różniczkowe $L_{DS\sigma\alpha}$, $L_{DS\sigma\beta}$, $L_{DS\sigma\alpha\beta}$, $L_{DR\sigma\alpha}$, $L_{DR\sigma\beta}$, $L_{DR\sigma\alpha\beta}$, $L_{Dm\alpha}$, $L_{Dm\beta}$, $L_{Dm\alpha\beta}$ nie są wielkościami stałymi lecz zależą od wartości odpowiednich prądów zgodnie z ogólnymi zależnościami:

- dla indukcyjności statycznych

$$L_K = \frac{\Psi_K(I_K)}{I_K}; \quad K=S\sigma, R\sigma, m \quad (22)$$

- dla indukcyjności różniczkowych

$$L_{DK\alpha} = L_{DK} \frac{I_{K\alpha}^2}{I_K^2} + L_K \frac{I_{K\beta}^2}{I_K^2}; \quad L_{DK\beta} = L_{DK} \frac{I_{K\beta}^2}{I_K^2} + L_K \frac{I_{K\alpha}^2}{I_K^2} \quad (23)$$

$$L_{DK\alpha\beta} = (L_{DK} - L_K) \frac{I_{K\alpha} I_{K\beta}}{I_K^2}; \quad K=S\sigma, R\sigma, m \quad (24)$$

gdzie:

$$I_K = \sqrt{I_{K\alpha}^2 + I_{K\beta}^2}; \quad K=S\sigma, R\sigma; \quad I_m = \sqrt{(I_{S\alpha} + I_{R\alpha})^2 + (I_{S\beta} + I_{R\beta})^2};$$

$$L_{DK} = \frac{\partial \Psi_K(I_K)}{\partial I_K} \quad (25)$$

L_K , $L_{DK\alpha}$, $L_{DK\beta}$, $L_{DK\alpha\beta}$ - indukcyjność statyczna, indukcyjności różniczkowe silnia w osi α, β oraz indukcyjność różniczkowa wzajemna.

Przedstawiony powyżej układ równań różniczkowych łącznie z wyrażeniami na moment elektromagnetyczny stanowi nieliniowy model matematyczny silnika asynchronicznego. Wszystkie wielkości i parametry wirnika sprowadzone są na stronę uzwojenia. Parametry modelu silnika elektrycznego określa się na podstawie cech dynamicznych silnika elektrycznego i badań doświadczalnych.

5. ANALIZA WRAŻLIWOŚCI I OPTIMALIZACJA

Przyjęta do badań optymalizacyjnych funkcja celu powinna opisywać zjawiska decydujące o trwałości i niezawodności układu napędowego. Badania można zatem prowadzić analizując podstawowe cechy dynamiczne układu, do których zaliczają się np. wartości własne i wektory własne. Pochodne wartości i wektorów własnych zazwyczaj oblicza się ze względu na podstawowe parametry konstrukcyjne (masowe momenty bezwładności, masy, współczynniki sztywności).

Jako funkcję celu przyjęto zatem wartości ekstremalne sił w parach kinematycznych. Aby uniknąć zarówno dodatnich jak i ujemnych wartości funkcji celu, przyjęto ją w postaci [5]:

$$\psi = P_{\max}^2 \quad (26)$$

gdzie:

P_{\max} - obliczona wartość maksymalna siły dynamicznej w i -tej parze kinematycznej rozpatrywanego układu.

Celem analizy wrażliwości było zbadanie wpływu wybranych parametrów modelu fizycznego układu na wartości maksymalne sił dynamicznych w parach kinematycznych. Obliczenia przeprowadzono dla modelu układu opisanego we współrzędnych stanu. Wprowadzając do opisu modelu fizycznego współrzędne stanu, sprowadzono układ równań różniczkowych zwyczajnych drugiego rzędu do układu równań różniczkowych pierwszego rzędu:

$$\dot{\mathbf{x}} = \mathbf{f}(\mathbf{x}, \mathbf{b}) \quad (27a)$$

$$\mathbf{x}(t_1) = \mathbf{h}(\mathbf{b}) \quad (27b)$$

$$t_1 \leq t \leq t_2$$

$$\mathbf{x}(t) = [x_1(t), \dots, x_m(t)]^T \quad (28)$$

gdzie:

$\mathbf{x}(t)$ - rozwiązanie zadania początkowego (27b),

t_1, t_2 - czas początkowy i końcowy,

$\mathbf{b} = [b_1, \dots, b_n]^T$ - macierz kolumnowa zmiennych decyzyjnych.

Przyjęty funkcjonal opisujący stan układu ma postać [3]:

$$\psi = \mathbf{g}(\mathbf{x}(t_2), \mathbf{b}) \quad (29)$$

Pochodną wyrażenia (29) względem zmiennych decyzyjnych otrzymamy z zależności:

$$\frac{d\psi}{d\mathbf{b}} = \frac{\partial \mathbf{g}(t_2)}{\partial \mathbf{x}} \frac{\partial \mathbf{x}(t_2)}{\partial \mathbf{b}} + \frac{\partial \mathbf{g}}{\partial \mathbf{b}} \quad (30)$$

Jedynym wyrażeniem w (30), którego nie można wyznaczyć analitycznie dla $\mathbf{x}(t)$ wyznaczonego numerycznie jest $\partial \mathbf{x}(t_2) / \partial \mathbf{b}$. Wyrażenie to można wyznaczyć korzystając z metody bezpośredniego różniczkowania. Jest ona najprostszą metodą wyznaczenia poszukiwanego wyrażenia $\partial \mathbf{x}(t_2) / \partial \mathbf{b}$. Polega ona rozwiązaniu dodatkowego równania macierzowego uzyskanego przez zróżniczkowanie (27a) względem \mathbf{b} .

$$\frac{\partial \dot{\mathbf{x}}}{\partial \mathbf{b}} = \frac{\partial \mathbf{f}}{\partial \mathbf{x}} \cdot \frac{\partial \mathbf{x}}{\partial \mathbf{b}} + \frac{\partial \mathbf{f}}{\partial \mathbf{b}} \quad (31a)$$

$$\frac{\partial \mathbf{x}(t_1)}{\partial \mathbf{b}} = \frac{\partial \mathbf{h}}{\partial \mathbf{b}} \quad (31b)$$

$$t_1 \leq t \leq t_2$$

W wyniku rozwiązania zadania początkowego (31b) otrzymujemy poszukiwane wartości $\partial \mathbf{x}(t)/\partial \mathbf{b}$ wynikające z (28, 29). Zaletą tej metody jest bardzo prosty algorytm oraz możliwość obliczania $\partial \mathbf{x}(t)/\partial \mathbf{b}$ jednocześnie z $\mathbf{x}(t)$. Wadą jej natomiast jest konieczność rozwiązania dużej liczby dodatkowych równań różniczkowych.

Dla przyjętej, zmiennej w czasie funkcji celu zadanie optymalizacji sformułowano w postaci [4]:

$$\text{Min Max } \psi(t) \quad (32)$$

Wyniki zastosowań metod optymalizacyjnych do rozwiązywania tego typu zagadnień wskazują na wysoką efektywność metod sekwencyjnego programowania kwadratowego [1] i sekwencyjnego programowania liniowego [5].

Najprostszym sposobem rozwiązania zagadnienia (32) jest zastąpienie obliczania funkcji celu i ograniczeń przez liniową aproksymację opartą na gradientach [2]. Taka aproksymacja możliwa jest tylko w otoczeniu wartości parametrów, zatem konieczne jest wprowadzenie ograniczeń wielkości zmian tych parametrów. Następnym etapem jest przeprowadzenie analizy w punkcie uzyskanym przez przybliżoną optymalizację oraz wyznaczenie nowych pochodnych. Ten proces jest powtarzany do uzyskania zbieżności, mierzonej przez wielkość zmian funkcjonału lub stopień spełnienia warunków optymalności. Ze względu na prostotę algorytmu obliczeń i efektywność obliczeniową do optymalizacji wykorzystać można metodę sekwencyjnego programowania liniowego.

Prezentowany algorytm optymalizacji umożliwi dobór cech dynamicznych elektromechanicznych układów napędowych zapewniających zmniejszenie oddziaływań dynamicznych. Przeprowadzony eksperyment numeryczny, dla przyjętego układu napędowego, pozwolił na określenie optymalnych cech konstrukcyjnych układu, które powodują zmniejszenie wartości pikowych sił w parach kinematycznych od 20-40% amplitudy początkowej.

6. WNIOSKI

Przedstawiony w pracy sposób modelowania układu napędowego oraz algorytmy rozwiązywania zagadnień dynamicznych mają charakter ogólny i ze względu na numeryczny opis mogą uwzględniać w obliczeniach dowolny charakter związków fizycznych w parach kinematycznych i dowolny przebieg stanu obciążenia. Nieliniowe związki fizyczne opisują nieliniowości charakterystyk w parach kinematycznych układu napędowego, niedokładności eksploatacyjne i wykonawcze. Opracowany model dynamiczny uwzględni sprzężenie elektromechaniczne i pozwala na symulację komputerową zjawisk dynamicznych, występujących w parach kinematycznych układu napędowego dla różnych warunków początkowych. Pozwala więc na symulację defektów wykonawczych i eksploatacyjnych, która posłużyć może jako wzorcowy sygnał wyjściowy do badań diagnostycznych.

Przedstawiony algorytm optymalizacji cech dynamicznych układu jest efektywnym narzędziem wykorzystywanym w procesie projektowo-konstrukcyjnym i może być z powodzeniem stosowany do określania cech konstrukcyjnych rozważanej klasy układów napędowych.

LITERATURA

- [1] D. Bestle, P. Eberhard, 1992. Analyzing and Optimizing Multibody Systems. *Mech. Struct. and Mach.* 20(1), ss. 67-92.
- [2] R.T. Haftka, Z. Gürdal, M. P. Kamat, 1990. *Elements of Structural Optimization*. Kluwer, 396p.
- [3] E. J. Haug, K. K. Choi, V. Komkov, 1986. *Design Sensitivity Analysis of Structural Systems*. Academic Press, Inc.
- [4] Laschet, 1988. *Simulation von Antriebssystemen*. Springer-Verlag.
- [5] Mężyk, 2002. Optymalizacja własności dynamicznych układów napędowych maszyn. *ZN Pol.Śl. s. Mechanika*, z. 139, Gliwice.
- [6] Z. Rak, 1995. Modelowanie drgań giętno-skrętnych elektromechanicznych układów napędowych. Rozprawa doktorska, Politechnika Śląska w Gliwicach, Gliwice.
- [7] E. Świtoński, A. Mężyk, Z. Rak, 1991. *Dynamics of the Mining Machines Including Electromechanical Phenomena*. *Mechanizacja i Automatyzacja Górnictwa* nr 9-10, Katowice.
- [8] K. Bizoń, 2000. Dynamika stanów nieustalonych elektromechanicznych układów napędowych. Rozprawa doktorska. Politechnika Śląska, Gliwice.

MINIMIZING ELECTROMECHANICAL VIBRATIONS OF MACHINE SYSTEMS

Summary

The paper presents a way of modelling dynamic problems of electromechanical driving systems in machines. To obtain physical models of these systems, algorithms for sensitivity analysis and dynamic properties optimisation were developed. The developed models and algorithms were used to calculate the optimisation of the driving system in a combined cutter loader, assuming the objective function that leads to minimizing the values of maximum dynamic forces in kinematical pairs.

Keywords: vibrations, dynamic models

ONE-EQUATION TURBULENCE MODEL SOLUTION OF DEVELOPED PIPE FLOW

Václav Tesař

Process Fluidics Group, Dept. of Chemical and Process Engineering,
University of Sheffield, Mappin Street, Sheffield S1 3J, United Kingdom

Flow in constant cross section circular pipe is one of the basic shear flows. Somewhat surprisingly, considering the importance in engineering and the relative simplicity (no advective terms in the equations for the fully developed flow), no exact solution of the flowfield equations has been known until recently for the turbulent flow (as opposed to the well known Poiseuille solution for the laminar case). In 1994, the present author derived a closed form analytic solution using algebraic mixing-length model of turbulence. This remarkable result is unfortunately limited by the well-known weakness of the algebraic model: not taking into account the spatial transport of turbulence. As a result, the analytic solution fails in the paraxial region, where the transported turbulence dominates. The present paper improves upon the previous result by using a more advanced model of turbulence. No analytic solution has been known so far and the derived system of equations is here solved numerically – the earlier algebraic-model analytic solution serving as the wall functions, better than the usual logarithmic-law expressions. The present results provide a very instructive insight into various effects encountered in turbulence and taking of the same into account by progressively more advanced turbulence modelling.

Keywords: Turbulence, turbulence modelling, pipe flow, one-equation model

LIST OF SYMBOLS

c_z	[-]	turbulence dissipation rate coefficient,
c_v	[-]	eddy viscosity coefficient,
d	[m]	pipe diameter,
d^+	[-]	relative diameter in wall co-ordinates,
e_f	[J/kg]	specific energy of turbulent fluctuations,
e_f^+	[-]	relative value of fluctuation energy,
g^+	[-]	relative transverse gradient velocity,
l	[m]	integral scale of turbulence,
\bar{P}	[Pa]	time-mean pressure component,
ρ	[m ² /s ³]	turbulence production rate,
ρ^+	[-]	relative turbulence production rate,

Re	[-]	pipe flow Reynolds number,
Re_t	[-]	Reynolds number of turbulence,
v	[m ³ /kg]	specific volume,
w_m	[m/s]	maximum velocity in pipe cross section,
w_f	[m/s]	friction velocity,
w_{fw}	[m/s]	wall friction velocity,
u	[-]	relative velocity,
\bar{w}	[m/s]	time-mean velocity vector,
\bar{w}_1	[m/s]	time-mean longitudinal velocity component,
\bar{w}_2	[m/s]	time-mean transverse velocity component,
\mathbf{X}	[m]	position vector,
X_1	[m]	longitudinal (streamwise) distance,
X_2	[m]	transverse distance,
X_2^*	[-]	relative transverse distance in wall non-dimensionalisation,
ε	[m ² /s ³]	turbulence dissipation rate,
ε^*	[-]	relative turbulence dissipation rate,
κ	[-]	von Kármán constant,
λ	[-]	relative mixing length,
ν	[m ² /s]	viscosity,
ν_t	[m ² /s]	turbulent viscosity,
ξ_2	[-]	relative transverse co-ordinate,
∇	[1/m]	vector of spatial differentiation operators,
∇_1	[1/m]	longitudinal gradient operator,
∇_2	[1/m]	transversal gradient operator,
∇	[-]	operator of differentiation with respect to ξ_2 ,
$[\mathcal{P}_v]$	[1/s]	turbulent Prandtl momentum transport operator.

1. INTRODUCTION

Due to the complexity of turbulence, turbulent flows cannot be solved exactly and the solutions use approximate turbulence models. Problems with the modelling add to the general difficulty of fluid mechanics - the flows being described by partial differential equations, for which, as a rule, there are no closed form solutions. Practical flowfields are, therefore, mostly solved by approximate numerical solutions. The deficiency of this approach is not so much in the approximate character (precision may be increased at will - computer resources permitting - by using finer discretisation grids) but in the fact that the numerical solutions are not general. They are valid only for the particular set of boundary conditions for which the computation was performed. Thus, the results do not say anything about what would be obtained if any of the boundary conditions - or any of the assumptions used in the turbulence model - were changed.

Of particular value for understanding turbulent flows therefore are the cases in which the governing partial differential equations can be converted into ordinary differential equations, much easier to solve and leading to general solutions. There are

essentially two sorts of such flows. In one of them, the conversion is based upon mutual similarity of velocity profiles. Studies of these similarity solutions were undertaken in particular by Prandtl and his Göttingen school before WWII. Results were obtained for a considerable number of laminar shear flows and also for some turbulent flows with the simplest models of turbulence (cf. e.g. [1]). Later, with introduction of more complex models of turbulence, the similarity solutions fell out of fashion. Among the rare exceptions are e.g. the studies of turbulent jets with more advanced turbulence models published by the present author [3] and [8], [9], [10], [11]. This approach uses scaling related to the internal length scale of the flow.

Other cases leading to the ordinary differential equations are flows between the walls. Their solutions are less universal: there is a conflict between the inner scaling of the flow and the outer scaling dictated by the wall distances. Instead of the single velocity profile of a similarity solution, the graphical representation of the wall-bounded flow solution is a family of curves, dependent upon a parameter. The parameter is usually the Reynolds number of the flow (or an inner parameter like d^+ , related in some way to the Reynolds number).

An example of this second type of solutions is the developed turbulent flow in a constant cross-section circular pipe. Despite its obvious importance for applications, this flow still remains of theoretical interest and its fully satisfactory general solution is still sought. In 1990s the subject of a new approach (e.g. [6], [7]) became similarity solutions of the *second* or *incomplete* type involving dependences with non-integer and variable exponents of the length and velocity scales. Unfortunately, the published results of the new approach [6] fail to be convincing – the discussion and comparisons are presented in [4].

2. THE GOVERNING EQUATIONS

The equation describing the flow in a circular cross-section pipe is the balance of the streamwise specific momentum in the form valid for cylindrical geometry. The flow is slender enough for Prandtl's version of diffusion transport effects (neglect of longitudinal diffusion) to be applicable. It is assumed that turbulent eddies move in a stochastic manner, without a directional preference, so that turbulence may be considered isotropic, characterised by a scalar quantity - the turbulent viscosity μ_t . The orientations of the longitudinal co-ordinate X_1 and the transverse (radial) co-ordinate X_2 are shown in Fig.1.

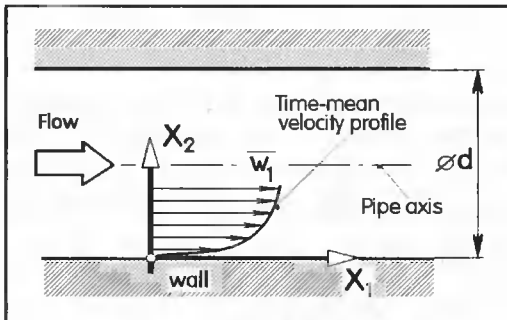


Fig. 1. Definition of the used co-ordinates and an example of a typical velocity profile

A. MOMENTUM TRANSPORT

The conditions of a slender shear flow justify the Prandtl approximation to the momentum transport equation. Using the turbulent form of the left-acting Prandtl transport operator

$$[\mathcal{P}_{\lambda}] = \nabla \bar{w} - \nabla_2 \lambda_1 \nabla_2 \quad (1)$$

the equation for the time-mean axial velocity (– specific momentum) may be written as

$$\bar{w}_1 [\mathcal{P}_{\lambda}] = -P \nabla_1 v - \bar{w}_1 \nabla_2 \frac{v_t}{d/2 - X_2}$$

- which may be expanded to:

$$\bar{w}_1 \nabla_1 \bar{w}_1 + \bar{w}_1 \nabla_2 \bar{w}_2 - \bar{w}_1 \nabla_2^2 v_t - (v_t \nabla_2)(\bar{w}_1 \nabla_2) = -\bar{P} \nabla_1 v - \bar{w}_1 \nabla_2 \frac{v_t}{d/2 - X_2}$$

The assumptions of fully developed parallel flow, $\bar{w}_1 \nabla_1 = 0$ and $\bar{w}_2 = 0$, simplify the equation to the following expression for the time-mean velocity profile $\bar{w}_1 = f(X_2)$:

$$-\bar{w}_1 \nabla_2^2 v_t - (v_t \nabla_2)(\bar{w}_1 \nabla_2) = -\bar{P} \nabla_1 v - \bar{w}_1 \nabla_2 \frac{v_t}{d/2 - X_2} \quad (3)$$

B. MODEL OF TURBULENCE

Equation (3) cannot be solved without application of a turbulence model. The model used here is based upon characterisation of turbulence by scalar quantity

$$v_t = w_t l \quad (4)$$

- the turbulent viscosity v_t [m^2/s], evaluated as a product of the characteristic velocity w_t of the large-scale, energetic turbulent motions, and of the length scale l of these motions.

The velocity scale w_t of turbulent fluctuations is evaluated from the computed spatial distribution of the specific energy e_f [m^2/s^2] of turbulent fluctuations

$$w_t = c_v \sqrt{e_f} \quad (5)$$

In equilibrium turbulence, the model constant c_v is shown in [1] to be

$$c_v = 0.548 \quad (6)$$

The equation modelling the spatial distribution of fluctuation energy e_f is the transport equation derived on the strength of an analogy with momentum transport eq. (2):

$$e_f [\mathcal{P}_{\lambda}] = \rho - \epsilon - e_f \nabla \frac{v_t}{d/2 - X_2} \quad (7)$$

The slender region assumptions justify the application of the Prandtl approximation and the use of the Prandtl transport operator on the left-hand side of the equation. In principle, the transport coefficient here may be different from v_t , but there is a positive experience e.g. in [3] with the use of the same coefficient as in eq. (2).

On the right-hand side, the first term \mathcal{P} [m^2/s^3] is the turbulence energy production rate

$$\mathcal{P} = (\bar{w}_1 \nabla_2)^2 v_t \quad (8)$$

the next term being the turbulence dissipation rate ϵ , evaluated from the distribution of the turbulence length scale l

$$\epsilon = c_\epsilon \sqrt{e_f^3} / l \tag{9}$$

It may be useful to treat the coefficient c_ϵ as an independent model constant, though in equilibrium turbulence, according to [1], there is $c_\nu = \sqrt[3]{c_\epsilon}$ and therefore it is plausible to use the value:

$$c_\epsilon = 0.165 \tag{10}$$

The last term on the right-hand side of eq. (7) represents the effect of radial divergence, the different (negative) sign when compared with analogous equation in e.g. [10] being due to the co-ordinate measured in Fig.1 from the wall – in opposite direction to the radius in the usual cylindrical co-ordinates.

Flowfield solutions with this model are possible only if the distribution of the length scale l in eq.(4) is known in the computation domain. This is generally not the case, but fortunately, for the present pipe flow problem such information is available from experimental investigations performed already in the thirties [2].

Applying the same decomposition for the Prandtl operator $[\mathcal{P}_i]$ as in eq.(1), it is possible to expand eq.(7) into

$$e_f \nabla_1 \bar{w}_1 + e_f \nabla_1 \bar{w}_2 - e_f \nabla_2^2 v_t - (v_t \nabla_2)(\bar{w}_1 \nabla_2) = (\bar{w}_1 \nabla_2)^2 - \epsilon - \frac{e_f \nabla_2 v_t}{d/2 - X_2} \tag{11}$$

The assumptions of fully developed parallel flow, $\bar{w}_1 \nabla_1 = 0$ and $\bar{w}_2 = 0$, (analogous to eq. (3)) then simplify this equation to

$$-e_f \nabla_2^2 v_t - (v_t \nabla_2)(\bar{w}_1 \nabla_2) = (\bar{w}_1 \nabla_2)^2 v_t - c_\epsilon \sqrt{e_f^3} / l - \frac{e_f \nabla_2 v_t}{d/2 - X_2} \tag{12}$$

In Fig.2, the diffusion transport of the specific fluctuation energy e_f is derived by direct evaluation of the balance of energy flux due to transverse gradient $e_f \nabla_2 = n$.

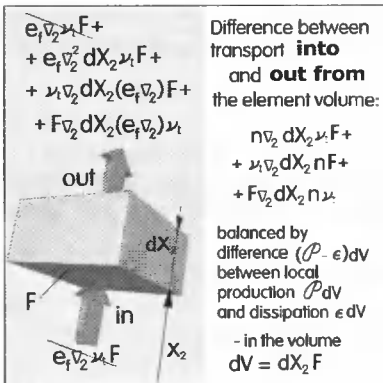


Fig. 2. Budget of the fluctuation energy e_f in a general fluid volume element. The difference between the production and dissipation equals the difference between the input and output transport by radial gradient diffusion

In the next Fig. 3 this is applied to a fluid element in the cylindrical pipe geometry. In particular, this derivation explains the minus sign in the radial divergence term.

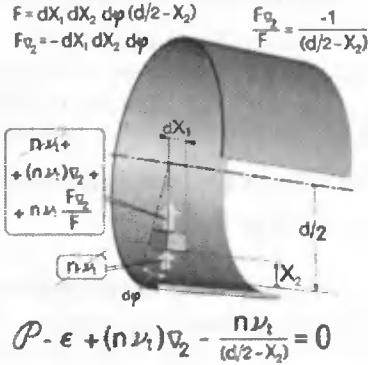


Fig. 3. The balance of fluctuation energy applied to a fluid element in a pipe. The expressions correspond to those in fig.2 divided by the volume of the element.

In both resultant transport equations, eq. (3) as well as (12), it is necessary to insert the turbulence model expression for the turbulent viscosity and its transverse gradient:

$$v_t = c_v \sqrt{e_f} l \tag{13}$$

$$v_t \nabla_2 = \frac{c_v e_f v_2}{2\sqrt{e_f}} l + \nabla c_v \sqrt{e_f} \tag{14}$$

As was already done in Figs. 2 and 3, the appearance of the equations is made simpler by introducing symbols for the gradients:

$$\overline{w}_1 \nabla_2 = g \tag{15}$$

$$e_f \nabla_2 = n \tag{16}$$

The equations to be solved are then:

$$-g \nabla_2 c_v \sqrt{e_f} l - \frac{c_v n}{2\sqrt{e_f}} gl - \nabla c_v \sqrt{e_f} g = -\overline{P} c_v v - g \frac{2}{d - 2X_2} c_v \sqrt{e_f} l \tag{17}$$

and

$$-n \nabla_2 c_v \sqrt{e_f} l - \frac{c_v n}{2\sqrt{e_f}} nl - \nabla c_v \sqrt{e_f} n = g^2 c_v \sqrt{e_f} l - c_v \sqrt{e_f}^3 / l - \frac{n}{d/2 - X_2} c_v \sqrt{e_f} l \tag{18}$$

3. NON-DIMENSIONALISATION

For generality, it is useful to convert the governing equations into dimensionless forms. The used relative variables are the "mixed" ones, a cross between the "inner" and "outer" non-dimensionalisations:

- the "inner" relative time-mean axial velocity is used

$$w_1^* = \overline{w}_1 / w_{tw} \tag{19}$$

non-dimensionalised by relating it to the wall friction velocity

$$w_{tw} = \sqrt{\tau_w \nu} \tag{20}$$

The quantity actually used in the equations is the corresponding relative transverse gradient of velocity

$$w_1^* \nabla = g^* \tag{21}$$

defined by differentiation

$$\nabla = \frac{\partial}{\partial \xi_2} \quad (22)$$

with respect to the “outer” transverse co-ordinate

$$\xi_2 = \frac{X_2}{d} \quad (23)$$

Also the non-dimensional specific energy e_f of turbulent fluctuations is now needed. It is defined as

$$e_f^+ = e_f / w_{tw}^2 \quad (24)$$

and its transverse gradient is non-dimensionalised to

$$e_f^+ \nabla = n^+ \quad (25)$$

efined in analogy to eq. (21) using the operator eq. (22).

Also, the turbulence length scale l is non-dimensionalised by relating it to the “outer”, dimension – the global dimension of the flowfield, in the present case the pipe diameter:

$$\lambda = \frac{l}{d} \quad (26)$$

Though in the corresponding terms in the governing eq. (17), turbulence production is evaluated using eq. (9), it may be useful for understanding of the resultant flowfield to study its spatial distribution, plotted using the non-dimensionalised form

$$\rho^+ = \frac{\rho v}{w_{tw}^4} \quad (27)$$

And similarly, while the turbulence dissipation is evaluated using eq.(8), it is useful to find from the results the non-dimensionalised form

$$\varepsilon^+ = \frac{\varepsilon v}{w_{tw}^4} \quad (28)$$

All the terms in eqs. (17) and (18) are first divided by $v_i = c_v \sqrt{e_f} l$. A force balance consideration on a lengthwise pipe segment leads to the relation which makes possible evaluation of the for the pressure gradient term in eq. (17)

$$-P \nabla_1 v = \frac{4}{d} w_{tw}^2 \quad (29)$$

Then, the non-dimensional forms are obtained by division of all terms by w_{tw}^2 / d . The resultant non-dimensionalised governing equations are:

$$\begin{cases} w_1^+ \nabla = g^+ \\ e_f^+ \nabla = n^+ \\ g^+ \nabla = -\frac{n^+ g^+}{2e_f^+} - \frac{\lambda \nabla g^+}{\lambda} - \frac{4}{c_v \sqrt{e_f^+} \lambda} + \frac{2g^+}{1-2\xi_2} \\ n^+ \nabla = -\frac{n^{+2}}{2e_f^+} - \frac{\lambda \nabla n^+}{\lambda} - g^{+2} + \frac{c_v e_f^+}{c_v \lambda^2} + \frac{2n^+}{1-2\xi_2} \end{cases} \quad (30)$$

To solve this set of equations, a distribution of the relative turbulence length scale $\lambda = f(\xi_2)$ is needed. In the present paper, eqs. (30) were integrated numerically using

the Nikuradse's [2] length scale distribution obtained from his experimental data, expressed by the fourth-degree polynomial:

$$\lambda = 0.4\xi_2 - 0.88\xi_2^2 + 0.96\xi_2^3 - 0.48\xi_2^4 \quad (31)$$

4. WALL FUNCTIONS BOUNDARY CONDITIONS

The present model of turbulence assumes high Reynolds number of turbulent motions Re_τ (cf. eq. (37) below). This assumption does not hold at and near the walls. To circumvent this problem, the wall function approach is used. The boundary conditions are not defined at the wall, but instead, at a location displaced a small distance away from the wall into the fluid, where the model assumptions are valid. Of course, the translated conditions are more complex than the wall conditions and are evaluated from relations called *wall functions*. In commercial software for turbulent flow computations, the usual set of wall functions is that derived from the zero pressure gradient flow past a flat plate. In the present case, however, more precise wall functions are available from this author's solutions obtained with the algebraic model.

The non-dimensional velocity gradient boundary condition at a relative distance ξ_2 (eq. (23) from the wall is found from the analytic closed form solution as:

$$g^+ = \frac{\sqrt{1 - 2\xi_2}}{\lambda} \quad (32)$$

Another value required at this translated location is the dimensionless fluctuation energy. Its value from the analytic closed form solution is

$$e_f^+ = \frac{(g^+)^2 \lambda^2}{c_v^2} \quad (33)$$

Using the analytic solution eq. (32), it is possible to re-write this as:

$$e_f^+ = \frac{1 - 2\xi_2}{c_v^2} \quad (34)$$

Finally, starting the numerical integration procedure for the set of eqs. (30) requires inserting the non-dimensional fluctuation energy gradient (eq. (25))

$$n^+ = -\frac{2}{c_v^2} \quad (35)$$

5. SOLUTION

Any standard library integration procedure (e.g. of the Runge-Kutta type) may be applied to solve eq. (30). The resultant radial distribution of the non-dimensional transverse velocity gradient g^+ is presented in logarithmic co-ordinates in Fig. 4. An important fact this result shares with the earlier analytic solution using the algebraic model is its universal character – the dependence is presentable as a single universal curve valid for any flow conditions.

This universality is lost if this result is integrated again to obtain the (non-dimensionalised) profiles of time-mean velocity. In contrast to just the single universal curve of Fig. 4, this leads to a family of infinitely many mutually differing velocity profiles, each valid for one magnitude of the wall shear stress, expressed here through the value of the non-dimensional pipe diameter d^+ .

Also shown in Fig.4 is the straight line asymptote

$$w_1^+ \nabla = \frac{1}{\kappa \xi_2} \tag{36}$$

which is the usual wall function expression derived for the zero pressure gradient on a flat plate. It is obviously a quite good approximation to the more precise result near the wall – which explains the success of wall functions used in numerical computations. Because of the present use of the Nikuradse’s expression eq.(31), the plotted line eq.(36) is based upon the value of the von Kármán constant $\kappa = 0.4$ (believed to be correct by Nikuradse and others in the 1930s). The line eq. (36) is also an asymptote to the curve of this author’s previous analytic algebraic-model solution eq.(32) – it was actually the one (rather than the standard wall function eq.(36)) that was now used for placement of the starting point of the numerical calculation at $X_2^+ = 25$.

The next Fig. 5 presents another result obtained in the integration: the solution of the transport equation for the non-dimensionalised specific energy of turbulent fluctuation. In the top diagram the heavy line of the present solution is compared with experimental data and also with this author’s previous algebraic-model solution (thin line). Also shown there is the asymptote (broken line) of the wall function derived from the zero pressure gradient flow in flat plate conditions. This represents, in the semi-logarithmic co-ordinates of Fig.5, the wall-side asymptotic line to both solutions. In the bottom diagram, it is the solution with the algebraic model of turbulence that represents such an asymptote (broken line) to the present results (heavy line).

Finally, in Fig. 6 the present results were used to evaluate the distribution of turbulent viscosity ν_t – the scalar quantity characterising turbulence in the used model. It is useful to express its ratio to the molecular viscosity ν of the fluid. This ratio is the Reynolds number of turbulence,

$$Re_t = \frac{\nu_t}{\nu} \tag{37}$$

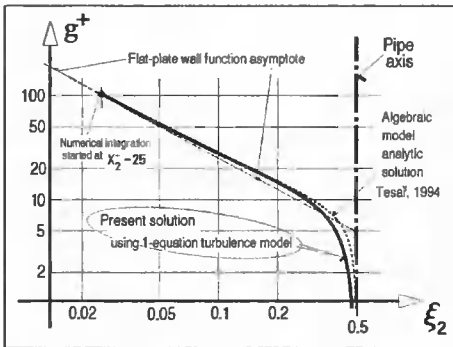


Fig.4. Distribution of the non-dimensional transverse gradient g^+ of axial time-mean velocity across the pipe radius, evaluated numerically for the present solution (using eq.(31) for the turbulence length scale.

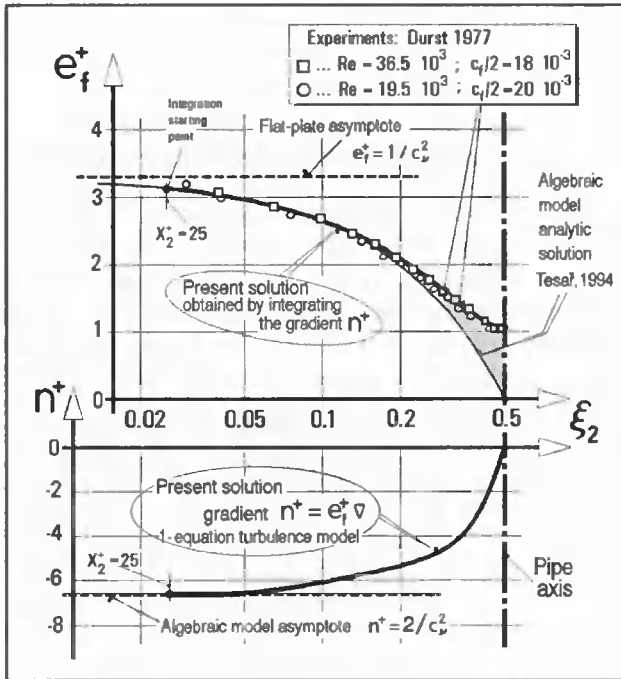


Fig. 5. The profile of non-dimensional turbulent energy fluctuations (top diagram) and their non-dimensional transverse gradient (bottom diagram). Both diagrams share the radial distance on the horizontal co-ordinate

The present results were compared with this author's previous analytic expression,

$$Re_t = d^+ \lambda \sqrt{1 - 2\xi_2} \tag{38}$$

as well as with the expression resulting from the zero pressure gradient flow past flat plate

$$Re_t = d^+ \kappa \xi_2 \tag{39}$$

Similarly, as with the velocity profiles, the profiles of turbulence Reynolds number are dependent upon dimensionless pipe diameter d^+ as the parameter. Unlike the velocity profiles, however, their shapes are mutually similar so that simple manipulation of the plotted variables – division by parameter d^+ – can convert them into a universal curve, as presented in Fig. 6. Again, the flat plate wall functions from eq.(39) represents the left-hand asymptotic line for the both the present solution as well as for eq.(38). In this case, there is already a discernible vertical difference between the standard wall function eq. (39) and eq. (38) at the beginning of the integration in $X_2 = 25$. This shows the algebraic-model solution for the pipe flow problem may provide a better wall function than the standard approach.

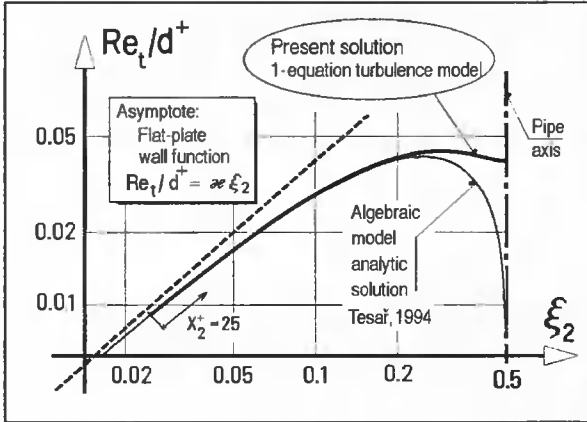


Fig. 6. The profile of the Reynolds number of turbulence Re_t , obtained from the present solution – compared with the earlier solution using the algebraic model and with the expression resulting from the standard wall functions.

6. CONCLUSIONS

In all the diagrams, Fig. 4 to Fig. 6, the present solution differs significantly from the earlier algebraic-model result only in the paraxial region (near to $\xi_2 = 0,5$). This is the region dominated by the turbulence transport, not accounted for by the algebraic model. The transport effects provide the explanation for some of the paradoxes that made the algebraic model solutions difficult to accept.

In the algebraic model, a local value of turbulent viscosity is proportional to the local transverse gradient of time-mean velocity. This works nicely near the walls, but produces zero turbulence on the pipe axis, where the velocity gradient is zero – as shown in Fig. 6. Since the length scale of turbulence there, according to eq. (31), is non-zero, this paradoxical result is to be interpreted as an absence of turbulent fluctuations on the pipe axis. This is contradictory to the experimental findings, as shown in Fig. 5. These indicate the fluctuation energy decreasing towards the local minimum as the axis is approached, but the value in the minimum is non-zero. This is now explained to be the consequence of the turbulent motion being transported towards the axis from the regions nearer to the pipe walls, where the fluctuations are more intense. The increase due to the transport is shown shaded in the top diagram in Fig. 5. As a result, also turbulent viscosity is seen to be non-zero on the pipe axis in Fig. 6.

Apart from this instructive demonstration of importance of turbulence transport, the present results also show instructively the meaning of standard wall functions as the asymptotic approximation to the solutions on the left-hand, near-wall end. The earlier algebraic-model solution for the pipe flow is seen to provide better wall function expressions for this particular flow case.

REFERENCES

- [1] V. Tesař, 1991. *Mezni vrstvy a turbulence (Boundary Layers and Turbulence, in Czech)*. Textbook ČVUT Praha, publ. by Ediční středisko ČVUT.

- [2] J. Nikuradse, 1932. Gesetzmässigkeit der turbulenten Strömung in glatten Rohren (Laws of Turbulent Flow in Smooth Pipes, in German) Forschung auf dem Gebiet des Ingenieur-Wesens, Nr. 361. VDI-Verlag, Berlin.
- [3] V. Tesař, 1996. Similarity Solutions of Basic Turbulent Shear Flows with One - and Two-Equation Models of Turbulence. GAMM Wissenschaftliche Jahrestagung '96. Praha, May.
- [4] V. Tesař, 1998. Similarity Laws for Turbulent Pipe Flow Proc. Topical Problems of Fluid Mechanics '98". p. 37, ISBN 80-85918-36-6, published by Inst. of Thermomechanics AS CR, Praha, Feb.
- [5] V. Tesař, 1997. Možnosti výuky moderních modelů turbulence využitím transformovaných řešení smykových oblastí (Using Transformed Shear Flow Solutions for Teaching Modern Turbulence Models – in Czech). Proc. of XVIth International Conf. of Departments of Fluid Mechanics and Thermodynamics, June, p.138-147, published by VUT Brno.
- [6] A. Yaglom, 1993. Similarity Laws for Wall Turbulent Flows: Their Limitations and Generalisations, in 'New Approaches and Concepts in Turbulence'. Eds.: Dracos and Tsinober, Birkhäuser, Basel.
- [7] G.I. Barenblatt. 1991. On the scaling laws (incomplete similarity with respect to Reynolds numbers) for the developed turbulent flow in tubes. C.R. Acad. Sci. Paris, Vol.313, Ser.II, p. 307, Paris.
- [8] V. Tesař, 1995. Two-Equation Turbulence Model Solution of the Plane Turbulent Jet. ACTA POLYTECHNICA Vol. 35, No.2 (ISSN 1210-2709), p. 19 - 42.
- [9] V. Tesař, 1996. The Solution of the Plane Turbulent Jet. ACTA POLYTECHNICA Vol. 36, No. 3 (ISSN 1210-2709), p. 15-41.
- [10] V. Tesař, J. Šarboch, 1997. Similarity Solution of the Axisymmetric Turbulent Jet Using the One-Equation Model of Turbulence. Acta Polytechnica Vol. 37, No. 3, (ISSN 1210-2709), p. 5-34.
- [11] V. Tesař, 2001. Two-Equation Turbulence Model Similarity Solution of the Axisymmetric Fluid Jet. Acta Polytechnica - Journal of Advanced Engineering, Vol.41, No.2, (ISSN 1210-2709), p.26.

ROZWIĄZANIE MODELOWE RÓWNIANIA TURBULENCJI OKREŚLONEJ JEDNYM RÓWNIANIEM DLA PRZEPLYWU ROZWINIĘTEGO

Streszczenie

Zagadnienie przepływu burzliwego jest bardzo złożone. Praktycznie pola przepływu są najczęściej rozwiązywane w sposób przybliżony numerycznie. Określono równania różniczkowe opisujące przepływ. Następnie wprowadzono współrzędne bezwymiarowe. Wyniki pokazano na wykresach. Metodą numeryczną określono bezwymiarowo turbulencję energii przepływu cieczy w rurze.

Słowa kluczowe: turbulencja, modelowanie przepływu burzliwego, model jednoosiowy

MODELOWANIE MATEMATYCZNE RUCHU WIRUJĄCEJ BRYŁY OSIOWOSYMETRYCZNEJ

Jan Titoni

Akademia Bydgoska im. Kazimierza Wielkiego,
Wydział Matematyki, Techniki i Nauk Przyrodniczych,
Instytut Techniki, 85-064 Bydgoszcz, ul. Chodkiewicza 30

W pracy przedstawiono koncepcję modelu fizycznego i matematycznego ruchu przestrzennego wirującej bryły osiowosymetrycznej. Ujęto opis ruchu w układach odniesienia związanych z Ziemią, wirującą bryłą, aerodynamicznym i związanym z trajektorią. Na tej podstawie określono związki kinematyczne prędkości kątowych i liniowych wirującej bryły w układzie współrzędnych związanych z Ziemią, stanowiące elementy pełnego modelu matematycznego ruchu przestrzennego rozpatrywanej wirującej bryły osiowosymetrycznej.

Słowa kluczowe: wirująca bryła osiowosymetryczna, związki kinematyczne

1. WSTĘP

Balistyka zewnętrzna to nauka rozpatrująca ruch obiektów w atmosferze ziemskiej przy założeniu, że znane są warunki początkowe ruchu, zależności pozwalające określić siły i momenty działające na obiekty w locie w funkcji parametrów ruchu oraz więzy nakładane na ten ruch [1].

Problem główny balistyki zewnętrznej, jakim jest określanie parametrów ruchu obiektów niekierowanych (balistycznych) w atmosferze ziemskiej, rozwiązywany jest przy założeniu, że obiekt balistyczny jest punktem materialnym o masie skupionej w środku masy, na który działają dwie siły, tzn. siła ciężkości i siła oporu czołowego. Przy takich założeniach ruch obiektu balistycznego można opisać następującym układem równań:

$$\left. \begin{aligned} \frac{dV}{dt} &= -\frac{X_a}{m} - g_0 \cdot \sin \Theta \\ \frac{d\Theta}{dt} &= -\frac{g_0}{V} \cdot \cos \Theta \\ \frac{dx_g}{dt} &= V \cdot \cos \Theta \\ \frac{dy_g}{dt} &= V \cdot \sin \Theta \end{aligned} \right\} \quad (1)$$

gdzie: $J = \frac{X_a}{m}$ - przyspieszenie oporu czołowego punktu materialnego,

V - wektor prędkości środka masy w ziemskim układzie współrzędnych.

$$V = \sqrt{V_{x_g}^2 + V_{y_g}^2 + V_{z_g}^2}$$

Θ - kąt nachylenia stycznej do toru.

Powyższy układ równań można rozwiązać znając warunki początkowe V_0 i Θ_0 oraz wartość przyspieszenia oporu czołowego, a ściślej biorąc związanego z nim współczynnika oporu czołowego.

Średnie dla określonych trajektorii przyspieszenie oporu czołowego wirującej bryły osiowosymetrycznej, traktowanej jako punkt materialny, wyznacza się doświadczalnie dla kilkudziesięciu użytkowych warunków początkowych (użytkowe zakresy prędkości początkowej i kątów rzutu). Po tak przeprowadzonym doświadczeniu na podstawie interpolacji wartości przyspieszenia oporu czołowego i po scałkowaniu równań ruchu punktu materialnego opracowuje się niezbędną dokumentację użytkową.

Oparta na takich podstawach procedura opracowywania dokumentacji użytkowej dynamiki lotu wirującej bryły osiowosymetrycznej jest kosztowna i pracochłonna. Nie-wielkie zmiany struktury obiektu wymuszają prowadzenie kosztownych doświadczeń na obiekcie rzeczywistym.

W tej sytuacji w ośrodkach naukowych takich jak Wojskowa Akademia Techniczna i Politechnika Warszawska, z którymi autor artykułu współpracuje od 1994 r. podjęto próbę opracowania koncepcji ujednoczonej metodyki modelowania i badania zjawisk fizycznych związanych z dynamiką lotu pocisków i rakiet.

2. MODEL FIZYCZNY I MATEMATYCZNY RUCHU WIRUJĄCEJ BRYŁY OSIOWOSYMETRYCZNEJ

2.1. Model fizyczny

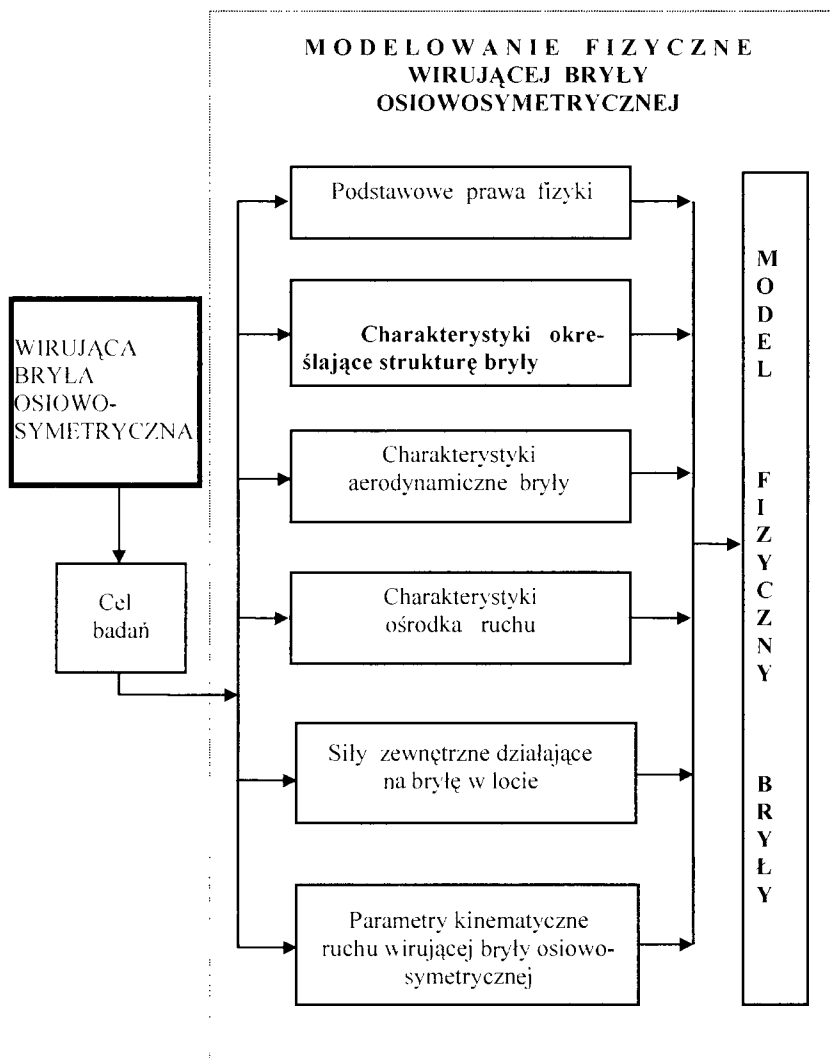
Model fizyczny jest to układ zbudowany z pojęć fizycznych dobranych na podstawie:

- znajomości podstawowych praw fizyki,
- znanej struktury obiektu,
- właściwości jego poszczególnych elementów,
- znajomości oddziaływania otoczenia zewnętrznego.

W procesie opracowywania modelu fizycznego przyjęto za podstawę *uogólnioną model obiektu balistycznego* [1,3], umożliwiającą formułowanie opisów matematycznych o różnym stopniu złożoności. W tej sytuacji przyjęto, że zbiór wielkości fizycznych charakteryzujących konstrukcję wirującej bryły osiowosymetrycznej, oddziaływanie ośrodka ruchu oraz związki przyczynowo-skutkowe występujące między tymi wielkościami związane są współczynnikami sił i momentów aerodynamicznych. Przyjęty schemat modelowania fizycznego przedstawiono na rysunku 1. Dla zbudowania modelu fizycznego niezbędne jest określenie lub przyjęcie:

- podstawowych praw fizyki;
- struktury obiektu:
 - charakterystyk geometrycznych (kształtu i wymiarów zewnętrznych),
 - charakterystyk masowych (rozkładu mas i masowych momentów bezwładności),
- charakterystyk ośrodka zewnętrznego: gęstości ρ , lepkości μ , temperatury T , ciśnienia p_{at} , w zależności od wysokości lotu;

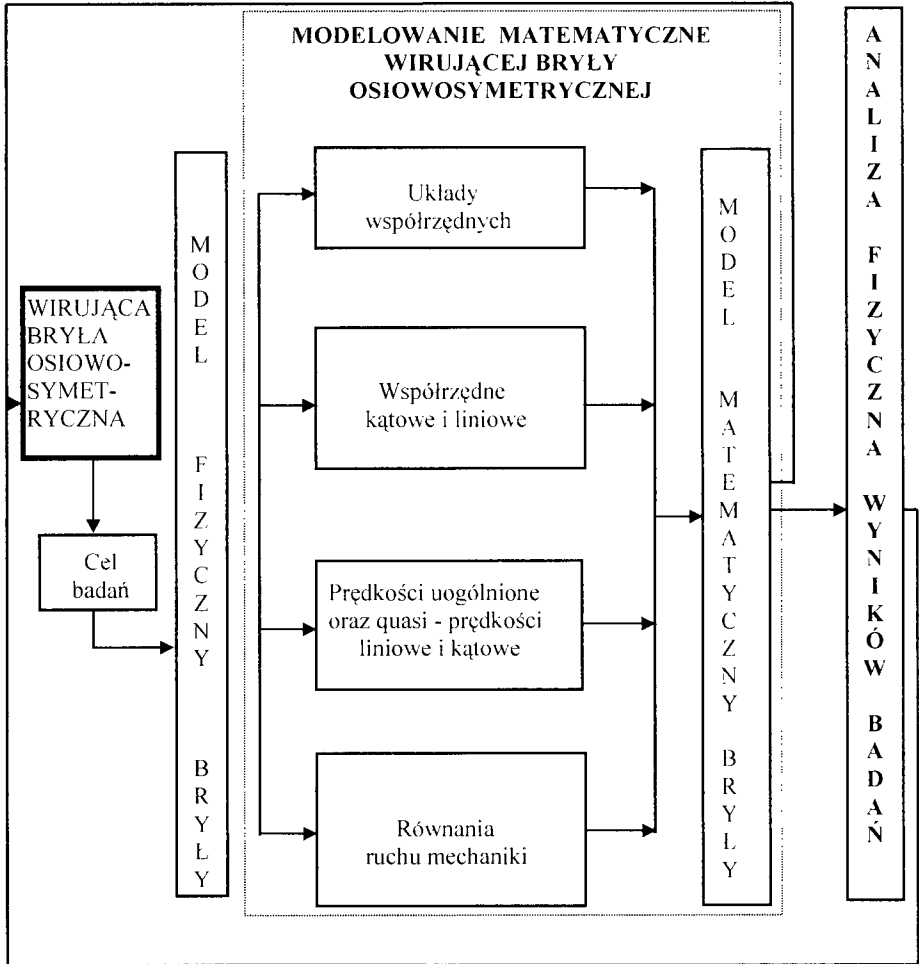
- sił zewnętrznych i momentów działających na bryłę tzn. składowych: siły grawitacji G sił aerodynamicznych R_A , momentów sił aerodynamicznych M_A ;
- więzów i parametrów kinematycznych ruchu pocisku:
 - kierunku i prędkości liniowej oraz kątowej ruchu pocisku,
 - kierunku i prędkości wiatru oraz jego rozkładu z wysokością,
 - więzów geometrycznych w chwili wylotu pocisku z lufy.



Rys. 1. Przyjęty schemat blokowy modelowania fizycznego ruchu wirującej bryły osiowosymetrycznej

2.2. Przyjęta procedura modelowania matematycznego ruchu przestrzennego wirującej bryły osiowosymetrycznej

Model matematyczny przyjętego modelu fizycznego wirującej bryły osiowosymetrycznej stanowi zestaw równań matematycznych opisujących właściwości dynamiczne modelu fizycznego po uprzedniej identyfikacji parametrycznej, polegającej na przyporządkowaniu pojęć fizycznych elementom struktury bryły i wyznaczeniu wartości parametrów występujących w równaniach modelu matematycznego.



2.2. Przyjęty schemat blokowy modelowania matematycznego ruchu wirującej bryły osiowosymetrycznej

Identyfikacja przeprowadzana jest na podstawie znanych informacji o wirującej bryle osiowosymetrycznej oraz znanych danych pomiarowych uzyskanych w wyniku badań doświadczalnych.

Prawa i równania mechaniki klasycznej pozwalają przełożyć zjawisko realnego ruchu wirującej bryły osiowosymetrycznej w przestrzeni na język matematyczny, tzn.

sformułować określony układ równań zwany modelem matematycznym ruchu, odzwierciedlający istniejącą rzeczywistość z określonym stopniem dokładności.

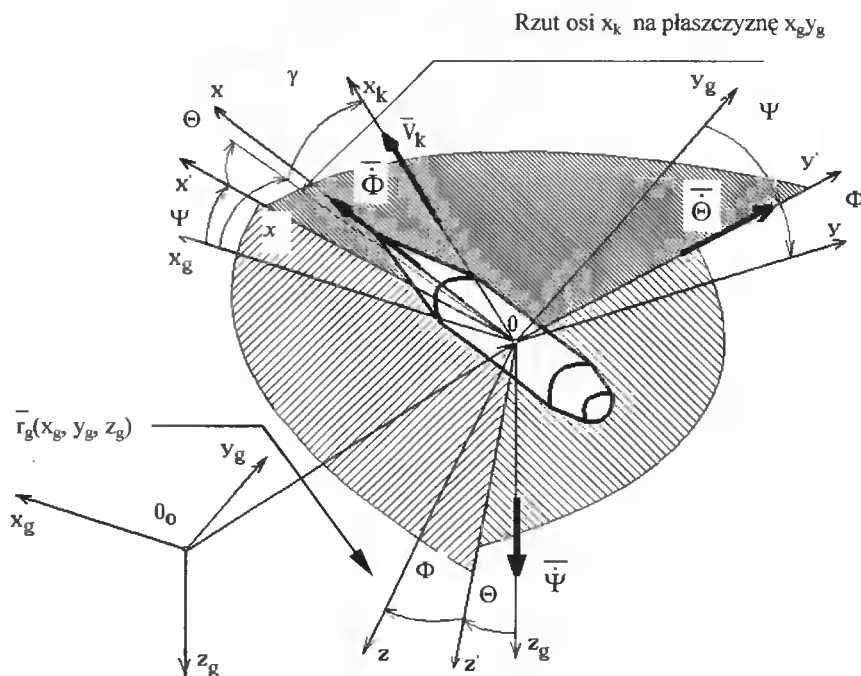
Modelując matematycznie ruch przyjęto, że wirująca bryła osiowosymetryczna jest obiektem:

- doskonale sztywnym,
- o stałej masie,
- swobodnym o sześciu stopniach swobody,
- którego ruch odbywa się w inercjalnym układzie współrzędnych,
- którego ruch odbywa się w warunkach normalnych (tabelarycznych).

Przyjęty schemat modelowania matematycznego ruchu wirującej bryły osiowosymetrycznej przedstawiono na rysunku 2.

2.3. Stosowane układy współrzędnych

Zjawisko ruchu wirującej bryły osiowosymetrycznej w czasie i przestrzeni można opisać jednoznacznie za pomocą współrzędnych liniowych i kątowych.



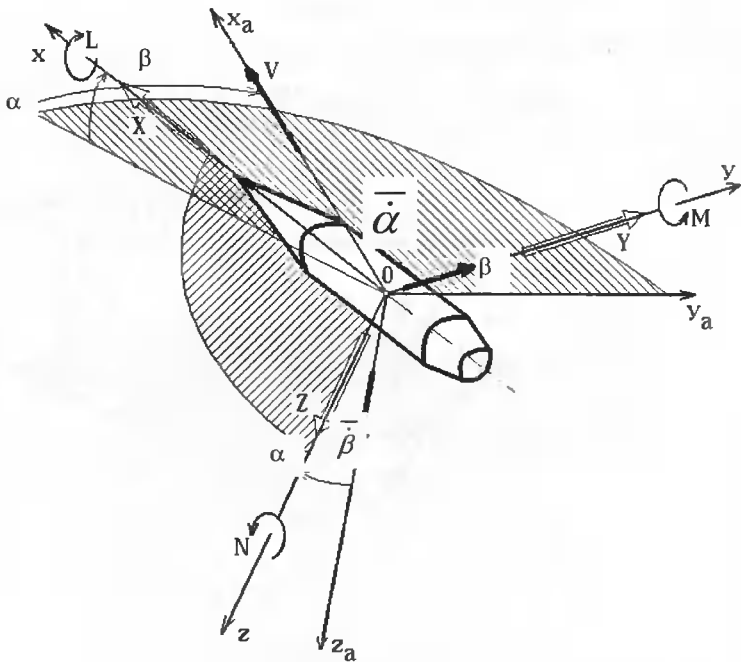
Rys. 3. Zastosowane układy odniesienia $O_0 x_g y_g z_g$, $O x_g y_g z_g$, $O x y z$ oraz współrzędne liniowe x_g, y_g, z_g i kątowe Ψ, Θ, Φ

W pracy do opisu dynamiki bryły przyjęto następujące układy odniesienia (rys. 3 i rys. 4) [2]:

- układ inercjalny, nieruchomy, związany z Ziemią $O_0 x_g y_g z_g$, w którym oś z_g skierowana jest w dół wzdłuż pionu lokalnego w punkcie O ,

- układ związany (ruchomy) $Oxyz$, sztywno związany z bryłą,
- układ grawitacyjny $Ox_gy_gz_g$ o początku ustalonym na bryle, równoległy do układu nieruchomego $O_0x_0y_0z_0$,
- układ aerodynamiczny (przepływowy) $Ox_a y_a z_a$ o początku ustalonym na bryle, w którym oś x_a skierowana jest zgodnie z wektorem prędkości ruchu bryły względem powietrza \bar{V} ,
- układ związany z trajektorią $Ox_k y_k z_k$ o osi x_k skierowanej wzdłuż wektora prędkości bryły względem Ziemi V_k oraz dowolnym rozmieszczeniu pozostałych osi.

Przyjęte układy współrzędnych do opisu ruchu wirującej bryły osiowosymetrycznej są układami prawoskrętnymi.



Rys. 4. Układ współrzędnych związanych z przepływem (aerodynamiczny) $Ox_a y_a z_a$. Składowe siły i momenty sił w układzie ruchomym

3. PRZYJĘTE ZWIĄZKI KINEMATYCZNE PRĘDKOŚCI LINIOWYCH I KĄTOWYCH WIRUJĄCEJ BRYŁY OSIOWOSYMETRYCZNEJ

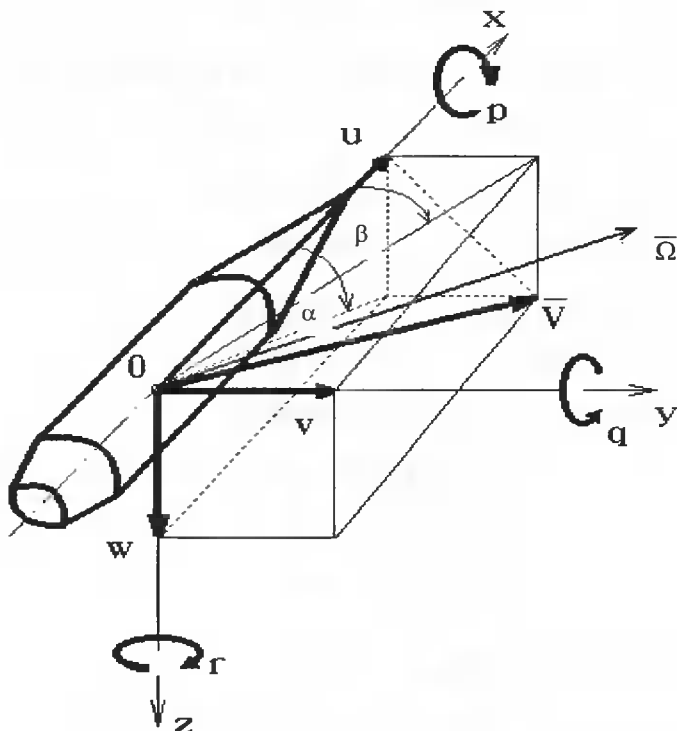
Położenie chwilowe wirującej bryły osiowosymetrycznej traktowanej jako ciało nieodkształcalne na torze określa się położeniem jej środka masy $\bar{r}_g(x_g, y_g, z_g)$ mierzonym względem inercyjnego układu odniesienia. Wielkości x_g, y_g, z_g opisujące chwilowe położenie środka masy (bieguna związanego z układem $Oxyz$) zwą się współrzędnymi liniowymi (rys. 3).

Współrzędne kątowe opisujące konfigurację układu $Oxyz$ sztywno związanego z bryłą względem grawitacyjnego układu odniesienia $Ox_gy_gz_g$ opisane są kątami obrotu: przechylenia Φ , pochylenia Θ oraz odchylenia Ψ (rys. 3).

Określono następujące składowe wektorów prędkości liniowej \bar{V}_{ok} i kątowej $\bar{\Omega}$ w układzie odniesienia $Oxyz$ sztywno związanym z wirującą bryłą osiowoosymetryczną:

- u_k, v_k, w_k - składowe chwilowej prędkości liniowej,

- p, q, r - składowe chwilowej prędkości kątowej.



Rys. 5. Przyjęte prędkości liniowe i kątowe wirującej bryły osiowoosymetrycznej

Związki kinematyczne między składowymi prędkości liniowej wirującej bryły osiowoosymetrycznej

$$\frac{dx_k}{dt}, \quad \frac{dy_k}{dt}, \quad \frac{dz_k}{dt}$$

mierzonymi w ruchomym układzie współrzędnych związanym z Ziemią $0x_g y_g z_g$ a składowymi prędkości

$$u_k, \quad v_k, \quad w_k$$

w układzie sztywno związanym z bryłą $0xyz$ są następujące:

$$\begin{bmatrix} u_k \\ v_k \\ w_k \end{bmatrix} = C_{I_k} \begin{bmatrix} \frac{dx_k}{dt} \\ \frac{dy_k}{dt} \\ \frac{dz_k}{dt} \end{bmatrix} \quad (2)$$

gdzie macierz transformacji C_{V_k} została określona w następujący sposób

$$C_{I_k} = \begin{bmatrix} \cos\Psi \cos\Theta & \sin\Psi \cos\Theta & -\sin\Theta \\ \sin\Phi \cos\Psi \sin\Theta + & \sin\Phi \sin\Theta \sin\Psi + & \\ -\sin\Psi \cos\Phi & \cos\Phi \cos\Psi & \sin\Phi \cos\Theta \\ \cos\Psi \cos\Phi \sin\Theta + & \sin\Psi \sin\Theta \cos\Phi & \cos\Phi \cos\Theta \\ +\sin\Psi \sin\Phi & -\cos\Psi \sin\Phi & \end{bmatrix} \quad (3).$$

Macierz transformacji $C_{V_k}^{-1}$ określono następująco

$$\begin{bmatrix} \frac{dx_k}{dt} \\ \frac{dy_k}{dt} \\ \frac{dz_k}{dt} \end{bmatrix} = C_{I_k}^{-1} \begin{bmatrix} u_k \\ v_k \\ w_k \end{bmatrix} \quad (4)$$

dla której $C_{V_k}^{-1}$ określono na podstawie zależności

$$C_{I_k}^{-1} = \begin{bmatrix} \cos\Theta \cdot \cos\Psi & \sin\Theta \cdot \cos\Psi \cdot \sin\Phi - & \sin\Phi \cdot \sin\Psi + \\ \cos\Phi \cdot \sin\Psi & \cos\Phi \cdot \sin\Theta \cdot \cos\Psi \\ \cos\Theta \cdot \sin\Psi & \sin\Theta \cdot \sin\Psi \cdot \sin\Phi + & \sin\Theta \cdot \sin\Psi \cdot \sin\Phi - \\ \cos\Psi \cdot \cos\Phi & \cos\Psi \cdot \sin\Phi \\ -\sin\Theta & \sin\Phi \cdot \cos\Theta & \cos\Theta \cdot \cos\Phi \end{bmatrix} \quad (5)$$

Związki kinematyczne między składowymi prędkości kątovej bryły a liniowymi prędkościami uogólnionymi wyrażają się za pomocą zależności

$$\begin{bmatrix} p \\ q \\ r \end{bmatrix} = C_{\Omega} \begin{bmatrix} \frac{d\Phi}{dt} \\ \frac{d\Theta}{dt} \\ \frac{d\Psi}{dt} \end{bmatrix} \quad (6)$$

gdzie macierz transformacji C_{Ω} określono następująco:

$$C_{\Omega} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & -\sin\Theta \\ 0 & \cos\Phi & \sin\Phi \cos\Theta \\ 0 & -\sin\Phi & \cos\Phi \cos\Theta \end{bmatrix} \quad (7)$$

W przypadku, gdy znane są quasi ciągłe prędkości kątowe

$$p, \quad q, \quad r$$

można określić uogólnione prędkości kątowe

$$\frac{d\Phi}{dt}, \quad \frac{d\Theta}{dt}, \quad \frac{d\Psi}{dt}$$

na podstawie zależności

$$\begin{bmatrix} \frac{d\Phi}{dt} \\ \frac{d\Theta}{dt} \\ \frac{d\Psi}{dt} \end{bmatrix} = C_{\Omega}^{-1} \begin{bmatrix} p \\ q \\ r \end{bmatrix} \quad (8)$$

dla której macierz transformacji C_{Ω}^{-1} jest następującej postaci

$$C_{\Omega}^{-1} = \begin{bmatrix} 1 & \operatorname{tg} \Theta \sin \Phi & \operatorname{tg} \Theta \cos \Phi \\ 0 & \cos \Theta & -\sin \Theta \\ 0 & \frac{\sin \Phi}{\cos \Theta} & \frac{\cos \Phi}{\sin \Theta} \end{bmatrix} \quad (9)$$

Związki między kątami natarcia i ślizgu a składowymi prędkościami liniowej wirującej bryły osiowosymetrycznej sformułowano w następującej postaci

$$\text{- kąt natarcia} \quad \operatorname{tg} \alpha_k = \frac{w_k}{u_k} \quad (10)$$

$$\text{- kąt ślizgu} \quad \sin \beta_k = \frac{v_k}{V_k} \quad (11)$$

$$\text{gdzie} \quad V_k = \sqrt{u_k^2 + v_k^2 + w_k^2} \quad (12)$$

W oparciu o zależności (8), (9) formułuje się następujące związki kinematyczne prędkości kątowych wirującej bryły osiowosymetrycznej w układzie współrzędnych związanych z Ziemią $0_0x_gy_gz_g$, w postaci:

$$\left. \begin{aligned} \frac{d\Theta}{dt} &= q\cos\Phi - r\sin\Phi \\ \frac{d\Psi}{dt} &= (q\sin\Phi + r\cos\Phi) \frac{1}{\cos\Theta} \\ \frac{d\Phi}{dt} &= p + q\sin\Phi \operatorname{tg}\Theta + r\cos\Phi \operatorname{tg}\Theta \end{aligned} \right\} \quad (13)$$

Natomiast w oparciu o zależności (4), (5) formułuje się związki kinematyczne prędkości liniowych wirującej bryły osiowoosymetrycznej w tym samym układzie

$$\left. \begin{aligned} \frac{dx_q}{dt} &= u_k \cos\Theta \cos\Psi + v_k (\sin\Phi \sin\Theta \cos\Psi - \cos\Phi \sin\Psi) + \\ &\quad + w_k (\cos\Phi \sin\Theta \cos\Psi + \sin\Phi \sin\Psi) \\ \frac{dy_q}{dt} &= u_k \cos\Theta \sin\Psi + v_k (\sin\Phi \sin\Theta \sin\Psi + \cos\Phi \cos\Psi) + \\ &\quad + w_k (\cos\Phi \sin\Theta \sin\Psi - \sin\Phi \cos\Psi) \\ \frac{dz_q}{dt} &= -u_k \sin\Theta + v_k \sin\Phi \cos\Theta + w_k \cos\Phi \cos\Theta \end{aligned} \right\} \quad (14)$$

Związki kinematyczne (13), (14) stanowią elementy pełnego modelu matematycznego ruchu przestrzennego rozpatrywanej wirującej bryły osiowoosymetrycznej.

LITERATURA

- [1] J. Gacek, 1997. Balistyka zewnętrzna. Cz.I i Cz.II. Wyd. WAT Warszawa.
- [2] J. Gacek, 1992. Modelowanie i badanie dynamicznych właściwości obiektów balistycznych. Wyd. WAT Warszawa.
- [3] J. Maryniak, 1987. Modelowanie fizyczne i matematyczne w dynamice obiektów ruchomych. Materiały XXVI sympozjum „MODELOWANIE W MECHANICE”, Nr 54, Gliwice-Kudowa.
- [4] Z. Osiński, 1994. Mechanika ogólna. WNT Warszawa.

MATHEMATICAL MODELLING OF ROTATIONAL MOVEMENTS OF AXIAL-SYMMETRICAL BODY

Summary

In this paper a conception of the physical and mathematical models of spatial movements of a rotational axial-symmetrical body is presented. The movements were described in the reference systems related to the Earth, the rotating body, the aerodynamic one and the one related to the trajectory. On this basis kinematic relations of angle and linear speeds of the rotating body were determined in the system of co-ordinates connected with the Earth, which are the elements of a complete mathematical model of space movement of the considered rotational axial-symmetrical body.

Keywords: rotational axial-symmetrical body, kinematics dependences

DYNAMICS OF DELAMINATED ELEMENTS OF COMPOSITE AND SMART STRUCTURES

Andrzej Tylikowski

Institute of Machine Design Fundamentals, Warsaw University of Technology
Narbutta 84, 02-524 Warszawa, E-mail address: aty@simr.pw.edu.pl

The purpose of this work is to show an influence of interlayer separations on dynamic behaviour of simple laminated elements of smart structures. A general bending - extensional model of the response of a simple laminated structure to excitation by a non-symmetric actuator made using piezoelectric elements is presented. Edge delamination is modelled by changing the effective length of debonded actuator. The analysis shows that the edge delamination has a harmful effect on the performance of piezoactuators, but the significant decrease of natural frequencies with an increase of delamination length is not observed. The dynamics and stability of rotating hybrid shafts with delamination is also presented. The composite thin-walled rotating shaft, treated as a symmetrically laminated shell, contains both the conventional (e.g. graphite or glass) angle-ply layers and the activated shape memory alloy fibres parallel to the shaft axis. The results indicate that the delamination moderately decreases the critical angular velocity.

Keywords: Composite structures, actuators, shape memory alloy fibres, delamination

1. INTRODUCTION

Delamination is one of the critical failure modes that can affect the load-carrying capacity and dynamical characteristics of laminated structures. Delamination can be initiated by impact, manufacturing defects, voids, etc. In smart structures, the presence of delamination causes reduction of the overall dynamic characteristics. Since most actuators for structural application are surface-mounted, delamination may be a common problem. The most often used actuators in composite structures are composed of surface piezolayers or layers made of shape memory alloy fibres.

Piezoelectric materials show great advantages as actuators in intelligent structures i.e. structures with highly distributed actuators, sensors, and processor networks. Piezoelectric sensors and actuators have been applied successfully in the closed loop control (Bailey and Hubbard, 1985, Newman, 1991). The beam vibration due to the excitation of a piezoelectric actuator has been modelled by Crawley and de Luis (1987) and Jie Pan et al. (1991). In particular, a comprehensive static model for a piezoelectric actuator glued to a beam has been presented. The relationship between static structural strains, both in the structure and in the actuator, and the applied voltage across the

piezoelectric was presented. This static approach was then used to predict the dynamic behaviour. As the shear modulus of bonding layers increases or the thickness of bonding layers decreases the shear lag becomes less significant and the shear stresses are transferred from actuators to the beam over small regions close to the piezoelectric ends. For the perfectly bonding layers the tangential stress distribution is described by the two Dirac-delta functions located at the piezoelement ends. High shear stresses can cause crack initiation and propagations in bonding layer, delamination or even total debonding of piezoelectric element. A dynamic model for a simply supported beam with a piezoelectric actuator glued to each of its upper and lower surfaces was developed (Crawley and de Luis, 1987). The model assumed the actuators to be perfectly bonded. It means that the bonding layer is sufficiently thin so that the shear of layer can be neglected. The effect of through-width delamination on the vibration characteristics of laminated beam without piezoactuators was studied by Mujumdar and Suryanarayan (1988). The influence of composite plate delamination on buckling of the debonded layers was discussed by Jiang and Bao (1996). The effects of delamination on the performance of piezoactuators which are surface-mounted on a cantilever beam assuming a pure bending model and the mass per unit area of the piezoelement and the beam equal to one was investigated by Sung and Jones (1992). It was shown that the edge delamination significantly decreases the coupling performance of piezoactuators. A fracture analysis for determining the delamination growth in the composite shells was performed by Chang and Kutlu (1990).

In the present paper, a bending - extensional dynamic model of the beam-bonding layer-actuators system is proposed. The pure extensional strain in the piezoelectric elements and the massless bonding layers are assumed. The dynamic extensional strain on the beam surface is calculated by including the free stress conditions at the piezoelectric actuator boundaries, by considering the dynamic coupling between the actuator and the beam, and by taking into account a finite bonding layer with the finite stiffness. The approach has been used by present author (Tylikowski, 1993) to derive a control strategy especially useful in collocated sensor-actuator systems. The used dynamic equations can be reduced to the particular cases from past studies, which were based on the assumption of static coupling between the actuator and the beam or assuming the perfect bonding in dynamical analysis.

The Shape Memory Alloy (SMA) hybrid composites are a class of materials capable of changing both their stiffness through the application of in-plane loads and their elastic properties. The stiffness modification occurs as a result of the thermally induced martensite phase transformation of the SMA fibres which are embedded in standard laminated composite structures. The Young's modulus of the nitinol (Nickel-titanium alloys), which is an example of such a material, increases 3 to 4 times when the temperature changes from the martensite phase to the austenite phase). Comprehensive studies of eigenfrequency and eigenfunctions of the SMA hybrid adaptive panels with uniformly and piecewise distributed actuation have been presented by Rogers et al. (1990). One of the first studies applying the direct Liapunov technique to the rotating shaft stability analysis was a paper by Tylikowski, (1997), in which the closed form analytical criteria were derived. The dynamic stability criterion of rotating composite shafts subjected to a plain axial force was reduced to effective algebraic inequality. Influence of thermoactive fibres on dynamic stability of perfect composite shells was investigated by Tylikowski (1998).

This work investigates dynamic stability of composite shafts with circumferential delamination and hybrid composite shafts with circumferential delamination between the active and passive layers.

2. EFFECTS OF PIEZOACTUATOR DELAMINATION

Consider the elastic beam with the identical piezoelectric layers mounted on each of two opposite sides. The analysis is based on the Euler-Bernoulli theory. The beam is assumed to be simply supported at the ends. Due to the geometry the beam is divided into four parts. In the first and fourth part the beam is described by a beam equation, in the second part the piezoactuators are glued to the beam and in the fourth part, with delamination across the beam, the piezoactuator is mounted on the upper side. Therefore, in the second and third section we have coupled equations of the beam and piezoactuators. We assume simply supported boundary conditions imposed on the solutions at both edges and the continuity of deflection, slope, curvature and transverse force at joints as well as the zero normal stresses at the ends of actuators. Assuming a harmonic excitation with a constant angular velocity steady-state response of dynamic equations of motions is sought as harmonics with the same angular velocity. Solving the boundary value problem we obtain the solution in an analytical form (Tylikowski, 2001).

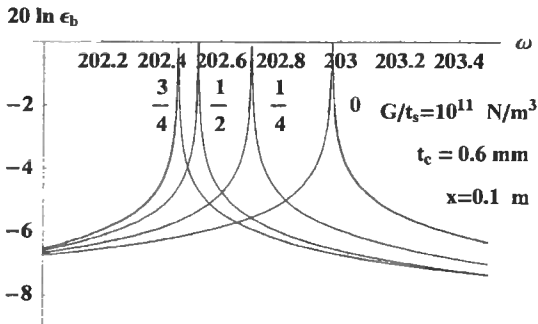


Fig. 1. Details of near field beam transverse response at $x=0.1 \text{ m}$ in the first resonance

Numerical calculations based on analytical solutions of the boundary value problem described in the previous section are performed for a wide range of angular frequency. More precisely, $\omega = 0.1 \text{ 1/s}$ for the static loading, in the first beam resonance region $\omega = 206 \text{ 1/s}$, and for high frequency $\omega = 1850 \text{ 1/s}$. The dimensions of the steel beam are $l=0.38 \text{ m}$, width $b=0.04 \text{ m}$, thickness $t=0.002 \text{ m}$. The piezoelectric actuators are located between $x_1=0.079 \text{ m}$ and $x_2=0.117 \text{ m}$. The centre of the piezoelectrics is located at $x=0.098 \text{ m}$. The parameters of the beam and piezoelectric elements are listed in Table 1. The length of delamination of the lower actuator is half of the actuator. The piezoactuator (PZT-1195) thickness $t_p = 0.6 \text{ mm}$.

Table 1. Material parameters used in calculations

Material		Beam - steel	Actuator – PZT - 1195
Density	kg/m ³	7800	7275
Young's modulus	Pa	21.6 x 10 ¹⁰	63x10 ⁹
Thickness	m	0.002	0.0006
Piezoelectric const.	m/V	-	1.9 x 10 ⁻¹⁰

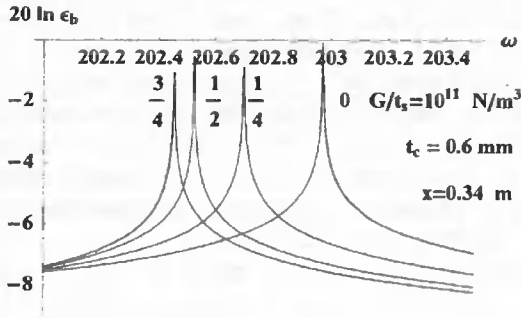


Fig. 2. Details of far field beam transverse response at $x=0.34$ m in the first resonance

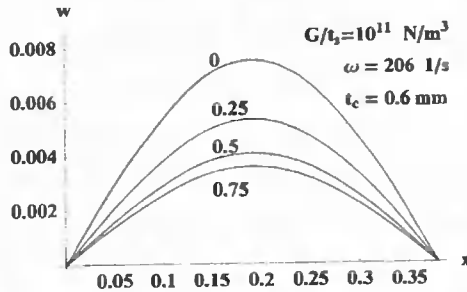


Fig. 3. Spatial beam displacement vs. relative delamination length for stiff bonding layer

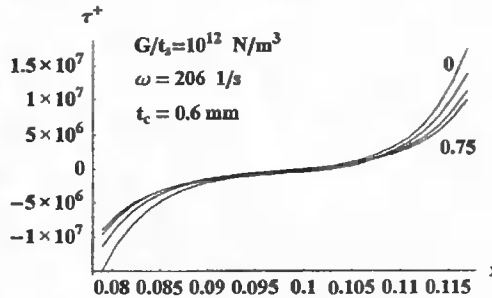


Fig. 4. Shear distribution in the upper bonding layer (no delamination) at $\omega=206$ 1/s

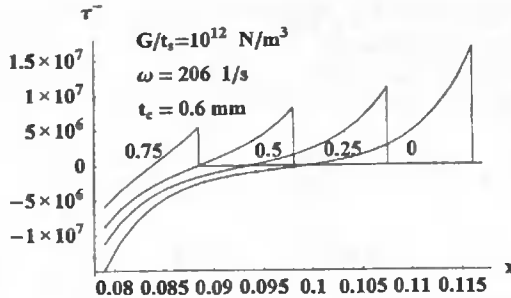


Fig.5. Shear distribution in the lower bonding layer (delamination) at $\omega=206 \text{ 1/s}$

Figures 1-5 show the comparison of beam responses to cyclic piezoelectric strains applied to the piezoelectric actuators bonded to the beam with and without delamination. Calculations show that the increase of delamination decreases transfer functions between voltage applied to the piezoactuators and displacement of a fixed point of the beam. The upper curves represent the transverse displacements of the beam with perfect bonding, the lower correspond to the presence of delamination.

2. INFLUENCE OF DELAMINATIONS ON STABILITY OF ROTATING COMPOSITE SHAFTS

Effects on eigenfrequency due to delamination in a composite rotor were studied by Wettergren (1997). The influence of position and varying size of imperfection on the eigenfrequency is examined using a finite element model of cylindrical shaft. Consider a general model of laminated hybrid rotating shaft with circumferential delamination (Tylikowski, 2002). The shaft is treated as a thin-walled composite cylindrical shell. The delamination of constant width is parallel to the shell reference surface and it covers the entire circumference. The edge delamination is modelled by changing the effective reduced stiffness of debonded parts. The stabilizing effect of external damping and destabilizing effect of internal damping are taken into account in the dynamic stability analysis. The purpose of this theoretical work is to present a general model of laminated rotating shaft with circumferential delamination. The shaft is treated as a thin-walled composite cylindrical shell. The delamination of constant width is parallel to the shell reference surface and it covers the entire circumference. The edge delamination is modelled by changing the effective reduced stiffness of debonded parts. The stabilizing effect of external damping and destabilizing effect of internal damping are taken into account in the dynamic stability analysis. The influence of the relative delamination length and configuration on the critical angular velocity of shaft is shown.

The shaft is treated as a thin laminated shell of the length l , the mean radius R and the total thickness h consisting of an odd number of equal thickness orthotropic layers symmetrically cross-ply arranged about its midsurface. The Kirchhoff hypothesis on non-deformable normal element is assumed. Rotary and coupling inertias are neglected. The motion of the shell is composed of a rotary motion with a constant angular velocity and the relative motion described by vector components in tangential circumferential, and radial direction, respectively. The rotating coordinate system is connected with a non-deformed midsurface of the shell. It is assumed that in the vibrating shaft the

delamination of the length d does not expand and bending stiffness is described by step function of the longitudinal coordinate x . The position in the radial direction is given by s measured from the external shell surface. The dynamic equations of shell motion are given in the following form

$$u_{,tt} + 2\beta u_{,t} - a_{11}u_{,xx} - a_{66}u_{,yy} - (a_{12} + a_{66})v_{,xy} - \frac{a_{12}}{R}w_{,x} = 0 \quad (1)$$

$$v_{,tt} + 2\Omega w_{,t} - \Omega^2 v + 2\beta v_{,t} + 2\beta_e \Omega w - (a_{12} + a_{66})u_{,xy} - a_{66}v_{,xx} - a_{22}v_{,yy} + \frac{a_{22}}{R}w_{,y} = 0 \quad (2)$$

$$w_{,tt} - 2\Omega v_{,t} - \Omega^2 w + 2\beta w_{,t} + 2\beta_e \Omega v + \frac{a_{12}}{R}u_{,x} + \frac{a_{22}}{R}v_{,y} - R^2 \Omega^2 w_{,yy} + d_{11}w_{,xxx} + 2(d_{12} + d_{66})w_{,xyy} + d_{22}w_{,yyy} + \frac{a_{22}}{R^2}w = 0 \quad (x, y) \in D \equiv (0, l) \times (0, 2\pi R) \quad (3)$$

where a_{11}, \dots, a_{66} are the membrane and the bending stiffness of the composite, β_1 , and β_e are reduced damping coefficients in relative and absolute motion, respectively, and

ρ is the mean density of the shell material, $\beta = \beta_1 + \beta_e$.

The shell is assumed to be simply supported with axially movable ends at $x=0$ and $x=l$. We have also continuity conditions at $y=0$ and $y=2\pi R$ as the considered shell is a closed shell.

$$V = \frac{1}{2} \int_D \left[(u_{,t} + 2\beta u)^2 + (v_{,t} + 2\beta v)^2 + (w_{,t} + 2\beta w)^2 + u_{,t}^2 + v_{,t}^2 + w_{,t}^2 - 2\Omega^2 (v^2 + w^2) + 2 \left[a_{11}u_{,x}^2 + a_{22} \left(v_{,y} + \frac{w}{R} \right)^2 + 2a_{12}u_{,x} \left(v_{,y} + \frac{w}{R} \right) + a_{66} \left(u_{,y} + v_{,x} \right)^2 + d_{11}w_{,xx}^2 + 2d_{12}w_{,xx}w_{,yy} + d_{22}w_{,yy}^2 + 4d_{66}w_{,xy}^2 \right] + 2R^2 \Omega^2 w_{,y}^2 \right] dD \quad (4)$$

In order to examine the Liapunov stability an energy-like functional is introduced. The functional is positive-definite if the angular velocity is sufficiently small. Then, the measure of distance between arbitrary motion and the trivial one can be chosen as the square root of the Liapunov functional. As the shell is used to model the rotating transmission shaft with the large aspect ratio ($l/R \gg 1$) bending modes of vibration dominate. Using results of variational calculus it found a constant δ satisfying the following inequality

$$\int_D (d_{11}w_{,xx}^2 + 2d_{12}w_{,xx}w_{,yy} + d_{22}w_{,yy}^2 + 4d_{66}w_{,xy}^2) dD \geq \delta \int_D w^2 dD \tag{5}$$

The time-derivative of Liapunov functional along solutions of the dynamics equation is given by

$$\begin{aligned} \frac{dV}{dt} = & -2\beta \int_D [u_{,t}^2 + (v_{,t} - \Omega\sqrt{\varepsilon}w)^2 + (w_{,t} + \Omega\sqrt{\varepsilon}v)^2 - \Omega^2(1 + \varepsilon^2)(v^2 + w^2) + \\ & + a_{11}u_{,x}^2 + a_{22}\left(v_{,y} + \frac{w}{R}\right)^2 + 2a_{12}u_{,x}\left(v_{,y} + \frac{w}{R}\right) + a_{66}(u_{,y} + v_{,x})^2 + d_{11}w_{,xx}^2 + \\ & + 2d_{12}w_{,xx}w_{,yy} + d_{22}w_{,yy}^2 + 4d_{66}w_{,xy}^2 + R^2\Omega^2w_{,y}^2] dD \end{aligned} \tag{6}$$

where $\varepsilon=(\beta_i/\beta)^2$. The critical parameter $R^2\Omega^2$ can be found by examining the positive-definiteness of the functional time-derivative. Using a standard stability analysis the stability is equivalent to positiveness of the following matrix

$$G = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{12} \\ a_{12} & a_{22} - R^2\Omega^2(1 + \varepsilon) & a_{22} \\ a_{12} & a_{22} & a_{22} + \delta R^2 - R^2\Omega^2\varepsilon \end{vmatrix} \tag{7}$$

The critical angular velocity of rotating shaft with seven graphite-epoxy cross-ply layers is calculated using Sylvester conditions to the matrix (7). The critical parameter $R^2\Omega^2$ depends on the relative delamination length Δ and the relative radial position s/h . The dimensions of the graphite-epoxy shell are $l=1$ m, $R=0.03$ m, $h=0.005$ m. For an orthotropic lamina the engineering constants are $E_L = 2.11 \cdot 10^{11}$ Pa, $E_T = 0.053 \cdot 10^{11}$ Pa, $G_{\{LT\}} = 0.026 \cdot 10^{11}$ Pa, $\nu_{LT} = 0.25$, $\rho = 1560$ kg/m³. The damping ratio ε is equal to 0.5.

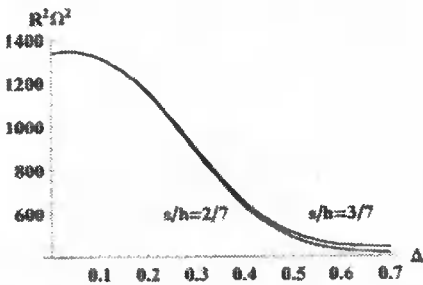


Fig. 6. Critical stability parameter vs. the relative delamination length and the radial position

It is seen that the delamination length is mainly responsible for the decrease of the critical parameter.

3. INFLUENCE OF DELAMINATION ON STABILITY OF ROTATING SHAFTS WITH THERMOACTIVE FIBRES

The shaft is treated as a thin laminated shell of the length l , the mean radius R and the total thickness h consisting of an odd number of equal thickness orthotropic layers symmetrically cross-ply arranged about its midsurface. The Kirchhoff hypothesis on non-deformable normal element is assumed. Rotary and coupling inertias are neglected. In the present paper the hybrid shell is treated as a thin laminated shell consisting of both an even number of equal thickness conventional orthotropic layers cross-ply symmetrically arranged about its midsurface and two (inner and outer) plies with SMA fibres parallel to the shell axis. The motion of the shell is compound of a rotary motion with a constant angular velocity Ω and the relative motion described by vector components u, v, w in tangential, circumferential, and radial direction, respectively.

The shell is assumed to be simply supported with axially movable ends at $x=0$ and $x=l$. We have also continuity conditions at $y=0$ and $y=2\pi R$ as the considered shell is a closed shell. It is assumed that in the vibrating shaft the delamination of the relative length Δ does not expand and bending stiffness is described by step function of the longitudinal coordinate x . A one-sided delamination is located between the first outer active layer and the rest of the shell and it spans the entire circumference. The dynamic equations in relative motion have the trivial solution $u=v=w=0$. The purpose of the present section is to examine the influence of edge delamination on the stability region expressed by angular a critical velocity.

The critical angular velocity of rotating shaft with seven symmetrical cross-ply layers is calculated using Sylvester conditions to the matrix G . The critical parameter $R^2\Omega^2$ depends on the relative delamination length Δ . The dimensions of the graphite-epoxy shell and the graphite-epoxy properties are the same as in the previous section.

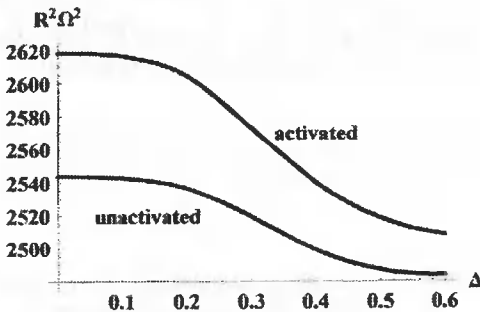


Fig. 7. Critical parameter vs. relative delamination length

The damping ratio ε is equal to 0.5. It is seen that the delamination length is mainly responsible for the decrease of the critical parameter. Engineering constants of the SMA-epoxy layer in the inactive and active state are equal, respectively: $E_L=(19.3, 41.9) \cdot 10^{11}$ Pa, $E_T=(17.3, 20.9) \cdot 10^{11}$ Pa, $G_{LT}=(6.43, 7.54) \cdot 10^{11}$ Pa. The influence of the delamination length on the critical parameter in inactive and active state is shown in Fig. 7. Stability domains for the rotating hybrid shell with the five conventional composite symmetrical balanced angle-ply plies and the external two SMA fibre reinforced epoxy plies are calculated. e. Numerical calculations based on the previous

section are performed for the graphite-epoxy/nitinol-epoxy shell in the inactivated martensite phase ($T = 40^{\circ}\text{C}$) and in the activated austenite phase ($T = 60^{\circ}\text{C}$).

5. CONCLUSIONS

Dynamic models have been developed which are able to predict the response of structures driven by the piezoelectric actuators and the SMA thermoactive fibres. The models are used to examine the influence of delamination on the dynamic characteristics of the structure with active part. The increase of edge delamination decreases magnitude of transfer functions between the applied voltage to piezoactuators and stability regions of the rotating shafts with active layers. The presented analytical models are handy tools to the fast introductory obtaining the dynamic characteristics in the presence of interlayer separation in composite structures.

REFERENCES

- [1] T. Bailey, J.E. Hubbard, 1985. Distributed piezoelectric-polymer active vibration control of a cantilever beam, *Journal of Guidance, Control and Dynamics*, 8, ss. 605-611.
- [2] F.K. Chang, Z. Kutlu, 1990. Delamination Effects on Composite Shells, *Trans. ASME, J. Eng. Materials and Technology*, 112, ss. 336-340.
- [3] Crawley, E.F., and de Luis, J., Use of piezoelectric actuators as elements of intelligent structures, *AIAA J.*, 25, 1987, 1373-1385.
- [4] W. Jiang, G. Bao, 1996: Delamination induced buckling in orthotropic plate structures. *Proceedings of the ASME Aerospace Division, AD- 52, ASME*, ss. 31-38.
- [5] C.H. Jie Pan, Hansen, S.D. Snyder, 1991. A study of the response of a simply supported beam to excitation by piezoelectric actuator, In: C. A. Rogers, and C.R. Fuller (eds.), *Recent Advances in Active Control of Sound and Vibration*. Technomic Publishing, Lancaster-Basel, ss. 39-49.
- [6] P.M. Mujumdar, S. Suryanarayan, 1988. Flexural vibrations of beams with delaminations. *Journal of Sound and Vibrations*, 125, ss. 441-461.
- [7] M. J. Newman, 1991. Distributed active vibration controllers, In: C. A. Rogers, and C. R. Fuller (eds.), *Recent Advances in Active Control of Sound and Vibration*. Technomic Publishing, Lancaster-Basel, ss. 579-592.
- [8] Sung Jin Kim, J.D. Jones, 1992. Effects of piezo-actuator delamination on the performance of active noise and vibration control systems. *DSC 38, Active Control of Noise and Vibration*. ASME, ss. 213-221.
- [9] C.A. Rogers, C.P. Fuller, C. Liang, 1990. Active Control of Sound Radiation From Panels Using Embedded Shape Memory Alloy Fibers. *Journal of Sound and Vibration*, 136, ss. 164-170.
- [10] A. Tylikowski, 1993. Stabilization of beam parametric vibrations, *Journal of Theoretical and Applied Mechanics*, 31, ss. 657-670.
- [11] A. Tylikowski, 1997. Influence of torque on dynamic stability of composite thin-walled shafts with Brazier's effect. *Journal of Mechanics and Mechanical Engineering*, 1, ss. 145-155.
- [12] A. Tylikowski, 1998. Dynamic stability of rotating composite shells with thermoactive shape memory alloy fibers. *J. Thermal Stresses*, 21, ss. 327-339.

- [13] A. Tylikowski, 2001. Effects of piezoactuator delamination on the transfer functions of vibrations control systems. *Int. J. Solids and Structures*, 38, ss. 2189-2201.
- [14] A. Tylikowski, 2002. Flexural vibrations of rotating shafts with delaminations. *Proceedings in Applied Mathematics and Mechanics*, 1, ss. 91-92.
- [15] H.L. Wettergren, 1997. Delamination in composite rotors. *Composites Part A*, 28A, ss. 523-527.

DYNAMIKA ROZWARSTWIANIA ELEMENTÓW STRUKTUR KOMPOZYTOWYCH I MYŚLĄCYCH

Streszczenie

W artykule przedstawiono wpływ oddzielania się warstw struktury kompozytowej. Uwzględniono działanie piezoelektryczne układu myślącego. Wykonano też analizę stateczności wirującego wału wykonanego z kompozytu. Stwierdzono, że delaminacja zmniejsza krytyczną prędkość kątową.

Słowa kluczowe: kompozyty, elementy wykonawcze, włókno z pamięcią stopową, rozwarstwienie

ANALIZA WIBROAKUSTYCZNYCH USTROJÓW WYCISZAJĄCYCH

Krzysztof Wernerowski

Katedra Mechaniki Stosowanej, Wydział Mechaniczny ATR
ul. prof. S. Kaliskiego 7, 85-796 Bydgoszcz

W artykule analizowano możliwości działania wibroakustycznego w zakresie pochłaniania hałasu i ograniczania propagacji fal akustycznych. Ustroje mechaniczno-akustyczne zapewniają izolacyjność i wyciszanie również w zakresie niskich częstotliwości. Przedstawiona konstrukcja złożona umożliwia zmniejszenie zużycia materiałów.

Słowa kluczowe: akustyczne, rezonans, izolacyjność, wyciszanie

1. WPROWADZENIE

Działanie wibroakustycznych ustrojów wyciszających [5-8] polega na materialnym pochłanianiu z efektami odbijania, mechanicznym zginaniu płyt i rezonansowym działaniu warstwy powietrza z masami ograniczającymi.

Skuteczność pochłaniania materialnego z odbijaniem można określić z gęstości, prędkości oraz geometrii. Projektowanie łączy się z doborem charakterystyk pochłaniania hałasu.

Drgania giętne płyt są powiązane z działaniem rezonansowym w zakresie niskich częstotliwości [1-4]. Postawą analizy jest równanie różniczkowe o pochodnych cząstkowych czwartego rzędu. Istotne są warunki brzegowe. Często można zastosować metodę rozdzielania zmiennych z rozwiązaniem w postaci iloczynu.

Podczas obliczeń drgań całego ustroju wibroakustycznego częstości własne oblicza się na podstawie modelu analogowego mechaniczno-akustycznego. Oczywiście uwzględnia się również termodynamiczną przemianę adiabatyczną. Masa powietrza w ustroju [9] tworzy „sprężynę akustyczną”. Materiał płyt modelujemy do postaci „mas akustycznych”. Model analogowy umożliwia wystarczająco dokładne obliczenia częstości własnych całego ustroju wibroakustycznego.

Zaletą działania rezonansowego jest możliwość dokładnych obliczeń dla konkretnych częstotliwości. Każdy ustrój rezonansowy posiada ekstremum dla częstości własnej. W zależności od stopnia pochłaniania i emisji energii możemy uzyskać intensywne tłumienie lub wzmocnienie fal akustycznych.

Największe trudności wyciszania łączy się z ograniczeniem działania tonów o niskich częstościach. Natomiast konstrukcje mechaniczno-akustyczne są skuteczne w paśmie niskich częstości. Przedstawione rozwiązania konstrukcyjne umożliwiają wyraźne oszczędności materiałowe.

Wibroakustyczne ustroje wyciszające są stosowane w ścianach obudów dźwiękochłonno-izolacyjnych, kabinach dźwiękoszczelnych i samodzielnie jako izolacyjno-tłumiące ekrany akustyczne.

2. OBLICZENIA ANALITYCZNE WIBROAKUSTYCZNYCH USTROJÓW WYCISZAJĄCYCH

Istnieją trzy zasadnicze rodzaje wibroakustycznych ustrojów wyciszających (rys. 1). Konstrukcja rezonansowo-płytowa (rys. 1a) składa się z dwóch płyt o grubościach b_1, b_2 i warstwy powietrza o wymiarze a . Akustyczne oporności właściwe czyli impedancje charakterystyczne ośrodków wynoszą Z_0, Z_1, Z_2 . Na pierwszą płytę pada dźwięk o natężeniu I_0 i opuszcza ustrój o natężeniu I . W rozwiązaniu konstrukcyjnym rezonansowo-porowatym (rys. 1b) wypełniono część środkową materiałem dźwiękochłonno-izolacyjnym o impedancji Z_3 . Ustrój złożony (rys. 1c) składa się z dwóch części. Pierwsza o grubości a_1 wypełniona jest powietrze i posiada impedancję Z_0 . Druga posiada grubość a_2 i wypełniona jest materiałem dźwiękochłonno-izolacyjnym o impedancji Z_3 .

Izolacyjność akustyczna właściwa (wskaźnik izolacyjny ustroju wyciszającego) składa się z części materiałowej i rezonansowej:

$$R = R_1 + R_2 \quad \text{dB} \quad (1)$$

$$R_w = R$$

gdzie:

R_1 – izolacyjność pochłaniania materiałowego z odbijaniem,

R_2 – izolacyjność rezonansowa.

Wykonano szczegółową analizę pochłaniania materiałowego z odbijaniem połączonego z działaniem zginania. Izolacyjność akustyczna właściwa wibroakustycznego ustroju wyciszającego rezonansowo-płytowego (rys. 1a) kształtuje się następująco:

$$R = R_1 + R_2 = 10 \log \frac{J_0}{J} = 20 \log$$

$$\left| \exp(-ik_0 a \cos \alpha_0) \left[\left(1 + \frac{Z_1}{2Z_0} \right) \left(1 + \frac{Z_2}{2Z_0} \right) \cdot \right. \right. \quad (2)$$

$$\left. \left. \cdot \exp(ik_0 a \cos \alpha_0) - \frac{Z_1 Z_2}{4Z_0^2} \exp(-ik_0 a \cos \alpha_0) \right] \right| \text{ dB}$$

gdzie:

J_0 – początkowa intensywność (natężenie) dźwięku Wm^{-2} ,

J – końcowa intensywność (natężenie) dźwięku Wm^{-2} ,

$i = \sqrt{-1}$,

$Z_0 = \rho_0 c_0$ – impedancja czyli akustyczna oporność właściwa powietrza, (2a),

ρ_0 – gęstość powietrza,

c_0 – prędkość dźwięku w powietrzu.

Impedancje płyt 1,2 dotyczą zginania:

$$Z_1 = i \left[\omega m_1 - \frac{E_1 J_1 (1 + i \beta_1) \omega^3 \sin^4 \alpha_o}{c_o^4 (1 - v_1^2)} \right] \quad (2b)$$

$$Z_2 = i \left[\omega m_2 - \frac{E_2 J_2 (1 + i \beta_2) \omega^3 \sin^4 \alpha_o}{c_o^4 (1 - v_2^2)} \right] \quad (2b)$$

E_1, E_2 – moduły Younga.

$$m_1 = \rho_1 \cdot b_1 \quad - \text{pierwsza masa jednostkowa}, \quad (2d)$$

$$m_2 = \rho_2 \cdot b_2 \quad - \text{druga masa jednostkowa}, \quad (2e)$$

ρ_1, ρ_2 – gęstości.

$$J_1 = \frac{b_1^3}{12} \quad - \text{pierwszy moment bezwładności, jednostkowy}, \quad (2f)$$

$$J_2 = \frac{b_2^3}{12} \quad - \text{drugi moment bezwładności, jednostkowy}, \quad (2g)$$

β_1, β_2 – współczynniki strat wewnętrznych (lepkości),

v_1, v_2 – liczby Poissona.

Skuteczniejszy jest wibroakustyczny ustrój wyciszający rezonansowo-porowaty pokazany na rysunku 1b. Izolacyjność akustyczna właściwa pochłaniania materiałowego z odbijaniem i działaniem zginania kształtuje się następująco:

$$R_w = 20 \log \left| \frac{\exp(-ik_o a \cos \alpha_o)}{4Z_o Z_3} (Z_3 + Z_o)^2 \left\{ \left[\frac{Z_1}{2Z_o} \left(\frac{Z_3 - Z_o}{Z_3 + Z_o} \right) - \left(1 + \frac{Z_1}{2Z_o} \right) \right] \cdot \left[\frac{Z_2}{2Z_o} \left(\frac{Z_3 - Z_o}{Z_3 + Z_o} \right) - \left(1 + \frac{Z_2}{2Z_o} \right) \right] \exp(\delta a \cos \alpha_1) \right\} + \left[\frac{Z_1}{2Z_o} - \left(1 + \frac{Z_1}{2Z_o} \right) \left(\frac{Z_3 - Z_o}{Z_3 + Z_o} \right) \right] \cdot \left[\frac{Z_2}{2Z_o} - \left(1 + \frac{Z_2}{2Z_o} \right) \left(\frac{Z_3 - Z_o}{Z_3 + Z_o} \right) \right] \exp(-\delta a \cos \alpha_1) \right\} \right| \quad dB \quad (3)$$

gdzie:

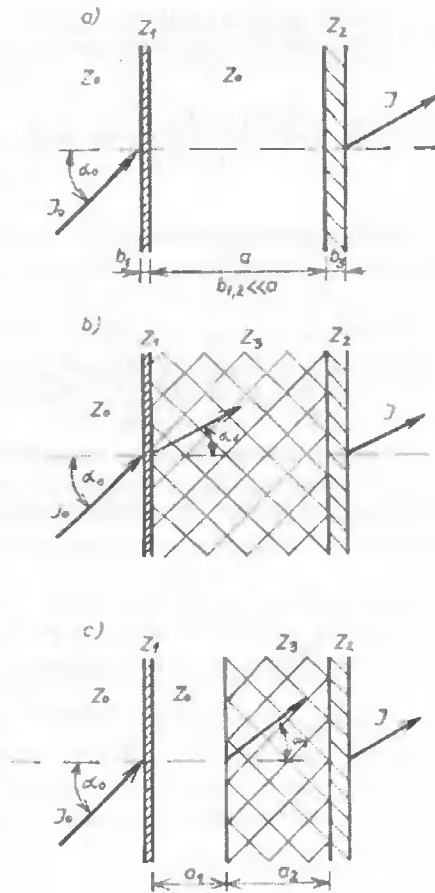
$$Z_3 = \frac{\rho_3 c_3}{\cos \alpha_1} \quad - \text{impedancja warstwy porowatej}, \quad (3a)$$

$$\cos \alpha_1 = \sqrt{1 - \left(\frac{c_3}{c_o} \right)^2 \sin^2 \alpha_o} \quad (3b)$$

$$\delta = u + i v \quad (3c)$$

$$\alpha_1 = \arcsin \left[-\frac{k_o}{u^2 + v^2} (n + i v) \sin \alpha_o \right] \quad (3d)$$

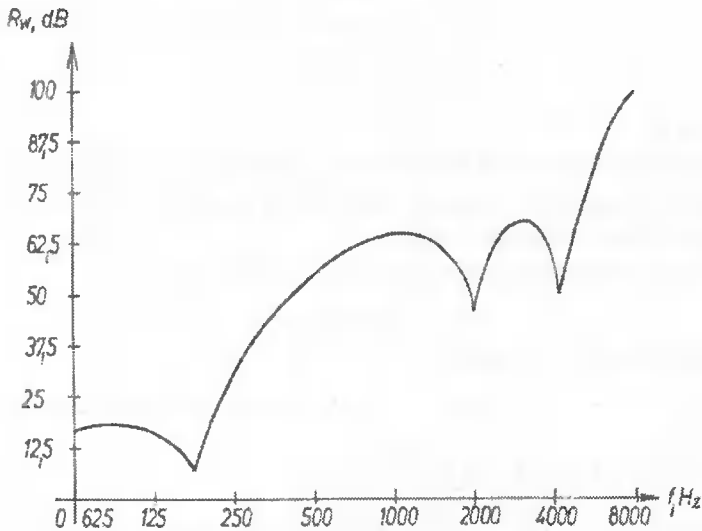
$$c_3 = \frac{u^2 + v^2}{\alpha + i v} \quad (3e)$$



Rys.1. Schematy wibroakustycznych ustrojów wyciszających: a) rezonansowo- płytowy, b) rezonansowo-porowaty, c) złożony

Wibroakustyczny ustrój rezonansowo-pochłaniający działa skutecznie. Na rysunku 2 pokazano charakterystykę izolacyjności akustycznej właściwej R_w w postaci funkcji częstotliwości. Istnieją wyraźne wartości maksymalne i minima. Działanie rezonansowe wynikające z pobudzenia ustroju do drgań jest najskuteczniejsze dla częstotliwości wymuszenia równej własnej ustroju. Analizowany ustrój pobiera energię akustyczną, rozprasza intensywnie w materiale porowatym i tylko część zwraca. Tłumienie występuje dla kilku częstotliwości. W przeciwnym przypadku skuteczność będzie mała. Projektując ustrój rezonansowo pochłaniający należy starannie dobrać maksimum R_w .

Wadą omawianej konstrukcji rezonansowo-pochłaniającej jest znaczna materiałochłonność.



Rys. 2. Charakterystyka izolacyjności akustycznej właściwej R_w wibroakustycznego ustroju rezonansowo-pochłaniającego o grubościach $b_1=1\text{mm}$, $a=100\text{ mm}$, $b_2=2,5\text{ mm}$

Wszeczhronne jest działanie wibroakustycznego ustroju złożonego (rys.1c). Warstwa powietrza o grubości a_1 wzmacnia działanie rezonansowe i zmniejsza zużycie materiału porowatego. Izolacyjność akustyczna właściwa pochłaniania materiałowego z odbijaniem, zginaniem i rezonansem jest określona wzorem:

$$\begin{aligned}
 R = 20 \log & \left| \frac{\exp(-ik_o \cos \alpha_o)}{4Z_o Z_3} (Z_3 - Z_o)^2 \left[\frac{Z_1}{2Z_o} \left(\frac{Z_3 - Z_o}{Z_3 + Z_o} \right) - \left(1 + \frac{Z_1}{2Z_o} \right) \right] \cdot \right. \\
 & \cdot \left. \left\{ \frac{Z_2}{2Z_o} \left(\frac{Z_3 - Z_o}{Z_3 + Z_o} \right) \exp\{-[ik_o(a - a_2) \cos \alpha_o]\} (+) \right. \right. \\
 & \left. \left. - \left(1 + \frac{Z_2}{2Z_o} \right) \exp[ik_o(a - a_2) \cos \alpha_o] \right\} \right. \\
 & \left. \cdot \exp(\delta a_2 \cos \alpha_1) - \left[\frac{Z_1}{2Z_o} - \left(1 + \frac{Z_1}{2Z_o} \right) \left(\frac{Z_3 - Z_o}{Z_3 + Z_o} \right) \right] \dots \right| \text{dB}
 \end{aligned} \tag{4}$$

Rozwiązanie konstrukcyjne umożliwia szersze wykorzystanie zjawiska rezonansu. Występuje rezonans własny płyt ograniczających i całości akustycznej. Istnieją dwie sprężyny akustyczne „połączone szeregowo i dwie masy akustyczne” wynikające z działania płyt.

Wibroakustyczny ustrój wyciszający o działaniu złożonym zapewnia wyraźne oszczędności materiałowe.

Wibroakustyczny ustrój wyciszający można przedstawić w postaci analogowego modelu akustycznego-mechanicznego.

„Masa akustyczna” określona jest wzorem:

$$m_a = \frac{m}{S^2} \quad (5)$$

gdzie:

m - masa płyty,

S - powierzchnia przekroju analizowanego ustroju.

Sztywność „sprężyny akustycznej” jest funkcją gęstości materiału części sprężystej, prędkości dźwięku i objętości komory.

Przemiana o charakterze akustycznym jest adiabatyczna:

$$PV^\kappa = \text{const.} = P_o V_o^\kappa \quad (6)$$

Po różniczkowaniu otrzymano:

$$dP \cdot V^\kappa + P_\kappa V^{\kappa-1} \cdot dV = 0 \quad (7)$$

w chwili początkowej $P=P_o$, $V=V_o$, czyli:

$$\frac{dP}{P_o} + \kappa \frac{dV}{V_o} = 0 \quad (8)$$

$$dP = -\frac{\kappa P_o}{V_o} dV = -k_a dV \quad (9)$$

„sztywność akustyczna”:

$$k_a = \frac{\kappa P_o}{V_o} \quad (10)$$

prędkość dźwięku:

$$c = \sqrt{\frac{P_o \kappa}{S_o}} \quad (11)$$

wobec tego:

$$\kappa P_o = \rho_o c^2 \quad (12)$$

$$k_a = \frac{\rho_o c^2}{V} \quad (13)$$

Najpierw obliczono wibroakustyczny ustrój wyciszający o działaniu rezonansowo-płytowym (rys. 1a).

$$k_a = \frac{\rho_o c_o^2}{a \cdot S} \quad (14)$$

$$m_{a1} = \frac{\rho_2 b_1}{S^2}, m_{a2} = \frac{\rho_2 b_2}{S^2} \quad (15a,b)$$

Częstość drgań akustycznych całego ustroju jest następująca:

$$\omega_n = \pm \sqrt{\frac{k_a(m_{a1} + m_{a2})}{m_{a1} \cdot m_{a2}}}, n = 1, \dots \quad (16)$$

czyli

$$\omega_n = \pm c_o \sqrt{\frac{\rho_o (b_1 \rho_1 + b_2 \rho_2) S}{a b_1 s_1 b_2 s_2}} \quad (17)$$

Działanie wibroakustycznego ustroju wyciszającego rezonansowo-porowatego (rys. 1b) wyraźnie odznacza się intensywnym tłumieniem części środkowej.

Częstotliwość wibracji jest określona wzorem:

$$f_n = \pm \frac{c_3}{2\pi} \sqrt{\frac{\rho_3(b_1\rho_1 + b_2\rho_2)S}{a b_1 s_1 b_2 s_2}} \quad \text{Hz} \quad (18)$$

Wibroakustyczny ustrój wyciszający o działaniu złożonym (rys.1c) posiada dwie komory sprężyste połączone szeregowo. Wobec tego sztywność kształtuje się następująco:

$$k_a = \frac{k_{a0} \cdot k_{a3}}{k_{a0} + k_{a3}} \quad (19)$$

$$k_{a0} = \frac{\rho_0 c_0^2}{a_1 S}, \quad k_{a3} = \frac{\rho_3 c_3^2}{a_2 S} \quad (19a.b)$$

$$k_a = \frac{\rho_0 c_0^2 \cdot \rho_3 c_3^2}{S(a_2 \rho_0 c_0^2 + a_1 \rho_3 c_3^2)} \quad (20)$$

Dla ustroju o działaniu złożonym częstotliwość jest funkcją kilku parametrów:

$$f_n = \pm \frac{c_0 c_3}{2\pi} \sqrt{\frac{\rho_0 \rho_3 (b_1 \rho_1 + b_2 \rho_2) S}{(a_2 \rho_0 c_0^2 + a_1 \rho_3 c_3^2) b_1 s_1 b_2 s_2}} \quad \text{Hz} \quad (21)$$

Dobierając gęstość ρ_3 materiału porowatego grubość a_1 w części rezonansowej możemy dokładnie stroić ustrój do maksimum wyciszania.

3. PODSUMOWANIE

Hałas jest zjawiskiem złożonym i odpowiedni ustrój wibroakustyczny może wyraźnie pochłaniać energię dźwięków oraz ograniczyć propagację. W procesie wyciszania mamy do czynienia z białym, różowym szumem i tonami. Zagadnienie szumu i wyraźnych tonów można rozwiązać warstwą pochłaniająco-izolacyjną. Natomiast wyciszanie dźwięków o niskich częstotliwościach jest złożone. Ustroje o działaniu mechaniczno-akustycznym umożliwiają właściwą skuteczność w omawianym paśmie. Wnikliwa analiza rezonansowa jest podstawą obliczeń skutecznego ustroju wibroakustycznego dla określonej częstotliwości decyzyjnej. Konstrukcje rezonansowo-pochłaniające umożliwiają zmniejszenie zużycia materiałów.

LITERATURA

- [1] L.L. Beranek, 1971. Noise and Vibration Control. Mc Graw-Hill, New York.
- [2] Cz. Cempel, 1978. Wibroakustyka stosowana. PWN Warszawa-Poznań.
- [3] C.M. Harris, 1979. Handbook of Noise Control. Mc Graw-Hill, New York.
- [4] Zb. Osiński, red.pr.zbr, 1997. Tłumienie drgań. Wyd. Nauk. PWN Warszawa.
- [5] K. Wernerowski, 1995. Asymptotic Solution of Acoustic Nonlinear Wave Equation with Friction. Archives of Acoustic, Vol. 20, Nr 3, Warszawa.
- [6] K. Wernerowski, 1995. Zagadnienia wyciszenia maszyn w przemyśle regionu bydgoskiego. Wyd. Uczeln. ATR Bydgoszcz, Zesz. Nauk. Mechanika 37.

- [7] K. Wernerowski, 1999. Patenty wibroakustyczne bydgoskiego środowiska naukowego. Wyd. Uczeln. ATR Bydgoszcz, Zesz. Nauk. Mechanika 44.
- [8] K. Wernerowski, 1999. Wybrane zagadnienia wibroakustyki stosowane, materiały. Konferencji „Mechanika '99, Nauka i Praktyka”, Gdańsk.
- [9] Z. Życzkowski, 1965. Podstawy elektroakustyki. WNT Warszawa.

ANALYSIS OF VIBROACUSTIC SILENCING STRUCTURES

Summary

The paper focused on the possibilities of vibroacoustic absorption and sound wave propagation limitation. Mechanical-acoustic structures ensure also insulation against and silencing of low tones. The presented complex construction enables lower material wear.

Keywords: acoustic, resonance, insulation, silencing

WPLYW ŚREDNICY KOŁKÓW NA NAPRĘŻENIA W POŁĄCZENIU KĄTOWYM PŁYT WIÓROWYCH

Arnold Wilczyński, Marek Kociszewski

Instytut Techniki, Akademia Bydgoska im. Kazimierza Wielkiego
ul. Chodkiewicza 30, 85-064 Bydgoszcz

W pracy przedstawiono analizę naprężeń w złączu kołkowym połączenia kąтового płyt wiórowych. Jako czynnik zmienny przyjęto średnicę kołka, określając jej wpływ na stan naprężeń w wybranych przekrojach złącza. Zastosowano metodę elementów skończonych uwzględniając anizotropię właściwości sprężystych materiałów połączenia oraz warstwową budowę płyty wiórowej. Stwierdzono istotny wpływ średnicy kołka na naprężenia w złączu, w szczególności w przekroju poprzecznym kołka i spoinach klejowych.

Słowa kluczowe: analiza naprężeń w złączu kołkowym, metoda elementów skończonych

1. WSTĘP

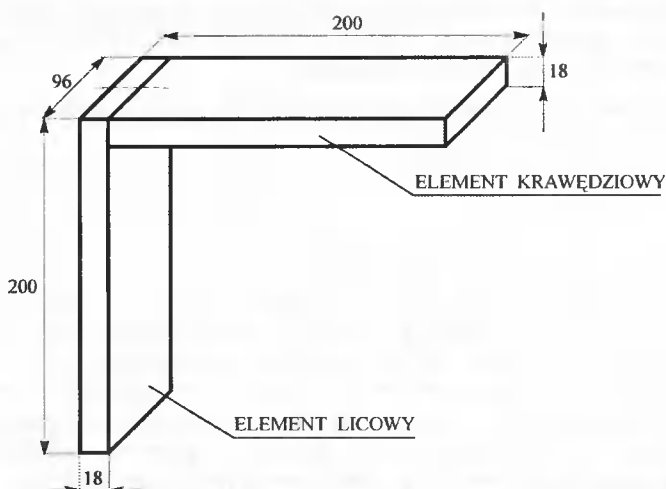
Połączenia kątowe ściennie są charakterystyczne dla mebli skrzyniowych. Od ich konstrukcji i jakości wykonania zależy prawidłowe funkcjonowanie mebli. Właściwości mechaniczne połączeń decydują w głównej mierze o wytrzymałości i trwałości mebli. Właściwości te zależą od wielu czynników, przy czym do najważniejszych można zaliczyć czynniki konstrukcyjne, to znaczy te, które mają związek z zastosowanym w połączeniu rodzajem złącza oraz jego wymiarami. Typowym, najczęściej obecnie stosowanym w połączeniach kątowych płyt wiórowych jest złącze kołkowe.

Badania kątowych połączeń ściennych o złączu kołkowym zostały dość szeroko opisane w literaturze światowej, a także polskiej. Zajmowano się przede wszystkim wpływem parametrów konstrukcyjnych złącza na nośność i sztywność połączenia [1, 2, 3, 8, 9]. Znacznie rzadziej analizowano stan naprężenia w złączu [3, 4, 5, 7]. Określono m.in. wpływ średnicy kołków oraz głębokości ich osadzenia w łączonych elementach na rozkłady naprężeń w złączu kołkowym, przy założeniu, że połączenie jest wykonane z drewna sosnowego [7]. W literaturze brak jest natomiast wyników badań pozwalających na rozpoznanie stanu naprężenia w połączeniu utworzonym z trzywarstwowej płyty wiórowej.

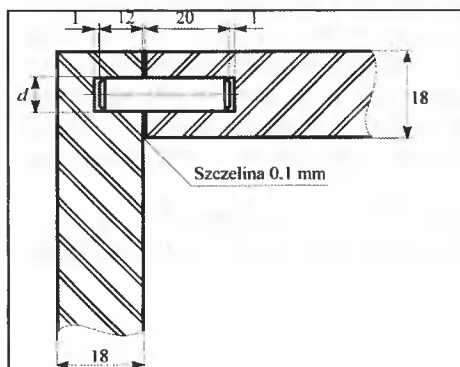
W związku z tym stwierdzono potrzebę podjęcia badań wytrzymałościowych połączenia narożnikowego ściennego, mających na celu określenie wpływu średnicy kołka na stan naprężeń w złączu.

2. METODYKA BADAŃ

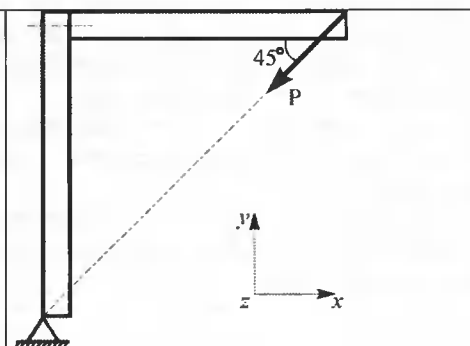
Rozpatrzono modelowe połączenie narożnikowe o złączy kołkowym przedstawione na rysunku 1. Stanowi ono wycinek szerszego, kilkukołkowego połączenia, wycinek zawierający pojedyncze złącze kołkowe. Przyjęto, że łączone elementy płytowe – krawędziowy i licowy – z nieokleinowanej, trzywarstwowej płyty wiórowej o typowej dla mebli ściennych grubości 18 mm, połączone są za pomocą kołka bukowego i spoiny klejowej o grubości 0,1 mm. Uwzględniono kołki o znormalizowanych średnicach 6, 8 i 10 mm oraz stałej długości 32 mm. Tak dobrane wymiary pozwalają na odwzorowanie złączy kołkowych stosowanych w przemyśle meblarskim. Kształt i wymiary złącza zaprezentowano na rysunku 2. W połączeniu zastosowano niewielką szczelinę między łączonymi płytami (0,1 mm). Umożliwiła ona zasymulowanie ekstremalnych warunków pracy złącza, które mogą wystąpić w rzeczywistym połączeniu, zwłaszcza przy niedokładnie obrobionych wąskich płaszczyznach elementu krawędziowego lub niedostatecznym docisku elementów połączenia podczas montażu.



Rys. 1. Przyjęty model połączenia narożnikowego ściennego, t – grubość płyty



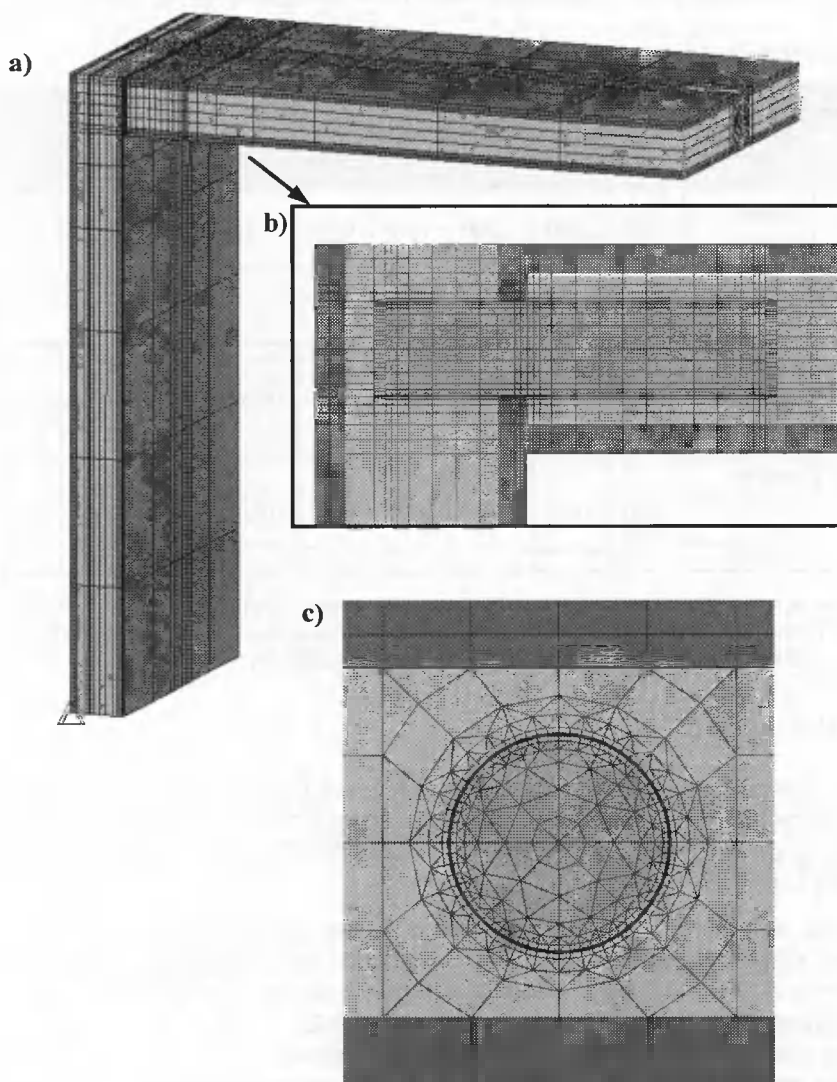
Rys. 2. Kształt i wymiary złącza kołkowego



Rys. 3. Schemat obciążenia badanego połączenia

Połączenie obciążono siłą P powodującą zwieranie jego ramion (rys. 3). Jest to jeden z możliwych schematów obciążenia połączenia narożnikowego wynikający z sił działających na model skrzyniowy. Wybrano go jako najbardziej destrukcyjny dla złącza. Biorąc pod uwagę obciążenia użytkowe mebli skrzyniowych przyjęto wartość siły P równą 27 N, rozkładając ją równomiernie wzdłuż szerokości połączenia.

Do analizy numerycznej został wykorzystany, oparty na metodzie elementów skończonych (MES), amerykański program komputerowy ALGOR. Dla każdej średnicy kołka opracowano model numeryczny połączenia (rys. 4).



Rys. 4. Model numeryczny połączenia o złączu kołkowym: a) widok ogólny, b) przekrój wzdłuż osi kołka, c) przekrój prostopadły do osi kołka

Zastosowano przestrzenne elementy typu „brick” zawierające od czterech do ośmiu węzłów. Każdy z modeli zawierał 21968 elementów i 17944 węzłów.

Grupom elementów odpowiadającym poszczególnym składnikom połączenia przypisano odpowiednie właściwości materiałowe. Przyjęte na podstawie pracy [6] moduły sprężystości liniowej, współczynniki Poissona i moduły ścinania dla drewna bukowego i kleju poliocetanowinylowego oraz wyznaczone eksperymentalnie stałe sprężystości dla płyty wiórowej [3] podano w tabeli 1. Ze względu na znaczne zróżnicowanie właściwości mechanicznych poszczególnych warstw płyty wiórowej określono je oddzielnie dla każdej z warstw. Ponadto założono, że warstwy zewnętrzne płyty mają grubość 2 mm, co jest w przybliżeniu zgodne z rzeczywistą budową płyty wiórowej.

Tabela 1. Właściwości sprężyste materiałów

Element połączenia	Materiał	E_a	E_b	E_c	ν_{ab}	ν_{ac}	ν_{bc}	G_{ab}	G_{ac}	G_{bc}
		MPa	MPa	MPa				MPa	MPa	MPa
Kołek	Drewno bukowe	1120	2060	15400	0,66	0,54	0,41	450	1170	1530
Spoina klejowa	klej Wikol	388			0,3			149		
Element płytowy	warstwa wewnętrzna płyty wiórowej	1450	1450	160	0,26	0,33	0,036	575	135	135
	warstwy zewnętrzne płyty wiórowej	3830	3830	400	0,28	0,21	0,020	1495	460	460

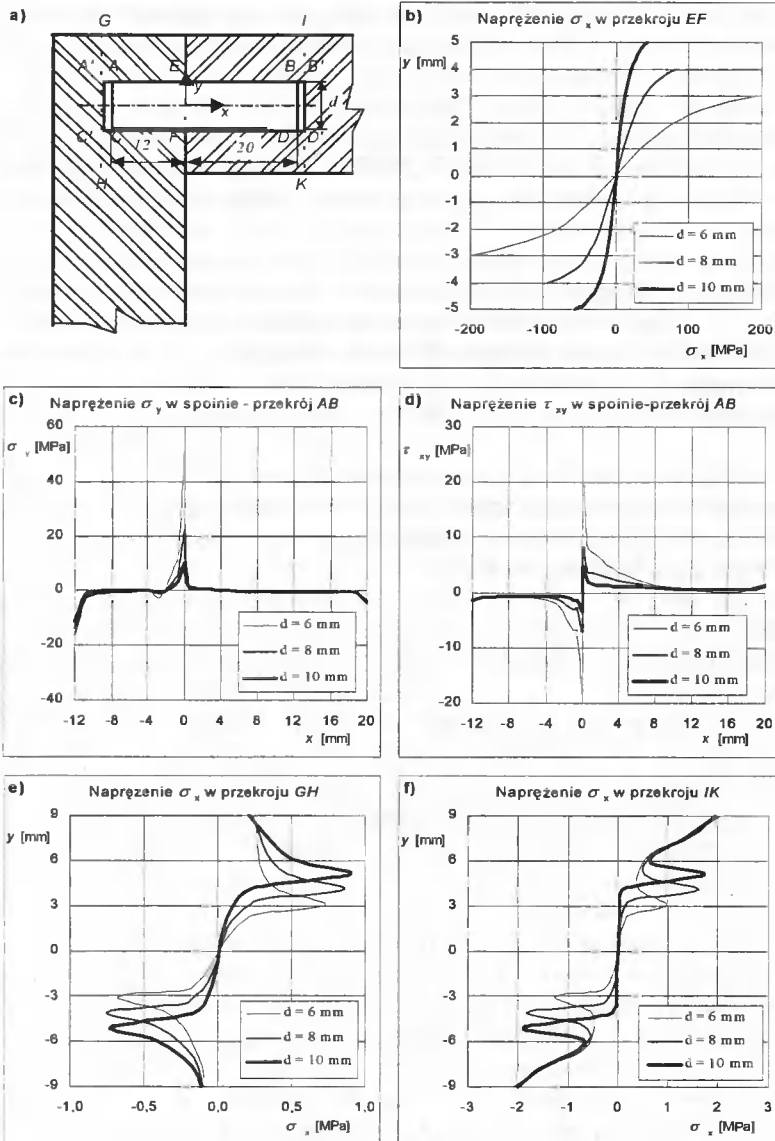
Dla drewna: a,b,c – osie związane z kierunkami anatomicznymi drewna, odpowiednio: stycznym, promieniowym i wzdłużnym. Dla płyty wiórowej: a,b – oś związana z kierunkiem stycznym do płyty; c – oś związana z kierunkiem prostopadłym do powierzchni płyty.

3. WYNIKI BADAŃ

Na rysunku 5 przedstawiono rozkłady wybranych naprężeń w najbardziej zagrożonych zniszczeniem przekrojach złącza kołkowego: przekroju poprzecznym kołka, spoinach klejowych oraz przekrojach leżących za kołkiem, zarówno w elemencie lico- wym, jak i krawędziowym.

Największe naprężenia występują w przekroju poprzecznym kołka zawartym między łączonymi elementami płytowymi. Naprężenia styczne nie są przy tym znaczące, osiągają poziom zaledwie 0,5 MPa. Rozkład istotnych ze względu na możliwość złamania kołka naprężeń normalnych σ_x wzdłuż pionowej średnicy EF tego przekroju przedstawiono na rysunku 5b. Rozkład ten jest wyraźnie nieliniowy i to dla każdej średnicy kołka. Jest ponadto nieco asymetryczny: bezwzględna wartość naprężenia w punkcie F jest większa niż w punkcie E . Stosunek wartości naprężeń w tych punktach zależy od średnicy kołka i wynosi 1,02; 1,14 i 1,33, odpowiednio dla kołków o średnicy 6, 8

i 10 mm. Naprężenia normalne σ_x zależą bardzo mocno od średnicy kołka. Dla najszerzej stosowanego w praktyce kołka o średnicy $d = 8$ mm, naprężenia maksymalne dochodzą do 95 MPa. Zmniejszenie średnicy o 2 mm powoduje ponad dwukrotny wzrost poziomu tych naprężeń (197 MPa), natomiast jej zwiększenie o tę samą wartość – ich spadek o około 40% (56 MPa). W wyniku powyższej analizy można stwierdzić, że ze względu na naprężenia normalne w kołku jego średnica powinna być możliwie duża, nie mniejsza niż 8 mm.



Rys. 5. Rozkłady naprężeń w przekroju poprzecznym kołka, spoinach klejowych oraz przekrojach GH i IK złącza kołkowego

Kołek, pomimo występujących w nim stosunkowo dużych naprężeń, nie jest najbardziej narażonym na zniszczenie elementem złącza. Działaniu silnych naprężeń normalnych i stycznych poddane są także spoiny klejowe. Na rysunkach 5c,d przedstawiono rozkłady naprężeń normalnych σ_x i stycznych τ_{xy} w górnym (AB) przekroju tych spoin. Naprężenia w dolnym (CD) przekroju spoin rozkładają się podobnie, przy czym osiągają nieznacznie mniejsze wartości. Na przeważającej części długości kołka wartości naprężeń normalnych są bliskie zeru, kumulują się głównie w miejscu łączenia elementów płytowych, osiągając dla „średniego” układu wymiarowego złącza ($d = 8$ mm) wartość 32,1 MPa (punkt E). Mniejsze spiętrzenia naprężeń można zaobserwować w pobliżu końców kołka, zwłaszcza w spoinie zawartej w elemencie licowym. Poziom maksymalnych naprężeń normalnych σ_x , występujących w punkcie E spoiny, znacząco zależy od średnicy d kołka. Zmniejszenie średnicy z 8 do 6 mm przyczynia się do wzrostu tych naprężeń o 71,7% (z 32,1 do 55,1 MPa), a zwiększenie z 8 do 10 mm powoduje ich obniżenie o 29,3% (do 22,7 MPa). Warto zauważyć, że zmiana średnicy kołka ma dużo mniejszy wpływ na wartość naprężeń normalnych w pobliżu końców kołka.

Naprężenia styczne τ_{xy} w spoinie klejowej (rys. 5d) rozłożone są nierównomiernie wzdłuż odcinka AB , osiągając największe wartości w miejscu łączenia elementów płytowych (punkt E). Średnica d kołka ma i tym razem istotny wpływ na poziom maksymalnych naprężeń stycznych w spoinie klejowej. Jej zmiana z 8 do 6 mm wywołuje wzrost maksymalnego naprężenia τ_{xy} z 7,9 do 18,8 MPa (o 138,0%), natomiast zmiana średnicy z 8 do 10 mm powoduje obniżenie tego naprężenia z 7,9 do 4,7 MPa (o 40,5%).

Reasumując przeprowadzoną analizę naprężeń w spoinie klejowej można stwierdzić, że najbardziej zagrożonym niekorzystnymi spiętrzeniami naprężeń tak normalnych, jak i stycznych jest punkt E tej spoiny. Spiętrzenia te można ograniczyć stosując kołki o średnicy d nie mniejszej niż 8 mm.

Analizując naprężenia w usytuowanych za kołkiem przekrojach GH i IK (rys. 5e,f) należy zauważyć, że rozkłady tych naprężeń są silnie nieliniowe i charakteryzują się dużymi spiętrzeniami w punktach A' , C' , B' i D' leżących na tych samych wysokościach, co odpowiednie punkty A , C , B i D spoin klejowych. Naprężenia σ_x w przekroju GH (rys. 5e) uzyskują największe wartości w punkcie A' i nieznacznie zależą od średnicy d kołka. Zmiana średnicy d kołka z 6 na 10 mm przyczynia się do wzrostu tych naprężeń z 0,73 do 0,89 MPa (o 21,9%). Naprężenia normalne σ_x w przekroju IK (rys. 5f) także cechują spiętrzenia, jednak nie w punktach B' i D' , ale w skrajnych punktach I i K przekroju naprężenia te osiągają wartości maksymalne. Średnica d kołka nie ma istotnego wpływu na te wartości. Można jedynie zauważyć wpływ średnicy kołka na wysokość spiętrzeń w punktach B' i D' .

Podsumowując analizę naprężeń w przekrojach GH i IK warto porównać jeszcze maksymalne naprężenia normalne w tych przekrojach. Pomimo wyższych wartości tych naprężeń w przekroju IK (około 2 MPa), bardziej istotne wydają się naprężenia w punkcie A' przekroju GH (0,73 ÷ 0,89 MPa). Naprężenia te działają w kierunku prostopadłym do płyty, co przy niskiej wytrzymałości płyty wiórowej, a w szczególności jej wewnętrznej warstwy, na rozciąganie prostopadłe do jej płaszczyzny powoduje, że naprężenia σ_x w przekroju GH są znacznie bardziej niebezpieczne niż w przekroju IK .

4. WNIOSKI

1. Rozkłady naprężeń w złączu kołkowym połączenia narożnikowego płyt wiórowych są bardzo nierównomierne, charakteryzują się silnymi spiętrzeniami.
2. Maksymalne wartości naprężeń w złączu zależą istotnie od średnicy kołka.
3. Zwiększenie średnicy kołka wpływa na znaczne obniżenie wartości naprężeń maksymalnych w kołku i przyległych spoinach klejowych.
4. Ze względu na naprężenia w kołku i spoinach klejowych w połączeniach płyt o grubości 18 mm średnica kołka powinna być nie mniejsza niż 8 mm.

LITERATURA

- [1] S. Dziegielewski, J. Smardzewski, 1989. Jakość połączeń a sztywność mebli skrzyniowych. *Przemysł Drzewny* 11,12, ss. 4-8.
- [2] G.B. Kjučukov, N.A. Josifov, 1968. Vergleichende Untersuchungen über die Festigkeit verschiedener Arten nichtzerlegbarer Eckverbindungen von Spanplattenbauteilen. *Holztechnologie* 9. ss. 43-48.
- [3] M. Kociszewski, 2001. Badanie połączeń narożnikowych ściennych. Rozprawa doktorska. Wydział Technologii Drewna SGGW w Warszawie.
- [4] M. Kociszewski, A. Wilczyński 1998. Wykorzystanie metody elementów skończonych do badania konstrukcji drewnianych. Materiały XII Konferencji Naukowej Wydziału Technologii Drewna SGGW „Technologia drewna – innowacyjność badań w przemyśle i nauce”, Warszawa, ss. 177-182.
- [5] J. Smardzewski, 1999. Analiza stanu naprężeń w wybranych w wybranych połączeniach kątowych płaskich. Materiały 13 Konferencji Naukowej Wydziału Technologii Drewna SGGW „Drewno – materiał o wszechstronnym”, ss. 271-283.
- [6] A. Wilczyński, 1988. Badania naprężeń ścinających w spoinie klejowej w drewnie. Wydawnictwo Uczelniane WSP, Bydgoszcz.
- [7] A. Wilczyński, M. Kociszewski, 2000. Dowel corner joints in case construction – effect of dowel dimensions on stresses in glue line. *Folia Forestalia Polonica, Seria B – Drzewnictwo*, nr (zeszyt) 31, ss. 17-27.
- [8] J. L. Zhang, C.A. Eckelman, 1993. Rational design of multi-dowel corner joints in corner construction. *Forest Products Journal* 11,12, ss. 52-58.
- [9] J.L. Zhang, C.A. Eckelman 1993. The bending moment resistance of single-dowel corner joint in case construction. *Forest Products Journal* 6, s. 19-24.

THE INFLUENCE OF PEG DIAMETER IN STRESSES IN AN ANGLE JOINT OF CHIPBOARDS

Summary

The paper presents analysis of stresses in a peg connection of chipboards in an angle joint. As a variable factor a peg diameter was adopted, determining its influence on stress condition in selected intersections of the connection. The finite elements method was applied, taking into account anisotropic elastic properties of the connection materials as well as the layer structure of chipboard. It was found that the peg diameter affected significantly stresses in the connection, especially in the peg cross-section and in the adhesive-bonded joint.

Keywords: analysis of stresses in a peg connection, finite elements method

MODELE KINETYCZNE PRZEMIAN FAZOWYCH

Tadeusz Zbigniew Woźniak

Akademia Bydgoska im. K. Wielkiego. Instytut Techniki,
Zakład Inżynierii Materiałowej
ul. Chodkiewicza 30. 85-064 Bydgoszcz

W artykule opisano modyfikację teorii Avramiego całkowitej kinetyki przemiany przystosowanej do bainitu dolnego w zakresie swing back. W opisie całkowitej kinetyki przemiany zachodzi równoczesny rozpad austenitu na dwa produkty, które posiadają oddzielne krzywe C. Obie przemiany zachodzą przez tworzenie skupisk równoległych płytek zwanych jako wiązki. W modelu, szerokość subpłytek na szczycie wiązki jest taka sama jak w miejscu zarodkowania, rosną one liniowo do ograniczonego rozmiaru w funkcji czasu.

Słowa kluczowe: teoria Avramiego, skupiska równoległe płytek, subpłytki

1. WSTĘP

Przemiany w stanie stałym, są podstawą obróbki cieplnej stopów. W zależności od tego, czy do zachodzenia przemiany jest konieczna dyfuzja, możemy mieć do czynienia z przemianą bezdyfuzyjną, zwaną martenzytyczną, lub z przemianą dyfuzyjną. Przemiany tego rodzaju są bardzo ważne z praktycznego punktu widzenia, gdyż wywołują zmianę własności-metalu lub stopu.

Obróbka cieplna zwykle prowadzi do końcowej mikrostruktury, która jest mieszaniną wielu produktów przemian. Austenit może rozpadać się na produkty ferrytyczne o szerokim zakresie zmienności, z których każdy można opisać oddzielną krzywą C [1,2,3]. W stalach wysokowęglowych na wykresach CTP występuje przyspieszenie początku przemiany obejmujące zakres temperatur powyżej i poniżej M_s [4]. Kształt wykresu CTP_i w pobliżu M_s zdeterminowany jest powstającym wcześniej martenzytem izotermicznym. Radcliffe i Rollason [5] zmiany zachodzące w temperaturach zbliżonych do M_s nazwali „swing back”. Okamoto i Oka [6,7] interpretowali przyspieszenie efektami oddziaływania midribu na przemianę bainityczną. Wyniki tych badań przyczyniły się do znaczącego postępu w interpretacji przemian izotermicznych szczególnie w obszarze niskotemperaturowym zbliżonym do M_s . Zagadnienia dotyczące nakładania się krzywych „C” zostały szerzej przedstawione przez Thadhani i Mayersa [8] oraz przez Zhao i Jin [9].

Własności metalu po przemianie fazowej zależą w znacznym stopniu od szybkości, z jaką przebiega ta przemiana, i od charakteru przemieszczeń atomów. Te zagadnienia wchodzi w zakres rozważań kinetyki przemian fazowych.

W celu zamodelowania zachodzących zmian mikrostruktury niezbędny jest rozwój teorii zdolnej opisać równoczesne oddziaływanie różnych wydziałów w wyniku reakcji. Zmiany objętości podczas przemiany w stanie stałym są zwykle opisywane przy

zastosowaniu klasycznej teorii Johnsona – Mehla – Avramiego, która została ponownie gruntownie zweryfikowana przez Christiana [10] oraz S.J. Jones i H.D.H. Bhadeshia [11] dla przemian wysokotemperaturowych.

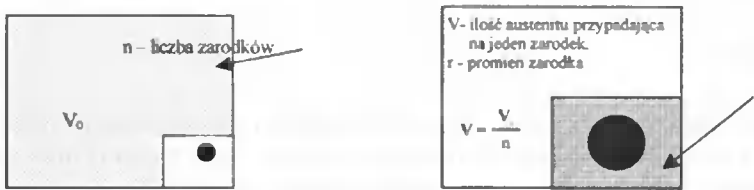
Obecna praca zajmuje się zasadniczym rozwojem nowej teorii dla przemiany ba-
inicyzycznej w zakresie przyspieszonego początku w obszarze niskotemperaturowym.

2. OPIS OGÓLNY PRZEMIANY PRZY ZASTOSOWANIU RÓWNIANIA AVRAMIEGO

Przebieg przemiany danej fazy od stadium początkowego do końcowego można określić ułamkowym stopniem jej przemiany V w zależności od czasu, wprowadzając funkcję $V = f(t)$. Do czynników określających tę funkcję zalicza się: I - szybkość zarodkowania, G - szybkość wzrostu, zahamowanie wzrostu spowodowane zetknięciem się sąsiednich cząsteczek oraz ich kształt po częściowym zetknięciu się [12].

1.1. Wzrost kontrolowany przez dyfuzję dla cząsteczek o kształcie sferoidalnym

Zakładamy, że wzrost cząsteczek kontrolowany jest procesami dyfuzji i wszystkie zarodkowały w czasie zero.



Rys. 1. Model przemiany fazowej kontrolowany procesami dyfuzji

Po czasie t , kiedy przeciętna cząsteczka kulista ma promień r , ułamek objętościowy przemiany określa następujący wzór:

$$V_{\beta} = Ar^3 \quad (1.1)$$

gdzie A zależy od początkowego stężenia zarodków, a dalsza szybkość zarodkowania jest pomijalnie mała.

We wczesnych stadiach wzrostu (zależnych tylko od dyfuzji)

$$r = Br^{0.5} \quad (1.2)$$

Stąd szybkość wzrostu $g = dr/dt$ można przyjąć jako proporcjonalną do $r^{-0.5}$ z przybliżoną poprawką na zubożenie osnowy, wynoszącą $1 - V_{\beta}$. Na tej podstawie otrzymujemy:

$$\frac{dr}{dt} = Cr^{-0.5}(1 - V_{\beta}) \quad (1.3)$$

Różniczkując wyrażenie (1.1) względem t i stosując wzory (1.2) i (1.3), otrzymujemy równanie różniczkowe:

$$\frac{dV_{\beta}}{dt} = k' t^{0.5} (1 - V_{\beta}). \quad (1.4)$$

Rozdzielenie zmiennych i całkowanie daje ostatecznie następujący wzór:

$$V_{\beta} = 1 - e^{-kt^{1.5}} \quad (1.5)$$

który popularnie nazywany jest równaniem Avramiego.

1.2. Wzrost kontrolowany przez dyfuzję dla powierzchni płaskiej

Jeżeli
$$V_{\beta} = Ar^2 \quad (1.6)$$

Oraz
$$r^2 = A't \quad , \quad \text{to } r = Bt^{0.5} \quad (1.7)$$

Różniczkując wyrażenie (1.6) względem t otrzymujemy:

$$\frac{dV_{\beta}}{dt} = 2Ar \frac{dr}{dt} \quad (1.8)$$

Szybkość wzrostu $G=dr/dt$ z poprawką na zubożenie osnowy wynosi:

$$\frac{dr}{dt} = Ct^{-0.5} (1 - V_{\beta}) \quad (1.9)$$

podstawiając do wzoru (1.8) wzory (1.7) i (1.9) otrzymujemy:

$$\frac{dV_{\beta}}{dt} = 2ABt^{0.5} Ct^{-0.5} (1 - V_{\beta}) \quad (1.10)$$

Po scałkowaniu otrzymujemy:

$$V_{\beta} = 1 - e^{-kt} \quad (1.11)$$

Jeżeli wzrost kontrolowany jest przez dyfuzję dla powierzchni płaskiej otrzymujemy $n=1$. Zgodnie z warunkami Avramiego [10] zachodzi wówczas wzrost izolowanych płytek i igieł o skończonych wymiarach.

1.3. Wzrost kontrolowany przez powierzchnię rozdziału faz

Jeżeli
$$r = Bt \quad (1.12)$$

wówczas szybkość wzrostu wynosi

$$\frac{dr}{dt} = B(1 - V_{\beta}) \quad (1.13)$$

Jeżeli $V_{\beta} = Ar^3$, to po zróżniczkowaniu względem t otrzymujemy:

$$\frac{dV_{\beta}}{dt} = 3Ar^2 \frac{dr}{dt} \quad (1.14)$$

Po podstawieniu do wzoru (1.14) wzorów (1.12) i (1.13) i po scałkowaniu otrzymujemy:

$$V_{\beta} = 1 - e^{-kt^3} \quad (1.15)$$

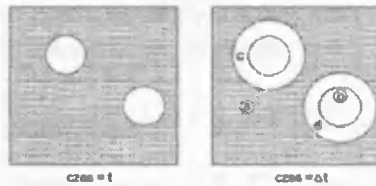
Jeżeli wzrost kontrolowany jest przez powierzchnię rozdziału faz otrzymujemy $n=3$. Zgodnie z warunkami Avramiego [10] zachodzi zarodkowanie tylko na początku przemiany.

Wzór Avramiego opisuje wiele rodzajów przemian fazowych, zależnych od wykładnika n w czynniku t^n . Zwykle krzywa ogólna ma kształt S z zakresem środkowym, w którym szybkość reakcji jest najwyższa.

2. MODEL CAŁKOWITEJ KINETYKI PRZEMIANY

Dana cząsteczka wydzielającej fazy β tworzy się po czasie inkubacji τ . Równocześnie zachodzące reakcje mogą na siebie zachodzić i oddziaływać jedna z drugą, albo przez „twarde” zderzenia, w których graniczące cząsteczki stykają się albo przez „miękkie” zderzenia gdzie nakładają się pola dyfuzyjne lub termiczne [11].

Na rysunku 2 pokazano postępowanie przemiany po czasie dt po którym następuje przyrost objętości $c+d$ kosztem zmniejszenia objętości „a” fazy rodzimej.



Rys. 2. Model całkowitej kinetyki podczas przemiany fazowej przy założeniu kulistego kształtu cząsteczek [13]

Zakładając wzrost ze stałą szybkością G , objętość „w” sferycznej cząsteczki jest dana przez:

$$W_{\tau} = \left(\frac{4}{3} \pi \right) G^3 (t - \tau)^3 \quad (t > \tau) \quad (2.1)$$

$w_{\tau} = 0$ dla ($t < \tau$) gdzie t jest czasem zdefiniowanym w stanie, gdy próbka osiąga temperaturę przemiany izotermicznej.

Cząsteczki zarodkujące w różnych miejscach mogą ewentualnie stykać się. Problem twardego zderzenia zostanie na początku rozważań pominięty i w ten sposób zarodkowanie może występować nawet w obszarach, które już uległy przemianie. Obliczona objętość fazy β jest dlatego, „objętością powiększoną” (extended). Zmiana w „powiększonej objętości” wywołanej zarodkowaniem cząsteczek w przedziale czasu $t = \tau$ do $t = \tau + dt$ wynosi:

$$dV_{\beta} = w_{\tau} I v d\tau \quad (2.2)$$

$$V_{\beta} = \left(4\pi V / 3 \right) \int_{\tau=0}^t G^3 I (t - \tau)^3 d\tau \quad (2.3)$$

gdzie I jest szybkością zarodkowania na jednostkę objętości i v jest całkowitą objętością próbki.

Podobnie jak poprzednio tylko te fragmenty podczas wzrostu objętości, które leżą w obszarach nieprzemienialnych w sąsiadującej fazie mogą przyczyniać się do zmiany

rzeczywistej objętości fazy β . Aktualna zmiana objętości w przedziale czasu t do $t + dt$ wynosi:

$$V_{\beta}^e = -V \ln\left(1 - \frac{V_{\beta}}{V}\right) \quad (2.4)$$

stąd:

$$-\ln\left(1 - \frac{V_{\beta}}{V}\right) = (4\pi/3)G^3 \int_0^t I(t-\tau)^3 d\tau \quad (2.5)$$

Dla stałej szybkości zarodkowania całkowanie równania (2.5) daje równanie podobne do Johnsona-Mehla-Avramiego

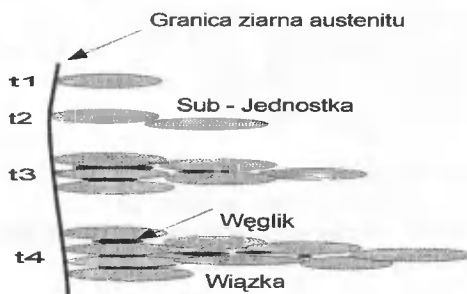
$$\xi_{\beta} = \frac{V_{\beta}}{V} = 1 - \exp\left(-\frac{1}{3}\pi G^3 I t^4\right) \quad (2.6)$$

gdzie ξ_{β} jest frakcja objętości fazy β .

Powyższe analizy są ograniczone do wydzielenia pojedynczej fazy. Adaptację zależności Johnsona-Mehla-Avramiego do rozwiązania wielu reakcji zachodzących jednocześnie przedstawiono w dalszej części.

3. ANALIZA ZARODKÓW WE WIĄZCE BAINITU

Przemiana bainityczna zwykle rozpoczyna się na powierzchni granic ziaren austenitu poprzez zarodkowanie i wzrost indywidualnych płytek bainitu. Przemieszczenie, które zachodzi podczas wzrostu przedstawia zmianę kształtu, które jest odkształceniem z niezmienniczą płaszczyzną (IPS) z dużym składnikiem ścinania. Wzrost płytek jest zahamowany przez skupisko dyslokacji utworzone wówczas, gdy następuje plastyczna akomodacja wywołana zmianą kształtu (IPS). Płytki w ten sposób rosną do ograniczonego rozmiaru, który jest zwykle mniejszy niż rozmiar ziaren austenitu. Dalsza przemiana zachodzi poprzez tworzenie nowych równoległych płytek w skupiskach zwanych jako wiązki, [14], które przedstawiono na rysunku 3. Przypuszcza się, że subpłytki rosną bez dyfuzji, lecz że pewna ilość węgla przechodzi do austenitu szczątkowego [15,16]. Czas wymagany do wzrostu subjednostek jest względnie mały w stosunku do czasu wymaganego do zarodkowania kolejnych subjednostek [16,17]. Szybkość wzrostu indywidualnych subjednostek jest dużo wyższa niż szybkość wydłużania dla całych wiązek [16-21]. Całkowita kinetyka przemiany obejmuje równoczesny wzrost i zderzenia wielu różnych wiązek. Wydzielanie węglików może zachodzić ze wzbogacanego w węgiel austenitu szczątkowego, lub w przypadku bainitu dolnego z przesyconego ferrytu.

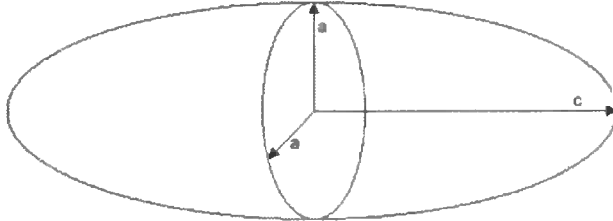


Rys. 3. Model wiązki bainitu z subjednostkami w kształcie elipsoidy [22]

Zakładając wzrost ze stałą szybkością G , objętość „ w ” sferoidalnej cząsteczki, rysunek 4, dana jest przez równanie:

$$w_r = \frac{4}{3} \pi a^2 G(t - \tau) \quad (3.1)$$

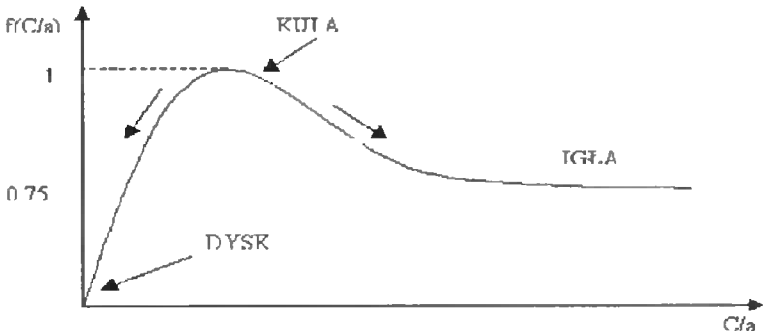
Jeżeli $\frac{C}{a} = 1$ zarodek przyjmuje kształt kuli. Jeżeli $\frac{C}{a} \gg 1$ zarodek ma kształt igły, natomiast gdy $\frac{C}{a} \ll 1$ zarodek przyjmuje kształt dysku (lub płytki).



Model zarodka w kształcie elipsoidy obrotowej

Rys. 4. Model zarodka w kształcie elipsoidy obrotowej

Ostateczny kształt zarodka zależy od energii odkształcenia osnowy na jednostkę objętości zarodka, oraz od funkcji kształtu zarodka $f\left(\frac{C}{a}\right)$.



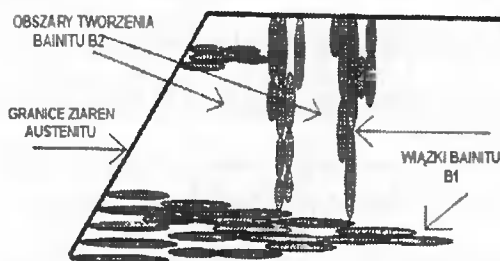
Rys. 5. Wpływ kształtu zarodka na wariant funkcji kształtu

Kształt kuli jest kształtem najmniej prawdopodobnym. Jeżeli zarodek przyjmuje na etapie początkowym kształt kuli, to jak wynika z rys. 5 są dwie drogi w dalszym etapie wzrostu zarodek może przyjąć kształt igły lub dysku. O kształcie ostatecznym decyduje wartość całkowitej energii swobodnej ΔG .

Pomimo, że dla dysku funkcja $f\left(\frac{C}{a}\right)$ przyjmuje wartość minimalną, to ze względu na wyższą wartość energii powierzchniowej zarodek przyjmuje kształt pośredni będący spłaszczonym sferoidem, zbliżonym bardziej do igły.

4. NOWY MODEL DWÓCH RÓWNOCZESNYCH REAKCJI DLA ZARODKÓW SFEROIDALNYCH

Przyjmujemy, że dwa składniki strukturalne B1 i B2 wydzielają się w tym samym czasie z sąsiadującej fazy, którą stanowi austenit. Zakładamy, że szybkość zarodkowania i wzrostu nie zmieniają się w funkcji czasu oraz, że wzrost zarodków sferoidalnych w kierunku osi c jest liniową funkcją czasu.



Rys. 6. Obszary tworzenia dwóch różnych składników strukturalnych [23]

W celu uproszczenia analiz wartości parametru a przyjmujemy jako stałą co spowodowane jest utratą koherencji zarodka w wyniku powstających pętli dyslokacyjnych.

Wzrost objętości wynikający z zarodkowania subplytek w przedziale czasu $t = \tau$ do $t = \tau + d\tau$ jest dany przez :

$$dV_{B1}^e = \frac{4}{3} \pi a^2 G_{B1} (t - \tau) I_{B1} V d\tau \quad (4.1)$$

$$dV_{B2}^e = \frac{4}{3} \pi a^2 G_{B2} (t - \tau) I_{B2} V d\tau \quad (4.2)$$

gdzie G_{B1} , G_{B2} , I_{B1} , I_{B2} oznaczają szybkość wzrostu i zarodkowania bainitu B1 i B2. Przyjmujemy tutaj podobnie jak poprzednio, że powyższe parametry są niezależne od czasu, i że cząsteczki rosną liniowo w funkcji czasu w kierunku osi c .

Równania łączące wzrost rzeczywistej objętości obu składników strukturalnych B1 i B2 z ich bieżącym przyrostem mogą być zapisane następująco :

$$dV_{B1} = \left(1 - \frac{V_{B1} + kV_{B1}}{V} \right) dV_{B1}^e \quad (4.3)$$

$$dV_{B2} = \left(1 - \frac{V_{B2} + kV_{B2}}{V} \right) dV_{B2}^e \quad (4.4)$$

Scałkowanie zależności (4.3) pozwala uzyskać formę równania, z którego w dalszej kolejności obliczamy f_{B1} (udział objętości fazy B1)

$$\frac{V_{B1}^e}{V} = -\frac{1}{1+k} \ln \left[1 - \frac{V_{B1}^e}{V} (1+k) \right] \quad (4.5)$$

Przyjmujemy oznaczenie: $\frac{V_{B1}}{V} = f_{B1}$.

Po scałkowaniu równania (4.1) otrzymujemy:

$$V_{B1}^e = \frac{4}{6} \pi a^2 G_{B1} I_{B1} \cdot V \cdot t^2 \quad (4.6)$$

Po podstawieniu równania (4.6) do (4.5) otrzymujemy:

$$\frac{\frac{4}{6} \pi a^2 G_{B1} I_{B1} V t^2}{V} = -\frac{1}{1+k} \ln[1 - f_{B1}(1+k)] \text{ stąd po przekształceniu obliczamy } f_{B1}$$

$$f_{B1} = \left(\frac{1}{1+k} \right) \left(1 - \text{EXP} \left[-\frac{4}{6} (1+k) \pi a^2 G_{B1} I_{B1} t^2 \right] \right) \quad (4.7)$$

Podobnie postępując po scałkowaniu równania (4.4) i podstawieniu po scałkowaniu zależności (4.2) otrzymujemy:

$$f_{B2} = \left(\frac{k}{1+k} \right) \left(1 - \text{EXP} \left[-\frac{4}{6} \left(\frac{1+k}{k} \right) \pi a^2 G_{B2} I_{B2} t^2 \right] \right) \quad (4.8)$$

Równania (4.7) oraz (4.8) podobne są do równań Avramiego z wartością wykładniczą $n=2$ z tą różnicą, że współczynnik „ k ” łączy tutaj równoczesne wydzielanie dwóch składników strukturalnych. Jeżeli udział objętościowy jednej z faz jest bardzo mały, wówczas równania zbliżają się do wyrażeń Avramiego. Jeżeli zachodzi równoczesne wydzielanie dwóch różnych składników strukturalnych f_{B1} i f_{B2} , wówczas ułamek objętościowy każdej fazy jest pomniejszony, ponieważ dodatkowe fazy zmniejszają frakcję objętości materiału nieprzemienionego, kosztem której może zachodzić wzrost objętości.

5. WNIOSKI

1. Zmiany objętości podczas przemiany w stanie stałym są zwykle opisywane przy zastosowaniu klasycznej teorii Johnsona-Mehla-Avramiego. Wzór ten opisuje wiele rodzajów przemian fazowych, zależnych od wykładnika n . Według tego równania krzywa ogólna ma kształt S z zakresem środkowym, w którym szybkość reakcji jest najwyższa.
2. W modelu całkowitej kinetyki przemiany uwzględniono zagadnienie twardych zderzeń, ponieważ zarodkowanie nie może występować w obszarach, które już uległy przemianie. Analizy kinetyczne ograniczone do wydzielenia pojedynczej fazy prowadzą do zależności Johnsona-Mehla-Avramiego (J-M-A), z wykładnikiem potęgowym $n=4$.
3. Równanie (J-M-A) nie jest równaniem uniwersalnym, ponieważ nie zawsze opisuje cały zakres danych eksperymentalnych. W związku z tym występują trudności w znalezieniu jednego współczynnika „ n ” charakteryzującego jednoznacznie cały proces.
4. Przedstawiona metoda całkowitej kinetyki przemiany może być zastosowana do przewidywania względnych przemieszczeń, składowych krzywych C odnoszących się do poszczególnych składników strukturalnych B1 i B2. Stanowi to o jej przydatności w projektowaniu struktury stali po przemianach fazowych.

LITERATURA

- [1] N.F. Kennon, 1978. *Met. Trans.*, v.9, ss.57.
- [2] N.F. Kennon, N.A.Kaye. 1982.. *Met. Trans.*, v.13, s. 975.
- [3] A. Omsen, 1971. *JISI*, v.209, s.131.
- [4] E.S. Davenport, E. C. Bain, 1930. *Trans. TMS-AIME*, v.90, ss. 117-144.
- [5] S.V. Radcliffe, E. C. Rollason, 1959. *JISI*, v.191, s.56.
- [6] M. Oka, H. Okamoto, 1988. *Met. Trans.*, v.19, s. 447.
- [7] H. Okamoto, M. Oka, 1986. *Met. Trans.*, v.17, s. 1113.
- [8] N.N. Thadhani, M. A. Mayers, 1986. *Prog. Mater.Sci.*, 30, ss. 1-37.
- [9] J. Zhao, Z. Jin, 1992. *Met. Trans.*, v.8, ss. 1004-1010.
- [10] J.W. Christian, 1975. *Theory of Transformations in Metals and Alloys*, Part I, Pergamon Press, Oxford.
- [11] S.J. Jones, H.K.D.H. Bhadeshia, 1997. *Acta Mater.* v. 45, ss. 2911-2920.
- [12] A.G. Guy, 1971. *Introduction to Materials Science*, McGraw-Hill Book Comp. New York.
- [13] H.K.D.H. Bhadeshia, 2002. *Materials Science and Metallurgy*, Course MP6, Kinetics and Microstructure Modeling, Cambridge.
- [14] R.F. Hehemann, 1970. *Phase transformations*, ss. 397-432, Metals Park, OH, ASM.
- [15] J.W. Christian, D. V. Edmonds, 1984. in 'Phase transformations in ferrous alloys'. (ed. A.R. Marder and J.I. Goldstein), ss. 293-327, Warrendale, PA, TMS-AIME.
- [16] H.K.D.H. Bhadeshia , J. W. Christian, 1990. *Metall. Trans.*, 21A, ss. 767-797.
- [17] A.ALI, H.K.D.H. Bhadeshia, 1989. *Mater. Sci. Technol.*, 5, ss. 398-402.
- [18] H.K.D.H. Bhadeshia, 1984. in 'Phase transformations in ferrous alloys', (ed. A. R. Marder and J. I. Goldstein), ss. 335-340, Warrendale. PA. TMS-AIME.
- [19] R.H. Goodenow, S. J. Matas, R.F. Hehemann, 1963. *Trans. AIME*, 227, ss. 651-658.
- [20] G.R. Speich, M. Cohen, 1960. *Trans. AIME*, 218, ss. 1050-1059.
- [21] M.M. Rao, P.G. Winchell, 1967. *Trans. AIME*, 239, ss. 956-960.
- [22] G.I. Rees, H.K.D.H. Bhadeshia, 1992. *Materials Science and Technology*, v.8, ss. 985-993.
- [23] G.I. Rees, H.K.D.H. Bhadeshia, 1992. *Materials Science and Technology*, v.8, ss. 994-996.

PHASE TRANSFORMATIONS KINETIC MODELS

This paper describes a modification of the Avrami overall transformation kinetics theory adapted to lower bainite in the swing back range. The overall transformation kinetics includes the simultaneous decomposition of austenite into two transformation products that have separate C-curves. Both transformations occur by means of a formation of new, parallel platelets in clusters known as sheaves. The width of a subunit near the tip of a sheaf is approximately the same as in a nucleation site of others. They grow to limited size with linear dependence in time.

Keywords: the Avrami theory, clusters of parallel platelets, subunit

MODEL NIERÓWNOMIERNOŚCI ROZDRABNIANIA WIELOOTWOROWEGO

Ali Makhief Al-Zubiedy, Adam Flizikowski

Katedra Maszyn Spożywczych i Ochrony Środowiska.
Wydział Mechaniczny ATR Bydgoszcz

Równomierność rozdrabniania nożowego i bijakowego opisana jest fragmentarycznie. W niniejszych rozważaniach zawarty jest tok rozumowania oparte o: nowe modele funkcji celu, nowoczesne techniki informatyczne, dynamiki i energetyki procesu - uwzględniające jednak większość cech konstrukcyjnych i procesowych. Przedstawiono rozwiązanie konstrukcyjne rozdrabniacza wielotarczowego, które wypełnia postawione postulaty nierównomierności.

Słowa kluczowe: rozdrabniania wielootworowego, budowa maszyn, efektywności, równomierności, sprawności

1. WPROWADZENIE

W optymalizacji konstrukcji rozdrabniaczy wielootworowych, wielotarczowych ważną rolę odgrywa model matematyczny nierównomierności ruchu – działania. Powinien on uwzględniać, a dalej umożliwiać przewidywanie koncepcji i szczegółowych rozwiązań zespołów napędowych oraz środowiskowych następstw chwilowych i długoczasowych zmian prędkości, momentu obrotowego, a w konsekwencji zapotrzebowania mocy. W budowie i eksploatacji maszyn coraz częściej zwraca się uwagę na środowiskowe cele przetwórstwa realizowanego przez maszyny [1,2,3,4]. Rozdrabnia się materiał polimerowy, często z recyklingu, dla celów konstrukcyjnych, więc należy stosować konstrukcyjne miary osiąganych celów.

2. METODYKA BADAŃ

2.1. Model obiektu badań

Zapotrzebowanie mocy do napędu rozdrabniaczy wielotarczowych jest, podobnie jak w innych rozwiązaniach, bardzo nierównomierne. Między cięciem kolejnych kawałków występuje pewien okres biegu jałowego maszyny. Dla zmniejszenia wahań poboru mocy należy skumulować energię, którą uzyskuje się w czasie biegu jałowego. Rolę urządzenia akumulującego energię może spełniać tarcza nożowa wielootworowa, o ile jej moment bezwładności jest wystarczający. W przeciwnym przypadku należy zainstalować na wale dodatkowe koło zamachowe, czyli funkcja nierównomierności ruchu – działania może przyjąć postać:

$$\delta = f(C_{R,x-y}, C_{kR}, P_T, Z - Z)$$

lub

(1)

$$\delta = f(\Pi, W, T; d_{\dot{s}r}, d_{max}, l_{zr}, e'; n, \omega, G_n, t; E_R, \Delta t)$$

gdzie:

- $C_{R,x-y}$ – cechy materiału rozdrabnianego ($d_{\dot{s}r}$, d_{ma} – średnice na wejściu, l_{zr} – zredukowany wymiar produktu rozdrabniania, e' – jednostkowe zużycie energii),
- C_{kR} – konstrukcyjne cechy zespołu rozdrabniającego (Π – postać konstrukcyjna, W – wymiar, T – tolerancja elementów),
- P_T – parametry technologiczne (n – prędkość obrotowa, ω – prędkość kątowna, G_n – geometria narzędzia i zespołu rozdrabniającego, t – czas),
- $Z-Z$ – zużycie potencjału środowiska i wprowadzenie zanieczyszczeń do środowiska (E_R – gęstość potencjału energo-materialnego pobranego ze środowiska, Δt – gęstość potencjału energo-materialnego wywołującego przyrosty temperatury środowiska rozdrabniania).

Jeśli wał wykonuje n 1/min, to średnia prędkość kątowna równa prędkości nominalnej wynosi

$$\omega_{\dot{s}r} = \omega_{nom} = \frac{\pi n}{30} \quad (2)$$

W przybliżeniu przyjmuje się [1-3, 7-8]

$$\omega_{\dot{s}r} = \frac{\omega_{max} + \omega_{min}}{2} \quad (3)$$

Zmiany powyższe ujmuje współczynnik nierównomierności biegu maszyny [8]

$$\delta_k = \frac{\omega_{max} - \omega_{min}}{\omega_{\dot{s}r}} \quad (4)$$

Uwzględniając w równaniu (4) zależność (3) i przekształcając otrzymujemy

$$\omega_{max} = \omega_{\dot{s}r} \left(1 + \frac{\delta_k}{2} \right), \quad \omega_{min} = \omega_{\dot{s}r} \left(1 - \frac{\delta_k}{2} \right) \quad (5)$$

czyli:

$$\begin{aligned} \omega_{max}^2 &= \omega_{\dot{s}r}^2 \left(1 + \frac{\delta_k}{2} \right)^2 \approx \omega_{\dot{s}r}^2 (1 + \delta_k) \\ \omega_{min}^2 &= \omega_{\dot{s}r}^2 \left(1 - \frac{\delta_k}{2} \right)^2 \approx \omega_{\dot{s}r}^2 (1 - \delta_k) \end{aligned} \quad (6)$$

Wielkość oddawanej lub pobieranej przez koło zamachowe energii L , która jest różnicą pracy rzeczywiście wykonywanej podczas cięcia L_{cz} i pracy wykonywanej przez silnik elektryczny L_{sn} [2], można przedstawić równaniem

$$\Delta L = L_{cz} - L_{sn} = \frac{B_{mk} (\omega_{max}^2 - \omega_{min}^2)}{2} \quad (7)$$

gdzie B_{mk} jest momentem bezwładności maszyny wraz z kołem zamachowym:

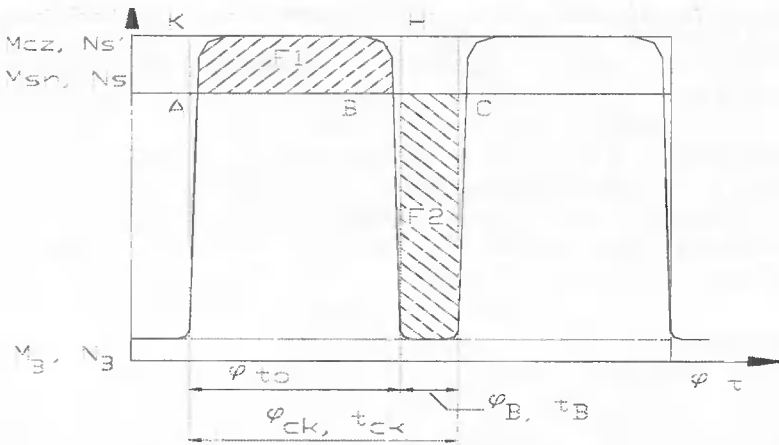
$$B_{mk} = B_{mz} + B_k \quad (8)$$

a B_{mz} - moment bezwładności maszyny zredukowany na wał roboczy.

Natomiast

$$\Delta L = \int_A^B M_{zr} d\varphi = \int_A^B (M_{cz} - M_{sn}) d\varphi \quad (9)$$

jest nadwyżką pracy wykonanej między punktami AB , gdy prędkość kątową osiąga odpowiednio największą (ω_{max}) i najmniejszą (ω_{min}) wartość. Równa się ona powierzchni pola F_1 (rys. 1).



Rys. 1. Wykres oporów czynnych w procesie cięcia (quasi-ścianania)

Wstawiając do równania (7) zależności (6) oraz (8) otrzymamy

$$B_k = \frac{\Delta L}{\omega_{ur}^2 \delta_k} - B_{mz} \quad (10)$$

Ponieważ moment bezwładności elementów tnących jest pomijalnie mały w stosunku do momentu koła zamachowego [9], wzór (10) przyjmie więc postać:

$$B_k = \frac{\Delta L}{\omega_{ur}^2 \delta_k} \quad (11)$$

Rzeczywisty pobór mocy w chwili quasi-ścianania jest większy [2, 3, 6, 8, 9]

$$N'_s = \frac{E}{t_o} \quad (12)$$

Energję użytą na ścięcie kawałka recyklatu o średnicy d_{osr} i długości L można obliczyć przyjmując wskaźnik jednostkowego zużycia energii na 1 m^3 tworzywa e'

$$E = \frac{\pi d_{osr}^2}{4} \cdot L \cdot e' \quad (\text{MJ}) \quad (13)$$

Czas cięcia

$$t'_o = \frac{L \cdot 10^3}{60 \cdot n \cdot z \cdot l_{zr}} \quad [\text{godz}] \quad (14)$$

Rzeczywisty pobór mocy w chwili cięcia recyklatu o średnicy d_{osr} obliczymy jako

$$N'_s = \frac{E}{t_o} = \frac{\pi d_{osr}^2 \cdot L \cdot e'}{4} \cdot \frac{n \cdot z \cdot l_{zr} \cdot 60}{3,6L \cdot 10^3} \quad (\text{kW})$$

Po uproszczeniu i przeliczeniu jednostek otrzymujemy

$$N'_s = \frac{60 \pi d_{osr}^2 \cdot e' \cdot z \cdot l_{zr} \cdot n}{14,4 \cdot 10^3} \quad (\text{kW}) \quad (15)$$

Gdyby nie było koła zamachowego, to pobór mocy zmieniałby się od N' w czasie cięcia do mocy biegu jałowego N_B występującej w przerwach między kawałkami, jak to pokazano na rysunku 1. Koło zamachowe w czasie biegu jałowego t_B akumuluje energię równą polu F_2 . Wielkości tych pól muszą być sobie równe ($F_1 = F_2$). Na skutek tego pobór mocy przez silnik elektryczny utrzymuje się na „stałym” poziomie, równym N_s , co umożliwia prawidłową eksploatację silnika.

Przy obliczeniach przyjmujemy z niewielkim błędem, że praca, jaką wykonuje koło zamachowe podczas jednego cyklu, tzn. cięcia kawałka, jest równa polu prostokąta $ABHK$ na rys.1. Można zatem napisać

$$\Delta L = F_1 \cong F_{ABHK}$$

Ponieważ

$$F_{ABHK} = (N'_s - N_s) \cdot t_o$$

to

$$\Delta L = (N'_s - N_s) \cdot t_o \quad (\text{kW} \cdot \text{s}) \quad (16)$$

Podstawiając równanie (16) do (11) otrzymujemy

$$B_k = \frac{(N'_s - N_s) \cdot t_o}{\omega_{ur}^2 \cdot \delta_k} \quad (17)$$

Po przeliczeniu jednostek wzór przyjmie postać

$$B_k = \frac{1020 (N'_s - N_s) \cdot t_o}{\omega_{ur}^2 \cdot \delta_k} \quad (\text{Nm} \cdot \text{s}^2) \quad (18)$$

albo

$$B_k = \frac{9,35 \cdot 10^4 (N'_s - N_s) \cdot t_o}{n^2 \cdot \delta_k} \quad (\text{Nm} \cdot \text{s}^2) \quad (19)$$

Po podstawieniu do wzoru (19) wyrażenia (15) otrzymamy

$$B_k = \frac{9,35 \cdot 10^4 \cdot t_o}{n^2 \cdot \delta_k} \left[\frac{60 \cdot \pi \cdot d_{osr}^2 \cdot e' \cdot z \cdot l_{zr} \cdot n}{14,4 \cdot 10^3} - N_s \right] \quad (\text{Nm} \cdot \text{s}^2) \quad (20)$$

Koło zamachowe o obliczonym momencie bezwładności B_k zapewni stabilność rozdrabniania kawałków o średniej średnicy d_{osr} . O większej średnicy d_{omax} natomiast:

$$N''_s = \frac{60 \pi \cdot d_{omax}^2 \cdot e' \cdot z \cdot l_{zr} \cdot n}{14,4 \cdot 10^3} \quad (\text{kW}) \quad (21)$$

Silnik elektryczny będzie wówczas pracował z przeciążeniem równym

$$(N''_v, -N'_v) = \frac{60\pi \cdot e' \cdot z \cdot l_{zr} \cdot n}{14,4 \cdot 10^3} (d_{omax}^2 - d_{oir}^2) \quad (\text{kW}) \quad (22)$$

Jeżeli przyjęta w konstrukcji tarcza będzie miała moment bezwładności B_t , który jest większy od obliczonego B_k , to przeciążenie silnika będzie mniejsze i wyniesie

$$N''_v = \left(N_v + \frac{B_t \cdot \omega_{ir}^2 \cdot \delta_k}{102 \cdot t_o} \right) \quad (23)$$

Przy dokładnej analizie momentu zamachowego potrzebnego w procesie quasi-scinania należy uwzględnić dodatkowo jeszcze okresy biegu jałowego podczas quasi-scinania jednego kawałka.

Jeżeli odległość między krawędziami otworów - nożami jest większa od średnicy wałka d_{osr} , to między pracą dwóch kolejnych noży istnieje pewien okres przerwy (określony kątem φ_p na rys. 2), w czasie którego odbywa się bieg luzem. Proces quasi-scinania ma miejsce na drodze katowej

$$\varphi_r = \frac{d_{oir}}{R_m} \quad (24)$$

Natomiast bieg luzem odbywa się na drodze katowej

$$\varphi_p = \frac{2\pi}{z} - \varphi_r = \frac{2\pi}{z} - \frac{d_{oir}}{R_m} \quad (25)$$

2.2. Rozwiązanie teoretyczne

Dla potrzeb szczegółowej analizy nierównomierności dynamicznej korzystano z modyfikacji momentowej M_c i średniej wartości momentu obrotowego $(M_c)_{sr}$; obejmującej: p_c - opory rozdrabniania, Δl_i - chwilową długość cięcia, r - promień, μ - współczynnik tarcia zewnętrznego, τ - kąt cięcia, ψ - kąt działania narzędzia, z - liczbę narzędzi, zgodnie z założeniami funkcji (1), sprowadzonej do postaci [2]:

$$\delta_d = \frac{M_{cmax} - M_{cmin}}{(M_c)_{sr}} = \frac{p_c \Delta l_{max} r \cos \tau (1 + \mu \operatorname{tg} \tau) - p_c \Delta l_{min} r \cos \tau (1 + \mu \operatorname{tg} \tau)}{z \int_{\varphi_p}^{\varphi_k} M_c(\Psi) d\Psi} \quad (26)$$

2π

Oczywiście po uwzględnieniu niezmienności jednostkowych oporów rozdrabniania i warunków tarcia zależność ta sprowadza się do wygodnej postaci:

$$\delta_d = \frac{A \Delta l_{max} - A \Delta l_{min}}{(M_c)_{sr}} = \frac{A(\Delta l_{max} - \Delta l_{min})}{(M_c)_{sr}} \quad (27)$$

która może być wykorzystana w procedurze pomiarowej. Stopień nierównomierności dynamicznej, mierzony dla chwilowych ustawień nożowego zespołu rozdrabniającego, określany jest w oparciu o pomiary chwilowej długości cięcia Δl_i - z wyznaczeniem ekstremów; oraz chwilowego momentu obrotowego M_i i wyznaczeniem średniej.

W warunkach badawczych wyznacza się również wartość stałej A , dla określonej programem badawczym konstrukcji zespołu wielokrawędziowego, wybranego rodzaju tworzywa oraz parametrów procesu dezintegracji.

Z badań [2, 9] wynika, że moment zamachowy potrzebny w tym przypadku jest kilkadziesiąt razy mniejszy, niż ma tarcza robocza. Obliczone uprzednio koło zamachowe w zupełności więc wystarczy dla zapewnienia stabilności biegu.

2.3. Plan i program doświadczeń

Program badań charakterystyk równomierności i sprawności wielokrawędziowego rozdrabniania surowców i materiałów wybrano i zrealizowano w oparciu o plan statyczny kompletny – zdeterminowany PS/DK [1, 3, 6].

2.4. Analiza wyników

W zakresie badań konstrukcyjnych w warunkach rozdrabniacza wielotarczowego przeprowadzono postępowanie:

- z zespołami rozdrabniającym i napędowym realizującymi zadaną funkcję rozdrabniania,
- w procesie technologicznym przekształceń mechanicznych, przemieszczeń dynamicznych z zadanym zasilaniem, sterowaniem, stopniem rozdrobnienia i przy ruchach wynikających z kinematyki przestrzeni działania,
- w kierunku zadanego celu rozdrabniania, tj. minimum nierównomierności biegu.

Na podstawie powyższych klasyfikacji zmiennych przyjęto schemat struktury i elementów techniki pomiarów, uwzględniający również czynniki zakłócające, które występowały w eksperymencie fizycznym (niedokładność aparatury i błędy odczytu).

Dla przykładu podać można sytuację, w której innowator chce określić nierównomierność przekroju rozdrabniania pewnego surowca/materiału. W tym celu uruchamia skrypt (program umieszczony na serwerze innowatora) komunikujący się z serwerem na którym zaimplementowano aplikację do symulowania przekrojów rozdrabniania (np. algorytm identyczny z TEST4_TPTS [2] na serwerze usług na Wydziale Mechanicznym ATR).

Przykładowa postać prostej realizacji zapytania o nierównomierność konstrukcyjną:

```
print SOAP::Lite
```

```
->uri('http://wm.atr.bydgoszcz.pl/udostepniaj/rozdrabnianie') #lokalizacja pakietu
->proxy('http://wm.atr.bydgoszcz.pl/udostepniaj/serwer.pl') #lokalizacja serwera
->Wylicz_Pr(„materiał_rozdrabniany”, „typ_rozdrabniacza”, „parametry_rozdrabniania”)
->result
```

Wylicz_Pr(), jedna z całego zestawu procedur symulacyjnych udostępnionych w procesie znajdowania rozwiązań problemów konstrukcyjnych (*Wylicz_Ee()*, *Wylicz_Fr()*).

Tabela 1. Zestawienie wyników obliczeń chwilowych wartości przekrojów rozdrabniania wielotarczowego RQS_3, t - czas analizy, F - przekrój rozdrabniania, Pr(t1-t5) - siły skrawania pięciu różnych tworzyw, fmin - minimalna powierzchnia rozdrabniania, fmax - powierzchnia maksymalna, deltaF - różnica powierzchni, delta - nierównomierność przekrojów rozdrabniania

Wyniki symulacji						
t sek	F m2	Pr(t1) N	Pr(t2) N	Pr(t3) N	Pr(t4) N	Pr(t5) N
0.0000	0.000554	319.48	479.08	612.04	1170.5	1675.9
0.0050	0.000457	263.55	395.10	504.84	965.45	1382.2
0.0100	0.000504	290.80	436.04	557.07	1065.4	1525.3
0.0150	0.000424	244.49	366.57	468.30	895.55	1282.1
0.0200	0.000505	291.26	436.76	558.00	1067.1	1527.6
0.0250	0.000457	263.76	395.51	505.26	966.35	1383.4
0.0300	0.000555	319.75	479.52	612.63	1171.7	1677.5
0.0350	0.000538	310.22	465.16	594.25	1136.6	1627.2
0.0400	0.000506	291.62	437.24	558.64	1068.4	1529.6
0.0450	0.000554	319.23	478.66	611.56	1169.6	1674.5
0.0500	0.000505	291.46	437.06	558.37	1067.9	1528.5
0.0550	0.000507	292.40	438.44	560.14	1071.2	1533.7
0.0600	0.000471	271.54	407.14	520.15	994.75	1424.2
0.0650	0.000554	319.42	478.96	611.92	1170.5	1675.5
fmin:	0.000424	m				
fmax:	0.000555	m				
deltaF	0.000907					
delta	0.13360					

Taki program komunikuje się z serwerem udostępniającym metody symulujące rozdrabnianie, na bezpiecznym (i dostępnym) porcie 80 oraz przekazuje dane do obliczeń. Serwer z kolei przetwarza dane, zwracając wynik (pośredni) do innowatora, np. w postaci tabeli 1.

Jest to tylko prosty przykład, ale pokazuje on, że za pomocą technik e-formatycznych można korzystać z metod (procedur, symulacji) w punktach przetwarzania modeli konstrukcyjnych i uzyskiwać odpowiedzi na pytania, rozwiązania problemów powstałych w procesie konstrukcji za pomocą uzgodnionych interfejsów by uprościć proces innowacji i uniezależnić go od lokalizacji punktów (stacji) przetwarzania.

3. PODSUMOWANIE

Zbiór cech konstrukcyjnych, dla najwyższej równomierności wielotarczowego rozdrabniania wyznaczono na podstawie wypełnienia kryteriów, estymatorów zależności (26) - weryfikujących modele środowiskowo-użytkowe przetwórstwa mechanicznego - tabela 1.

Rozwiązanie konstrukcyjne, zespołu wielotarczowego rozdrabniacza, zweryfikowano w oparciu o badania procesu na rozdrabniaczu o konstrukcji oryginalnej, zmien-

nych elementach zespołu roboczego – rozdrabniaczu wdrożonym do małoseryjnej produkcji. Zaprezentowane rozwiązanie zostało wyróżnione złotym medalem na Światowych Targach Innowacji, Badań Naukowych i Technologii w Brukseli w 1998 roku. Oczywiście proces rozdrabniania wymaga stabilizacji termicznej, ze względu na dynamikę wzrostu ilości ciepła emitowanego chwilowo i długoczasowo do środowiska rozdrabnianego tworzywa i otoczenia technologicznego.

W sterowaniu cechami, w systemie: materiał-maszyna-proces-środowisko rozdrabniania, dla zaistnienia postulowanego stanu wysokiej równomierności, na pierwszym miejscu stawia się konieczność wykorzystania możliwości procesowych, na drugim zmiany właściwości materiału rozdrabnianego, a na trzecim - zmiany cech konstrukcyjnych rozdrabniacza.

Równomierność rozdrabniania jest oceniana, co najmniej w dwóch aspektach: wskaźników i potencjałów.

Wskaźniki efektywności wiążą się ze skutecznością, czyli sprawnością realizacji zadanej funkcji celu; ekonomicznością, czyli modelem rozbudowanym o aspekty społeczno - ekologiczne; informacyjnością - jako zbliżaniem do ideału (modelu) bezwzględnie; oraz trwałością - relacjami między trwałością właściwą, a ekstremalną.

W rozwiązaniach konstrukcyjnych preferowane są rozdrabniacze wielokrawędziowe, a wśród nich wielonożowe, wielootworowe, dla których na drodze modelowania matematycznego można zaproponować postać zewnętrzną oraz cechy konstrukcyjne przestrzeni rozdrabniania spełniające postawione wymagania technologiczne i środowiskowe.

LITERATURA

- [1] J. Flizikowski, 1998. Projektowanie środowiskowe maszyn. Wyd. Uczel. ATR Bydgoszcz.
- [2] J. Flizikowski, 1998. Rozdrabnianie tworzyw sztucznych. Wyd. Uczel. ATR Bydgoszcz
- [3] M. Macko, 2000. Wpływ cech konstrukcyjnych zespołu wielotarczowego na charakterystyki użytkowe procesu rozdrabniania rurowych recyklatów tworzyw sztucznych. Dysertacja WM-ATR Bydgoszcz.
- [4] J. Flizikowski, 2000. Konstrukcyjno-procesowa efektywność rozdrabniania nasion zbóż. Inżynieria Maszyn 15/2000, ss. 9-18.
- [5] K. Bieliński, J. Flizikowski, 2000. Wspomaganie zarządzania mediami energo-materialnymi w technologiach spożywczych. Inżynieria Maszyn 15/2000, ss. 165-170.
- [6] J. Flizikowski, K. Peszyński, A. Flizikowski, A. Makhief Al.-Zubiedy, 2000. Analiza danych quasi-ścianania w metodyce środowiskowych rozwiązań konstrukcyjnych rozdrabniaczy. Inżynieria Maszyn 15/2000, Bydgoszcz, ss. 235-238.
- [7] J. Flizikowski, i Zespół, 2001. Nierównomierność rozdrabniania surowców i materiałów spożywczych. Cz. I i II. Inżynieria Maszyn 17/2001, Bydgoszcz, ss. 35-50.
- [8] J. Flizikowski. 1984. Wpływ cech konstrukcyjnych na charakterystyki ruchowe bezstopniowej przekładni impulsowej. Dysertacja, Politechnika Gdańska WBM.
- [9] J. Flizikowski, Z. Kikiewicz, M. Macko, 2000. Cechy geometryczne krawędzi rozdrabniającej rurowe recyklaty tworzyw sztucznych. Inżynieria Maszyn 16/2000, Bydgoszcz, ss. 73-80.

IRREGULARITY OF THE MULTI-HOLE CRUMBLING MODEL

Summary

Uniformity of the crumbling-beater process and cutting mill is rewritten in form of parts. Because of the rather complex correlations. The new model of aim functions, the new technic for programming, dynamic and energetic process, which allow the calculation of the grinding process in a multiple disc cutting mill in dependence on the constructive and mill process sheariness.

Keywords: multi-hole crumbling, construction of machines, effectiveness, uniformity, efficiency

EFEKT ŻYROSKOPOWY W DYNAMICE WALCÓW MASZYNY PAPIERNICZEJ

Janusz Zachwieja

Katedra Mechaniki Stosowanej, Wydział Mechaniczny ATR
ul. Kaliskiego, 85-796 Bydgoszcz

Praca zawiera analizę wpływu efektu żyroskopowego na wartość prędkości krytycznej walca prowadzącego wstęgę papieru w krajarce KL63. Wykazano, że stosunkowo duża jego sztywność wpływ ten znacząco ogranicza. W identyczny sposób oddziałuje wzrost podatności podparcia walca.

Słowa kluczowe: metoda elementów skończonych, efekt żyroskopowy, drgania swobodne

1. WSTĘP

Maszyna papiernicza zbudowana jest z wielu walców o rozmaitej smukłości. Ich rola jest uzależniona od umiejscowienia w sekcji maszyny. Mogą być to, tzw. suszniki odbierające wodę z masy papierniczej, bądź też walce prowadzące wstęgę papieru. Z uwagi na znaczną prędkość liniową wstęgi, prędkość kątowna większości walców przekracza wartość 150 rad/s. W takich przypadkach absolutnie niezbędne jest ich dynamiczne wyważenie. Czynność tą wykonuje się na wyważarkach stacjonarnych, co najmniej w dwóch płaszczyznach korekcyjnych. Idealne wyważenie obiektu nie jest praktycznie możliwe. Zdarza się, że nawet niewielkie niewyważenie resztkowe jest przyczyną znacznych drgań w przypadku, gdy prędkość obrotowa walca jest bliska częstości jego drgań własnych

[1]. W praktyce dąży się do takiego stanu, aby obroty znamionowe walców znacznie różniły się od wartości krytycznych [2]. Warunek ten zapewnia się poprzez właściwy dobór sztywności zarówno samego walca jak i jego podparcia. Gdy nie jest możliwy do osiągnięcia stan w którym prędkość obrotowa była niższa od częstości rezonansowej, wówczas trzeba zadbać o to, aby czas rozbiegu walca w strefie rezonansu był możliwie krótki. Zwiększanie prędkości ponad wartość krytyczną działa stabilizująco dzięki efektom żyroskopowym [3, 4] w warunkach, tzw. precesji synchronicznej.

Drgania układów ciągłych rozważane były w przeszłości w oparciu o metody analityczne [5] jak też numeryczne [6]. Daje się przy tym zauważyć pewien trend, że o ile w literaturze polskiej większość opracowań powstało w oparciu o metody SES (sztywne elementy skończone) [7], to w literaturze zagranicznej numeryczne rozwiązanie zagadnienia drgań podobnych układów uzyskiwano przy wykorzystaniu metody OES (odkształcalne elementy skończone) [8].

Efekt żyroskopowy i jego wpływ na częstości drgań własnych wirujących układów ciągłych był przedmiotem szeregu analiz [9]. Sposób potraktowania zagadnienia wydaje się jednak dosyć ogólnikowy. W większości prac poświęconych dynamice wirników

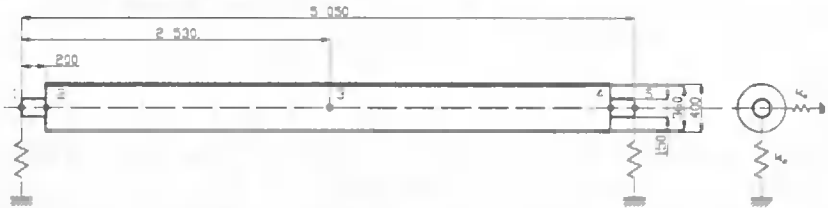
rozpatrywany jest klasyczny model Föppl'a-Jefcotta w którym wał traktowany jest jako element bez masowy. Przedstawione sposoby wyznaczania częstości drgań własnych w wielu przypadkach nie nadają się do praktycznego wykorzystania.

W niniejszej pracy pokazano sposób wyznaczania macierzy żyroskopowej w oparciu o metodę OES oraz jej znaczenie dla metodologii obliczeń częstości drgań własnych walca prowadzącego wstęgę papieru w krajarce KL63 z uwzględnieniem sztywności jego podparcia.

2. SFORMUŁOWANIE MODELU OBLICZENIOWEGO

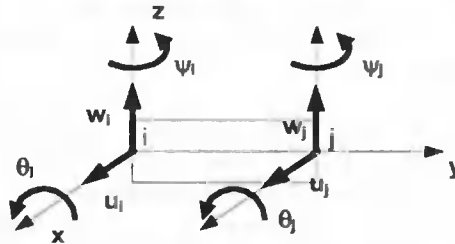
Do analizy zagadnienia użyty został model analogiczny jak w

[1]. Sposób podziału walca na OES został przedstawiony na rysunku 1. Przyjęto, że nie występuje zjawisko anizotropii zewnętrznej tzn., że sztywności łożyska w kierunkach x oraz z są jednakowe ($k_x = k_z$).



Rys. 1. Model walca wraz z podparciem

Element skończony użyty w rozważaniach jest klasycznym elementem belkowym o czterech stopniach swobody w węzle tak jak to przedstawiono na rysunku 2.



Rys. 2. Odształcalny element skończony o czterech stopniach swobody w węzle

Składowymi wektora przemieszczeń węzłowych δ_e są cztery przemieszczenia i cztery kąty

$$\delta_e = [u_i \quad w_i \quad \psi_i \quad \theta_i \quad u_j \quad w_j \quad \psi_j \quad \theta_j]^T \quad (1)$$

Przemieszczenia i kąty ugięcia wzdłuż osi walca (współrzędna y) są wyrażane jako:

$$\begin{bmatrix} u(y) \\ w(y) \end{bmatrix} = N(y)\delta_e \quad (2)$$

oraz

$$\begin{bmatrix} \psi \\ \theta \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -\frac{\partial u(y)}{\partial y} \\ \frac{\partial v}{\partial y} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \mathbf{D}(y) \delta_e \quad (3)$$

Tutaj \mathbf{N} jest macierzą funkcji kształtu, natomiast \mathbf{D} jest macierzą gradientów funkcji kształtu. Określamy je poprzez zależności:

$$\mathbf{N}(\xi) = \begin{bmatrix} N_1 & 0 & -N_2 & 0 & N_3 & 0 & -N_4 & 0 \\ 0 & N_1 & 0 & N_2 & 0 & N_3 & 0 & N_4 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} N_{uu} \\ N_{uw} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1-3\xi^2+2\xi^2 & 0 & -l\xi(1-2\xi+\xi^2) & 0 & 3\xi^2-2\xi^3 & 0 & -l(-\xi^2+\xi^3) & 0 \\ 0 & 1-3\xi^2+2\xi^2 & 0 & l\xi(1-2\xi+\xi^2) & 0 & 3\xi^2-2\xi^3 & 0 & l(-\xi^2+\xi^3) \end{bmatrix} \quad (4)$$

natomiast macierz \mathbf{D} :

$$\mathbf{D} = \begin{bmatrix} D_{uu} \\ D_{uw} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{\partial}{\partial y} \mathbf{N} \\ \frac{\partial}{\partial y} \mathbf{N} \end{bmatrix} = \frac{1}{L} \frac{\partial}{\partial \xi} \mathbf{N} = \begin{bmatrix} -6\xi+6\xi^2 & 0 & -l(1-4\xi+3\xi^2) & 0 & 6\xi-6\xi^2 & 0 & -l(-2\xi+3\xi^2) & 0 \\ 0 & -6\xi+6\xi^2 & 0 & l(1-4\xi+3\xi^2) & 0 & 6\xi-6\xi^2 & 0 & l(-2\xi+3\xi^2) \end{bmatrix} \quad (5)$$

$$\xi = \frac{y}{L}$$

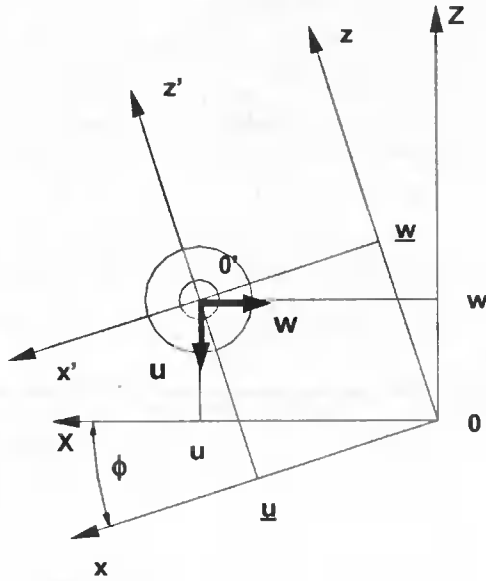
gdzie:

ξ - współrzędna y odniesiona do długości elementu skończonego.

3. KONFIGURACJA UKŁADÓW ODNIESIENIA DLA ANALIZY RUCHU OES

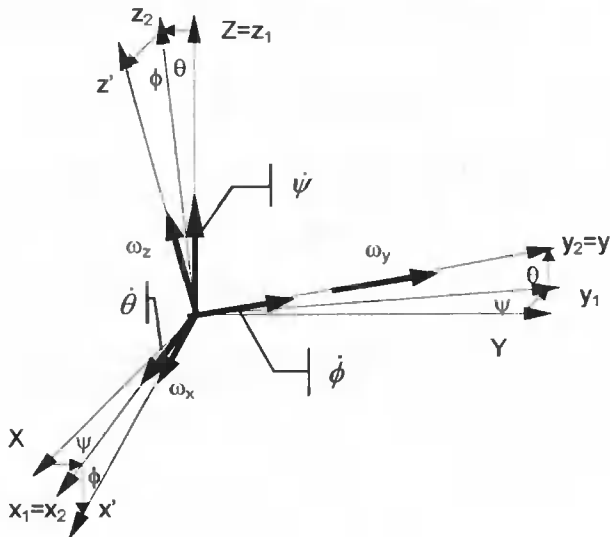
Ruch walca będziemy rozpatrywać w trzech układach odniesienia (rys. 3):

1. $0XYZ$ jest układem stałym,
2. $0xyz$ jest układem ruchomym, obracającym się wraz z walcem,
3. $0^*x^*y^*z^*$ jest układem ruchomym o osiach równoległych do $0xyz$ i środkiem leżącym na osi obrotu walca. Osie tego układu są głównymi, centralnymi osiami bezwładności każdego jego przekroju.



Rys. 3. Układy odniesienia

Związek pomiędzy układami $0XYZ$ oraz $0x'y'z'$ wyrażony jest poprzez kąty Eulera ϕ, θ, ψ (rys. 4) albowiem w ruchu kulistym układ XYZ można przenieść do położenia $x'y'z'$ poprzez trzy niewielkie obroty względem odpowiednich osi:



Rys. 4. Kąty Eulera

1. Obrót dookoła osi Z o kąt ψ ,
2. Obrót dookoła osi x_1 o kąt θ ,
3. Obrót dookoła osi y_2 o kąt ϕ ,

Przyjmujemy, że kąty θ, ψ są małe, natomiast prędkość kątową $\dot{\phi}$ będącą prędkością wirowania walca oznaczamy jako Ω .

Chwilowa prędkość kątową przekroju ma w układzie $x'y'z'$ następujące składowe

$$\begin{aligned}\omega_x &= \dot{\psi} \cos\left(\frac{\pi}{2} + \phi\right) + \dot{\theta} \cos\phi = \dot{\theta} \cos\phi - \dot{\psi} \sin\phi \\ \omega_y &= \dot{\psi} \cos\left(\frac{\pi}{2} - \theta\right) + \dot{\phi} = \dot{\psi} \theta + \dot{\phi} \\ \omega_z &= \dot{\psi} \cos\phi + \dot{\theta} \cos\left(\frac{\pi}{2} - \phi\right) = \dot{\theta} \sin\phi + \dot{\psi} \cos\phi\end{aligned}\quad (1)$$

W stałym układzie OXYZ położenie przekroju jest określone przez przemieszczenie jego środka oznaczone przez w, u oraz przez kąty θ, ψ . Kąty te są w przybliżeniu równe kątom ugięć wzdłuż osi Y w kierunku osi X oraz Z. Biorąc pod uwagę przeciwne skierowanie kątów ψ, θ względem przemieszczeń u, w zapiszemy:

$$\begin{aligned}\psi &= -\frac{\partial u}{\partial y'} \\ \theta &= \frac{\partial w}{\partial y'}\end{aligned}\quad (7)$$

W ruchomym układzie Oxyz położenie przekroju jest definiowane przez przemieszczenia $\underline{u}, \underline{w}$ oraz kąty ugięcia $\underline{\psi}, \underline{\theta}$. Transformacja przemieszczeń i kątów z układu stałego do ruchomego jest następująca:

$$\begin{aligned}u &= \underline{u} \cos \Omega t + \underline{w} \sin \Omega t \\ w &= -\underline{u} \sin \Omega t + \underline{w} \cos \Omega t\end{aligned}\quad (8)$$

Zależność (8) można przedstawić w postaci macierzowej:

$$\begin{bmatrix} u \\ w \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \cos \Omega t & \sin \Omega t \\ -\sin \Omega t & \cos \Omega t \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \underline{u} \\ \underline{w} \end{bmatrix}\quad (9)$$

Z uwagi na (6) oraz (7) mamy:

$$\begin{aligned}\psi &= -\frac{\partial u}{\partial y'} = -\frac{\partial \underline{u}}{\partial y'} \cos \Omega t - \frac{\partial \underline{w}}{\partial y'} \sin \Omega t = \underline{\psi} \cos \Omega t - \underline{\theta} \sin \Omega t \\ \theta &= \frac{\partial w}{\partial y'} = -\frac{\partial \underline{u}}{\partial y'} \sin \Omega t + \frac{\partial \underline{w}}{\partial y'} \cos \Omega t = \underline{\psi} \sin \Omega t + \underline{\theta} \cos \Omega t\end{aligned}\quad (10)$$

co znowu możemy zapisać jako:

$$\begin{bmatrix} \psi \\ \theta \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \cos \Omega t & -\sin \Omega t \\ \sin \Omega t & \cos \Omega t \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \underline{\psi} \\ \underline{\theta} \end{bmatrix}\quad (11)$$

4. ENERGIA KINETYCZNA RUCHU OES

Energia kinetyczna OES walca ma postać:

$$T_w = \frac{1}{2} \rho A \int_0^L (\dot{u}^2 + \dot{w}^2) dy + \frac{1}{2} \rho \int_0^L (I_x \omega_x^2 + I_p \omega_y^2 + I_z \omega_z^2) dy \quad (12)$$

przy czym: $\omega_x, \omega_y, \omega_z$ są prędkościami kątowymi wyrażanymi analogicznie jak (6). Przez I_x, I_z oznaczono powierzchniowe momenty bezwładności względem osi głównych x' oraz z' . Wielkość I_p wyraża biegunowy moment bezwładności przekroju elementu względem osi y . Pozostałe zmienne A, L, ρ są odpowiednio: przekrojem poprzecznym elementu jego długością i gęstością.

Dla rozważanego walca nie występuje efekt anizotropii wewnętrznej, a więc:

$$\begin{aligned} I_x &= I_z = I \\ I_p &= I_x + I_z = J \end{aligned} \quad (13)$$

Podstawienie (6) do (12) daje:

$$T_w = \frac{1}{2} \rho A \int_0^L (\dot{u}^2 + \dot{w}^2) dy + \frac{1}{2} \rho \int_0^L [I(\dot{\theta} \cos \phi - \dot{\psi} \sin \phi)^2 + J(\dot{\psi} \theta + \dot{\phi})^2 + I(\dot{\theta} \sin \phi + \dot{\psi} \cos \phi)^2] dy \quad (14)$$

Pierwszy człon równania (14) przedstawia energię kinetyczną ruchu translacyjnego:

$$T_{w1} = T_t = \frac{1}{2} \rho A \int_0^L (\dot{u}^2 + \dot{w}^2) dy \quad (15)$$

Drugi człon przekształcamy do postaci:

$$T_{w2} = \frac{1}{2} \rho \int_0^L [I(\dot{\theta}^2 \cos^2 \phi - 2\dot{\theta}\dot{\psi} \cos \phi \sin \phi + \dot{\psi}^2 \sin^2 \phi) + J(\dot{\psi} \theta + \dot{\phi})^2 + I(\dot{\theta}^2 \sin^2 \phi + 2\dot{\theta}\dot{\psi} \cos \phi \sin \phi + \dot{\psi}^2 \cos^2 \phi)] dy \quad (16)$$

Ponieważ $\dot{\phi} = \Omega$ więc:

$$\frac{1}{2} \rho \int_0^L J(\dot{\psi} \theta + \Omega)^2 dy = \frac{1}{2} \rho \int_0^L J \dot{\psi}^2 \theta^2 dy + \rho \Omega \int_0^L J \dot{\psi} \theta dy + \frac{1}{2} \rho \int_0^L J \Omega^2 dy = \rho \Omega \int_0^L J \dot{\psi} \theta dy + \frac{1}{2} \rho \int_0^L J \Omega^2 dy \quad (17)$$

W powyższym równaniu wyrażenie: $\frac{1}{2} \rho \int_0^L J \dot{\psi}^2 \theta^2 dy$ można zaniedbać jako małą wyższego rzędu. Równość:

$$T_g = \rho J \Omega \int_0^L \dot{\psi} \theta dy \quad (18)$$

określająca energię kinetyczną ruchu precesyjnego elementu walca, posłuży w dalszej części do wyprowadzenia postaci macierzy żyroskopowej.

Związek:

$$T_o = \frac{1}{2} \rho \int_0^L J \Omega^2 dy \quad (19)$$

określa energię kinetyczną proporcjonalną do kwadratu prędkości obrotowej elementu walca. Można zauważyć, nie jest ona zależna od współrzędnych uogólnionych.

Wyrażenie:

$$T_r = \frac{1}{2} \rho \int_0^L I \dot{\theta}^2 + \dot{\psi}^2 dy \quad (20)$$

powstałe z sumowania członów pierwszego i drugiego równości (16) określa energię kinetyczną OES w ruchu obrotowym.

Ostatecznie, w oparciu o formuły (15) oraz (18-20) możemy zapisać wzór na energię kinetyczną elementu walca w postaci:

$$T_w = T_t + T_r + T_g + T_o \quad (21)$$

5. MACIERZ ŻYROSKOPOWA DLA ELEMENTU BELKOWEGO

Macierz żyroskopową wyznaczamy różniczkując zależność (18):

$$F(\dot{\delta}_e, \Omega, \mathbf{G}) = \frac{d}{dt} \left(\frac{\partial T_g}{\partial \dot{\delta}_e} \right) - \frac{\partial T_g}{\partial \delta_e} \quad (22)$$

Wyrażenie (22) określa związek pomiędzy pochodną wektora przemieszczeń węzłowych, prędkością wirowania oraz macierzą żyroskopową. Sposób różniczkowania, przy założeniu stałej prędkości obrotowej walca został przedstawiony w formułach (23-25). Tak więc:

$$\begin{aligned} \frac{\partial T_g}{\partial \dot{\delta}_e} &= \rho J \Omega \int_0^L \frac{\partial}{\partial \dot{\psi}} \psi \theta \frac{\partial \dot{\psi}}{\partial \dot{\delta}_e} dy = \rho J \Omega \int_0^L \theta \frac{\partial \dot{\psi}}{\partial \dot{\delta}_e} dy = \rho J \Omega \int_0^L \frac{\partial w}{\partial y} \frac{\partial}{\partial \dot{\delta}_e} \left(-\frac{\partial u}{\partial y} \right) dy = \\ & \rho J \Omega \int_0^L \frac{\partial}{\partial y} N_{uw} \delta_e \frac{\partial}{\partial \dot{\delta}_e} \left[-\frac{\partial}{\partial y} N_{uu} \dot{\delta}_e \right] dy = \rho J \Omega \int_0^L -\frac{\partial}{\partial y} N_{uw} \frac{\partial}{\partial y} N_{uu} dy = \\ & \delta_e \rho J \Omega \int_0^L -D_{uu}^T D_{uw} dy \end{aligned} \quad (22)$$

Wyznaczamy również:

$$\begin{aligned} \frac{\partial T_g}{\partial \delta_e} &= \rho J \Omega \int_0^L \frac{\partial}{\partial \theta} (\dot{\psi} \theta) \frac{\partial \theta}{\partial \delta_e} dy = \rho J \Omega \int_0^L \dot{\psi} \frac{\partial \theta}{\partial \delta_e} dy = \rho J \Omega \int_0^L -\frac{\partial u}{\partial y} \frac{\partial}{\partial \delta_e} \left(\frac{\partial w}{\partial y} \right) dy = \\ & \rho J \Omega \int_0^L -\frac{\partial}{\partial y} N_{uu} \dot{\delta}_e \frac{\partial}{\partial \delta_e} \left[\frac{\partial}{\partial y} (N_{uw} \delta_e) \right] dy = \dot{\delta}_e \rho J \Omega \int_0^L -\frac{\partial}{\partial y} (N_{uu}) \frac{\partial}{\partial y} (N_{uw}) dy = \\ & \dot{\delta}_e \rho J \Omega \int_0^L -D_{uu} D_{uw}^T dy \end{aligned} \quad (23)$$

oraz:

$$\begin{aligned} \frac{d}{dt} \frac{\partial T_g}{\partial \dot{\delta}_e} - \frac{\partial T_g}{\partial \delta_e} &= \dot{\delta}_e \rho J \Omega \int_0^L -D_{uu}^T D_{uw} dy - \dot{\delta}_e \rho J \Omega \int_0^L -D_{uu} D_{uw}^T dy = \\ & \dot{\delta}_e \rho J \Omega \int_0^L -D_{uu}^T D_{uw} + D_{uw}^T D_{uu} dy = \dot{\delta}_e \rho J \Omega \int_0^L \mathbf{D}^T \begin{bmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix} \mathbf{D} dy = \dot{\delta}_e \Omega \mathbf{G} \end{aligned} \quad (24)$$

Wyrażenie:

$$\mathbf{G} = \rho J \int_0^L \mathbf{D}^T \begin{bmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix} \mathbf{D} dy \quad (25)$$

nazywamy macierzą żyroskopową, której ostateczną postać określimy korzystając z (5) oraz (26).

$$\mathbf{G} = \frac{\rho J}{30L} \begin{bmatrix} 0 & -36 & 0 & -3L & 0 & 36 & 0 & -3L \\ 36 & 0 & -3L & 0 & -36 & 0 & -3L & 0 \\ 0 & 3L & 0 & 4L^2 & 0 & -3L & 0 & -L^2 \\ 3L & 0 & -4L^2 & 0 & -3L & 0 & L^2 & 0 \\ 0 & 36 & 0 & 3L & 0 & -36 & 0 & 3L \\ -36 & 0 & 3L & 0 & 36 & 0 & 3L & 0 \\ 0 & 3L & 0 & -L^2 & 0 & -3L & 0 & 4L^2 \\ 3L & 0 & L^2 & 0 & -3L & 0 & -4L^2 & 0 \end{bmatrix} \quad (26)$$

6. CZĘSTOŚCI WŁASNE DRGAŃ WALCA

Równania ruchu drgań swobodnych walca przy uwzględnieniu efektów żyroskopowych ma postać [12].

$$\mathbf{M} \ddot{\delta}_e + \Omega \mathbf{G} \dot{\delta}_e + \mathbf{K} \delta_e = 0 \quad (27)$$

gdzie: \mathbf{M} - macierz bezwładności,

\mathbf{K} - macierz sztywności.

W pracy [10] podane są macierze bezwładności i sztywności dla elementu o sześciu stopniach swobody w węzle. Zależności właściwe dla modelu używanego tutaj otrzymujemy poprzez skreślenie w tych macierzach wierszy i kolumn odpowiadających odjętym stopniom swobody.

Rozwiązania równania (28) poszukujemy w postaci:

$$\delta_e = \delta_0 e^{\lambda t} \quad (28)$$

Uwzględnienie (29) w (28) daje:

$$\left(\lambda^2 + \lambda \Omega + \right) \delta_0 = 0 \quad (30)$$

Jest to zagadnienie nieliniowe, sprowadzalne do zagadnienia liniowego poprzez podstawienie:

$$\mathbf{y} = \begin{bmatrix} \dot{\delta}_e \\ \delta_e \end{bmatrix} \quad \dot{\mathbf{y}} = \begin{bmatrix} \ddot{\delta}_e \\ \dot{\delta}_e \end{bmatrix} \quad (9)$$

Równanie (28) może być zapisane alternatywnie jako:

$$\begin{bmatrix} \mathbf{0} & \mathbf{M} \\ \mathbf{M} & \mathcal{O}\mathbf{G} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \ddot{\delta}_e \\ \dot{\delta}_e \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} \mathbf{M} & \mathbf{0} \\ \mathbf{0} & -\mathbf{K} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \dot{\delta}_e \\ \delta_e \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \mathbf{0} \\ \mathbf{0} \end{bmatrix} \quad (32)$$

Mnożymy (32) przez macierz $\begin{bmatrix} \mathbf{M}^{-1} & \mathbf{0} \\ \mathbf{0} & -\mathbf{K}^{-1} \end{bmatrix}$, co prowadzi do następującego uproszczenia:

$$\begin{bmatrix} \mathbf{0} & \mathbf{I} \\ -\mathbf{K}^{-1}\mathbf{M} & -\mathbf{K}^{-1}\mathcal{O}\mathbf{G} \end{bmatrix} \dot{\mathbf{y}} - \mathbf{I}\mathbf{y} = \mathbf{0} \quad (33)$$

Jeżeli dokonamy podstawienia:

$$= e^{st} = e^{\alpha+i\omega t} \quad (34)$$

gdzie: α - wykładnik tłumienia,
 ω - częstość drgań własnych.

to otrzymane równanie:

$$\left(\mathbf{A} - \frac{1}{s} \mathbf{I} \right) \mathbf{q} = \mathbf{0} \quad (35)$$

jest klasycznym zagadnieniem na wartości własne macierzy \mathbf{A}

$$\mathbf{A} = \begin{bmatrix} \mathbf{0} & \mathbf{I} \\ -\mathbf{K}^{-1}\mathbf{M} & -\mathbf{K}^{-1}\mathcal{O}\mathbf{G} \end{bmatrix} \quad (36)$$

Tutaj $\beta_i = \frac{1}{s_i}$ oznaczają kolejne wartości własne, natomiast \mathbf{q}_i są odpowiadającymi im wektorami własnymi.

Rozwiązania powyższego problemu dokonano wyznaczając metodą Kryłowa współczynniki wielomianu charakterystycznego macierzy \mathbf{A}

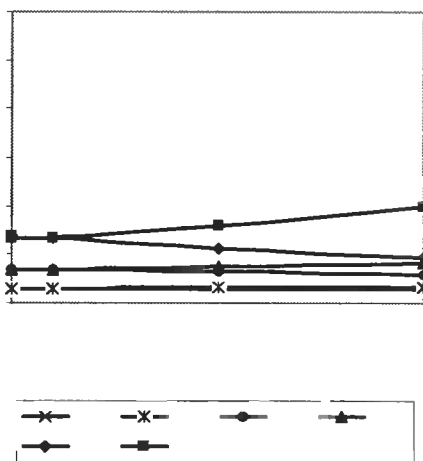
$$D(\beta) = \det(\mathbf{A} - \beta\mathbf{I}) = 0 \quad (37)$$

a następnie metodą Laguerre'a obliczono pierwiastki tego wielomianu, będące liczbami zespolonymi.

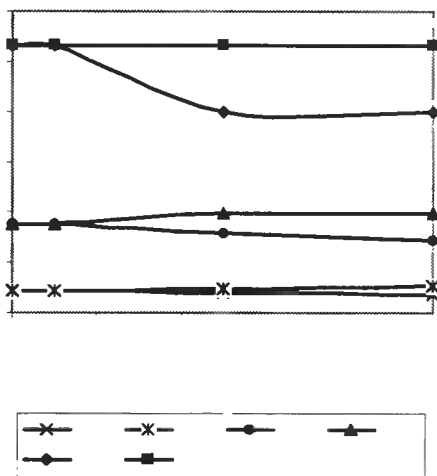
Dla modelu obliczeniowego pokazanego na rys.1 uzyskano rozwiązanie przy alternatywnych założeniach:

1. Podparcie walca charakteryzuje się nieskończenie wielką sztywnością,
2. Łożyska posiadają równą sztywność, jednakową dla kierunków x oraz z [1].

$$k_x = k_z = 3.25 \cdot 10^7 \frac{N}{m}$$



Rys. 5. Wpływ efektu żyroskopowego na częstotliwości drgań własnych walca w łożyskach podatnych



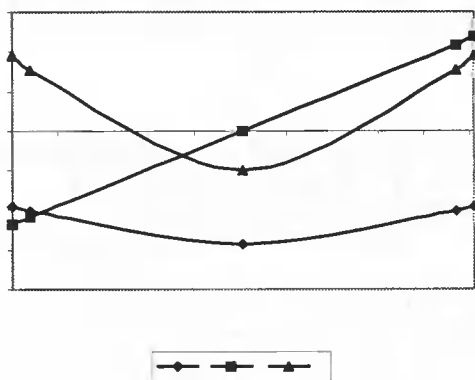
Rys. 6. Wpływ efektu żyroskopowego na częstotliwości drgań własnych walca w łożyskach sztywnych

Rysunek 5 oraz rysunek 6 ilustrują wyniki obliczeń trzech pierwszych częstotliwości drgań własnych dla szerokiego zakresu prędkości kątowych walca 0-10 000 rad/s. Okazuje się, że wpływ efektów żyroskopowych przy nominalnej prędkości obrotowej wynoszącej ~1500 obr/min, (~157 rad/s) jest znikomo mały. Powodem takiego stanu rzeczy jest znaczna jego sztywność. Wpływ precesji synchronicznej (oznaczenie PS dla kolejnych częstotliwości własnych) na wzrost wartości prędkości krytycznych jest zauważalny dopiero przy prędkościach wirowania walca ponad 1500 rad/s. Podatność podparcia efekt ten ogranicza. Krzywe właściwe precesji asynchronicznej (PA) zaznaczono jedynie dla porządku, albowiem taki ruch występuje jedynie w bardzo specyficznych warunkach [2].

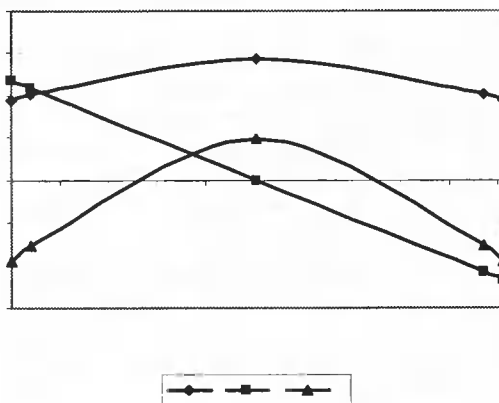
Tabela 1. Częstości drgań własnych modelu obliczeniowego

Model belkowy o dwóch stopniach swobody w węźle - sześćoelementowy		Model belkowy o czterech stopniach swobody w węźle - czteroelementowy	
podparcie idealnie sztywne	podparcie podatne	podparcie idealnie sztywne	podparcie podatne
42,2	30,3	42,2	30,6
166	70	175	69,2
366	137	375	132,6

W tabeli 1 zestawiono wartości częstości drgań własnych uzyskane przy podziale walca na 6 OES o dwóch stopniach swobody w węźle [1] z wynikami obliczeń jakie dało przyjęcie 4 stopni swobody i podział na 4 OES. Wartości te są zbliżone, a w przypadku częstości podstawowej – identyczne.



Rys. 7. Postacie drgań własnych odpowiadające pierwszym trzem częstościom własnym walca w łożyskach podatnych – płaszczyzna



Rys. 8. Postacie drgań własnych odpowiadające pierwszym trzem częstościom własnym walca w łożyskach podatnych – płaszczyzna XY

Postaci drgań swobodnych przedstawione na rysunku 7 oraz rysunku 8 uzyskano z pominięciem efektu żyroskopowego. Są analogiczne jak w pracy [1] po uwzględnieniu faktu innego sposobu normowania wektorów własnych

7. WNIOSKI

Walce maszyny papierniczej charakteryzują się zazwyczaj zarówno dużą sztywnością, jak też dużą masą. Prędkości obrotowe takich walców nie są wówczas duże. Dla tych przypadków pominięcie efektu żyroskopowego w obliczeniach częstości rezonansowych jest uzasadnione. Wniosek ten jest o tyle istotny, że macierz żyroskopowa, będąca macierzą antysymetryczną wnosi do obliczeń pewne problemy natury rachunkowej, choćby z uwagi na dwukrotnie większy rozmiar macierzy i zespolony charakter zagadnienia własnego.

W przypadku podparcia o cechach izotropowych tok obliczeń można oprzeć na prostym modelu OES i rozpatrywać jedynie drgania w jednej płaszczyźnie, co pozwala na skrócenie czasu obliczeń i zwiększenie ich dokładności.

8. LITERATURA

- [1] J. Zachwieja, 2002. Drgania walca prowadzącego krajarki papieru KL63. Wyd. Uczeln. Zesz. Nauk. ATR Bydgoszcz. Mechanika 52.
- [2] R. Gryboś, 1994. Dynamika maszyn wirnikowych. PWN.
- [3] Z. Gosiewski, A. Muszyńska, 1992. Dynamika maszyn wirnikowych. Skrypt WSI w Koszalinie.
- [4] A. Muszyńska, 1996. Forward and backward precession of a vertical anisotropically supported rotor. *Journal of Sound and Vibration* 192.
- [5] J. Awrejcewicz, W.A. Krysko, 2000. Drgania układów ciągłych. WNT.
- [6] H.D. Nelson, J.M. McVaugh, 1976. The Dynamics of Rotor Bearing Systems Using Finite Elements. *Journal of Engineering for Industry* 98.
- [7] J. Tarnowski, 1974. Zastosowanie metody sztywnych elementów skończonych do obliczeń drgań wałów okrętowych z uwzględnieniem efektów żyroskopowych. *Rozprawy Inżynierskie* 22.
- [8] R. Firoozian, R. Stanway, 1989. Design and application of finite element package for modelling turbomachinery vibrations. *Journal of Sound and Vibration* 134.
- [9] B. Siolkowski, 1971. Wpływ sił poprzecznych, obrotów przekrojów poprzecznych i zjawiska żyroskopowego na częstość drgań własnych wirujących wałów. *Zeszyt Naukowy WSI Bydgoszcz, Mechanika* 2.
- [10] Praca zespołowa pod red. J. Kruszewskiego, 1984. Metoda elementów skończonych w dynamice konstrukcji. Arkady.
- [11] M. Mazurkiewicz, 1980. Obliczenia przemieszczeń, częstości i postaci drgań własnych łopatek maszyn wirnikowych metodą elementów skończonych. *Archiwum Budowy Maszyn* 4.
- [12] J. T. Sawicki, G. Genta, 2000. Modal uncoupling of damped gyroscopic systems. *Journal of Sound and Vibration* 244.

GYROSCOPIC EFFECT IN PAPER MACHINE CYLINDERS DYNAMICS

Summary

The work contains an analysis of gyroscopic effect influence on a critical speed value of cylinder that leads a band of paper in a KL63 cutter. It was proved that its relatively high stiffness limits this influence very much. The same effect is achieved by an increase of flexibility of cylinder support.

Keywords: finite elements method, gyroscopic effect, free vibrations

ANALIZA WPŁYWU WARUNKÓW PODPARCIA NA STAN NAPRĘŻEŃ W IGLICY ROZJAZDU KOLEJOWEGO

Grzegorz Zych

Akademia Bydgoska. Instytut Mechaniki Środowiska i Informatyki Stosowanej
Bydgoszcz, ul. Chodkiewicza 30

Praca przedstawia propozycję modelu iglicy rozjazdu kolejowego służącego do określenia wpływu luzów podparcia iglicy na maksymalne naprężenia zginające. Analizę przeprowadzono przy przyjęciu iglicy jako belki niepryzmatycznej, nieciągle podpartej w dwóch płaszczyznach. W pracy przedstawiono model obliczeniowy i program numeryczny rozjazdu Rkpd S60/190/1:9.

Słowa kluczowe: propozycja modelu iglicy rozjazdu kolejowego, model obliczeniowy i program numeryczny

1. WSTĘP

Pewna i niezawodna praca wszystkich elementów rozjazdu kolejowego stanowi jeden z podstawowych czynników decydujących o bezpieczeństwie przejazdu taboru kolejowego. Iglica, obok krzyżownicy, jest elementem najbardziej obciążonym i narażonym na zużycie w trakcie eksploatacji. Obciążenia działające na iglicę można podzielić na:

1. Technologiczne – powstałe w procesie produkcyjnym w wyniku:

- walcowania i nierównomiernego stygnięcia kształtki iglicowej,
- prostowania szyn (iglic) oraz wstępnego wygięcia iglic łukowych.

Łączne naprężenia resztkowe w stopce giętej na zimno iglicy wynoszą (wg [1]):

- ok. +110 MPa (włókna wewnętrzne stopki)
- ok. -200 do 150 MPa (środkowa część stopki)
- ok. -100 MPa (włókna zewnętrzne stopki)

2. Eksploatacyjne:

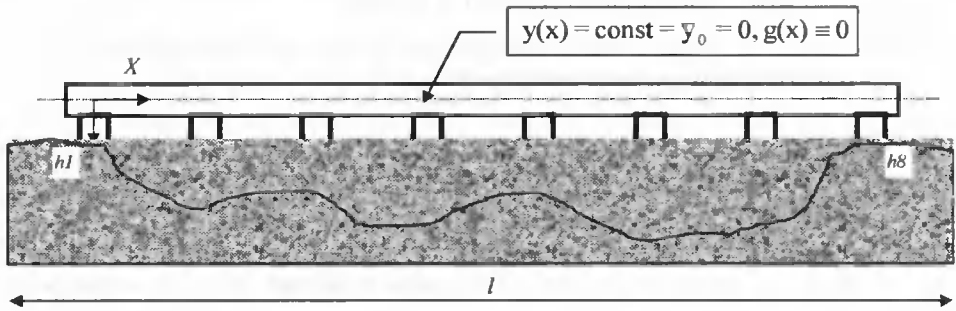
- naprężenia powstające wskutek przestawiania zwrotnic; ich wartość, dla $R=190\text{ m}$, szacowana jest na ok. 70 MPa [3],
- od obciążenia użytkowego; wg zaleceń UIC przyjmuje się, dla ruchu towarowego, nacisk osi rzędu 225 kN,
- od poziomej siły prowadzącej, zależnej głównie od promienia rozjazdu i szybkości pociągu; dla rozjazdu Rkpd S60/190/1:9 i szybkości $V = 40\text{ km/h}$ wartość siły poziomej wynosi od 27 kN do 52 kN
- [6].

Podstawowym czynnikiem wpływającym na wartość naprężeń w iglicy oraz na jej odkształcenie pod obciążeniem eksploatacyjnym jest wielkość i rozkład luzów występujących pomiędzy iglicą a opornicą i siodełkami podiglicowymi. W praktyce, z uwagi np. na zużycie podłoża w trakcie eksploatacji czy złe podbicie podrozdzielnic, szczeliny

między siodełkiem a iglicą mogą sięgać 10 i więcej milimetrów. Luzy między opórkami a iglicą są tego samego rzędu. Średnio tylko ok. 40 % luzów mieści się w zakresie tolerancji określonych odpowiednimi przepisami [4], a w skrajnych przypadkach występują braki opórek [2] [3].

Powstaje zatem pytanie: jaki jest stan naprężeń, a w szczególności – jakie są maksymalne wartości naprężeń w odniesieniu do obciążenia eksploatacyjnego iglicy oraz nierównomierności jej podparcia.

W modelowaniu pracy układu torowego, a zwłaszcza iglic w rozjazdach, występuje bardzo istotny problem. Na początku nie jesteśmy w stanie jednoznacznie określić warunków podparcia. Szyna pod własnym ciężarem ułoży się tak, że niektóre podkłady będą podparte, inne - nie. Następnie, w zależności od wielkości i położenia obciążenia eksploatacyjnego, niektóre luki podpodkładowe zamkną się („pojawi” się podpora), a inne otworzą się (podpora „zniknie”). Proces ten nie jest zdeterminowany – narastanie obciążenia będzie zmniejszać luki aż do ich zamknięcia, a odciążenie spowoduje powtórne ich pojawienie się. Zagadnienie to ilustruje poniższy rys. 1, (przedstawiono tylko 8 podkładów).



oznaczenia na rysunku:

$y(x)$ - położenie szyny

\bar{y}_0 - prosta aproksymująca położenie szyny

$g(x)$ - nierówności geometryczne

h_i^0 - początkowy kształt podłoża ($i=1, \dots, 8$)

Rys. 1. Model belki o niejednoznacznych więzach podparcia - początkowe nierówności podłoża

Dotyczy to również iglicy:

- w płaszczyźnie pionowej - opartej na siodełkach podiglicowych,
- w płaszczyźnie poziomej - opartej na opórkach i opornicy.

Niniejsza praca zawiera propozycję rozwiązania tego zagadnienia poprzez zastosowanie w modelu pracy iglicy opisu przyrostowego (metoda zmiennej sztywności [5]). Prezentowane wyniki dotyczą rozjazdu krzyżowego podwójnego Rkpd S60/190/1:9.

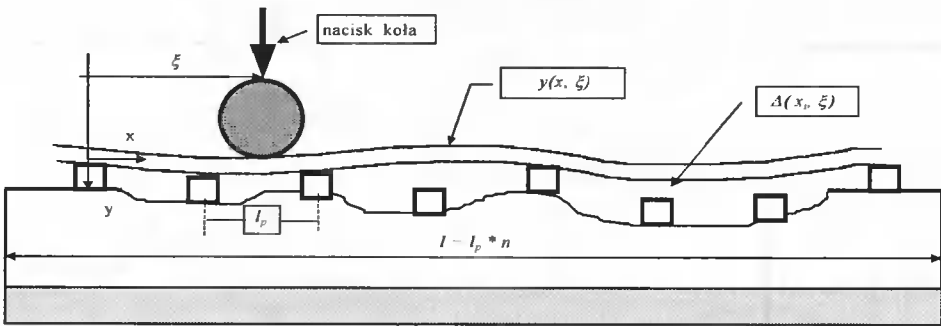
2. MODEL OBLICZENIOWY

Obciążona iglica stanowi układ mechaniczny, w którym a priori nie jesteśmy w stanie jednoznacznie określić warunków podparcia. Iglica, pod własnym ciężarem, ułoży się tak, że w niektórych punktach będzie podparta, w innych - nie. Następnie, w zależności od wielkości obciążenia, niektóre luzy iglica-siodełko (a w płaszczyźnie poziomej iglica-opórka) zamkną się (pojawi się podpora), a inne otworzą (podpora zniknie).

W celu przeprowadzenia analizy problemu przyjęto następujące założenia:

- Zał. 1:** Iglicę traktujemy jako belkę sprężystą i niepryzmatyczną.
- Zał. 2:** Obciążenie eksploatacyjne (przejazd pojazdu) traktujemy jako quasi-statyczne.
- Zał. 3:** Rozważamy dowolne rozkłady luzów podparcia iglicy w dwóch płaszczyznach; po zamknięciu luzu podpory iglicy są niezależne i liniowo bądź nieliniowo sprężyste.

Rozważamy model obliczeniowy w płaszczyźnie pionowej. Dla ustalonych początkowych luzów iglica-siodła podiglicowe nie można bezpośrednio określić kształtu iglicy pod wpływem obciążenia koła pojazdu. Rozwiązanie problemu, tzn. wyznaczenie kształtu iglicy $y(x, \xi)$ oraz luzów $\Delta(x, \xi)$ przy położeniu koła w pkt. ξ (por. rys. 2), można uzyskać z następujących równań:



Rys. 2. Ugięcie iglicy pod obciążeniem użytkowym w płaszczyźnie pionowej

$$y(x, \xi) = \sum_{j=1}^N y_j(x, \xi, \Delta Q(\xi)) \tag{1}$$

$$\Delta(x, \xi) = \sum_{j=1}^N \{ y_j(x, \xi, \Delta Q(\xi)) - \Delta_0(x) \} \tag{2}$$

gdzie: $x_i = (i-1) * l_p$ $i = 1, \dots, K$ K – liczba podpór,
 l_p – rozstaw podrozdnic, $\Delta_0(x_i)$ – początkowe luzy,
 $\Delta Q(\xi) = Q(\xi)/N$, N – liczba kroków przyrostu obciążenia.

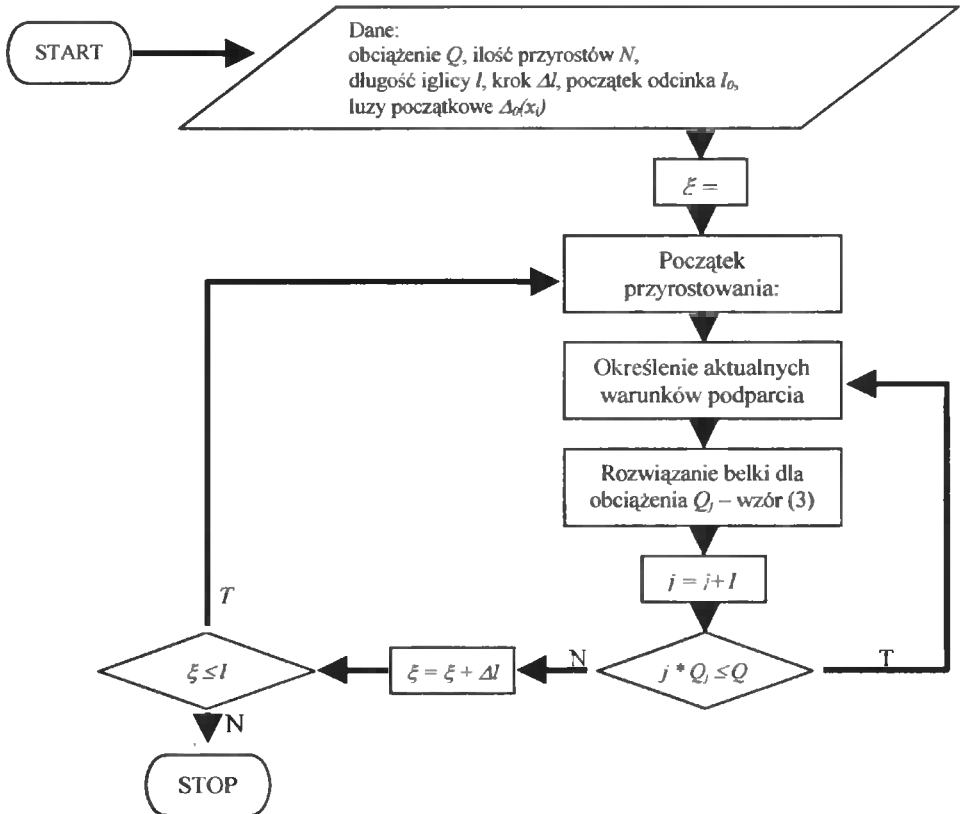
Dla przejrzystości przedstawiono rozwiązanie problemu dla jednego koła oraz pominięto ciężar własny iglicy i nierównomierność rozstawu podrozdnic. Konieczność zastosowania analizy przyrostowej z krokiem obciążenia $\Delta Q(\xi)$ wynika z (wymienionego uprzednio) faktu niemożności określenia więzów dla pełnego obciążenia $Q(\xi)$. Natomiast na małym kroku obciążenia można przyjąć schemat statyczny układu, czyli rozwiązać równanie belki:

$$EI(x)y_j^{IV}(x) + \sum_{i=1}^K \delta(x, x_i) * \eta(i) * k_p [x_i, y_{j-1}(x_i)] * [y_j(x_i) - \Delta_0(x_i)] = \delta(\xi) * \Delta Q(\xi) \tag{3}$$

gdzie: i, j, K - nr podpory, przyrostu oraz liczba podpór,
 $y_j, \Delta_j(x_i)$ - ugięcie szyny oraz luzy na j -tym kroku obciążenia,

- k_p - zmienna na długości sztywność podłoża, która może być zależna od przemieszczenia na poprzednim kroku obciążenia,
 $\eta(i)$ - 0 lub 1, zależnie od wartości luzu w poprzednim przyroście obciążenia Δ_{j-1} ,
 δ - delta Diraca.

Tak sformułowany problem można rozwiązać zgodnie z poniższym schematem:



Rys. 3. Schemat blokowy rozwiązania modelu przyrostowego iglicy

Na kroku przyrostu j :

- I. wyznaczono reakcje i przemieszczenia punktów podparcia (belka niepryzmatyczna na podporach sprężystych, klasyczna metoda pięciu momentów),
- II. dla przęsła 1 (osada iglicy): brak luzów (warunek zapewniony konstrukcyjnie) – rozwiązanie metodą analityczną $\Rightarrow y$ i y' na początku następnego przęsła.
- III. dla przęsła i ($i > 1$):
 - jeżeli są warunki brzegowe na początku i końcu przęsła (brak luzów) – metoda analityczna z warunkami brzegowymi,
 - brak styku na podporze końcowej przęsła – zadanie z warunkami brzegowymi na początku przęsła (y i y') liczone metodą Rungego-Kutty IV rzędu.

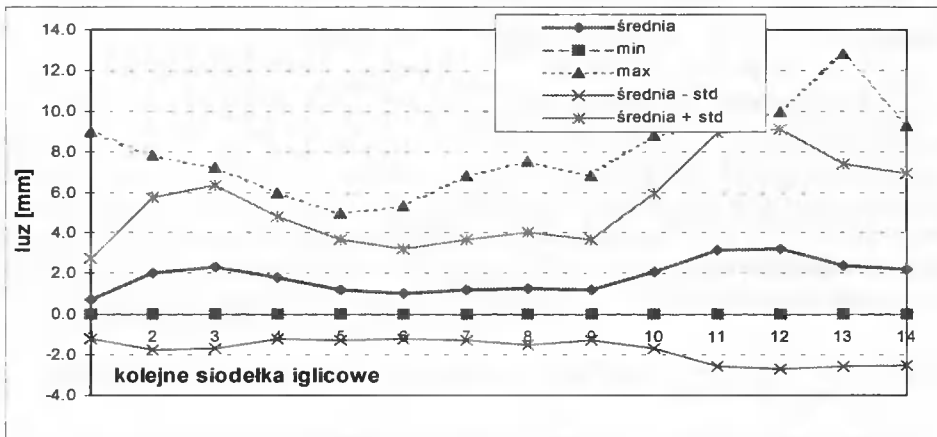
Wykorzystując powyższy model opracowano program komputerowy w języku Pascal. Ilość kroków przyrostowych, wyznaczona na podstawie eksperymentów numerycznych dla zmiennego kroku przyrostu obciążenia, wynosi $N \approx 50$.

Rozwiązanie problemu w płaszczyźnie poziomej przebiega analogicznie, z tym, że oparcie iglicy o opornicę jest – w strefie poza opórkami – całkowite lub częściowo ciągłe.

3. PRZYKŁADY OBLICZEŃ

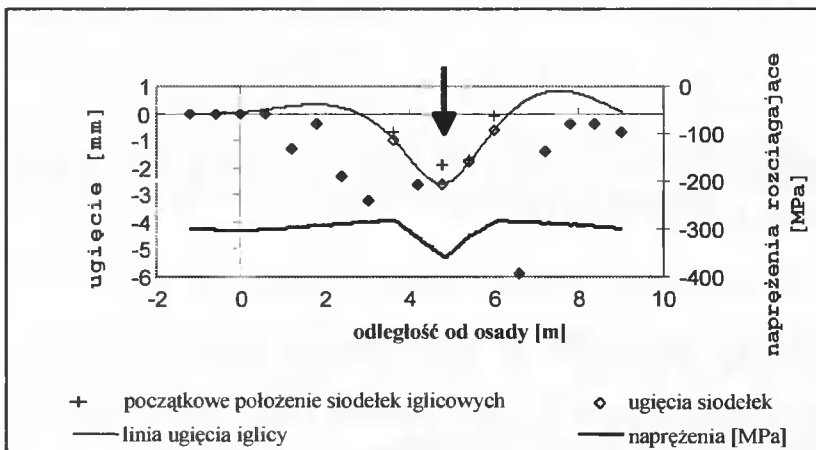
3.1. Wyniki dla obciążenia eksploatacyjnego w płaszczyźnie pionowej

Obliczenia przeprowadzono dla iglicy łukowej obciążonej jedynie w kierunku pionowym, przy nacisku jednego koła siłą o wartości 110 kN. Rozkład luzów, na podstawie danych prezentowanych w pracy [3], opisano jako proces stochastyczny (por. rys. 4).



Rys. 4. Wykres parametrów statystycznych luzów iglica – siodełka dla iglicy łukowej

Obliczenia przeprowadzono dla 20 wylosowanych układów luzów z powyższego rozkładu, z zakresu $\text{średnia} \pm \text{std}$ (gdzie std – odchylenie standardowe).

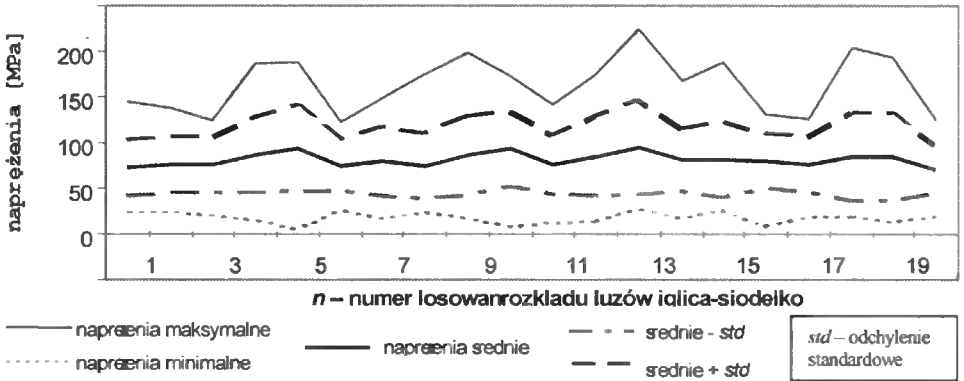


Rys. 5. Ugięcia oraz naprężenia w stopce iglicy dla siły $P = 110$ kN w pkt. 5.0 m od osady

Na rysunku 5, dla położenia koła taboru w odległości 5 m od osady iglicy, pokazano przykładowo ugięcia i naprężenia w stopce (z uwzględnieniem naprężeń resztkowych), ugięcia siodełek podiglicowych oraz wylosowane rozkłady luzów pomiędzy iglicą a siodełkami.

Luzy pomiędzy siodełkami a iglicą zamknęły się jedynie w bezpośrednim sąsiedztwie obciążenia, maksymalne ugięcie iglicy wynosi ok. 2.5 mm, a maksymalne naprężenia w stopce ok. 200 MPa.

Na rysunku 6 pokazano rozkłady średnich, maksymalnych i minimalnych naprężeń w stopce iglicy, uzyskane dla 20 losowań luzów z rozkładu równomiernego.



Rys. 6. Rozkłady maksymalnych naprężeń rozciągających w stopce iglicy S60 od obciążenia pionowego $P = 110$ kN

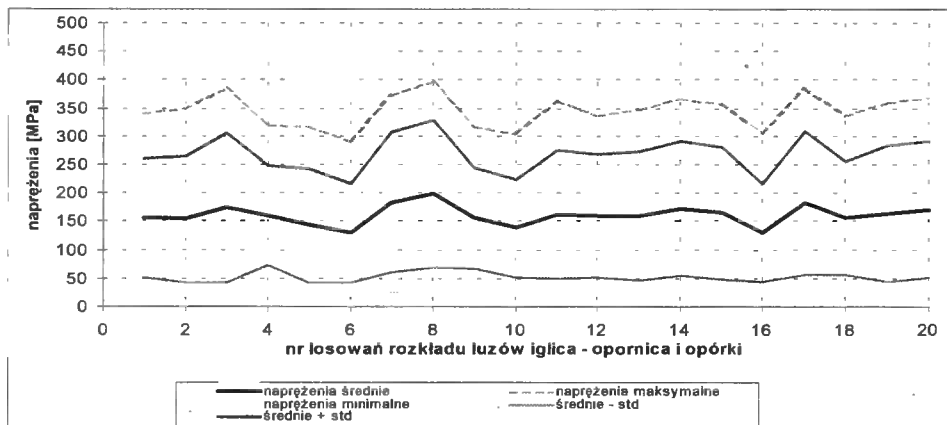
Zaznaczono również wartości średnie pomniejszone i powiększone o odchylenie standardowe. Dla każdego losowania wymienione charakterystyki statystyczne naprężeń obliczono przy przemieszczającej się sile w przedziale 3.0 do 8.5 m, licząc od osady iglicy, z krokiem 0.2 m. Dla każdego położenia siły określono wartość maksymalną naprężeń. Tak więc, np. maksymalna wartość naprężenia w 1 losowaniu ($n = 1$) została określona z wyrażenia:

$$\sigma_{\max}(n=1) = \max_{\substack{\xi \in [3; 8.5] \text{ m} \\ x \in [0; l]}} \sigma(x, \xi) \quad \text{gdzie} \quad \begin{array}{l} l - \text{długość iglicy} \\ \xi - \text{położenie siły pionowej} \end{array}$$

Z prezentowanych przykładów wynika, że dla luzów jakie występują w eksploatacji, maksymalne naprężenia rozciągające w stopce iglicy wyłącznie od obciążenia pionowego mogą dochodzić do 200 MPa.

3.2. Wyniki dla obciążenia eksploatacyjnego w płaszczyźnie poziomej

Obliczenia przeprowadzono dla iglicy łukowej obciążonej jedynie w kierunku poziomym, dla siły poziomej $H = 52$ kN. W płaszczyźnie poziomej iglica jest utwierdzona w osadzie, podparta w trzech punktach (opórka długa, średnia i krótka) oraz na długości około 3.5 m, oparta o opornicę.



Rys. 7. Rozkłady maksymalnych naprężeń rozciągających w stopce iglicy S60 od obciążenia poziomego $H = 52$ kN

Na rysunku 7 pokazano rozkłady średnich, maksymalnych i minimalnych naprężeń w stopce iglicy, uzyskane dla 20 losowań luzów z rozkładu równomiernego. Zaznaczono również wartości średnie pomniejszone i powiększone o odchylenie standardowe. Dla każdego losowania wymienione charakterystyki statystyczne naprężeń obliczono przy przemieszczającej się sile w przedziale 3.0 do 8.5 m, licząc od osady iglicy – analogicznie, jak dla obciążenia pionowego, z krokiem 0.2 m. Dla luzów, jakie występują w eksploatacji, maksymalne naprężenia rozciągające w stopce iglicy wyłącznie od obciążenia poziomego mogą dochodzić do 398 MPa.

4. WNIOSKI

Łączne maksymalne naprężenia w stopce iglicy, dla włókien zewnętrznych w najbardziej obciążonych przekrojach, z uwzględnieniem naprężeń resztkowych [1], wynoszą:

- naprężenia resztkowe -100 MPa,
 - od obciążenia pionowego $+200$ MPa,
 - od obciążenia poziomego $+400$ MPa,
- razem około 500 MPa.

Niniejsza analiza nie pretenduje do kompleksowego rozwiązania problemu. Natomiast prezentowane wyniki wskazują, że przyjęty model, przy opisie luzów jako procesu stochastycznego, może być przydatny do oceny skutków nierównomiernego podparcia iglicy oraz do określenia dopuszczalnych luzów jej podparcia.

LITERATURA

- [1] M. Adamski, K. Towpik, 1995. Badania rozkładów naprężeń w iglicach rozjazdowych. Zesz. Nauk. Politechniki Poznańskiej, seria Budownictwo Lądowe, nr 41, ss. 47-56.
- [2] W. Czyczula i wsp., 1996/97. Badania i ocena przyczyn występowania zwiększonych oporów przestawiania i sprzężynowania iglic w rozjazdach typu Rkpd

- S60/190/1:9 ssd. Opracowanie Instytutu Dróg, Kolei i Mostów Politechniki Krakowskiej.
- [3] W. Czyczyła i wsp., 1995. Opracowanie metody diagnozowania systemu zwrotnica – napęd zwrotnicowy z punktu widzenia pracy rozjazdów krzyżowych z iglicami sprężystymi. Opracowanie Instytutu Dróg, Kolei i Mostów Politechniki Krakowskiej.
- [4] Dyrekcja Generalna PKP, 1991. Instrukcja o oględzinach, badaniach technicznych i utrzymaniu rozjazdów D-6. Warszawa.
- [5] M. Kleiber, 1985. Metoda elementów skończonych w nieliniowej mechanice kontinuum. PWN.
- [6] K. Towpik, 1990. Utrzymanie nawierzchni kolejowej. WKiŁ.

NUMERICAL ANALYSIS OF DISCONTINUITY OF THE SUPPORT ON STRESS CONDITION IN BENDABLE ELEMENTS

Summary

The paper presents a proposed model of the switch blade, which serves to determine the impact of the switch blade support slackness on maximum bending stresses. For the sake of analysis the switch blade was treated as a non-prismatic beam, discontinuously supported in two planes. The paper presents the calculation model and the numerical program for Rkpd s601/190/1:9 turnout.

Keywords: proposed model of the switch blade, calculation model and the numerical program

ЭКСПЕРИМЕНТАЛЬНЫЕ ИССЛЕДОВАНИЯ ДЕФОРМИРУЕМОСТИ СЕКЦИИ РЕЗИНОАРМИРОВАННОЙ ГУСЕНИЦЫ

Чеслав Жданович, Владимир Плищ, Виктор Равино

Кафедра «Тракторы»

Белорусский национальный технический университет
Проспект Ф. Скорины 65, г. Минск, 220027, Беларусь

Для получения функциональных зависимостей, позволяющих рассчитать деформации и жесткость резиноармированной гусеницы при ее растяжении, боковом изгибе, тангенциальном и боковом сдвиге протекторного слоя, были проведены экспериментальные исследования с последующей статистической обработкой полученных результатов. Объектом экспериментальных исследований являлась секция резиноармированной гусеницы. Испытания проводились на специально оборудованном для этих целей стенде. При эксперименте замерялись величины нагрузки и деформации, которую эта нагрузка вызывает. Приведены результаты статистической обработки. Получены уравнения регрессии для определения деформируемости гусеницы и приведены формулы для расчета ее жесткости.

Ключевые слова: резиноармированная гусеница, деформация, жесткость.

1. ВВЕДЕНИЕ

В современном сельском хозяйстве находят применение тракторы с двумя разновидностями гусеничных движителей: металлогусеничным и появившемся сравнительно недавно, резиногусеничным. Металлогусеничный движитель в настоящее время изучен достаточно полно. Однако он имеет ряд существенных недостатков, таких как невозможность движения по асфальту, низкие скорости, дискомфортные условия работы водителя и др.

Перспективным, с точки зрения уменьшения отрицательного воздействия на опорную поверхность и улучшения условий труда, является резиногусеничный движитель. Особенностью резиноармированной гусеницы является ее деформируемость, что, в конечном счете, влияет на эксплуатационные свойства трактора. Так, для расчета распределения давлений на почву [1], тягово-сцепных качеств трактора [2], криволинейного движения [3], нагруженности ходовой системы [4] необходимо знать жесткостные характеристики гусеницы.

Цель работы - экспериментальные исследования деформируемости секции резиноармированной гусеницы.

Для получения функциональных зависимостей, позволяющих рассчитать деформации и жесткость гусеницы при ее растяжении, боковом изгибе, тангенциальном и боковом сдвиге протекторного слоя, были проведены экспериментальные исследования с последующей статистической обработкой полученных результатов.

2. МЕТОДИКА ИССЛЕДОВАНИЙ

Объектом экспериментальных исследований являлась секция резиноармированной гусеницы, чертеж которой представлен на рис. 1. Твердость резины гусеницы по Шору HS составила 35 ± 1 единиц.

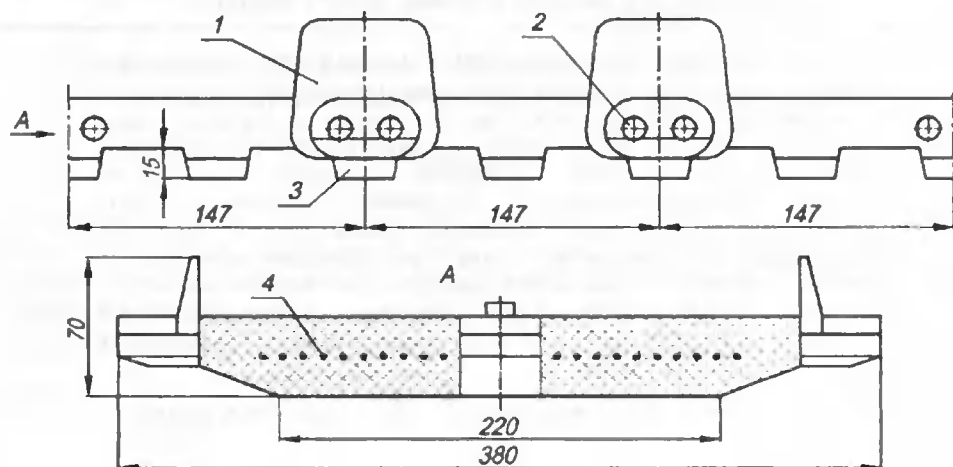


Рис. 1. Секция резиноармированной гусеницы:

1 - ограничитель; 2 - шарнир; 3 - грунтозащел; 4 - армирующие тросы

Для проведения экспериментальных исследований использовался стенд, представленный на рис. 2.

При проведении эксперимента исследовались:

- растяжение гусеницы;
- боковой изгиб гусеницы;
- боковая деформация протекторного слоя;
- тангенциальная деформация протекторного слоя.

При исследовании растяжения и бокового изгиба секцию резиноармированной гусеницы нагружали соответствующей нагрузкой, при этом регистрировали величину нагрузки и деформацию секции гусеницы.

При определении абсолютной деформации растяжения (h_s), секция гусеничной ленты закрепляется с одной стороны (рис. 3), а с противоположной вдоль продольной оси гусеницы прикладывается сила F_s в диапазоне от 0 до 4.8 кН с шагом 0.2 кН. При замере бокового прогиба (h_b) гусеницы секция гусеничной ленты закрепляется с одной стороны (рис. 4) в двух симметрично

расположенных точках. а с противоположной вдоль поперечной оси гусеницы прикладывается сила F_b в диапазоне от 0 до 1.5 кН с шагом 0.1 кН.

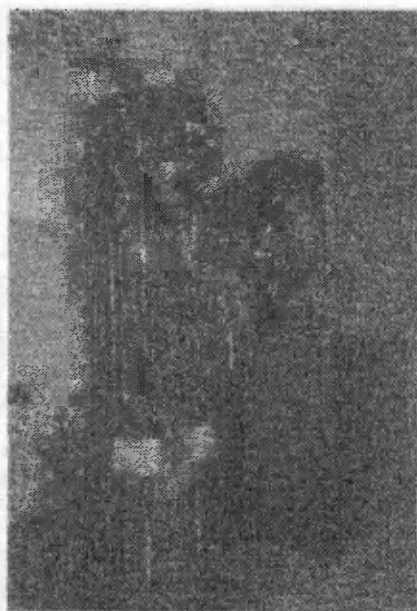


Рис. 2. Стенд для экспериментальных исследований

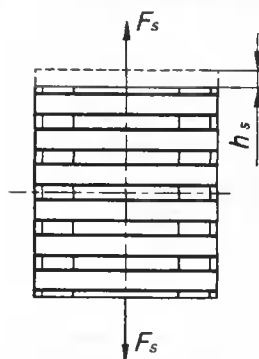


Рис. 3. Схема нагружения секции гусеницы при растяжении

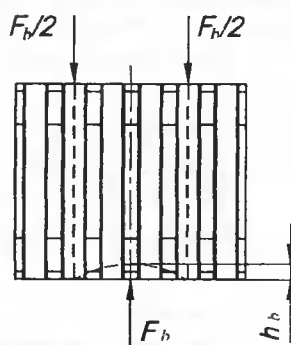


Рис. 4. Схема для бокового изгиба гусеницы

Также проводились замеры боковой и тангенциальной деформации абсолютного сдвига протекторного слоя. При нагружении протекторного слоя регистрировалась величина нагрузки и деформация грунтозацепа.

При определении боковой деформации протекторного слоя (h_g) секция гусеничной ленты закрепляется согласно схемы, представленной на рис. 5. Вдоль продольной оси грунтозацепа прикладывается сила F_g в диапазоне от 0 до 1.6 кН с шагом 0.05 кН. А при исследовании тангенциальной деформации протекторного слоя (h_t) секции гусеничной ленты (рис. 6) сила F_t прикладывалась вдоль

поперечной оси грунтозацепа в диапазоне изменения нагрузки от 0 до 1,9 кН с шагом 0,025 кН.

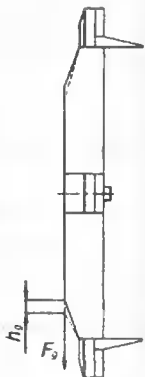


Рис. 5. Схема для определения боковой деформации грунтозацепа

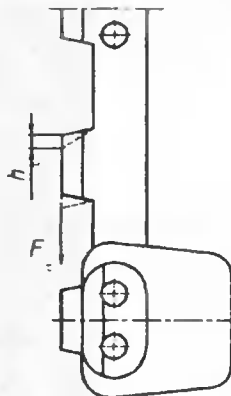


Рис. 6. Схема для определения тангенциальной деформации грунтозацепа

Статистическая обработка результатов эксперимента производилась средствами пакета Microsoft Excel с использованием надстройки «Анализ данных». Для расчета уравнений регрессии использовался метод наименьших квадратов.

Уравнение для стандартной ошибки, характеризующей максимальное отклонение предсказанного значения функции от замеренного принималось следующее:

$$S = \sqrt{\left[\frac{1}{n(n-2)} \right] \left[n \sum_{i=1}^n v_i^2 - \left(\sum_{i=1}^n v_i \right)^2 - \frac{\left[n \sum_{i=1}^n x_i v_i - \left(\sum_{i=1}^n x_i \right) \left(\sum_{i=1}^n v_i \right) \right]^2}{n \sum_{i=1}^n x_i^2 - \left(\sum_{i=1}^n x_i \right)^2} \right]}$$

где:

n – число измерений;

x_i, v_i – замеренные значения аргумента и функции соответственно.

Для оценки близости значений линии тренда к фактическим данным использовался критерий R^2 , рассчитанный по формуле:

$$R^2 = 1 - \frac{\sum_{i=1}^n (v_i - \bar{v})^2}{\left(\sum_{i=1}^n v_i^2 \right) - \frac{\left(\sum_{i=1}^n v_i \right)^2}{n}}$$

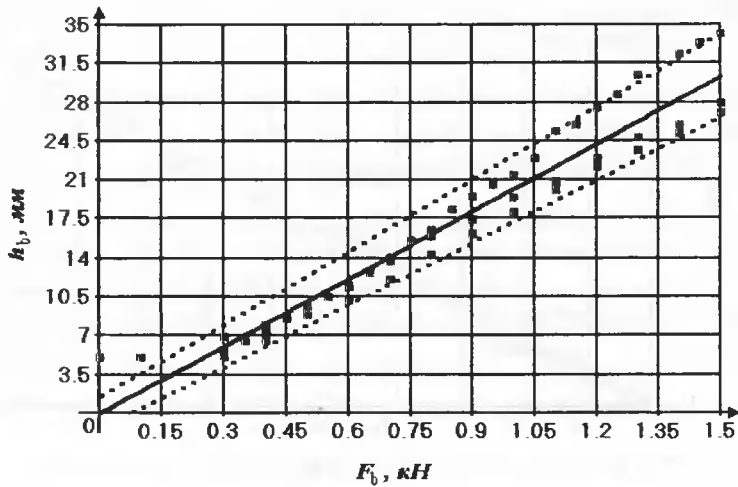


Рис. 8. Результаты обработки экспериментальных данных при боковом изгибе гусеницы

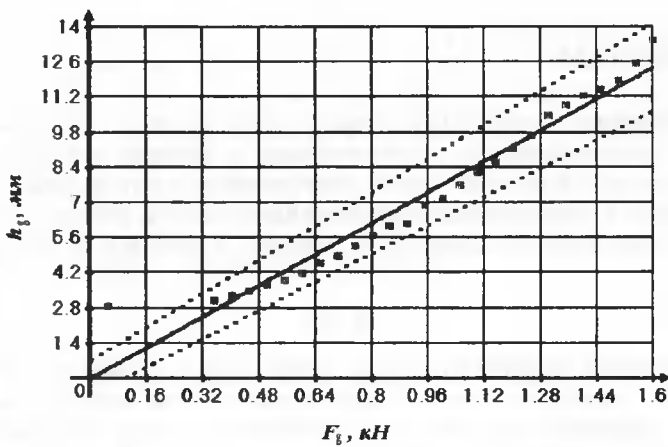


Рис. 9. Результаты обработки экспериментальных данных при боковой деформации протекторного слоя

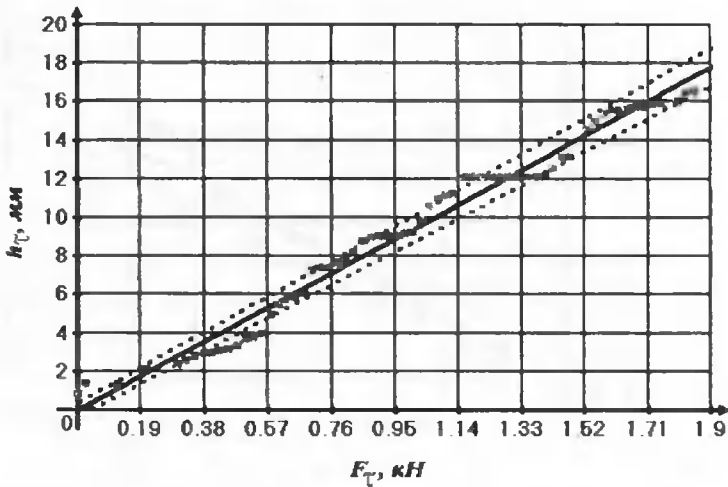


Рис. 10. Результаты обработки экспериментальных данных при тангенциальной деформации протекторного слоя

4. ВЫВОДЫ

Исследование деформаций резиноармированной гусеницы, при ее растяжении, боковом изгибе, тангенциальном и боковом сдвиге протекторного слоя с последующей статистической обработкой результатов средствами пакета Microsoft Excel с использованием надстройки «Анализ данных», показали, что при приложении нагрузки деформация гусеницы изменяется по линейному закону вида

$$h_j = k_j F_j.$$

Исключением является изменение деформации гусеницы при растяжении. В этом случае экспериментальные данные могут быть аппроксимированы как линейной зависимостью, так и полиномом второй степени. Получены коэффициенты регрессии уравнений для расчета деформации гусеницы. Стандартная ошибка отклонения предсказанного значения от измеренного находится в допустимых пределах и составляет 3.67-9.36%. Критерий R^2 имеет также приемлемые значения 0.91-0.98, что говорит о корректности проведения эксперимента и правильности обработки экспериментальных данных.

Полученные результаты позволяют рассчитать жесткостные параметры резиноармированной гусеницы.

ЛИТЕРАТУРА

- [1] Żdanowicz Cz. Określenie rozkładu nacisku gąsienicy gumowej na glebę // Problemy inżynierii rolniczej. – Warszawa, 1999. Nr 1(23). S.13-19.

- [2] Жданович Ч.И. Реализация касательной силы тяги резиногусеничным двигателем // Весті НАН Беларусі. Сер. фіз.-тэхн. навук. 2000. № 4. С. 122-125.
- [3] Zdanowicz Cz., Rawino W., Jaklinski L.. Wpływ twardości gąsienicz gumowej na parametrz krzywoliniowego ruchu ciągnika // Inżynieria systemów bioagrotechnicznych: Materiały VII Międzynarodowego Sympozjum. - Płock. 2001. zeszyt 8 - s.310-318.
- [4] Zhdanovich Ch, Plishch V. Forecasting rubber track service life at the design stage // Problemy decyzyjne w inżynierii niezawodności: XXVIII Zimowa szkoła niezawodności. - Szczecin. 2000. - s. 279-285.
- [5] Александров А.В., Потапов В.Д., Державин Б.Г. Сопротивление материалов.- М.: Высшая школа. 1995.- 560 с.

EXPERIMENTAL RESEARCH ON DEFORMABILITY OF A RUBBER-TRACK SECTION

Summary

In order to obtain functional relations enabling to calculate deformations and rigidity of the rubber-track at its stretching, lateral bending, tangential and lateral shear protective layers, experiments were carried out and statistical analysis was applied. The tests were conducted on the bench, specially fitted for this purpose. During the experiment, the values of the load and deformations caused by the load were gauged. The results of the analysis were presented. The equations of regression for defining deformability of a rubber-track were derived, and the formulas for calculating its rigidity were presented.

Keywords: deformation, rigidity, rubber-track, regression

ISSN 0208-6395