



AKADEMIA TECHNICZNO-ROLNICZA  
IM. JANA I JĘDRZEJA ŚNIADECKICH  
W BYDGOSZCZY

## **ROZPRAWY NR 124**

Feliks Chwarścianek

# **PROJEKTOWANIE I PODSTAWY TEORII FORMOWANIA KSZTAŁTEK KULISTYCH Z CIASTA**

BYDGOSZCZ – 2006

REDAKTOR NACZELNY  
prof. dr hab. Lucyna Drozdowska

REDAKTOR DZIAŁOWY  
prof. dr hab. inż. Maciej Woropay

OPINIODAWCY  
prof. dr hab. inż. Roman Hejft  
prof. dr hab. inż. Janusz Mielniczuk

OPRACOWANIE REDAKCYJNE I TECHNICZNE  
mgr Michał Górecki, Ewa Olawińska

© Copyright  
Wydawnictwa Uczelniane Uniwersytetu Technologiczno-Przyrodniczego  
Bydgoszcz 2006

ISSN 0209-0597

Wydawnictwa Uczelniane Akademii Techniczno-Rolniczej  
ul. Ks. A. Kordeckiego 20, 85-225 Bydgoszcz, tel. (052) 3749482, 3749426  
e-mail: [wydawucz@atr.bydgoszcz.pl](mailto:wydawucz@atr.bydgoszcz.pl) <http://www.atr.bydgoszcz.pl/~wyd>

---

Wyd. I. Nakład 150 egz. Ark. aut. 10,0. Ark. druk. 14 ,0. Zamówienie nr 16/2006  
Oddano do druku i druk ukończono w listopadzie 2006 r.  
Uczelniany Zakład Małej Poligrafii ATR Bydgoszcz, ul. Ks. A. Kordeckiego 20

## Spis treści

1. WPROWADZENIE .....	
1.1. Podstawowe postacie formowanych kształtek kęsów ciasta .....	
1.2. Formowanie kulistych kęsów ciasta .....	
1.3. Dzielenie i formowanie kuliste kęsów ciasta głowicami z nożem wieńcowym .....	
2. OPIS I ANALIZA ISTNIEJĄCEGO STANU ZAGADNIENIA .....	
2.1. Stan zagadnienia dotyczący właściwości ciasta .....	
2.2. Stan zagadnienia dotyczący operacji formowania kęsów ciasta .....	
2.3. Przedmiot, geneza i cel opracowania .....	
3. SFORMUŁOWANIE PROBLEMU BADAWCZEGO.....	
3.1. Teza pracy .....	
3.2. Hipotezy badawcze.....	
3.3. Istota problemu badawczego .....	
4. MODELOWANIE WŁAŚCIWOŚCI CIASTA.....	
4.1. Wybrane właściwości ciasta.....	
4.2. Związki między naprężeniami a odkształceniami .....	
4.3. Elementy reologii materiałów nienewtonowskich.....	
4.4. Uogólnienie prawa Newtona .....	
4.4.1. Modele typu potęgowego .....	
4.5. Badania eksperymentalne.....	
4.5.1. Wielkości opisujące właściwości ciasta .....	
4.5.2. Podstawowe przyrządy i sprzęt pomiarowy .....	
4.5.3. Przygotowanie składników .....	
4.5.4. Pomiary wodorochłonności mąki .....	
4.5.5. Przygotowanie ciasta na próbki pomiarowe.....	
4.5.6. Procedura pomiarowa właściwości reologicznych ciasta.....	
4.5.7. Wyniki pomiarów.....	
4.5.8. Opis graficznych zależności reologicznych badanego ciasta .....	
4.5.9. Niepewności pomiarowe .....	
4.5.10. Wyrażenia modelujące właściwości reologiczne badanego ciasta.....	
5. MODELOWANIE PROCESU FORMOWANIA.....	
5.1. Konfiguracja formowania.....	
5.2. Kinematyka formowania kulistego.....	
5.3. Ruch punktu materialnego płynu.....	
5.4. Tensor prędkości deformacji w konfiguracji formowania.....	
5.5. Dynamika formowania kulistego.....	
5.5.1. Siły i naprężenia w układzie otwartym formowania .....	

6.	RÓWNANIA RUCHU FORMOWANEGO CIASTA .....	
6.1.	Podstawowe zasady zachowania wielkości fizycznych .....	
6.2.	Sformułowanie równań .....	
6.2.1.	Równanie ciągłości .....	
6.2.2.	Równanie pędu .....	
6.2.3.	Równanie momentu pędu .....	
6.2.4.	Równanie energii mechanicznej .....	
6.3.	Układ równań ruchu .....	
6.3.1.	Układ równań we współrzędnych sferycznych .....	
6.3.2.	Założenia uściślające i upraszczające .....	
6.3.3.	Formy uproszczone równań w konfiguracji formowania .....	
6.3.4.	Analiza układu uproszczonych równań .....	
7.	APLIKACJA PROJEKTOWA OPRACOWANYCH MODELI .....	
7.1.	Określenie warunków rozwiązywania równań ruchu .....	
7.2.	Szczególny przypadek uproszczenia i rozwiązania równań .....	
7.3.	Wyniki uproszczonych rozwiązań .....	
7.4.	Dyskusja otrzymanych wyników rozwiązań .....	
8.	PODSUMOWANIE I WNIOSKI .....	
	BIBLIOGRAFIA .....	
	ANEKSY	
	Aneks 1 .....	
4.1.1.	Transformacja ciała – odkształcenia, deformacje .....	
4.1.2.	Podstawowe miary deformacji i odkształcenia .....	
4.1.3.	Gradient prędkości .....	
4.2.1.	Związki miar odkształcenia i tensora prędkości deformacji .....	
4.2.2.	Naprężenia w deformowanym ciele .....	
4.2.3.	Miary naprężenia w konfiguracji odniesienia .....	
4.2.4.	Klasyczne modele ośrodków ciągłych .....	
4.3.1.	Teoria nieściśliwych cieczy prostych .....	
4.3.2.	Koncepcja cieczy nieprostej .....	
	Aneks 2 .....	
	Tabele wyników pomiarów ciasta – wielkości bezpośrednie (1a-16a) .....	
	Aneks 3 .....	
	Wykresy zależności reologicznych dla pełnego zakresu czasu pomiaru (4.14-4.21) .....	
	STRESZCZENIA .....	

## 1. WPROWADZENIE

W procesie wytwarzania różnych rodzajów pieczywa, spożywanego jako podstawowy produkt żywnościowy prawie na całym świecie, wyróżnić można następujące, ważniejsze operacje technologiczne:

- wytwarzanie ciasta (miesienie),
- rozrost wstępny (fermentacja wstępna) ciasta,
- dzielenie wytworzonego ciasta na kęsy,
- formowanie kęsów ciasta w odpowiednie kształtki,
- rozrost końcowy (fermentacja końcowa) kęsów ciasta,
- wypiek uformowanych kęsów w piecu piekarskim,
- schładzanie, krojenie, pakowanie (operacje opcjonalne).

Operacja formowania kęsów ciasta nadaje kęsom odpowiedni kształt (formę), który następnie może być utrwalony podczas wypieku lub jest formą technologicznie przejściową dla uzyskania ostatecznego kształtu kęsa ciasta, który również podlega wypiekowi (np.: zwijanie rogali z płaskich placków; wydłużanie kęsów kulistopodobnych lub stożkowatych dla otrzymania kształtu chleba czy bułki, tzw. paryskiej).

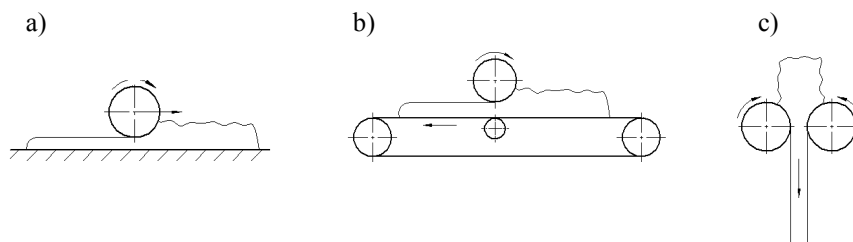
### 1.1. PODSTAWOWE POSTACIE FORMOWANYCH KSZTAŁTEK KĘSÓW CIASTA

Wstępnie określone zagadnienie, będące przedmiotem rozważań, dotyczy opisu zachowania się ciasta jako materiału (ciała) trwale odkształcalnego w procesie jego kształtowania, w pożądaną technologicznie formę geometryczną.

W obróbce formującej ciasta mogą być wykonywane następujące podstawowe rodzaje kształtek kęsów ciasta [16, 42, 47]:

- płaskie,
- walcowe,
- kuliste.

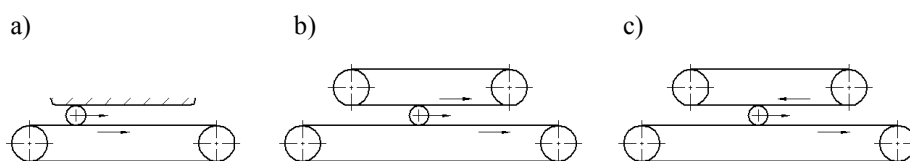
Sposoby formowania, przedstawione na rysunku 1.1a, b, c, pokazują wytwarzanie kształtek płaskich (plackowatych), stosowanych w produkcji np. rogali, ciastek, mas cukierniczych itp.



Rys. 1.1. Sposoby wykonywania kształtek płaskich

Pokazane formowanie kształtek płaskich może odbywać się na stałej powierzchni (stołe (rys. 1.1a)) za pomocą toczącego się wałka lub na powierzchni przenośnika taśmowego z wałkiem pomocniczym (lub stołem ślizgowym) podpierającym taśmę w miejscu pracy wałka roboczego, obracającego się z odpowiednią prędkością (rys. 1.1b). Na rysunku 1.1c pokazano wałkowanie ciasta na kęsy płaskie między dwoma współbieżnymi wałkami, sposób ten stosuje się zwłaszcza w wykonywaniu rogali.

Formowanie pokazane na rysunku 1.2a, b, c [47], w wyniku którego otrzymuje się kształtki walcowe (walcopodobne), znajduje zastosowanie w wytwarzaniu np. chleba, batonów, podłużnych bułek itp.

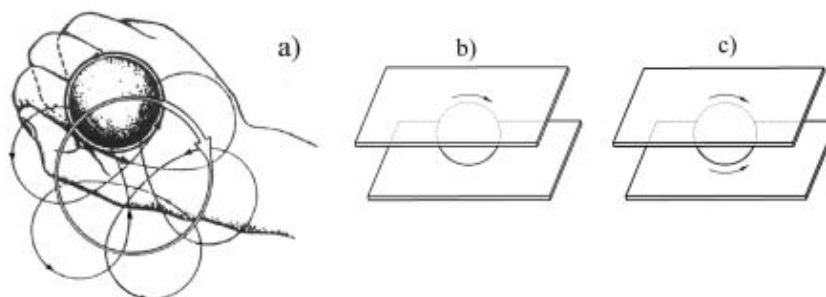


Rys. 1.2. Sposoby wykonywania kształtek walcowych

Ten rodzaj formowania odbywa się zwykle za pomocą przenośnika taśmowego, który może współpracować:

- z powierzchnią stałą (rys. 1.2a); kęs ciasta jest przemieszczany między roboczymi powierzchniami na skutek ruchu taśmy przenośnika,
- z drugim przenośnikiem (rys. 1.2b) w układzie współbieżnym; kęs ciasta podlega przemieszczaniu między powierzchniami roboczymi w kierunku ruchu taśm obu przenośników,
- z drugim przenośnikiem (rys. 1.2c) w układzie przeciwbieżnym; kęs ciasta jest przemieszczany między powierzchniami roboczymi w kierunku ruchu przenośnika o większej prędkości.

Rysunek 1.3 przedstawia zasadę formowania kęsów ciasta w kształtki kuliste. Formowanie kształtek kulistych (kulistopodobnych), znajduje zastosowanie w wytwarzaniu tzw. pieczywa drobnego – bułek, pączków itp.



Rys. 1.3. Sposoby wykonywania kształtek kulistych

Rysunek 1.3a, [47], pokazuje ręczne obtaczanie kęsów ciasta na płaskiej powierzchni (np. stole), stosowane jeszcze w małych piekarniach i gospodarstwach domowych.

Rysunek 1.3b ilustruje obtaczanie kęsów w kształtki kuliste między dwiema płaszczyznami, jedna z płaszczyzn jest nieruchoma (np. stół), druga wykonuje ruch obtaczający (postępowy po okręgu).

Na rysunku 1.3c pokazano formowanie kształtek kulistych między dwiema płaszczyznami ruchomymi, które wykonują roboczy ruch obtaczający w przeciwnych kierunkach.

Przedstawione schematycznie na rysunkach 1.1-1.3 zasady formowania, wykorzystywane są w maszynach, które służą do formowania kęsów ciasta. Formowanie kuliste zostanie poddane analizie i rozważaniom ze względu na złożoną mechanikę procesu.

## 1.2. FORMOWANIE KULISTYCH KĘSÓW CIASTA

Przed formowaniem kęsów ciasta stosuje się dzielenia ciasta na kęsy przeznaczone do formowania. Dzielenie ciasta na kęsy może być wykonywane odrębnie (na odrębnych maszynach) i wtedy niezależnie wykonywane jest formowanie tych podzielonych kęsów. Często stosowane są rozwiązania konstrukcyjne maszyn, które pozwalają na wykonywanie obu operacji, tj. dzielenia i formowania w jednej maszynie. Prowadzi to do różnych sposobów realizacji procesu wytwarzania pieczywa. Na wykorzystanie określonych rozwiązań konstrukcyjnych maszyn wpływa również sposób organizacji procesu technologicznego produkcji pieczywa – pieczywo może być produkowane podczas doby okresowo lub ciągle.

W operacji dzielenia ciasta na kęsy, prawie wyłącznie stosuje się, tzw. objętościowe dzielenie, które polega na oddzieleniu ze sporządzonej masy ciasta, jednakowych objętościowo kęsów (i w założeniu o jednakowej masie) przy ustalonym ciśnieniu.

Do najczęściej stosowanych sposobów dzielenia należą [42]:

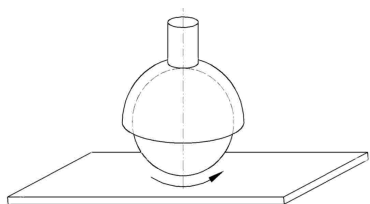
- oddzielanie nożem (obrotowym lub przesuwным) kęsów ze strugi wypływającego z gardzieli maszyny ciasta,
- oddzielanie tłokiem w komorze roboczej ciasta wpływającego do komory tłokowej (ciśnieniowe lub podciśnieniowe),
- dzielenie nożem gwiaździstym (wieńcowym) odważonej wstępnie porcji ciasta (tzw. kęs pierwotny) na odpowiednie kęsy wtórne.

Stosowane mechaniczne sposoby formowania kęsów ciasta w kształtki kuliste wiążą się bezpośrednio lub pośrednio z naśladowaniem czynności manualnego obtaczania kęsów (rys. 1.3a). Podstawowe zasady mechanicznego formowania ciasta powstały ponad 100 lat temu i do dziś, w różnych modyfikacjach są powielane i stosowane.

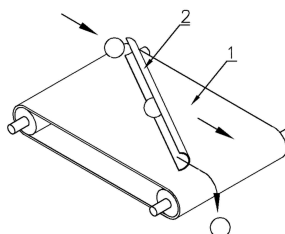
Mechaniczne formowanie ciasta w kształtki kuliste ruchem obtaczającym wykonywane jest zwykle jednocześnie dla kilkunastu lub kilkudziesięciu kęsów

ciasta. Typowe, maszynowe sposoby formowania kulistego kęsów ciasta polegają na obtaczaniu kęsów ciasta (po podzieleniu) między [16, 42, 47]:

- a) ruchomymi czaszami w głowicy roboczej a nieruchomą powierzchnią stołu maszyny. Na powierzchni stołu mogą znajdować się odpowiednie wgłębienia (gniazda) ułatwiające formowanie. Znajdują zastosowanie również rozwiązania z ruchomym stołem wykonującym ruch obtaczający i z nieruchomymi czaszami (rys. 1.4),
- b) powierzchnią przesuwającego się przenośnika taśmowego a powierzchnią nieruchomej wyprofilowanej rynny (lub płaskiej listwy), ustawionej skośnie do kierunku ruchu przenośnika (rys. 1.5),

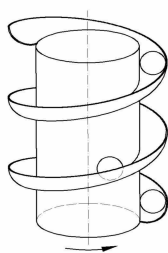


Rys. 1.4. Formowanie kuliste w gnieździe czaszy

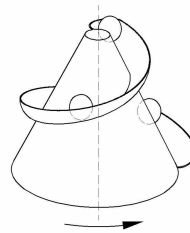


Rys. 1.5. Formowanie kuliste między taśmą przenośnika a listwą rynnową

- c) powierzchnią (tworzącą) obracającego się wokół osi pionowej walca a powierzchnią wyprofilowanej nieruchomej rynny, spiralnie otaczającej powierzchnię zewnętrzną walca (rys. 1.6) lub powierzchnię wewnętrzną,
- d) powierzchnią (tworzącą) obracającego się wokół osi pionowej stożka (zewnętrznego lub wewnętrznego) a powierzchnią wyprofilowanej nieruchomej rynny opasującej spiralnie tworzącą stożka (rys. 1.7),



Rys. 1.6. Formowanie kuliste między tworzącą walca a spiralną rynną

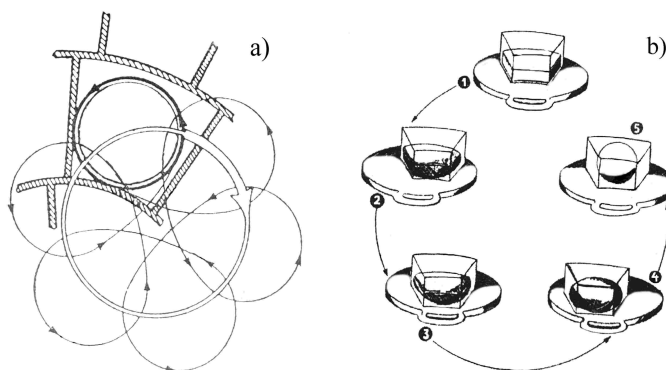


Rys. 1.7. Formowanie kuliste między tworzącą stożka a stożkowo-spiralną rynną

- e) nieruchomymi powierzchniami komory formującej, utworzonej między płytkami noża gwiaździstego i segmentami płyty prasującej a powierzchnią wy-



konującej ruch obtaczający, tacy formującej, ustalonej na stole roboczym i posiadającej odpowiednie gniazda ułatwiające formowanie (rys. 1.8).



Rys. 1.8. Formowanie kuliste między tacą, a ścianami komory noża wieńcowego [47]:  
a) profil cykloidy obtaczania, b) fazy obtaczania formującego w komorze noża

Dla formowania kęsów ciasta na pieczywo drobne, zwykle stosowane są sposoby opisane w punktach: a, e, a czasami również d.

Do najpopularniejszych maszyn łączących funkcję dzielenia i formowania przy wytwarzaniu pieczywa w małych i średnich piekarniach i cukierniach należą, tzw. dzielarko-formierki z nożem wieńcowym [11, 16, 42].

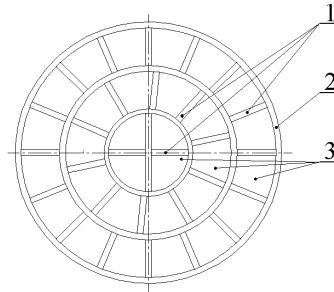
### 1.3. DZIELENIE I FORMOWANIE KULISTE KĘSÓW CIASTA GŁOWICAMI Z NOŻEM WIĘNCOWYM

Proces dzielenia i formowania w dzielarko-formierce wykonywany jest przez głowicę roboczą z nożem wieńcowym (gwiazdzistym) oraz stół z tacą, na której umieszcza się odważony (ręcznie), tzw. kęs pierwotny ciasta.

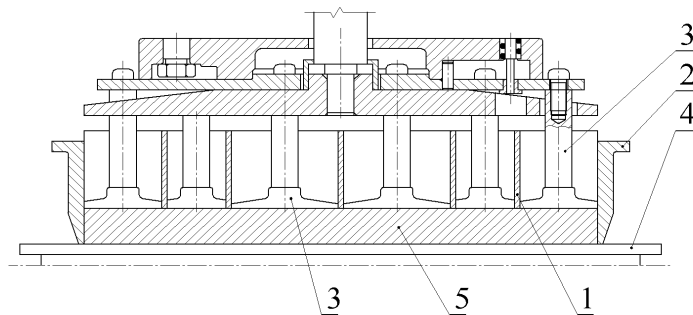
Tacę z kęsem pierwotnym umieszcza się i ustala na stole maszyny pod głowicą roboczą, znajdującą się w górnym położeniu. Głowica zawiera nóż gwiazdzisty (rys. 1.9) z ostrzami w postaci płytek (1), pierścień okalający (2) i segmentową płytę (3).

Następnie głowica wykonuje ruch do dołu (rys. 1.10), do tacy z ciastem, powodując sprasowanie kęsa pierwotnego (5) i nadanie mu kształtu okrągłego placka o jednakowej grubości. Płytki noża (1) i segmenty płyty prasującej (3) tworzą równą płaszczyznę. Wypływowi ciasta na zewnątrz zapobiega pierścień okalający (2), nadający kęsowi pierwotnemu regularny okrągły kształt.

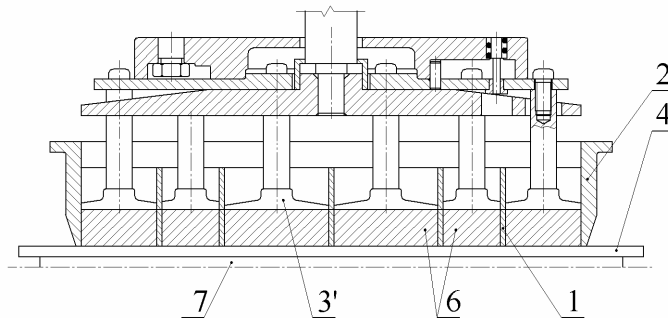
Po sprasowaniu ciasta, co pokazuje (rys. 1.11), następuje odryglowanie noża gwiazdzistego (1) i wysunięcie się z płyty segmentowej (3), następnie dalszy ruch ku dołowi, powodując przecinanie płytkami noża (1) kęsa pierwotnego (5) i jego podział na jednakowe objętościowo (i wagowo) kęsy wtórne (6) ciasta.



Rys. 1.9. Głowica formująca, widok od dołu: 1) ostrza-płytki noża, 2) pierścień okalający, 3) segmenty płyty prasującej



Rys. 1.10. Głowica formująca – prasowanie kęsa pierwotnego



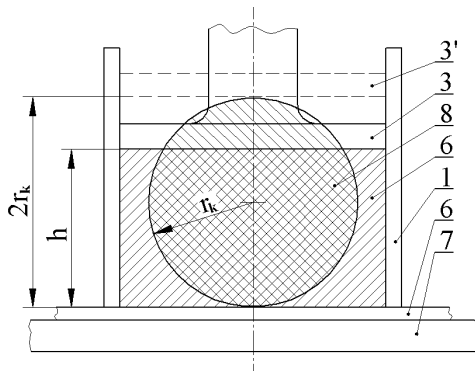
Rys. 1.11. Głowica formująca – przecinanie kęsa pierwotnego nożem wieńcowym

Po podzieleniu kęsa pierwotnego (5) następuje zwolnienie nacisku płyty segmentowej (3) na ciasto i jej częściowe, sprężyste cofnięcie się do góry, w położenie (3'). Rysunki 1.11 i 1.12, pokazują powstanie komór roboczych (formujących) między segmentami płyty prasującej (3), ściankami noża (1) oraz tacą formującą (4). Gniazda tacy, ułatwiające formowanie znajdują się w każdej komórce roboczej. Krotność podziału noża gwiazdowego odpowiada liczbie komór roboczych oraz gniazd na tacy formującej, zwykle wynosi ona 30.

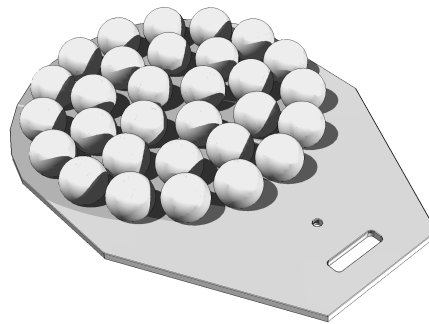
Po utworzeniu komór roboczych, stół (7) z tacą (4) zaczyna wykonywać ruch obtaczający powodując jednocześnie formowanie wszystkich kęsów wtórnych (6), znajdujących się w komorach roboczych, w kształtki kuliste (8).

Czas trwania formowania oraz stopień cofnięcia się do góry płyty segmentowej (3) są nastawiane przed rozpoczęciem pracy maszyny. Płyta segmentowa (3) w swoim górnym położeniu (3') może przesunąć się sprężysto, ograniczając wysokość komory formowania do wartości odpowiadającej średnicy kuli (2r), formowanej z ciasta (rys. 1.12).

Formowanie kończy się zaprzestaniem ruchu obtaczającego stołu z tacą (4), wycofaniem się głowicy w położenie wyjściowe oraz samoczynnym cofnięciem się noża gwiaździstego i schowaniem się jego płytek (1) między segmenty płyty prasującej (3) głowicy. Następnie tacę (4) z uformowanymi kęsami wtórnymi (8) usuwa się spod głowicy (rys. 1.13). Po umieszczeniu na stole maszyny następnej tacy z kęsem pierwotnym proces prasowania, dzielenia i formowania jest powtarzany.



Rys. 1.12. Komora robocza formująca kęs wtórny – transformacja kształtu kęsa ciasta



Rys. 1.13. Taca z uformowanymi kęsami kulistymi

Opisany przykładowo przebieg procesu formowania kęsów ciasta w dzielarko-formierce z nożem gwiaździstym (najczęściej występujący) wykorzystany zostanie w dalszych rozważaniach jako najbardziej reprezentatywny dla opracowania odpowiedniego modelu fenomenologicznego formowania.

## **2. OPIS I ANALIZA ISTNIEJĄCEGO STANU ZAGADNIENIA**

Zagadnienie mechaniki formowania kęsów ciasta w kształtki kuliste powinno być opisane uwzględniając fenomenologię samego procesu, wykorzystując zwłaszcza:

- model właściwości przetwórczych wybranych rodzajów ciasta,
- model kinematyki formowania kulistego kęsów ciasta.

Oba aspekty ujęcia zagadnienia (model właściwości ciasta oraz model przebiegu formowania) pozwalają na ściśle naukowo ujęcie rozważanego zagadnienia, umożliwiając następnie aplikacyjne wykorzystanie projektowe i konstrukcyjne opracowanego zagadnienia.

### **2.1. STAN ZAGADNIENIA DOTYCZĄCY WŁAŚCIWOŚCI CIASTA**

Właściwości ciasta, w tym reologiczne, są bogato prezentowane w przedmiotowej literaturze naukowej, również obszerne są publikacje dotyczące reometrii (zwłaszcza pomiarów lepkości). Do podstawowych już klasycznych, należą prace Schofielda i Scott Blaira [51], dokonujące opisu ciasta pszennego, jako płynu nienewtonowskiego opierając się na modelach – analogach mechanicznych. Do znaczących należą prace [22, 28, 33, 52, 56, 65], zawierające podstawowe pojęcia w odniesieniu do reologii produktów żywnościowych i pomiarów wielkości reologicznych oraz ich wykorzystania w praktyce technicznej i naukowej.

Istniejąca duża liczba opracowań, dotyczących reologii ciasta wynika ze znacznego zróżnicowania właściwości oraz ich wartości i rodzajów stosowanych ciast, wynikającego zwłaszcza z:

- różnorodności stosowanych składników oraz ich zróżnicowanych własności,
- różnic w udziale poszczególnych składników,
- różnic w sposobie przygotowywania i wytwarzania ciasta,
- aktywności biologicznej ciasta.

To zróżnicowanie badanych właściwości oraz ich wartości powoduje, że trudno porównywać osiągnięte rezultaty badań oraz trudno osiągnąć pożądaną podatność ciasta na stosowane zabiegi w jego obróbce maszynowej. Systematycznie podejmowane są próby optymalizacji właściwości ciasta (technologicznych i reologicznych) poprzez wpływanie na zachodzące w cieście procesy fizyko-chemiczne [2, 4, 7, 25, 30], a w konsekwencji na jakość wyrobów otrzymywanych z przetwarzanego ciasta [8, 9, 20, 21, 34, 48, 49].

Wiele prac dotyczy opisu właściwości reologicznych tylko niektórych, wybranych, rodzajów ciast, np. pszennych [4, 6, 38, 58], biszkoptowych (szczególnie wygodnych podczas pomiarów ze względu na prawie płynną konsysten-

cje) [1] czy drożdżowych [1, 8, 37] z uwzględnieniem wpływu różnych składników (np. cukru, tłuszczu, mleka w proszku) [2, 24, 25]. W niektórych publikacjach omówiono wpływ sposobu przygotowania ciasta (parametry miesienia, fermentacji) na właściwości strukturalne (siatka glutenowa) relaksacyjne ciasta [2, 7, 10, 38, 40, 46, 54]. Pewna liczba prac, dotyczących niektórych wielkości fizyko-chemicznych (np. temperatura, wilgotność, ciśnienie) i ich wzajemnych zależności oraz ich wpływu na właściwości reologiczne i technologiczne ciasta [1, 7, 9, 20, 36, 38, 54, 58], ujmuje zagadnienie w sposób zawężony, wynikający z podjęcia szczegółowego i specyficznego przedmiotu badań.

Znaczącą grupę stanowią opracowania dotyczące reometrii, zwłaszcza pomiarów podstawowych wielkości reologicznych ciasta i jego składników (np. lepkość, naprężenia, prędkość odkształceń) [13, 21, 22, 29, 41, 44, 54, 55, 58].

Wyniki badań zwykle podawane są w formie tabelarycznej i w postaci wykresów opisujących przebieg badanych wielkości oraz ich zależności. Niekiedy podawane są modelowe wyrażenia matematyczne [3, 10, 31, 32, 49, 56] oraz odpowiednie współczynniki charakterystyczne.

## **2.2. STAN ZAGADNIENIA DOTYCZĄCY OPERACJI FORMOWANIA KĘSÓW CIASTA**

Zagadnienie formowania kęsów ciasta w literaturze naukowej jest ujmowane rzadko i fragmentarycznie. Opisy przebiegu procesu formowania ograniczają się zwykle do wąsko ujętych zagadnień aplikacyjnych i użytkowych. Istnieje natomiast obszerna literatura o charakterze reklamowo-handlowym (foldery, ulotki firmowe) opisująca budowę i działanie oraz funkcje eksploatacyjne i osiągi maszyn i ich zespołów wykonujących formowanie ciasta, bez wnikania w fenomenologię procesów formowania kęsów ciasta. W nielicznych przypadkach (monografie, podręczniki), np. [3, 42, 53, 62, 65], podjęto próbę opisu mechaniki maszynowego formowania, ograniczoną jednak prawie wyłącznie do opisu ogólnie znanych sposobów realizowania ruchów formujących (formowanie kształtek płaskich, walcowych, kulistych).

Jedynie w monografii [65] dokonano opisu przebiegu formowania kształtek walcowych, lecz bez uwzględnienia właściwości reologicznych ciasta opisywanych określonym modelem matematycznym. W pracy tej tylko zasygnalizowano możliwość dokonania opisu formowania kształtek kulistych w podobny sposób jak dla kształtek walcowych.

W publikacji [62] bardzo ogólnie podkreślono związek między wybranymi własnościami reologicznymi ciasta w ujęciu technologicznym a cechami konstrukcji gniazd w tacach stosowanych w maszynach formujących z nożem wieńcowym (rozwiązania techniczne jak w dokumentacji maszyny [11]). Opracowania [2, 3, 25, 42] wykazują ogólnie zależności pomiędzy niektórymi własnościami reologicznymi ciasta (lepkość i relaksacja naprężeń) a warunkami obróbki formującej.

Praca [63] ujmuje zagadnienie modelowania wybranych wielkości fizycznych niektórych wyrobów wytwarzanych przez wytłaczanie i jej związek z tematyką niniejszej rozprawy ogranicza się do podejmowanych zagadnień reologicznych.

Wpływ właściwości reologicznych ciasta na przebieg maszynowego formowania kulistego lub walcowego nie znajduje odzwierciedlenia w przeanalizowanych opracowaniach, ograniczając opis do próby określenia wpływu technologicznych właściwości przetwórczych ciasta na niektóre wielkości kinematyczne i dynamiczne w celu wyznaczenia parametrów pracy mechanizmów roboczych (prędkości obrotowe, moce).

W pracach autora [12-15], a zwłaszcza w [16-29] wykazano możliwość uwzględnienia właściwości reologicznych (związki pomiędzy naprężeniami i prędkością deformacji) w określonej konfiguracji roboczej formowania, otrzymane rezultaty wykorzystano w niniejszym opracowaniu.

W świetle bogatej oferty dystrybucyjnej przemysłu produkującego maszyny do formowania kęsów ciasta, przy jednocześnie występującym braku naukowego ujęcia i opisu fenomenologii procesów formowania kęsów ciasta można przypuszczać, iż przemysł wytwarzający odpowiednie maszyny wykorzystuje ewolucyjne cechy postępu technicznego wynikające z zebranych doświadczeń w eksploatacji stosowanych i znanych rozwiązań konstrukcyjnych (stopniowe doskonalenie istniejących rozwiązań); pewną rolę może odgrywać również ochrona własności intelektualnej i przemysłowej (własnych osiągnięć rozwojowych w przedmiotowym zakresie).

### **2.3. PRZEDMIOT, GENEZA I CEL OPRACOWANIA**

Ze względu na zwiększającą się różnorodność wytwarzanych rodzajów pieczywa drobnego oraz wzrost liczby małych i średnich piekarni (pieczywo drobne coraz częściej wytwarza się również w sklepach) zwiększa się zapotrzebowanie na maszyny formujące kęsy ciasta. Maszynom tym stawia się coraz wyższe wymagania dotyczące technologii realizowanego procesu oraz ogólnej efektywności, zwłaszcza w aspekcie wydajności i niezawodności eksploatacji.

W projektowaniu nowych maszyn, które mają sprostać zwiększającym się wymaganiom technicznym występują istotne ograniczenia wynikające z niewystarczającego opisu teoretycznego procesu formowania kęsów ciasta.

Przedmiotem opracowania jest opis i analiza formowania kulistego kęsów ciasta, traktowanego jako materiał reologiczny, wykorzystując opracowany model procesu formowania, odpowiadający formowaniu w maszynach z nożem wieńcowym. Formowanie w maszynach posiadających głowice z nożem wieńcowym (rys. 1.8, 1.10, 1.11) jest powszechnie stosowane dzięki zwartości konstrukcji i niewielkim wymiarom głowicy roboczej i całej maszyny.

Potwierdzeniem potrzeby takiego ujęcia zagadnienia są przedmiotowe badania literaturowe (wykazujące brak istotnych informacji dotyczących teorii formowania kęsów ciasta) oraz własne doświadczenie zawodowe wynikające

z wieloletniej praktyki w konstrukcji maszyn spożywczych (w tym dzielarkoformierek do ciasta typ GDN-4000 i GDN-4004 [11], produkowanych do dzisiaj w udoskonalonej postaci). W trakcie prowadzonych w przeszłości prac projektowych i konstrukcyjnych oraz ostatnio studialnych, znaleziono niewiele opracowań naukowych i technicznych (zarówno krajowych jak i zagranicznych [53, 65]) – pozwalających na aplikację ich wyników do realizowanych prac projektowych. Taki stan rzeczy zmuszał do powielania istniejących rozwiązań lub do przeprowadzania odpowiednich (czasami fragmentarycznych i doraźnych) badań eksperymentalnych i modelowych wynikających z aktualnie prowadzonych prac projektowo-konstrukcyjnych.

Głównym celem poznawczym podjęcia opisu problematyki formowania jest opracowanie uzasadnionych naukowo teoretycznych podstaw dla opisu mechaniki procesu formowania kształtek kulistych z ciasta opierając się na modelu formowania oraz z uwzględnieniem modelu właściwości reologicznych ciasta. Analiza istniejącego stanu nauki i techniki, w świetle dostępnej literatury i stosowanych rozwiązań w praktyce przemysłowej, uzupełnienia i potwierdza celowość podjętej tematyki.

Inspiracją do podjęcia problemu formowania są też oczekiwania wynikające z realizacji doraźnych celów praktycznych (cele dodatkowe), które dotyczą określenia kryteriów, warunków jakościowych i ilościowych oraz wytycznych i zaleceń dla optymalizacji procesu formowania, a następnie optymalizacji rozwiązań konstrukcyjnych w nowych maszynach [23, 27, 53].

Dążąc do realizacji konkretnych celów naukowych i użytkowych niniejszej pracy, w świetle utrudnionej adaptacji nielicznie opisanych w literaturze, a przy tym możliwie prostych i przydatnych zależności modelujących właściwości reologiczne badanych ciast, niezbędne staje się przeprowadzenie własnych badań najczęściej stosowanych w praktyce rodzajów ciast (pszenne i mieszane) w celu wyznaczenia wyrażeń opisujących modelowe właściwości ciasta w technologicznie uzasadnionym przedziale czasu obróbki.

W opracowaniu uwzględniającym aplikację właściwości ciasta (obrabianego na odpowiednich maszynach – dzielonego i formowanego) najbardziej wygodną i pożądaną formą opisu jest możliwie prosta i dająca się określić w przestrzeni trójwymiarowej matematyczna zależność konstytutywna modelująca właściwości przetwórcze, zwłaszcza reologiczne ciasta.

Analiza problematyki formowania kęsów ciasta prowadzi do konstatacji, iż brak jest spójnego naukowego opisu procesu formowania (w tym kulistego) kęsów ciasta, uwzględniającego przy tym właściwości materiałowe i reologiczne ciasta. Brak teorii formowania jest istotnym ograniczeniem w rozwoju nowych konstrukcji i eksploatacji maszyn. W niniejszym opracowaniu podjęto próbę, w miarę ścisłego naukowo i technicznie, teoretycznego ujęcia przedmiotowego zagadnienia.

Uzasadnione jest zatem działanie, prowadzące do sformułowania, możliwej do wykorzystania praktycznego teorii procesu formowania, a w konsekwencji do bardziej efektywnego jej stosowania w nowo opracowywanych maszynach formujących kęsy ciasta.

### **3. SFORMUŁOWANIE PROBLEMU BADAWCZEGO**

Problem badawczy sformułowany został opierając się na przeprowadzonej analizie zagadnienia na podstawie istniejącej i dostępnej literatury przedmiotu oraz stanu techniki w zakresie konstrukcji, budowy i eksploatacji maszyn formujących kęsy ciasta z wykorzystaniem doświadczenia konstrukcyjnego autora opracowania. Przeprowadzona analiza umożliwia postawienie tezy badawczej oraz opracowanie odpowiednich roboczych hipotez badawczych.

#### **3.1. TEZA PRACY**

Istnieje możliwość dokonania analitycznego opisu procesu formowania ciasta, traktowanego jak płyn nienewtonowski, pozwalającego na określenie i wyznaczenie wzajemnych zależności odpowiednich wielkości wpływających na przebieg formowania oraz optymalizację rozwiązań konstrukcyjnych układów formujących w maszynie.

#### **3.2. HIPOTEZY BADAWCZE**

W celu potwierdzenia oraz udowodnienia słuszności przyjętej tezy badawczej przyjęto robocze hipotezy badawcze postulujące możliwość:

- opracowania modelu matematycznego reologicznych właściwości wybranych rodzajów ciasta na podstawie przeprowadzonych badań eksperymentalnych,
- analitycznego opisu mechaniki formowania kształtek kulistych z ciasta opierając się na opracowanym modelu procesu formowania,
- powiązania zależności wybranych wielkości mechanicznych opisujących formowanie z właściwościami reologicznymi ciasta,
- sformułowanie i przygotowanie do rozwiązania układu równań opisujących formowanie w odpowiedniej konfiguracji geometrycznej,
- wyznaczenie odpowiednich wielkości mechanicznych (kinematycznych oraz dynamicznych) wpływających na przebieg formowania.

#### **3.3. ISTOTA PROBLEMU BADAWCZEGO**

Istota badań postawionego problemu wynika z analizy istniejącego stanu zagadnienia (literatura i praktyka przemysłowa), a także bezpośrednio z określonej i przyjętej tezy badawczej oraz hipotez roboczych. Polega ona na określeniu konfiguracji formowania kulistych kęsów ciasta w możliwie zbliżonym do rzeczywistego, ujęciu przebiegu procesu formowania oraz na opracowaniu fenomenologicznego modelu przebiegu formowania z uwzględnieniem wielkości modelujących właściwości reologiczne materiału ciasta. Wymienione cechy



dotyczące istoty problemu badawczego odniesione są do przypadku formowania w komorach roboczych maszyn formujących z głowicą posiadającą nóż wieńcowy (gwiazdzisty).

Wielkości opisujące maszynowe formowanie kęsów ciasta związane są również z właściwościami materiału ciasta. Konieczna jest więc znajomość wartości i charakteru zmienności wybranych wielkości reologicznych ciasta. Opierając się na przeprowadzonych badaniach eksperymentalnych wybranych właściwości, dla kilku rodzajów ciast, opracowano model matematyczny tych właściwości ciasta. Model właściwości reologicznych ciasta sformułowano dla przeciętnie istniejącego czasu przydatności technologicznej różnych rodzajów ciast wykorzystywanych w procesie wytwarzania pieczywa.

Materiał ciasta w trakcie formowania wykazuje opór i reaguje poprzez swoje właściwości reologiczne na pola prędkości, sił i momentów, które wymuszają formowanie i deformacje. Niezbędne zatem staje się określenie wzajemnych zależności, a zwłaszcza warunków równowagi tych wielkości.

Uwzględnienie związków i zależności między wielkościami charakteryzującymi opracowane modele (ciasta i formowania) pozwala, w przyjętej konfiguracji przebiegu procesu formowania, na odpowiednie sformułowanie układu równań opisujących zachowanie się ciasta w trakcie jego formowania. Wprowadzenie odpowiednich uściśleń i uproszczeń pozwala na utworzenie odpowiedniego algorytmu (sekwencji wyrażeń matematycznych) umożliwiającego podjęcia próby rozwiązania sformułowanego układu równań ruchu.

Możliwe do otrzymania rozwiązanie układu równań, opisujących formowanie kęsów ciasta, powinno weryfikować poprawność i słuszność przeprowadzonych rozważań zarówno w aspekcie analitycznym jak i poprawności merytorycznego ujęcia teoretycznego przedmiotowego zagadnienia. Dla doraźnej potrzeby rozwiązania układu równań zostaną przyjęte do obliczeń wartości parametrów i współczynników wyznaczone eksperymentalnie lub wynikające z założonych wartości charakterystycznych procesu formowania.

W świetle istniejącego stanu wiedzy naukowej i praktyki technicznej (rozwiązania konstrukcyjne oraz dokonania w zakresie budowy maszyn) proponowane ujęcie postawionego problemu badawczego stanowi nowy i oryginalny wkład do teorii maszynowego formowania zwłaszcza kształtek kulistych z ciasta, uwzględniającej jego właściwości reologiczne – co stanowi syntetycznie ujęty, cel poznawczy prowadzonych rozważań.

## 4. MODELOWANIE WŁAŚCIWOŚCI CIASTA

### 4.1. WYBRANE WŁAŚCIWOŚCI CIASTA

Podczas wytwarzania i przetwarzania ciasta szczególnego znaczenia nabierają jego właściwości fizyczne, biologiczne oraz technologiczne, zwłaszcza dla znacznej ilościowo produkcji pieczywa – wykorzystującej odpowiednie urządzenia i maszyny. Proces wytwarzania i przetwarzania ciasta jest trudny do zmechanizowania ze względu na jego złożoność (wielorakie funkcje technologiczne) oraz konieczność zapewnienia stabilnej, wysokiej jakości pieczywa przy zmieniających się własnościach ciasta.

Ciasto jest materiałem o złożonym składzie i budowie wewnętrznej. Na przebieg obróbki mechanicznej, zwłaszcza procesu formowania ciasta, istotnie wpływają jego właściwości technologiczne, wynikające ze składu fizykochemicznego oraz sposobu przygotowania (wytwarzania) ciasta. Ciasto sporządzane jest według zróżnicowanych receptur, w których podstawowym składnikiem jest mąka. Jej własności (zmienne) decydująco wpływają na właściwości ciasta. Do wytwarzania ciasta na pieczywo drobne używana jest przede wszystkim mąka pszenna, czasami również mieszana składająca się z mąki pszennej i np. żytniej, owsianej czy nawet kukurydzianej. Poza mąką, ciasto może zawierać dodatki, takie jak: woda, sól, cukier, tłuszcze, mleko, drożdże, nasiona (np. maku, kminku oraz rodzyнки i inne), a także tzw. polepszacze. Spośród stosowanych dodatków występować mogą tylko niektóre ich rodzaje. Obecność różnych dodatków wpływa na właściwości sporządzanego ciasta powodując, iż ciasto przejawia silną aktywność biologiczną (fermentacja), a w konsekwencji zmienność własności fizycznych w czasie.

We właściwościach technologicznych wytwarzanego ciasta występują – szczególnie istotne – właściwości reologiczne, ujawniające się zwłaszcza w trakcie sporządzania ciasta (miesienie) oraz obróbki mechanicznej w procesie dzielenia i formowania kęsów ciasta. Podczas miesienia oraz dzielenia i formowania właściwości reologiczne ciasta znacząco wpływają na przebieg tych procesów, wpływając również na efektywność działania maszyn i urządzeń realizujących te operacje technologiczne, zwłaszcza w aspekcie doboru odpowiednich parametrów roboczych mechanizmów maszyn. Dotyczy to szczególnie obrotów, prędkości, czasu trwania operacji oraz mocy niezbędnej do napędu mechanizmów – ciasto powinno posiadać optymalne właściwości technologiczne określane jako tzw. maszynolabilność ciasta.

Podstawową operacją technologiczną kształtującą właściwości ciasta jest jego miesienie, podczas którego wyróżnić można dwie fazy:

- wymieszanie składników w celu otrzymania jednorodnej masy,
- plastyfikacja ciasta; rozwój mechaniczno-strukturalny ciasta.

W trakcie drugiej fazy miesienia zachodzą procesy fizyczne, biochemiczne, mikrobiologiczne. Surowce roślinne (wśród nich mąka), zawierają substancje w postaci złożonych układów koloidalnych – tzw. koloidy [2, 24, 25].

Oddziaływanie wody na koloidy (hydratacja) zawarte w mące oraz oddziaływanie mechaniczne prowadzi do utworzenia złożonego, wieloskładnikowego układu jakim jest ciasto. W trakcie miesienia powstają w cieście napęczniałe, nierozpuszczalne w wodzie białka, które w cieście pszennym tworzą gluten – przestrzenną, gąbczastą strukturę siatkową, stanowiącą tzw. szkielet ciasta. Szkielet ten decyduje o właściwościach reologicznych ciasta, zwłaszcza sprężystości i plastyczności. Podczas miesienia rośnie konsystencja ciasta, aż do osiągnięcia maksimum (na ogół stałość maksymalnej konsystencji trwa do kilkunastu minut – zależnie od jakości mąki), przy którym występują najlepsze właściwości technologiczne (przetwórcze), w tym reologiczne. W przypadku kontynuowania miesienia (po osiągnięciu maksimum konsystencji) następuje pogorszenie właściwości technologicznych oraz reologicznych (np. spadek lepkości na skutek niszczenia struktur glutenowych).

Spśród właściwości fizyczno-biologicznych ciasta, właściwości reologiczne mają zasadniczy wpływ na kształtowanie się technologicznych wskaźników jakościowych pieczywa. Od właściwości mechaniczno – strukturalnych ciasta zależą, np. zdolność do zatrzymywania gazów i napięcie powierzchniowe – własności decydujące o objętości, porowatości oraz kształcie i własnościach miększu pieczywa.

Właściwości ciasta wykazują silną zależność swoich wartości od czasu, związanej z aktywnością biologiczną. Dlatego też, czas trwania technologicznej operacji obróbki całej przygotowanej masy ciasta powinien być krótki (niekiedy nawet kilkanaście minut). Między niektórymi operacjami wprowadzane są przerwy na tzw. odpoczynek ciasta – w czasie których ciasto odtwarza (relaksuje) swoje właściwości technologiczne, zmienione obróbką mechaniczną. Zespół technologicznych przemian doprowadzających ciasto w wyniku miesienia i fermentacji do optymalnego dla dalszej obróbki stanu (dzielenie, formowanie, rozrost, wypiek), określaną jest jako dojrzewanie ciasta [2, 42, 47].

Obróbka mechaniczna formowanego ciasta wywołuje jego przepływ, który posiada charakter przepływu płynu nienewtonowskiego, determinując sposób ujęcia opisu zachowania się ciasta w procesie jego formowania. Rzeczywiste materiały, w tym ciasto, zachowują się w procesie obróbki jak ciała (ośrodki) o złożonych właściwościach reologicznych, wykazując wszystkie elementarne właściwości reologiczne (lepkość, plastyczność, sprężystość), zwykle zależne od czasu. Pod wpływem sił (obciążeń) wymuszających formowanie ciasta (transformacja kształtu, przemieszczanie, przepływ) występują odpowiednie odkształcenia – sprężyste, plastyczne i lepkie, na odkształcenia te ciało reaguje siłami wewnętrznymi. Odkształcenia występując jednocześnie nakładają się na siebie, dając złożony obraz zachowania się ciasta w trakcie jego obróbki formującej, powodującej transformację kształtu kęsa ciasta.

Teoretyczne podstawy, dotyczące zależności pomiędzy wielkościami opisującymi właściwości reologiczne oraz zachowanie się ciasta podczas jego transformacji i przepływu w trakcie formowania, ujęto w Aneksie 1.

#### 4.2. ZWIĄZKI MIĘDZY NAPRĘŻENIAMI A ODKSZTAŁCENIAMI

Opis mechanicznego zachowania się ciała poddanego działaniu sił i naprężeń (wielkości dynamiczne), skutkiem których są jego odkształcenia, wykorzystuje podstawowe zasady zachowania mechaniki (masy, pędu, momentu pędu, energii). Zasady te pozwalają na sformułowanie układu równań opisujących zachowanie się ciał – niestety liczba występujących w równaniach zmiennych jest większa od ilości równań. Ustalenie związków między naprężeniami a odkształceniami w postaci określonych zależności modelujących właściwości transformowanych materiałów, pozwala na domknięcie tego układu równań, a następnie na ewentualne ich rozwiązanie.

Związki między naprężeniami a odkształceniami mogą być opisywane zależnościami funkcyjnymi poszczególnych wielkości fizycznych wpływających na zachowanie się ośrodka, najogólniej zależności te ujmuje reologiczne równanie stanu w postaci:

$$R(\mathbf{S}, \dot{\mathbf{S}}, \mathbf{D}, \dot{\mathbf{D}}, t, \theta) = 0, \quad (4.1)$$

gdzie:

- t – czas,
- $\mathbf{S}$  – tensor naprężeń,
- $\dot{\mathbf{S}}$  – tensor prędkości zmian naprężeń,
- $\mathbf{D}$  – tensor deformacji,
- $\dot{\mathbf{D}}$  – tensor prędkości deformacji,
- $\theta$  – temperatura.

Bardziej ściśle zależności funkcyjne argumentów równania stanu przedstawiają równania konstytutywne modelujące matematycznie właściwości reologiczne. Równania konstytutywne definiując idealne modelowo materiały, opisują właściwości fizyczne, dotyczące zależności wiążących wielkości kinematyczne, dynamiczne i czasami termiczne. Równania te opisują również sposób reagowania ośrodków na oddziaływania zewnętrzne (zwykle obciążenia mechaniczne). Formułując równanie konstytutywne należy spełnić postulat odzwierciedlenia przez wielkości wiążące (mechaniczne), właściwości materiału rzeczywistego w wystarczająco dobrym stopniu, a w szczególności [22, 39, 64]:

- równania konstytutywne muszą być niesprzeczne z podstawowymi zasadami zachowania wielkości fizycznych,

- ze względu na niezmienniczy charakter własności fizycznych, równania konstytutywne muszą mieć formę tensorową (wiążącą wielkości tensorowe w czasie i przestrzeni).

W ogólnym przypadku równania konstytutywne mogą mieć dowolną postać, wiażącą wielkości dynamiczne i kinematyczne, uwzględniając ograniczenia wynikające z postulatów fizyki oraz wymagań dotyczących budowy zależności konstytutywnych.

### 4.3. ELEMENTY REOLOGII MATERIAŁÓW NIENEWTONOWSKICH

W reologii materiałów nienewtonowskich do opisu ich właściwości stosowane są dwa sposoby ujęcia zagadnienia – ujęcie teoretyczne i eksperymentalne. Ujęcie teoretyczne dotyczące zachowań i opisu ośrodków nienewtonowskich (nie podlegających opisowi prawem Newtona, ciał o własnościach lepkoplastyczno-sprężystych) bazuje na pojęciu „historii” deformacji płynu (a ściślej na historii tensorów deformacji i prędkości deformacji w opisie historii przebiegu procesu deformacji, dla którego równoważne są odpowiednie tensory dla bardzo małych gradientów przemieszczeń) i na występowaniu tzw. efektów nieliniowych (Barusa i Weissenberga), relaksacji naprężeń i powrotu sprężystego w płynącym ośrodku oraz także na możliwości występowania przepływów wtórnych [22, 33, 64]. Bazowanie na pojęciu kinematycznej historii ośrodka, określanej przez historię jego ruchu, umożliwia określenie naprężeń działających w płynącym ośrodku w rozpatrywanej chwili czasu i jest konsekwencją stosowania zasady determinizmu dla ośrodków ciągłych.

W ujęciu teoretycznym reologii, płyny nienewtonowskie podzielić można na dwie grupy [63]:

- płyny lepkosprężyste (lepkoplastyczno-sprężyste), dla których występuje symetria tensora naprężeń (występowanie naprężeń normalnych w przepływie ścinającym), bez tensora naprężeń momentowych,
- płyny z mikrostrukturą, bez symetrii tensora naprężeń (tensor asymetryczny), z tensorami naprężeń momentowych (z momentami sił masowych).

Modele opisujące właściwości płynu utworzone w ramach teoretycznego ujęcia posiadają zwykle postać trójwymiarową umożliwiającą formułowanie równań ruchu płynu w przestrzeni zjawiska. Sformułowano wiele równań konstytutywnych modelujących właściwości rozważanych płynów, cechuje je jednak zwykle wieloparametrowość i złożoność formuł, ograniczając tym samym możliwość ich wykorzystania, zwłaszcza praktycznego w zastosowaniach technicznych.

W rozważaniach dynamicznych, których celem jest poznanie przyczyn ruchu ciała (sposobu wywoływania ruchu przez działające siły), w ogólnym przypadku uwzględnia się oddziaływania od sił wewnętrznych (między cząsteczkami ciała) i zewnętrznych (oddziaływanie między cząsteczkami różnych ciał oraz polami sił), w szczególności są to [34, 39, 45, 64]:

- siły kontaktowe; między cząsteczkami poruszającego się ośrodka ciągłego (oddziaływania bliskiego zasięgu),
- siły kontaktowe powierzchniowe; na powierzchni ośrodka, pochodzące od innych zewnętrznych ciał,
- siły masowe w ośrodku; wskutek oddziaływania otoczenia oraz tzw. oddziaływań dalekiego zasięgu (pola grawitacyjne, elektromagnetyczne i inne).

W wielu rozważanych zagadnieniach przepływów dynamicznych nie uwzględnia się niektórych oddziaływań, co upraszcza równania opisujące przepływ płynu. Dotyczy to zwłaszcza działania naprężeń momentowych, momentów masowych, sił dalszego zasięgu (ruch płynu nie wpływa na intensywność oddziaływań zewnętrznych o źródłach swego istnienia daleko poza płynem). W klasycznej mechanice ośrodków ciągłych [35, 39, 45, 64], która jest teorią bezmomentową pomija się działanie momentów masowych (oraz ich istnienie) i powierzchniowych (momenty te uwzględnia tzw. teoria momentowa Cosseratów).

Opis właściwości ośrodków wykazujących właściwości reologiczne klasycznymi modelami ośrodków ciągłych, w wielu przypadkach jest niewystarczający, gdyż dla materiałów reologicznych (wśród nich ciasta) charakterystyczne jest występowanie efektów czasowych, tj. zależności swoich właściwości od czasu, a ściślej od historii ruchu.

Formułując równania konstytutywne opisujące właściwości reologiczne materiałów nienewtonowskich, należy uwzględnić ograniczenia dotyczące tzw. ogólnych zasad konstytutywnych będących konsekwencją matematycznego opisu teorii ośrodków ciągłych. Są to następujące zasady [33, 39, 64]:

- obiektywności materialnej, niezależności od układu odniesienia; zależność między naprężeniem a ruchem ośrodka powinna być niezwiązana z wyborem układu odniesienia, sztywne obroty i przesunięcia nie powinny wpływać na naprężenia,
- determinizmu (oznaczoności) naprężenia; stan naprężenia w rozpatrywanym punkcie ośrodka jest zdeterminowany całą historią odkształcenia w dowolnie małym otoczeniu punktu ośrodka,
- lokalnego działania, akcji lokalnej (zasada sąsiedztwa); określając naprężenie w rozpatrywanej cząstce – punkcie ośrodka, ruch na zewnątrz dowolnie małego otoczenia cząstki – punktu, może zostać pominięty,
- niezmienniczości (inwariancji) względem: układu współrzędnych, układu jednostek, konfiguracji odniesienia; zapis równań dotyczących relacji między wielkościami fizycznymi w formie tensorowej – zależności między tensorami wielkości fizycznych nie ulegają zmianie chociaż składowe tensorów mogą się zmieniać,
- zanikającej pamięci; nie jest znana cała historia ruchu ośrodka, zatem konieczne jest ograniczenie, np. w postaci informacji dotyczących ostatniego okresu historii (potwierzonego eksperymentalnie) – przeszłość bliższa minionych odkształceń bardziej wpływa na aktualny stan naprężenia niż przeszłość dalsza (dawniejsza).

Teoria opisująca determinizm stanu naprężenia materiałów z zanikającą pamięcią wykazuje, że występuje istotna różnica między pamięcią ciał stałych a pamięcią płynów. Ciała stałe posiadają kształt odniesienia, tzw. preferowany, od którego ciało się odkształca, wykazując „odchylenie” od tego kształtu. Ciała doskonale sprężyste mają stałą i niezmienną pamięć kształtu preferowanego [22, 39]. Płyny nie posiadają kształtu preferowanego, dlatego zwykle dla płynów konfiguracją odniesienia jest konfiguracja w momencie rozważań – aktualna. Można zatem przyjąć, że ciała sprężyste posiadają „idealną” pamięć, natomiast płyny doskonale lepkie mają „idealny” brak pamięci. Materiały rzeczywiste z zanikającą pamięcią znajdują się w tak określonych granicach „występowania” pamięci.

Najprostszymi ośrodkami reologicznymi są ciała, których własności zależne od czasu mogą być opisywane modelami liniowymi (analogicznie do jednowymiarowych modeli liniowych). Równania konstytutywne dla ciał liniowych wiążą ze sobą podstawowe wielkości (sprężystość, plastyczność, lepkość) oraz pochodne czasowe tych wielkości w sposób liniowy, wykorzystując superpozycję odpowiednich wielkości. Modele tak utworzone, łączą w sobie klasyczne modele ośrodków, np. ośrodka lepko-sprężystego (modele Maxwella czy Kelwina-Voigta) lub ośrodka lepko-plastyczno-sprężystego. Modele wieloparametrowe zwykle z większym przybliżeniem odzwierciedlają właściwości reologiczne niektórych rzeczywistych materiałów.

#### 4.4. UOGÓLNIENIA PRAWA NEWTONA

W ujęciu eksperymentalnym dotyczącym reologii materiałów nienewtonowskich, dla otrzymanych rezultatów badań poszukuje się odpowiednich formuł opisujących wyniki badań. W efekcie powstało wiele wyrażań modelujących właściwości badanych płynów całkowicie lub częściowo empirycznych. Te empiryczne modele posiadają zwykle prostą budowę oraz niewielką liczbę parametrów, dlatego też są szeroko wykorzystywane, mimo ograniczeń dla niektórych z nich polegających na niemożności zbudowania trójwymiarowych równań. W wielu zastosowaniach praktycznych bardzo przydatne może być korzystanie z tzw. uogólnionego prawa Newtona. Uogólnienie to pozwala w prosty i dogodny sposób formułować zależności modelujące właściwości reologiczne różnych rzeczywistych materiałów, dla których można przyjąć, iż związki między wielkościami opisującymi ruch mało zależą od historii tego ruchu (względnie występują trudności w uwzględnieniu historii ruchu). Uogólnienie prawa Newtona pozwala na linearyzację zależności podstawowych wielkości reologicznych dla materiałów nienewtonowskich, dla których zależności między rzeczywistymi wielkościami reologicznymi są nieliniowe. Uogólnienie to spełnia istotną rolę w formułowaniu wyrażań modelujących właściwości reologiczne różnych materiałów nienewtonowskich, szczególnie modeli określonych empirycznie. Następnie możliwe jest nadanie modelom matematycznym różnych płynów postaci formalnie podobnej, przydatnej w formułowaniu rów-

nań opisujących przepływ materiałów o właściwościach reologicznych, zwłaszcza wtedy, gdy w praktycznym ujęciu zagadnienia decydującą właściwością opisującą materiał (płyn) jest jego lepkość. Uogólnienie prawa Newtona zaproponował Stokes, zakładając liniową proporcjonalność naprężeń do gradientu prędkości deformacji za pośrednictwem współczynnika lepkości płynu  $\eta$  (tzw. lepkość dynamiczna). Uogólnienie to zostało dokonane dla przypadku dowolnego ruchu płynu opisanego tensorem prędkości deformacji (tensor wielkości kinematycznych) oraz tensorem naprężeń (tensor wielkości dynamicznych). Podstawą uogólnienia jest liniowa zależność składowych tensora naprężenia od składowych tensora prędkości deformacji, co prowadzi do sześciu równań z 36 współczynnikami. Podkreślić należy, że równanie modelujące właściwości reologiczne płynu pozwala na domknięcie równań opisujących rozważany przepływ – często nieliniowy i na ogół dyssypatywny (korzystanie dla stanów równowagi z równań termodynamicznych dla zjawisk nieliniowych i ze stratą pędu, jest przy obecnym stanie wiedzy tej nauki raczej nierealne) [33, 39, 45]. W celu wyznaczenia tych współczynników Stokes wprowadził dodatkowe założenia upraszczające, postulujące:

- izotropowość ośrodka (płynu),
- niezależność od układu odniesienia (zasada materialnej obiektywności),
- tensor naprężeń wyraża ciśnienie statyczne jeżeli płyn nie jest w ruchu.

W efekcie tych założeń liczba współczynników zmniejszyła się do dwóch. Stokes otrzymał dla płynu ściśliwego następującą zależność, jako uogólnione prawo Newtona [45]:

$$\mathbf{S} = 2 \eta \mathbf{D} - \left[ p + \frac{2}{3} (\eta - \lambda) \operatorname{div} \mathbf{v} \right] \mathbf{I}, \quad (4.2)$$

gdzie:

- $\mathbf{S}$  – tensor naprężeń,
- $\mathbf{D}$  – tensor prędkości deformacji,
- $\eta$  – lepkość dynamiczna (postaciowa),
- $\lambda$  – lepkość dodatkowa,
- $\mathbf{v}$  – wektor prędkości płynu,
- $p$  – ciśnienie statyczne płynu.

We współrzędnych kartezjańskich w zapisie wskaźnikowym, zależność powyższa będzie:

$$S_{ij} = \sigma_{ij} = -p \delta_{ij} + 2\eta \dot{\epsilon}_{ij} - \frac{2}{3} (\eta - \lambda) v_{i,i} \delta_{ij} \quad (4.3)$$

Dla materiałów, które mogą być opisane prawem Newtona (np. w przypadku klasycznych modeli ośrodków ciągłych, dla ośrodków ciekłych (A4.57-A4.62) lepkość jest stała; dla nieściśliwego płynu lepkiego (cieczy) z zależności



(A4.61) lub (A4.62), lepkość może być w układzie jednowymiarowym określona formułą:

$$\eta = \frac{\tau}{\dot{\varepsilon}} = \text{const} , \quad (4.4)$$

w przestrzennym układzie kartezjańskim, w zapisie wskaźnikowym, będzie:

$$\eta_s = \frac{\tau_{ij}}{2\dot{\varepsilon}_{ij}} = \text{const} , \quad (4.5)$$

gdzie:

$\eta_s$  – lepkość charakterystyczna dla modelu płynu.

Zasadnicze znaczenie w funkcjonowaniu uogólnionego prawa Newtona, posiada lepkość (zmieniająca się dla wielu materiałów o złożonych właściwościach reologicznych), mimo zmienności uważana jako stała – czyli traktowana jako parametr [12, 15, 18, 31, 32]. Ta uogólniona lepkość, charakteryzująca własności materiału, nazywana jest efektywną lub zastępczą, pozorną czy strukturalną. Odnosząc tę wielkość, tj. lepkość efektywną do lepkości newtonowskiej, można określić zależność na lepkość efektywną (zespoloną) w zapisie jednowymiarowym w postaci:

$$\eta_e = \frac{\tau}{\dot{\varepsilon}} \neq \text{const} , \quad (4.6)$$

W układzie trójwymiarowym lepkość uogólniona  $\Gamma$  może być przedstawiona w postaci funkcyjnej zależności – funkcjonał lepkości uogólnionej:

$$\Gamma = f(A, \eta_e) . \quad (4.7)$$

Analogicznie do formuły (4.6) parametr lepkości  $\Gamma$  – lepkość uogólniona, może przyjąć następującą postać:

$$\Gamma = \frac{\tau_e}{A} , \quad (4.8)$$

gdzie:

$\tau_e$  – naprężenie efektywne (charakterystyczne dla płynu w układzie trójwymiarowym, transponujące postać jednowymiarową do postaci trójwymiarowej).

W układzie trójwymiarowym dla naprężeń  $\tau_e$  oraz  $\tau_{ij}$  zachodzi następująca ogólna zależność funkcyjna:

$$\tau_e = f(\tau_{ij}) , \quad (4.9)$$

którą dalej można określić postacią:

$$\tau_e = \varphi(\eta_s, A) \quad (4.10)$$

oraz

$$\tau_{ij} = \varphi(\eta_s, \dot{\epsilon}_{ij}). \quad (4.11)$$

Charakter zależności funkcyjnych  $\varphi$  w obu przypadkach jest jednakowy co prowadzi do zastępowania argumentu  $\dot{\epsilon}_{ij}$  przez  $A$  [12, 15, 19]. Wielkość  $A$  (funkcjonal), będąca argumentem w zależności (4.8) parametryzującej lepkość uogólnioną  $\Gamma$  jest tzw. natężeniem prędkości deformacji (moduł dewiatora prędkości deformacji), określonym zależnością:

$$A = |2\dot{\epsilon}_{ik} \cdot \dot{\epsilon}_{ki}|^{1/2}. \quad (4.12)$$

Po wykonaniu niezbędnych działań otrzymuje się:

$$A = [2(\dot{\epsilon}_{11}^2 + \dot{\epsilon}_{22}^2 + \dot{\epsilon}_{33}^2 + 2\dot{\epsilon}_{12}^2 + 2\dot{\epsilon}_{23}^2 + 2\dot{\epsilon}_{31}^2)]^{1/2}. \quad (4.13)$$

Natężenie prędkości deformacji  $A$  jest niejako substytutem prędkości deformacji  $\dot{\epsilon}$  w opisie związków między naprężeniami a prędkością deformacji.

Złożoną zależność wartości lepkości od wielkości uczestniczących w odkształceniu materiału oraz od właściwości materiału, w wielu przypadkach można traktować parametrycznie, akceptując to przybliżenie. Z drugiej strony, przy takim ujęciu lepkości efektywnej możliwe jest jej wyznaczenie doświadczalne jako złożonej własności materiału (w podobny sposób oraz podobnymi metodami jak wyznaczenie lepkości newtonowskiej).

Dla płynu nieściśliwego, tj.  $\text{tr}\mathbf{D} = 0$  oraz dla  $\lambda = 0$ , wyrażenie (4.3) dla uogólnienia newtonowskiego, odpowiednio do (A4.61) i (A4.62) oraz (4.5) przyjmie postać:

$$\sigma_{ij} = -p\delta_{ij} + 2\eta_s \dot{\epsilon}_{ij} \quad (4.14)$$

lub

$$\sigma_{ij} = -p\delta_{ij} + \tau_{ij}. \quad (4.15)$$

Efektywne naprężenie ścinające w zależności (4.8) opisuje zależność:

$$\tau_e = \Gamma A. \quad (4.16)$$

Zależność powyższa na naprężenie „efektywne” w tak opisanym materiale, liniowo zależy od złożonych (sumarycznych) własności reologicznych, opisanych funkcjonalem lepkości uogólnionej  $\Gamma$  oraz od prędkości deformacji [15, 19]. Naprężenie ścinające w zależności (4.15) określone jest następująco:

$$\tau_{ij} = 2\Gamma \dot{\epsilon}_{ij} \quad (4.17)$$

Wykorzystanie uogólnienia newtonowskiego w praktyce polega na wyznaczeniu dla stosownego modelu płynu lepkości uogólnionej, jak dla (4.6) lub (4.8) i następnie na określeniu wyrażenia na naprężenie „efektywne” korzystając odpowiednio z postaci jednowymiarowej zależności modelowej płynu.

Rzeczywiste materiały w procesie swojego przepływu wykazują występowanie nie tylko naprężeń ścinających oraz naprężeń normalnych (np. w postaci efektów Weissenberga czy Barusa) ale także efektów pamięci związanych z historią przebiegu deformacji [22, 64].

#### 4.4.1. Modele typu potęgowego

Modele typu potęgowego należące do modeli empirycznych są dość powszechnie wykorzystywane w badaniach właściwości reologicznych różnych materiałów, głównie ze względu na swoje zalety dotyczące prostej budowy oraz możliwość tworzenia postaci trójwymiarowej równań. Modele te stanowią liczną i dość popularną grupę [12, 15, 22, 31, 32, 33], znajdującą również zastosowanie w opisie właściwości materiałów smarnych i ich przepływu [59, 60] oraz materiałów biologicznych w stawach kończyn ludzkich [61]. Modele typu potęgowego o ogólnym związku funkcyjnym między naprężeniami ścinającymi a prędkością odkształceń płynu opisuje zależność:

$$\tau = f(\tau_0^N, \dot{\epsilon}^M). \quad (4.18)$$

Najbardziej złożonym modelem jest tzw. uogólniony model Szulmana zaproponowany przez Kembłowskiego w formie [12, 32]:

$$(\sigma + \theta)^{\frac{1}{n}} = \tau_0^{\frac{1}{n}} + [\eta_k (\dot{\epsilon} + \Phi)]^{\frac{1}{m}}. \quad (4.19)$$

Z modelu tego przez stosowne przyjęcie materiałowych wielkości funkcyjnych  $\theta$ ,  $\Phi$  oraz wykładników potęgowych  $m$ ,  $n$  i naprężenia początkowego  $\tau_0$ , można wyprowadzić pozostałe modele potęgowe. Niektóre modele wyprowadzone z powyższej zależności (np. dla  $\theta \neq 0$  i  $\Phi = 0$  oraz  $\theta = 0$  i  $\Phi \neq 0$  lub  $\tau_0 = 0$  ale  $\theta \neq 0$  i  $\Phi \neq 0$ ) nie posiadają swojej nazwy własnej. Modelem z którego powstał model (4.19) oraz z którego wyprowadzono modele prostsze jest model Szulmana w postaci:

$$\sigma^{\frac{1}{n}} = \tau_0^{\frac{1}{n}} + (\eta_s \dot{\epsilon})^{\frac{1}{m}}. \quad (4.20)$$

Model ten posiada umiarkowaną ilość współczynników materiałowych i dość prostą budowę strukturalną, co ułatwia posługiwanie się nim. Z modelu Szulmana można wyprowadzić bezpośrednio wiele modeli pochodnych (od modelu Newtona, poprzez model Binghama oraz Herschela-Bulkleya do modelu

Cassona), przyjmując odpowiednie wartości wykładników  $m$  i  $n$  oraz naprężeń początkowych  $\tau_0$  [12].

Uogólnienie Stokesa dla płynu nienewtonowskiego, w odniesieniu do modelu Szulmana w układzie trójwymiarowym, po wykorzystaniu zależności (4.5-4.17), będzie:

– postać tensorowa modelu Szulmana:

$$\sigma_{ij}^{\frac{1}{n}} = |\tau_0 \delta_{ij}|^{\frac{1}{n}} + \tau_{ij}^{\frac{1}{m}} = |\tau_0 \delta_{ij}|^{\frac{1}{n}} + 2(\eta_s \dot{\epsilon}_{ij})^{\frac{1}{m}}, \quad (4.21)$$

– funkcjał lepkości uogólnionej dla modelu Szulmana:

$$\Gamma_s = \frac{\tau_e(\mathbf{A})}{\mathbf{A}} = \left[ \tau_0^{\frac{1}{n}} + (\eta_s \mathbf{A}_s)^{\frac{1}{m}} \right]^n \mathbf{A}_s^{-1}, \quad (4.22)$$

– naprężenie ścinające dla modelu Szulmana, wg (4.17):

$$\tau_{ij} = 2\Gamma_s \dot{\epsilon}_{ij}, \quad (4.23)$$

– naprężenie uogólnione dla modelu Szulmana, wg (4.15):

$$\sigma_{ij} = |p\delta_{ij}| + 2\Gamma_s \dot{\epsilon}_{ij} = |p\delta_{ij}| + 2 \left[ \tau_0^{\frac{1}{n}} + (\eta_s \mathbf{A}_s)^{\frac{1}{m}} \right]^n \mathbf{A}_s^{-1} \dot{\epsilon}_{ij}. \quad (4.24)$$

Modele typu potęgowego dość dobrze, zwłaszcza w tzw. pierwszym przybliżeniu (dla niektórych materiałów) opisują właściwości wielu rzeczywistych, płynących materiałów. W wielu przypadkach można modele te wykorzystać dla opisu zależności między naprężeniami a prędkością deformacji w uogólnieniu prawa Newtona dokonany przez Stokesa [12, 15].

#### 4.5. BADANIA EKSPERYMENTALNE

Badania eksperymentalne reologicznych właściwości ciasta pozwalają na wyznaczenie podstawowych wielkości opisujących te właściwości wpływających na zachowanie się ciasta podczas przetwarzania. Wielkości te mogą być wykorzystane do określenia wyrażeń modelujących jego właściwości. Znajomość modelu matematycznego umożliwi powiązanie odkształceń i prędkości deformacji z naprężeniami występującymi w materiale, przez wyznaczenie odpowiednich zależności opisujących transformacje kęsa ciasta oraz przepływu ciasta podczas formowania.

Celem badań jest wyznaczenie lepkości strukturalnej (pozornej) ciasta, jako wielkości zawierającej w sobie „wypadkową” właściwości reologicznych ciasta (wykorzystując uogólnienie prawa Newtona) i określenie jej zmienności w czasie porównywalnym z czasem trwania operacji formowania kęsów. Na ogół, ze

względu na możliwość utraty przez ciasto przydatności technologicznej, dzielenie i formowanie kęsów powinno trwać nie dłużej jak 20 do 30 minut od zakończenia wstępnej fermentacji ciasta. W efekcie maszyny realizujące te operacje powinny posiadać odpowiednio dużą wydajność [3, 11, 34, 42, 47].

Wielkości fizyczne poddawane pomiarom mogą być podstawowe – zmienne niezależne, np. obciążenie, czas opadania, aktualny czas pomiaru lub mogą być pochodnymi wielkości podstawowych – zmienne zależne, które mogą być wyrażone odpowiednimi definicyjnymi zależnościami matematycznymi, np. lepkością strukturalną, prędkością odkształceń, naprężeniem stycznym. Z powyższych określeń wynikają opisy miar tych wielkości fizycznych – zmiennych; wielkości podstawowe mierzone są bezpośrednio (wielkości bezpośrednie) przyrządami pomiarowymi. Miarę wielkości pochodnych wyznacza się pośrednio (wielkości pośrednie) poprzez pomiar wielkości bezpośrednich reprezentowanych w definicyjnej zależności matematycznej. Miary zmiennych zależnych są funkcjami miar zmiennych niezależnych.

#### 4.5.1. Wielkości opisujące właściwości ciasta

Wyznaczane wielkości reologiczne (lepkość strukturalna, naprężenie ścinające, prędkość odkształceń), będące argumentami równań konstytutywnych, mają charakter zmiennych zależnych. Zmienne niezależne są wielkościami fizycznymi określanymi poprzez bezpośrednie pomiary (wielkości bezpośrednie) odpowiednimi przyrządami pomiarowymi. Wyznaczanie lepkości strukturalnej, jako wielkości pochodnej (zmienna zależna) od zmiennych niezależnych, odbywa się za pomocą pomiaru wielkości podstawowych (zmienne niezależne), np. czas opadania kulki w cieście, obciążenie.

**Lepkość strukturalna ciasta** (zmienna zależna) jest podstawową wielkością fizyczną opisującą właściwości ciasta – wyznaczaną przez pomiary. Pomiar lepkości strukturalnej ciasta jest pomiarem wielkości pośredniej, której argumentami (zmiennymi niezależnymi) są:

- obciążenie ( $M$ ), zmienna istotna kontrolowana,
- stała próbówki ( $K$ ), zmienna istotna niekontrolowana,
- czas opadania ( $t_1$ ,  $t_2$ ,  $t_s$ ) trzpienia z kulką, zmienna istotna kontrolowana:
  - $t_1$  – połówkowy czas opadania na połowie drogi tj. 15 mm; s,
  - $t_2$  – całkowity czas opadania na drodze 30 mm; s,
  - $t_s$  – średni czas opadania na drodze 30 mm; s,
  - średnia arytmetyczna z  $2t_1$  oraz  $t_2$ ,
- czas ( $t_p$ ), rozpoczęcia pomiaru (bieżący); s, zmienna istotna kontrolowana.

Lepkość strukturalną [13, 66] wynikającą z pomiarów reowiskozymetrem Hoepplera wyznacza się z zależności (określonej w instrukcji obsługi przyrządu), w postaci:

$$\eta = 10^{-3} M \cdot t_s \cdot K ; \quad \text{Pa s}, \quad (4.25)$$

gdzie:

- M – obciążenie na szalce przyrządu; cechowanie w  $G \cdot cm^{-2}$ ,
- K – stała próbówki ( $K = 100$ );  $Pa \cdot cm^2 \cdot G^{-1}$ ,
- $\eta$  – lepkość strukturalna (pozorna, zastępcza); Pa s.

Wielkość obciążenia M jest zmienną niezależną istotną, o stałej dokładności. Zmienna ta może być traktowana parametrycznie. Wszystkie pomiary próbek ciasta przeprowadzono w próbówce o stałej  $K = 100$ , odpowiedniej dla badanego materiału. Wpływ stałej K na wyznaczaną wartość zmiennej zależnej, również potraktowano parametrycznie. Postać matematyczna powyższej zależności potwierdza, że decydujące znaczenie posiada wyznaczanie wartości czasu opadania trzpienia pomiarowego z kulką w próbówce z ciastem. Prawdliwość i dokładność pomiarów czasu opadania, ma zasadniczy wpływ na jakość przeprowadzanych badań właściwości ciasta.

**Naprężenie ścinające (lepkie)** (zmienna zależna), wyznaczone ze zmierzonych niezależnych określa wyrażenie (z instrukcji obsługi) w postaci:

$$\tau = 0,0981 M = 9,81 \cdot 10^{-2} M; \text{ kPa.} \quad (4.26)$$

Dokładność wyznaczenia wartości naprężenia powiązana jest wprost z dokładnością określoną dla obciążenia M.

**Prędkość ścinania** (zmienna zależna), wyznaczyć można z określonych powyżej wielkości, wykorzystując uogólnione prawo Newtona, otrzymując wyrażenie:

$$\dot{\epsilon} = \frac{\tau}{\eta} \cdot 10^3; \text{ s}^{-1}, \quad (4.27)$$

Określone wielkości reologiczne są wielkościami podstawowymi w formułowaniu równań konstytutywnych.

#### 4.5.2. Podstawowe przyrządy i sprzęt pomiarowy

Dla przeprowadzenia badań właściwości reologicznych ciasta (lepkość strukturalna) wykorzystano następujące urządzenia:

1. Reowiskozymetr Hoesplera [66], (Rheo-Viskometer nach Hoespler 202G), (rys. 4.1 i fot. 4.1):

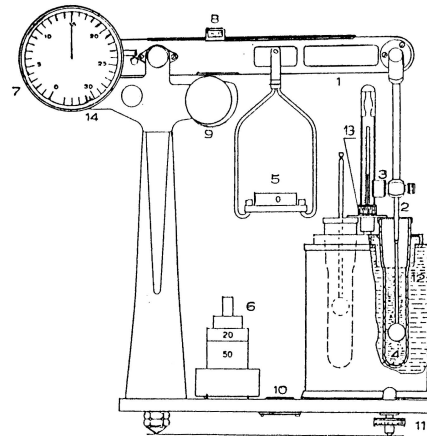
- zakres pomiaru ( $4 - 4 \cdot 10^6 \text{ mPa} \cdot \text{s}$ );
- dokładność pomiaru do  $\pm 2\%$  dla płynu newtonowskiego.

Wyposażenie:

- komplet próbówek szklanych, 5 szt., poj. 16-25 ml, (stała  $K = 0,01; 0,1; 1; 10; 100$ ),
- dwa trzpienie pomiarowe z kulkami (dla  $K = 0,01; 0,1$  oraz  $K = 1; 10; 100$ ),
- termometr rtęciowy  $0 - 100^\circ\text{C}$ , podz. el.  $0,5^\circ\text{C}$ ,
- komplet obciążników, 5 szt., (10;  $2 \times 20$ ; 50; 100; wycechowanych w  $G \cdot cm^{-2}$ ), masa obciążników wynosi odpowiednio: 40;  $2 \times 80$ ; 200; 400; g.

Do badań lepkości strukturalnej wykorzystano:

- próbkę o stałej  $K = 100$ , (największą),
- trzpień pomiarowy odpowiadający w/w próbce (2 paski),
- 2 komplety obciążników.



Rys. 4.1. Reowiskozymetr Hoepplera [66]:

1 – ramię dźwigni pomiarowej, 2 – trzpień pomiarowy z kulą, 3 – zacisk mocujący trzpień z popychaczem, 4 – próbówka pomiarowa, 5 – szalka wagi obciążającej ramię dźwigni (1), 6 – komplet obciążników, 7 – drogomierz trzpienia pomiarowego (czujnik mikrometryczny), 8 – suwak kompensacji gęstości mierzonego płynu, 9 – pokrętło włączania oraz wyłączania (blokady) ruchu ramienia (1), 10 – wskaźnik poziomowania przyrządu, 11 – pokrętło regulacji poziomowania, 12 – ciecz (woda) w pojemniku termostatu, 13 – pokrętło mocowania próbek w pojemniku termostatu, 14 – pierścień ustawiania podziałki drogomierza



Fot. 4.1. Stanowisko do badania lepkości ciasta, reowiskozymetr Hoepplera z termostatem laboratoryjnym

2. Termostat laboratoryjny.
3. Komora klimatyzacyjna; 3 prędkości podgrzewania, regulacja temperatury i wilgotności, termometr nastawny, dokładność 0,1°C, higrometr nastawny, dokładność 0,1% [50].
4. Zestaw do pomiaru wodochłonności SZ (konsystometr) z termostatem o stałej nastawie 30°C, fot. 4.2, (prod. ZBPP w Bydgoszczy) [50].
5. Miesiarka MML-25 fot. 3.; pojemność dzieży 25-50 g, dwa miesidła przeciwbieżne (90 i 120 ob.·min<sup>-1</sup>) [50].
6. Biureta laboratoryjna z pojemnikiem na wodę (0,25 l).
7. Zegar laboratoryjny z sygnalizacją dźwiękowo-światłą.
8. Waga elektroniczna, typ WPE 150, kl. II, dokładność pomiaru 0,05 g, dokładność odczytu 0,005 g, prod. RADWAG.
9. Stoper.
10. Termohigrometr cyfrowy, typ LB-725, dokładność odczytu 0,1°C oraz 0,1%, prod. LAB-EL.
11. Higrometr ścienny, dokładność odczytu 0,5%.
12. Termometr laboratoryjny rtęciowy; zakres 0-50°C, dokładność odczytu 0,25°C.
13. Pipeta laboratoryjna; pojemność 10 ml.

#### 4.5.3. Przygotowanie składników

Przedmiotem badań jest ciasto (8 rodzajów) sporządzone z odpowiednich składników. W tabeli 4.1 podano rodzaje i udziały poszczególnych składników, z których sporządza się ciasto przeznaczone do badań.

**Mąka.** Podstawowym składnikiem ciasta jest mąka, która decyduje o właściwościach i przeznaczeniu wytwarzanego ciasta. Do badań użyto trzy gatunki mąki, dwa mąki pszennej o wyciągu 500 i 750, jeden gatunek mąki żytniej o wyciągu 720 (mąkę tę oznaczono Ż720). Z podanych trzech gatunków mąki sporządzono cztery rodzaje mąki do wytwarzania ciasta:

- mąka pszenna typ 500, oznaczona jako P500.
- mąka pszenna typ 750, oznaczona jako P750.
- mąka mieszana, powstała ze zmieszania 70% mąki P500 oraz 30% mąki żytniej Ż720, oznaczenie M70.
- mąka mieszana, powstała ze zmieszania 50% mąki P500 oraz 50% mąki Ż720, oznaczenie M50.

Mąkę do badań umieszczono w zamykanych pojemnikach manipulacyjnych (z tworzywa sztucznego dopuszczonego do kontaktu z żywnością), zawierających po 150 g każdego rodzaju mąki. Pojemniki zostały oznaczone symbolami odpowiadającymi zawartej w nich mące. Mąkę mieszaną (M70 i M50), po odważeniu odpowiednich ilości składników, ujednorodniono przez wymieszanie polegające na przesypywaniu w ciągu ok. 3 min zawartości w zamkniętym pojemniku. Następnie otwarte pojemniki z mąką umieszczono w komorze kli-



matyzacyjnej o ustabilizowanych nominalnych wartościach, temperatury ( $T_K = 30^\circ\text{C}$ ) oraz wilgotności ( $H_K = 60\%$ ).

Pojemniki z mąką przetrzymywano w atmosferze komory minimum 24 godz. – dzięki czemu zachodzi stabilizacja i wyrównanie temperatury oraz wilgotności mąki w całej objętości. Ponadto w ciągu 24 godz. przynajmniej raz dokonuje się ujednorodnienia i spulchnienia mąki przez jej przesypywanie w zamkniętym pojemniku w czasie ok. 1 min. Przed pobraniem z pojemników próbek pomiarowych mąki również wykonywane jest przesypywanie mąki w zamkniętym pojemniku w ciągu ok. 0,5 min.

Tabela 4.1. Składniki ciasta do badań

Lp.	Rodzaj i udział składników	Ilość składnika na próbkę pomiarową
1	Mąka: – pszenna 500; P500 – pszenna 750; P750 – żytnia 720; Ż720	30 g 30 g -
2	Mąka mieszana: – 70% P750 + 30% Ż720 – 50% P750 + 50% Ż720	30 g 30 g
3	Woda destylowana: Ilość wody w próbce zależna od wodochłonności mąki	-
4	Woda solanka 9% (9% soli w wodzie): Ilość solanki w próbce zależna od wodochłonności mąki	-
5	Sól: 1,5% względem ilości mąki, 0,45 g soli w 5 ml wody destylowanej	0,45 g
6	Drożdże: – piekarskie świeże, 3% w mące – instant (Dr Oetker), 0,84% w mące	0,9 g 0,252 g
7	Polepszacz: AKO Plus, 2% w mące	0,6 g

**Woda destylowana.** Zapas wody destylowanej niezbędny do pomiarów przeprowadzanych w ciągu jednego dnia przechowywano w zamkniętym naczyniu w komorze klimatyzacyjnej. Ilość wody wyznaczoną z wodochłonności (na 30 g mąki) pomniejszono o  $5\text{ cm}^3$  i dodawano bezpośrednio do miesiarki.

**Solanka.** Dla ułatwienia dozowania soli sporządzono wodny roztwór soli w wodzie destylowanej w proporcji 0,45 g soli na  $5\text{ cm}^3$  wody. Solankę, w ilości  $5\text{ cm}^3$  na 30 g mąki, dodawano bezpośrednio do dzieży miesiarki laboratoryjnej, uzupełniając tym samym określoną ilość wody w wytwarzanym cieście. Niezbędny zapas solanki (ok. 1l) przechowywano w zamkniętym naczyniu w komorze klimatyzacyjnej.

**Drożdże, polepszacz AKO.** Oba składniki, ze względu na niewielką ilość, dodawano bezpośrednio do mąki w dzieży miesiarki w temperaturze otoczenia (zwykle ok.  $20^\circ\text{C}$ ).

#### 4.5.4. Pomiary wodochłonności mąki

Wodochłonność mąki jest wielkością o podstawowym znaczeniu dla parametrów fizycznych i technologicznych wytwarzanego ciasta. Ilość wody wchłanianej przez mąkę, poza wpływem na właściwości ciasta, ma również znaczenie ekonomiczne (ilość wody wpływa istotnie na masę ciasta).

Wyznaczona za pomocą zestawu SZ – 1 (fot. 4.2) [50] wodochłonność mąki odpowiada takiej ilości dodawanej wody, dla której konsystencja ciasta jest optymalna, tj. posiada 500 jK (jednostek konsystograficznych) lub odpowiadających im 500 jB (jednostek Brabendera).



Fot. 4.2. Zestaw do pomiaru wodochłonności [49]

Wyznaczanie wodochłonności sprowadza się do wykonania następujących czynności:

1. Zestaw do wyznaczania wodochłonności należy uruchomić na ok. 30 min przed planowanym rozpoczęciem pomiarów, w celu nagrzania miesiarki zestawu przez termostat. Do dozownika przyrządu należy wlać odpowiednią ilość wody destylowanej (ok. 300 cm<sup>3</sup>).
2. Odważoną porcję 25 g badanej mąki – 4 rodzaje, o ustalonej temperaturze i wilgotności – pobranej z komory klimatyzacyjnej, należy umieścić w komorze miesiarki. Komorę należy przykryć pokrywką z magnetycznym wyłącznikiem oraz otworami do dozowania wody.
3. Nad pokrywką miesiarki należy umieścić wylewkę dozowania wody destylowanej.
4. Włączyć przyciskiem konsystometr, trwa samoczynne dozowanie wody, mieszenie ciasta oraz pomiar wodochłonności (pomiar oporów jakie powoduje ciasto na obracających się miesidłach – oporów zależnych od ilości wchłoniętej wody); z chwilą wystąpienia (wytworzenia) optymalnej konsystencji ciasta, przyrząd zatrzymuje się i wyświetla wartość wodochłonności w procentach.
5. Po zakończeniu pomiaru i po dokonaniu odczytu, należy usunąć ciasto z miesiarki oraz umyć i wysuszyć jej elementy – korpus, pokrywę, dwa miesidła.

Następnie ponownie zmontować miesiarkę i przygotować do pomiarów (nagrzanie miesiarki, ewentualne uzupełnienie wody destylowanej).

Procedurę pomiaru wodochłonności powtórzono pięciokrotnie dla każdego rodzaju badanej mąki. Opierając się na wykonanych pomiarach wodochłonności mąki, można określić ilość poszczególnych składników dla próbki pomiarowej o masie 30 g, badanego rodzaju ciasta.

Wyniki pomiarów wodochłonności mąki, uśrednione dla pięciu pomiarów, w odniesieniu do próbki pomiarowej, podaje tabela 4.2.

Tabela 4.2. Pomiary wodochłonności mąki

Rodzaj mąki	Temperatura/ wilgotność otoczenia $T_o/H_o$ [°C/%]	Temperatura/ wilgotność mąki, T/H [°C]	Temperatura pomiaru [°C]	Wodo- chłonność dla 500 jK [%]	Ilość wody destylo- wanej [cm <sup>3</sup> ]	Ilość wody solo- nej [cm <sup>3</sup> ]
P500	19,5/20,3	30,1/59,1	30	61,58	18,47	18,11
P750	21/20,2	30,1/59,8	30	64,1	19,23	18,84
M70	20,5/26,9	30,1/60,1	30	61,2	18,36	17,99
M50	19,7/19,3	30,1/61	30	60,33	18,10	17,74
Ż720	19/17	29,9/60	30	58,6	17,58	17,23

#### 4.5.5. Przygotowanie ciasta na próbki pomiarowe

Ciasto do badań przygotowywano na zestawie przyrządów pokazanym na fotografii 4.3



Fot. 4.3. Zestaw do przygotowywania próbek ciasta [49], miesiarka laboratoryjna MML-25, termostat o stałej nastawie, biureta, zegar sygnalizacyjny

Do badań przyjęto dwa typy ciasta sporządzonego dla każdego rodzaju mąki:

- ciasto typu „O”; składniki: mąka i woda destylowana,
- ciasto typu „D”; składniki: mąka, woda solona, drożdże, polepszacz AKO.

Zawartości składników poszczególnych rodzajów ciast wytwarzanych w temperaturze 30°C oraz masę i gęstość ciasta podano w tabeli 4.3.

Tabela 4.3. Rodzaje ciasta i składniki (w temperaturze 30°C)

Lp.	Rodzaj ciasta (rodzaj mąki)	Ilość składników					Ilość ciasta g	Gęstość ciasta, średnia g·cm <sup>-3</sup>
		Mąka g	Woda solanka cm <sup>3</sup>	Sól g	Polep- szacz AKO g	Droż- dże instant g		
1	OP500 (100% P500)	30	18,1	0,45	-	-	48,55	1,179
2	OP750 (100% P750)	30	18,85	0,45	-	-	49,30	1,167
3	OM70 (70%P750+30%Ż720)	30	17,99	0,45	-	-	48,44	1,150
4	OM50 (50%P750+50%Ż720)	30	17,74	0,45	-	-	48,19	1,134
5	DP500 (100% P500)	30	18,1	0,45	0,6	0,252	49,4	1,145
6	DP750 (100% P750)	30	18,85	0,45	0,6	0,252	50,15	1,166
7	DM70 (70%P750+30%Ż720)	30	17,99	0,45	0,6	0,252	49,29	1,145
8	DM50 (50%P750+50%Ż720)	30	17,74	0,45	0,6	0,252	49,04	1,118

#### Ciasto typu „O”:

1. Podłączenie do sieci i uruchomienie termostatów (obieg wody) na około 15 min przed rozpoczęciem badań i pomiarów:
  - miksarki laboratoryjnej, nastawa nominalna 30°C (fot. 4.3),
  - zasilającego zbiornik podgrzewający próbówki w reowiskozymetrze Hoepplera, nastawa nominalna 30°C (fot. 4.1).
2. Przygotowanie reowiskozymetru:
  - na ramieniu wagi z szalką i uchwytem trzpienia pomiarowego z kulką, ustawia się suwak w położeniu odpowiadającym gęstości ciasta,
  - na szalce umieszcza się odpowiednie obciążenie (określone metodą prób),
  - ramię wagi unieruchamia się pokrętką z krzywką blokującą,

- w uchwycie ramienia mocuje się trzpień z kulką (2 rowki) odpowiadający próbówce pomiarowej,
  - przygotowuje się próbkę (próbówka o stałej  $K = 100$ ).
3. Z komory klimatyzacyjnej wyjmuje się pojemnik manipulacyjny z odpowiednią dla typu ciasta mąką. Pojemnik zamyka się i przez około 0,5 min przesypany zawartość pojemnika miesza się i spulchnia mąkę.
  4. Z pojemnika pobiera się i odważa 30 g mąki na uprzednio przygotowanej tacy tekturowej. Otwarty pojemnik ponownie umieszcza się w komorze klimatyzacyjnej.
  5. Odważoną próbkę wsypuje się do komory miesiarki, zamyka jej pokrywę i uruchamia. Przez 3 min trwa mieszanie, napowietrzanie i wyrównywanie temperatury mąki.
  6. Po upływie czasu mieszania mąki, odmierzanego zegarem z sygnalizacją dźwiękową, do komory pracującej miesiarki dodaje się wodę destylowaną z dozownika biurety laboratoryjnej w ilości przewidzianej dla przygotowywanego rodzaju ciasta.
  7. Po dozowaniu wody, następuje mieszenie ciasta, które trwa 5 min. Po zakończeniu mieszenia włącza się zegar laboratoryjny z nastawą sygnalizacji na 30 min – po upływie tego czasu rozpoczyna się pomiary lepkości strukturalnej ciasta.
  8. Wytworzone ciasto wyjmuje się z miesiarki, jednocześnie demontując części składowe komory. Ciasto umieszcza się na tacy tekturowej i niezwłocznie za pomocą cienkiej szklanej bagietki napełnia się ciastem próbkę pomiarową (największą z wyposażenia) do odpowiedniego poziomu, zużywając ok. 25 g ciasta.
  9. Napełnioną próbkę umieszcza się w odpowiednim gnieździe termostатовanej komory reowiskozymetru i zaciskami mocuje się. Następnie trzpień pomiarowy z kulką zanurza się powoli i stopniowo w cieście wypełniającym próbkę oraz ustawia się drogomicz w pozycji początkowej.
  10. W czasie kiedy próbka z ciastem „oczekuje” na pomiary pozostałą część ciasta wykorzystuje się do pomiaru jego gęstości. Masę ciasta wyznacza się na wadze laboratoryjnej. Objętość ciasta wyznacza się stosując cylinder pomiarowy z wodą; kawałek ciasta mocuje się na cienkiej żyłce zakończonej węzełkiem i zanurza się w wodzie. Z różnicy poziomów wody (przed i po zanurzeniu), określa się objętość kawałka ciasta. Wartości wyznaczonych gęstości badanych rodzajów ciasta, uśredniono z 5 pomiarów i podano w tabeli 4.3.
  11. Po wyznaczeniu gęstości niezwłocznie przystąpiono do mycia części składowych miesiarki (korpus, 2 miesidla, ściana przednia, pokrywa). Po wytarciu części miesiarki i ich wysuszeniu zmontowano komorę miesiarki.
  12. Po upływie około 20 min od wymieszenia ciasta, za pomocą elastycznego, cienkiego (ok. 1,5 mm) trzpienia (z tworzywa sztucznego) przebija się kilkakrotnie (5-7 krotnie) ciasto w próbce w celu usunięcia pęcherzyków gazów fermentacyjnych.

13. Przed rozpoczęciem pomiarów należy kontrolować (i ewentualnie korygować) temperaturę w komorze z próbkami i w zbiorniku termostatu.

#### **Ciasto typu „D”:**

Przygotowanie ciasta typu „D”, zawierającego poza mąką inne składniki niż ciasto typu „O”, wykazuje różnice w procedurze postępowania. Należy dokonać następującego, podanego poniżej, uzupełnienia treści punktów:

- do 4) Po przygotowaniu próbki odpowiedniego rodzaju mąki odważa się określone ilości drożdży oraz polepszacza AKO plus.
  - do 5) Porcje drożdży i polepszacza wsypuje się do przygotowanej próbki mąki i następnie razem wsypuje się do komory miesiarki.
  - do 6) Dodatkowo dodaje się solankę dozowaną ręczną pipetą.
- Czynności w ramach pozostałych punktów są takie same jak dla ciasta typu „O”.

#### **4.5.6. Procedura pomiarowa właściwości reologicznych ciasta**

Pomiary lepkości strukturalnej (pozornej, zastępczej, zespolonej) wykonywane są pośrednio, poprzez wyznaczenie (pomiar) czasu opadania kulki na trzpieniu pomiarowym w próbówce z ciastem, po zwolnieniu krzywki blokującej dźwignię z obciążeniem – stałym lub zmienianym. W trakcie każdego pomiaru mierzy się stoperem (z dwiema wskazówkami) czas opadania kulki na drodze 15 mm oraz na drodze 30 mm. Rejestruje się czas rozpoczęcia oraz czas zakończenia każdego pomiaru. Po wykonaniu każdego pomiaru czasu opadania kulki należy powoli wycofać trzpień pomiarowy z kulką w jego początkowe (górne) położenie i zrobić przerwę – przynajmniej 3 min – na relaksację ciasta. Po tym czasie, dla tej samej próbki ciasta, dokonuje się ponownego pomiaru czasu opadania kulki. Dla każdej próbki ciasta wykonuje się 12 pomiarów następujących po sobie w odstępach 6-9 min.

Pomiary wykonywano dla dwóch przypadków obciążeń:

- dla stałego obciążenia ( $M = \text{const}$ ), podczas serii (12) kolejnych pomiarów,
- dla zmienianego obciążenia ( $M \neq \text{const}$ ), podczas każdego kolejnego pomiaru z serii 12 pomiarów obciążenie zmieniano co  $10 \text{ G} \cdot \text{cm}^{-2}$ .

W sumie przeprowadzono 16 serii pomiarowych (4 rodzaje mąki, 2 typy ciasta – 8 rodzajów ciasta, 2 przypadki obciążania). Obciążenie  $M$  powinno być większe od obciążenia odpowiadającego naprężeniom początkowym, powodującym rozpoczęcie płynięcia ciasta. Wartość obciążenia na szalce przyrządu dobrano (metodą prób) tak, żeby czas opadania trzpienia z kulką był na tyle długi, aby pomiary przeprowadzać bez pośpiechu (ponad 2 min). Jednocześnie odpowiednio długi czas gwarantuje, iż przepływ ciasta w próbówce wokół kulki będzie miał charakter przepływu laminarnego ( $R_e \ll R_{e \text{ kryt.}}$ ). Obciążenie początkowe  $M_0$ , przy którym trzpień kulką zaczyna się zanurzać w próbówce z ciastem, wyznacza się również metodą prób (ze względu na trudność w określeniu momentu rozpoczęcia ruchu kulki). Wartość obciążenia początkowego  $M_0$  wyznaczono dla każdego rodzaju ciasta (jako średnią z minimum trzech pomiarów i zaokrągloną do najbliższej wartości połowy dziesiątek) i umieszczono w nagłówku

Tabel 1b-16b (Aneks 2), obciążenie początkowe  $M_0$  dla badanych ciast zawarte było w zakresie  $80-125 \text{ G cm}^{-2}$ . Dla każdego rodzaju ciasta wykonano pomiary 3 próbek ciasta, przyrządzonych jak opisano. Uśredniono wyniki (średnie arytmetyczne) 3 pomiarów czasów opadania  $t_1$  i  $t_2$  kulki w cieście oraz dla każdej próbki ciasta określono odchylenia od wartości średnich pomiarów.

#### 4.5.7. Wyniki pomiarów

Wyniki pomiarów powyższych wielkości umieszczono w tabelach wyników pomiarów (16 tabel) dla wszystkich rodzajów ciast i przypadków obciążeń.

W tabeli 4.4 określono, dla badanych rodzajów ciasta i dla obu przypadków obciążeń, odpowiednie numery tabel z wynikami wykonanych pomiarów oraz odpowiadające tym numerom symbole krzywych na wykresach.

Wyniki pomiarów wielkości pośrednich (pochodnych) umieszczono w tabelach 1b-16b, w powiązaniu z pomiarami wielkości bezpośrednich, ujętych w odpowiadających im tabelach 1a-16a (Aneks 2), co pokazano w tabeli 4.4. Dla wyznaczonych w drodze pomiarów i obliczeń wielkości sporządzono odpowiednie wykresy (rys. 4.2-4.21), opisujące wzajemne zależności między tymi wielkościami określającymi właściwości ciasta. Zależności pokazane na wykresach pozwoliły na wyznaczenie wyrażeń modelowych właściwości ciasta.

Tabela 4.4. Odpowiedniość numerów tabel wyników pomiarów i rodzajów badanego ciasta

Lp.	Rodzaj ciasta	Numer tabeli pomiarów i symbole krzywych na wykresach	
		Obciążenie stałe $M = \text{const}$	Obciążenie zmienne $M \neq \text{const}$
1	2	3	4
1	OP500	1a; 1b	3a; 3b
2	DP500	2a; 2b	4a; 4b
3	OP750	5a; 5b	7a; 7b
4	DP750	6a; 6b	8a; 8b
5	OM70	9a; 9b	11a; 11b
6	DM70	10a; 10b	12a; 12b
7	OM50	13a; 13b	15a; 15b
8	DM50	14a; 14b	16a; 16b

### Tabele wyników pomiarów – wielkości pośrednie

Tabela 1b. Ciasto OP500,  $T_o = 20,4^\circ\text{C}$ ,  $H_k = 60,5\%$ ,  $H_o = 47,2\%$ ,  $\rho = 1,1791 \text{ g cm}^{-3}$ ,  $M_o = 90 \text{ G}\cdot\text{cm}^{-2}$

Lp.	Czas bieżący	Czas rozpoczęcia pomiaru	Średni czas opadania	Obciążenie	Lepkość strukturalna	Naprężenie styczne	Prędkość odkształceń	Odchylenie standardowe	Niepewność względna	Współczynnik czasu
	$t_b$	$t_p$	$t_s$	M	$\eta$	$\tau$	$\varepsilon$	$\sigma_s$	$\sigma_w$	t
	[min]	[min]	[s]	$[\text{G}\cdot\text{cm}^{-2}]$	$[\text{Pa s}]$	$[\text{kPa}]$	$[\text{s}^{-1}]$	$[\text{Pa s}]$	%	[-]
1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11
1	30	0	204,4	200	4088	19,62	4,625	500,0	12,2	0,000
2	39	9	176,5	200	3530	19,62	5,558	290,7	8,2	0,113
3	47	17	145	200	2900	19,62	6,765	204,7	7,1	0,213
4	54	24	122,5	200	2450	19,62	8,008	137,3	5,6	0,300
5	60	30	112	200	2240	19,62	8,759	97,3	4,3	0,375
6	66	36	92,5	200	1850	19,62	10,605	134,7	7,3	0,450
7	72	42	81	200	1620	19,62	12,111	101,3	6,3	0,525
8	78	48	67,4	200	1348	19,62	14,555	103,3	7,7	0,600
9	84	54	62,3	200	1246	19,62	15,746	108,0	8,7	0,675
10	90	60	61,7	200	1234	19,62	15,899	76,7	6,2	0,750
11	96	66	59,1	200	1182	19,62	16,599	60,7	5,1	0,825
12	102	72	57,7	200	1154	19,62	17,002	79,3	6,9	0,900



Tabela 2b. Ciasto DP500,  $T_o = 200^\circ\text{C}$ ,  $H_k = 62\%$ ,  $H_o = 50\%$ ,  $\rho = 1,1452 \text{ g}\cdot\text{cm}^{-3}$ ,  $M_o = 115 \text{ G}\cdot\text{cm}^{-2}$ 

1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11
1	30	0	191,7	250	4793	24,52	5,116	423,3	8,8	0,000
2	38	8	126,5	250	3163	24,52	7,752	276,7	8,7	0,100
3	45	15	97,2	250	2430	24,52	10,09	168,3	6,9	0,188
4	52	22	77,3	250	1933	24,52	12,685	104,2	5,4	0,275
5	58	28	65	250	1625	24,52	15,089	105,0	6,5	0,350
6	64	34	57,6	250	1440	24,52	17,028	90,0	6,3	0,425
7	70	40	53,5	250	1338	24,52	18,326	101,7	7,6	0,500
8	76	46	50,1	250	1253	24,52	19,569	89,2	7,1	0,575
9	82	52	48,8	250	1220	24,52	20,098	76,7	6,3	0,650
10	88	58	46,9	250	1173	24,52	20,904	81,7	7,0	0,725
11	94	64	46	250	1150	24,52	21,322	81,7	7,1	0,800
12	100	70	43,9	250	1098	24,52	22,331	64,2	5,8	0,875

Tabela 3b. Ciasto OP500,  $T_o = 21,4^\circ\text{C}$ ,  $H_k = 59,5\%$ ,  $H_o = 46,8\%$ ,  $\rho = 1,176 \text{ g}\cdot\text{cm}^{-3}$ ,  $M_o = 100 \text{ G}\cdot\text{cm}^{-2}$ 

1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11
1	30	0	225,8	200	4517	19,62	4,343	322,7	7,1	0,000
2	39	9	178,6	210	3751	20,61	5,494	184,1	4,9	0,113
3	46	16	127,2	220	2798	21,58	7,355	174,5	6,2	0,200
4	53	23	106,5	230	2449	22,56	9,21	138,0	5,6	0,288
5	59	29	93,3	240	2239	23,54	10,513	100,0	4,5	0,363
6	65	35	78	250	1950	24,52	12,574	132,5	6,8	0,438
7	71	41	69,5	260	1807	25,51	14,117	124,8	6,9	0,513
8	77	47	57	270	1539	26,49	17,212	81,0	5,3	0,588
9	83	53	49,1	280	1375	27,47	19,978	65,3	4,8	0,663
10	89	59	41,3	290	1198	28,45	23,748	73,5	6,1	0,738
11	95	65	37,5	300	1125	29,43	26,213	69,0	6,1	0,813
12	101	71	31,8	310	986	30,41	30,842	51,7	5,2	0,888

Tabela 4b. Ciasto DP500,  $T_o = 21,1^\circ\text{C}$ ,  $H_k = 60,5\%$ ,  $H_o = 57,7\%$ ,  $\rho = 1,144 \text{ g}\cdot\text{cm}^{-3}$ ,  $M_o = 120 \text{ G}\cdot\text{cm}^{-2}$ 

1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11
1	30	0	198,2	250	4955	24,52	4,948	383,3	7,7	0,000
2	38	8	120,5	260	3133	25,51	8,142	240,9	7,7	0,100
3	45	15	88,9	270	2400	26,49	11,037	168,3	7,0	0,188
4	52	22	64,4	280	1803	27,47	15,236	121,3	6,7	0,275
5	58	28	48	290	1392	28,45	20,438	66,7	4,8	0,350
6	64	34	38,9	300	1167	29,43	25,27	107,0	9,2	0,425
7	70	40	32,2	310	998	30,41	30,471	99,2	9,9	0,500
8	76	46	27,3	320	874	31,39	35,915	51,2	5,9	0,575
9	82	52	24,2	330	799	32,37	41,027	26,4	3,3	0,650
10	88	58	21,8	340	741	33,35	45,006	62,3	8,4	0,725
11	94	64	19	350	665	34,33	51,624	19,8	3,0	0,800
12	100	70	16,8	360	605	35,32	58,38	22,8	3,8	0,875

Tabela 5b. Ciasto OP750,  $T_o = 20,2^\circ\text{C}$ ,  $H_k = 60,5\%$ ,  $H_o = 47,9\%$ ,  $\rho = 1,166 \text{ g}\cdot\text{cm}^{-3}$ ,  $M_o = 80 \text{ G}\cdot\text{cm}^{-2}$ 

1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11
1	30	0	189,9	200	3798	19,62	5,166	284,0	7,5	0,000
2	38	8	142,8	200	2856	19,62	6,87	138,7	4,9	0,100
3	45	15	116,1	200	2322	19,62	8,45	144,7	6,2	0,188
4	52	22	97,5	200	1950	19,62	10,061	82,7	4,2	0,275
5	59	29	82,5	200	1650	19,62	11,891	56,0	3,4	0,363
6	65	35	75,4	200	1508	19,62	13,01	46,0	3,1	0,438
7	71	41	68,3	200	1366	19,62	14,363	73,3	5,4	0,513
8	77	47	63,3	200	1266	19,62	15,498	62,7	4,9	0,588
9	83	53	58,7	200	1174	19,62	16,712	51,3	4,4	0,663
10	89	59	56,8	200	1136	19,62	17,271	13,3	1,2	0,738
11	95	65	54,2	200	1084	19,62	18,1	27,3	2,5	0,813
12	101	71	51,9	200	1038	19,62	18,902	18,0	1,7	0,888

Tabela 6b. Ciasto DP750,  $T_o = 22^\circ\text{C}$ ,  $H_k = 60,5\%$ ,  $H_o = 52\%$ ,  $\rho = 1,166 \text{ g}\cdot\text{cm}^{-3}$ ,  $M_o = 100 \text{ G}\cdot\text{cm}^{-2}$ 

1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11
1	30	0	159	250	3975	24,52	6,17	240,8	6,1	0,000
2	37	7	115,6	250	2890	24,52	8,486	237,5	8,2	0,088
3	44	14	87,2	250	2180	24,52	11,25	154,2	7,1	0,175
4	50	20	78,5	250	1963	24,52	12,497	98,3	5,0	0,250
5	56	26	67,6	250	1690	24,52	14,512	55,8	3,3	0,325
6	62	32	62,5	250	1563	24,52	15,7	100,0	6,4	0,400
7	68	38	56,7	250	1417	24,52	17,304	63,3	4,5	0,475
8	74	44	53	250	1325	24,52	18,506	25,8	1,9	0,550
9	80	50	50,2	250	1255	24,52	19,538	45,0	3,6	0,625
10	86	56	47,6	250	1190	24,52	20,605	17,5	1,5	0,700
11	92	62	46,1	250	1153	24,52	21,28	27,5	2,4	0,775
12	98	68	45,5	250	1138	24,52	21,57	32,5	2,9	0,850

Tabela 7b. Ciasto OP750,  $T_o = 20,9^\circ\text{C}$ ,  $H_k = 59,2\%$ ,  $H_o = 45,4\%$ ,  $\rho = 1,166 \text{ g}\cdot\text{cm}^{-3}$ ,  $M_o = 90 \text{ G}\cdot\text{cm}^{-2}$ 

1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11
1	30	0	205,5	200	4110	19,62	4,774	270,0	6,6	0,000
2	38	8	135,2	210	2839	20,61	7,26	102,2	3,6	0,100
3	45	15	102,5	220	2255	21,58	9,57	173,8	7,7	0,188
4	52	22	79,4	230	1826	22,56	12,355	76,7	4,2	0,275
5	59	29	60,5	240	1452	23,54	16,212	50,4	3,5	0,363
6	65	35	52,8	250	1320	24,52	18,576	38,3	2,9	0,438
7	71	41	46,8	260	1217	25,51	20,961	69,3	5,7	0,513
8	77	47	41	270	1107	26,49	23,93	42,3	3,8	0,588
9	83	53	36,1	280	1011	27,47	27,171	15,9	1,6	0,663
10	89	59	31,6	290	916	28,45	31,059	35,8	3,9	0,738
11	95	65	29,4	300	882	29,49	33,435	25,0	2,8	0,813
12	101	71	26,4	310	818	30,41	37,176	23,8	2,9	0,888

Tabela 8b. Ciasto DP750,  $T_o = 20,8^\circ\text{C}$ ,  $H_k = 60\%$ ,  $H_o = 53\%$ ,  $\rho = 1,167 \text{ g}\cdot\text{cm}^{-3}$ ,  $M_o = 90 \text{ G}\cdot\text{cm}^{-2}$ 

1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11
1	30	0	139,6	250	3490	24,52	7,026	183,3	5,3	0,000
2	37	7	105,8	260	2751	25,51	9,273	180,3	6,6	0,088
3	44	14	79,1	270	2136	26,49	12,402	161,1	7,5	0,175
4	50	20	61,1	280	1711	27,47	16,055	85,9	5,0	0,250
5	56	26	51,3	290	1488	28,45	19,12	86,0	5,8	0,325
6	62	32	44,1	300	1323	29,49	22,29	105,0	7,9	0,400
7	68	38	36,6	310	1135	30,41	26,793	25,8	2,3	0,475
8	74	44	30,9	320	989	31,39	31,739	54,4	5,5	0,550
9	80	50	28,1	330	927	32,37	34,92	40,7	4,4	0,625
10	86	56	24,8	340	843	33,35	39,561	41,9	5,0	0,700
11	92	62	21,7	350	759	34,33	45,2	21,0	2,8	0,775
12	98	68	18,2	360	657	35,32	53,76	25,2	3,8	0,850

Tabela 9b. Ciasto OM70,  $T_o = 19,1^\circ\text{C}$ ,  $H_k = 62,5\%$ ,  $H_o = 49,5\%$ ,  $\rho = 1,150 \text{ g}\cdot\text{cm}^{-3}$ ,  $M_o = 115 \text{ G}\cdot\text{cm}^{-2}$ 

1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11
1	30	0	186,1	250	4652	24,52	5,271	279,2	6,0	0,000
2	38	8	151,3	250	3782	24,52	6,483	162,5	4,3	0,100
3	46	16	132,5	250	3312	24,52	7,403	194,2	5,9	0,200
4	53	23	112	250	2800	24,52	8,757	125,0	4,5	0,288
5	59	29	102	250	2550	24,52	9,616	139,2	5,5	0,363
6	65	35	93	250	2325	24,52	10,546	75,8	3,3	0,438
7	71	41	86,5	250	2162	24,52	11,341	73,3	3,4	0,513
8	77	47	82,3	250	2057	24,52	11,92	84,2	4,1	0,588
9	83	53	76,3	250	1907	24,52	12,858	39,2	2,1	0,663
10	89	59	70,7	250	1767	24,52	13,877	54,2	3,1	0,738
11	95	65	69,2	250	1730	24,52	14,173	60,8	3,5	0,813
12	101	71	65,5	250	1637	24,52	14,979	19,2	1,2	0,888



Tabela 10b. Ciasto DM70,  $T_o = 20^\circ\text{C}$ ,  $H_k = 60\%$ ,  $H_o = 50\%$ ,  $\rho = 1,145 \text{ g}\cdot\text{cm}^{-3}$ ,  $M_o = 125 \text{ G}\cdot\text{cm}^{-2}$ 

1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11
1	30	0	213,5	250	5337	24,52	4,594	304,2	5,7	0,000
2	39	9	173	250	4325	24,52	5,67	231,7	5,4	0,113
3	47	17	148,1	250	3702	24,52	6,623	158,3	4,3	0,213
4	54	24	129,4	250	3235	24,52	7,579	147,5	4,6	0,300
5	61	31	111,1	250	2777	24,52	8,83	147,5	5,3	0,388
6	68	38	99	250	2475	24,52	9,907	135,8	5,5	0,475
7	75	45	94,6	250	2365	24,52	10,368	120,8	5,1	0,563
8	82	52	82,3	250	2057	24,52	11,92	75,8	3,7	0,650
9	89	59	78,6	250	1965	24,52	12,478	88,3	4,5	0,738
10	95	65	74,5	250	1862	24,52	13,169	44,2	2,4	0,813
11	101	71	72,5	250	1812	24,52	13,532	69,2	3,8	0,888
12	107	77	71,4	250	1785	24,52	13,737	30,0	1,7	0,963

Tabela 11b. Ciasto OM70,  $T_o = 21^\circ\text{C}$ ,  $H_k = 61,5\%$ ,  $H_o = 54,7\%$ ,  $\rho = 1,154 \text{ g}\cdot\text{cm}^{-3}$ ,  $M_o = 120 \text{ G}\cdot\text{cm}^{-2}$ 

1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11
1	30	0	207,5	250	5187	24,52	4,727	409,2	7,9	0,000
2	38	8	157,3	260	4090	25,51	6,237	250,5	6,1	0,100
3	45	15	116	270	3132	26,49	8,458	135,0	4,3	0,188
4	52	22	92,8	280	2598	27,47	10,573	135,3	5,2	0,275
5	58	28	74,8	290	2169	28,45	13,117	87,5	4,0	0,350
6	64	34	67	300	2010	29,49	14,642	133,0	6,6	0,425
7	70	40	57,8	310	1792	30,41	16,97	109,5	6,1	0,500
8	76	46	50,9	320	1629	31,39	19,27	61,9	3,8	0,575
9	82	52	43,5	330	1435	32,37	22,557	89,1	6,2	0,650
10	88	58	40	340	1360	33,35	24,522	36,3	2,7	0,725
11	94	64	34,7	350	1214	34,33	28,278	35,0	2,9	0,800
12	100	70	28,3	360	1019	35,32	34,661	49,2	4,8	0,875

Tabela 12b. Ciasto DM70,  $T_o = 20,5^\circ\text{C}$ ,  $H_k = 60,4\%$ ,  $H_o = 54,5\%$ ,  $\rho = 1,148 \text{ g}\cdot\text{cm}^{-3}$ ,  $M_o = 125 \text{ G}\cdot\text{cm}^{-2}$ 

1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11
1	30	0	209	250	5225	24,52	4,693	365,0	7,0	0,000
2	39	9	179,1	260	4657	25,51	5,478	225,3	4,8	0,113
3	47	17	141,4	270	3818	26,49	6,938	232,2	6,1	0,213
4	55	25	114,5	280	3206	27,47	8,568	167,1	5,2	0,313
5	62	32	90,1	290	2523	28,45	11,276	147,9	5,9	0,400
6	69	39	68,4	300	2052	29,43	14,342	99,0	4,8	0,488
7	75	45	60,2	310	1866	30,41	16,297	71,4	3,8	0,563
8	81	51	53,4	320	1709	31,39	18,367	84,3	4,9	0,638
9	87	57	45,6	330	1505	32,37	21,508	89,1	5,9	0,713
10	93	63	41	340	1394	33,35	23,924	77,1	5,5	0,788
11	99	69	35,5	350	1242	34,33	27,402	46,7	3,8	0,863
12	105	75	31,8	360	1146	35,32	30,847	64,8	5,7	0,938

Tabela 13b. Ciasto OM50,  $T_o = 17,8^\circ\text{C}$ ,  $Hk = 62\%$ ,  $Ho = 40,1\%$ ,  $\rho = 1,134 \text{ g}\cdot\text{cm}^{-3}$ ,  $Mo = 125 \text{ G}\cdot\text{cm}^{-2}$ 

1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11
1	30	0	217	250	5425	24,52	4,52	405,8	7,5	0,000
2	39	9	179,5	250	4487	24,52	5,465	273,3	6,1	0,113
3	47	17	171,1	250	4277	24,52	5,733	234,2	5,5	0,213
4	55	25	145,7	250	3642	24,52	6,732	90,0	2,5	0,313
5	62	32	125,6	250	3140	24,52	7,809	124,2	4,0	0,400
6	69	39	112,8	250	2820	24,52	8,695	151,3	5,4	0,488
7	76	46	106,7	250	2667	24,52	9,194	170,8	6,4	0,575
8	82	52	100,5	250	2512	24,52	9,761	125,0	5,0	0,650
9	88	58	95,5	250	2387	24,52	10,272	105,0	4,4	0,725
10	94	64	92	250	2300	24,52	10,661	66,7	2,9	0,800
11	100	70	86,2	250	2155	24,52	11,378	149,2	6,9	0,875
12	106	76	84,3	250	2107	24,52	11,637	59,2	2,8	0,950

Tabela 14b. Ciasto DM50,  $T_o = 20,5^\circ\text{C}$ ,  $Hk = 62,1\%$ ,  $Ho = 50,5\%$ ,  $\rho = 1,118 \text{ g}\cdot\text{cm}^{-3}$ ,  $Mo = 125 \text{ G}\cdot\text{cm}^{-2}$ 

1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11
1	30	0	213,1	250	5327	24,52	4,603	287,5	5,4	0,000
2	39	9	183,6	250	4590	24,52	5,342	199,2	4,3	0,113
3	47	17	156,2	250	3905	24,52	6,279	257,5	6,6	0,213
4	55	25	147	250	3675	24,52	6,672	185,0	5,0	0,313
5	62	32	120,4	250	3010	24,52	8,146	133,3	4,4	0,400
6	69	39	112,7	250	2817	24,52	8,704	122,5	4,3	0,488
7	76	46	102,2	250	2555	24,52	9,597	147,5	5,8	0,575
8	83	53	94,3	250	2357	24,52	10,403	165,8	7,0	0,663
9	89	59	89,2	250	2230	24,52	10,995	172,5	7,7	0,738
10	95	65	88,7	250	2217	24,52	11,06	138,3	6,2	0,813
11	101	71	83,2	250	2080	24,52	11,778	62,5	3,0	0,888
12	107	77	78	250	1950	24,52	12,574	60,8	3,1	0,963

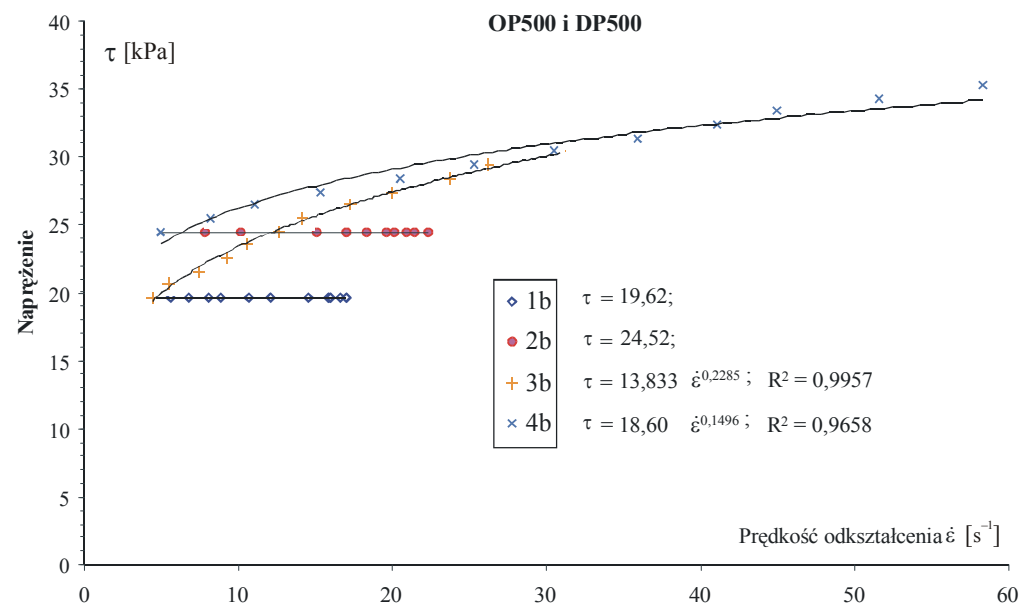
Tabela 15b. Ciasto OM50,  $T_o = 20,0^\circ\text{C}$ ,  $H_k = 60,2\%$ ,  $H_o = 52,8\%$ ,  $\rho = 1,142 \text{ g}\cdot\text{cm}^{-3}$ ,  $M_o = 115 \text{ G}\cdot\text{cm}^{-2}$ 

1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11
1	30	0	209	250	5225	24,52	4,693	281,7	5,4	0,000
2	39	9	164,1	260	4267	25,51	5,978	252,2	5,9	0,113
3	46	16	122,6	270	3310	26,49	8,003	196,2	5,9	0,200
4	53	23	101,3	280	2834	27,47	9,693	161,5	5,7	0,288
5	59	29	87,4	290	2535	28,45	11,223	132,4	5,2	0,363
6	65	35	73,1	300	2193	29,49	13,447	131,0	6,0	0,438
7	71	41	66,2	310	2052	30,41	14,82	100,2	4,9	0,513
8	77	47	59,7	320	1910	31,39	16,434	90,7	4,7	0,588
9	83	53	50,8	330	1676	32,37	19,314	66,0	3,9	0,663
10	89	59	45,8	340	1550	33,35	21,516	89,5	5,8	0,738
11	95	65	39,3	350	1411	34,33	24,33	25,7	1,8	0,813
12	101	71	36	360	1296	35,32	27,253	49,2	3,8	0,888

Tabela 16b. Ciasto DM50,  $T_o = 20,5^\circ\text{C}$ ,  $H_k = 60,4\%$ ,  $H_o = 54,4\%$ ,  $\rho = 1,125 \text{ g}\cdot\text{cm}^{-3}$ ,  $M_o = 115 \text{ G}\cdot\text{cm}^{-2}$ 

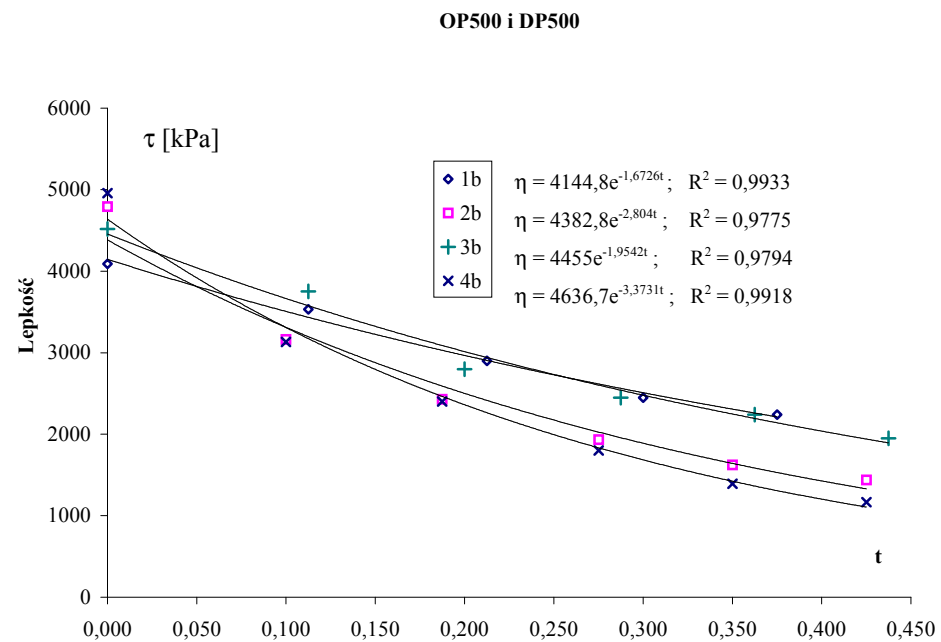
1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11
1	30	0	212,1	250	5302	24,57	4,625	283,3	5,3	0,000
2	39	9	171,6	260	4462	25,51	5,717	266,1	6,0	0,113
3	47	17	127,4	270	3440	26,49	7,7	162,9	4,7	0,213
4	54	24	114,1	280	3195	27,47	8,598	197,9	6,2	0,300
5	61	31	85,4	290	2477	28,45	11,486	142,1	5,7	0,388
6	67	37	72,2	300	2166	29,49	13,615	108,0	5,0	0,463
7	73	43	65,9	310	2043	30,41	14,885	106,4	5,2	0,538
8	79	49	56,6	320	1811	31,39	17,333	97,1	5,4	0,613
9	85	55	48,5	330	1600	32,37	20,231	80,3	5,0	0,688
10	91	61	41,3	340	1404	33,35	23,753	48,7	3,5	0,763
11	97	67	38	350	1330	34,33	25,812	43,2	3,2	0,838
12	103	73	32,8	360	1181	35,32	29,907	36,0	3,0	0,913

### Wykresy zależności reologicznych dla ograniczonego czasu pomiaru

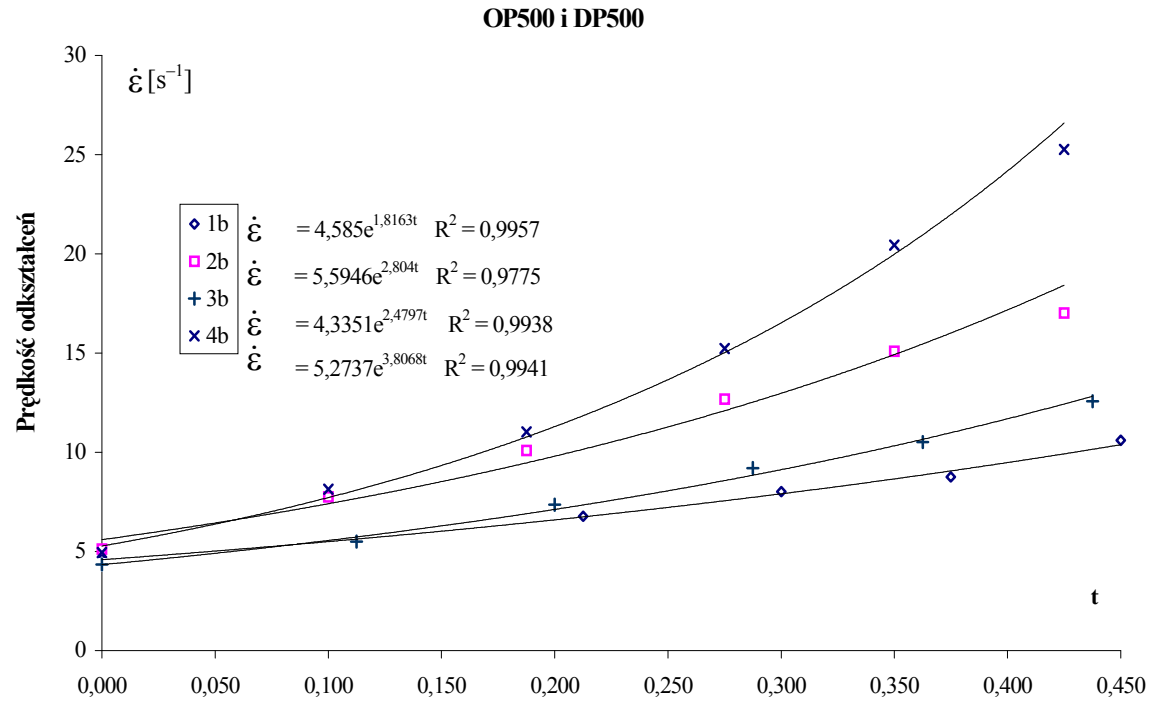


Rys. 4.2. Zależność naprężeń  $\tau$  od prędkości odkształceń  $\dot{\epsilon}$  oraz równania przebiegu tych zależności dla przypadków:  
 tabela 1b, OP500,  $M = \text{const}$ ; tabela 2b, DP500,  $M = \text{const}$ , tabela 3b, OP500,  $M \neq \text{const}$ ;  
 tabela 4b, DP500,  $M \neq \text{const}$

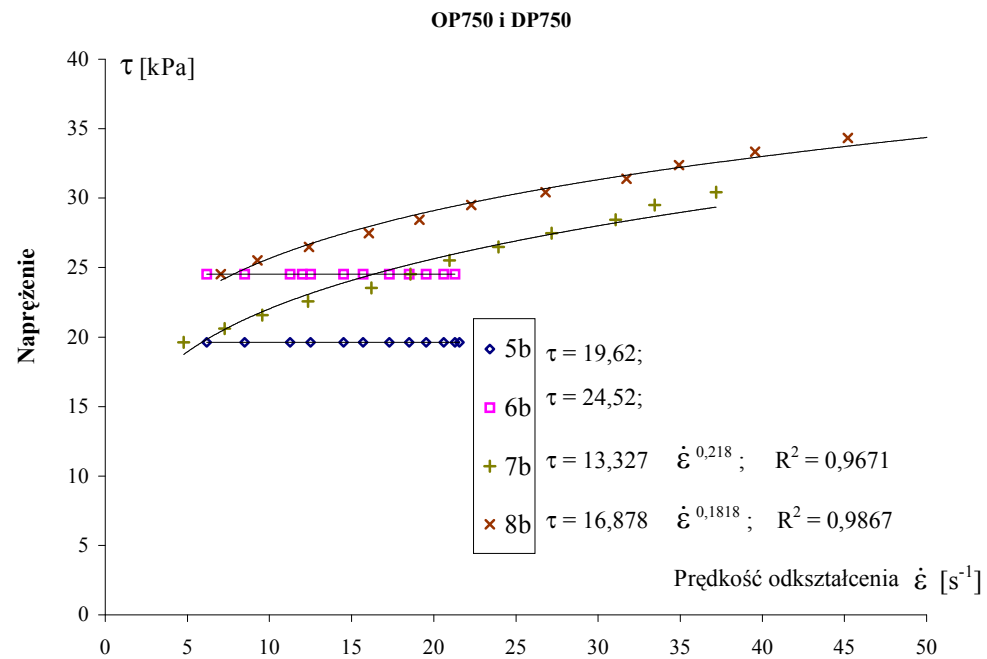




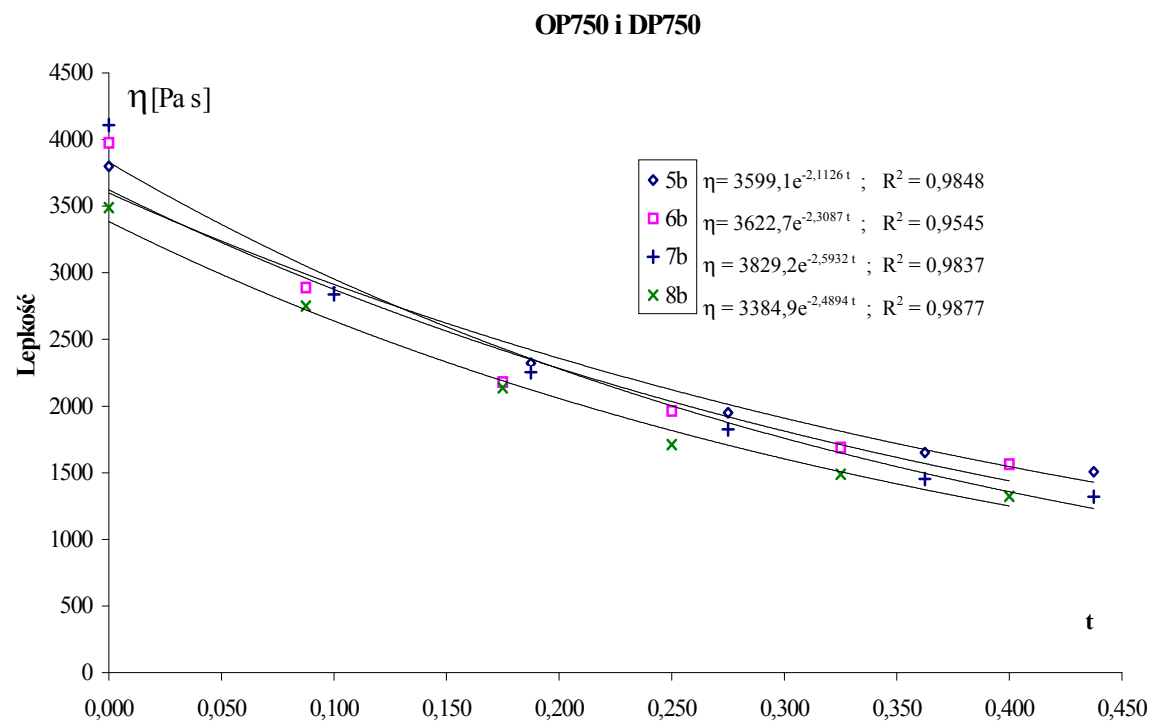
Rys. 4.3. Zależność lepkości  $\eta$  od bezwymiarowego współczynnika czasu  $t$  oraz równania przebiegu tych zależności dla przypadków:  
 tabela 1b, OP500,  $M = \text{const}$ ; tabela 2b, DP500,  $M = \text{const}$ , tabela 3b, OP500,  
 $M \neq \text{const}$ ; tabela 4b, DP500,  $M \neq \text{const}$



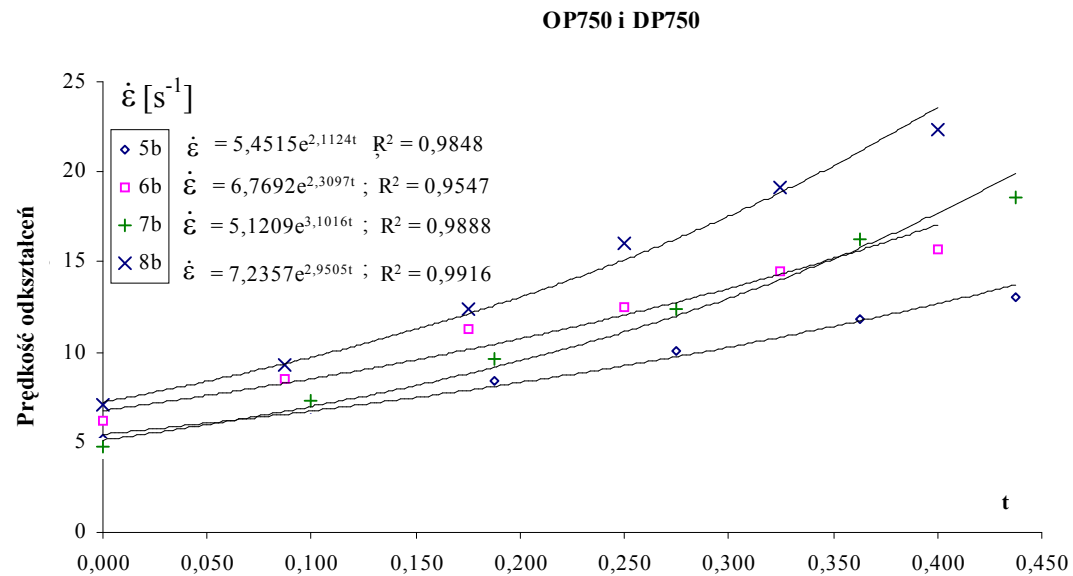
Rys. 4.4. Zależność prędkości odkształceń  $\dot{\epsilon}$  od bezwymiarowego współczynnika czasu t oraz równania przebiegu tych zależności dla przypadków:  
 tabela 1b, OP500,  $M = \text{const}$ ; tabela 2b, DP500,  $M = \text{const}$ , tabela 3b, OP500,  $M \neq \text{const}$ ;  
 tabela 4b, DP500,  $M \neq \text{const}$



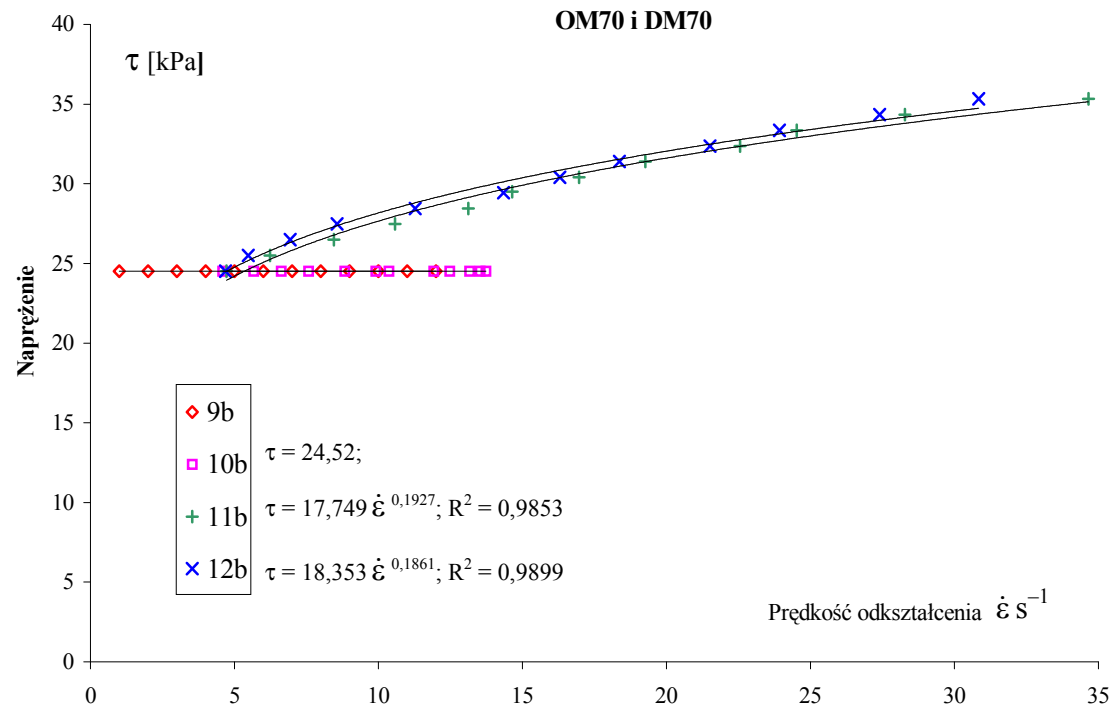
Rys. 4.5. Zależność naprężeń  $\tau$  od prędkości odkształceń  $\dot{\epsilon}$  oraz równania przebiegu tych zależności dla przypadków:  
 tabela 5b, OP750,  $M = \text{const}$ ; tabela 6b, DP750,  $M = \text{const}$ ; tabela 7b, OP750,  $M \neq \text{const}$ ;  
 tabela 8b, DP750,  $M \neq \text{const}$



Rys. 4.6. Zależność lepkości  $\eta$  od bezwymiarowego współczynnika czasu  $t$  oraz równania przebiegu tych zależności dla przypadków:  
 tabela 5b, OP750,  $M = \text{const}$ ; tabela 6b, DP750,  $M = \text{const}$ ; tabela 7b, OP750,  $M \neq \text{const}$ ;  
 tabela 8b, DP750,  $M \neq \text{const}$

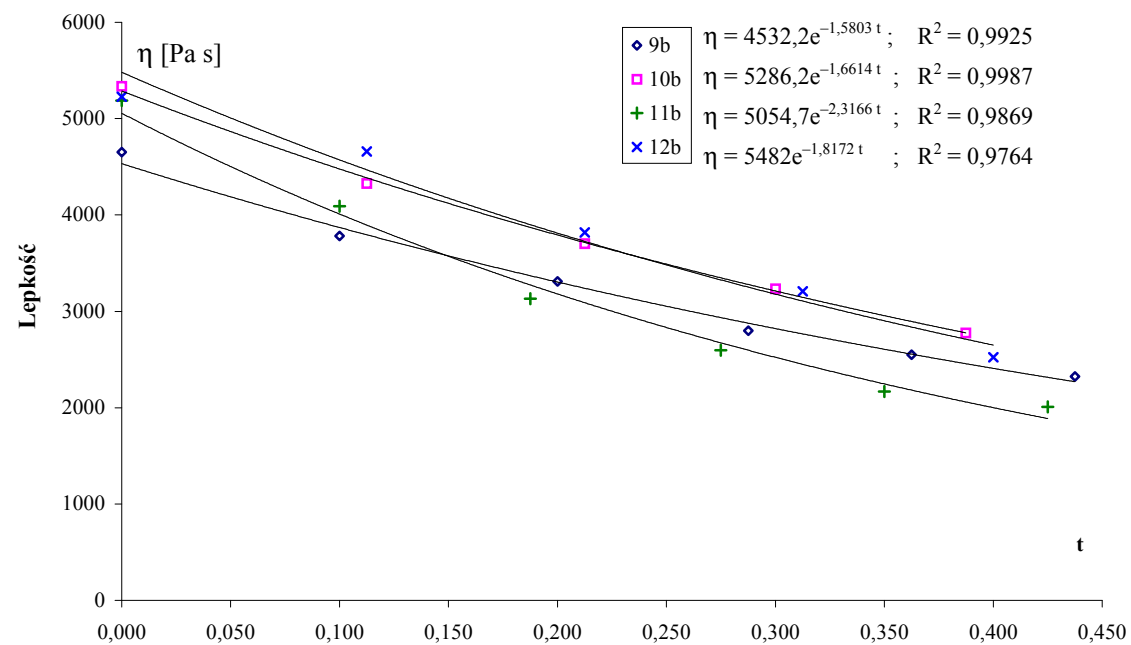


Rys. 4.7. Zależność prędkości odkształceń  $\dot{\epsilon}$  od bezwymiarowego współczynnika czasu  $t$  oraz równania przebiegu tych zależności dla przypadków tabela 5b, OP750,  $M = \text{const}$ ; tabela 6b, DP750,  $M = \text{const}$ , tabela 7b, OP750,  $M \neq \text{const}$ ; tabela 8b, DP750,  $M \neq \text{const}$

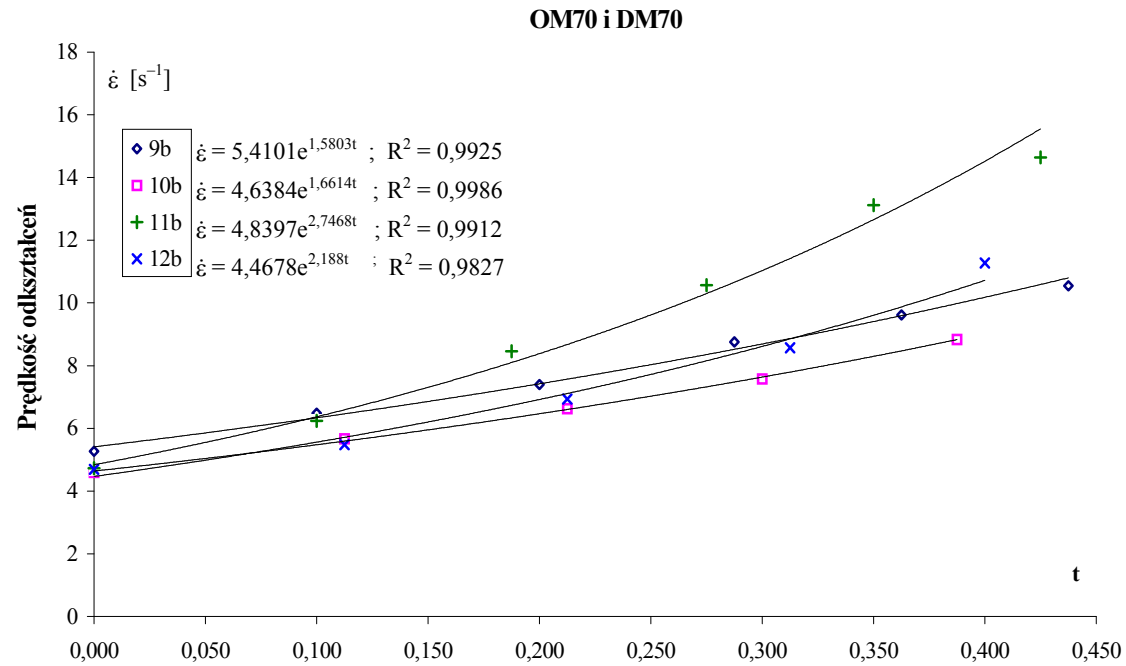


Rys. 4.8. Zależność naprężeń  $\tau$  od prędkości odkształceń  $\dot{\epsilon}$  oraz równania przebiegu tych zależności dla przypadków:  
 tabela 9b, OM70,  $M = \text{const}$ ; tabela 10b, DM70,  $M = \text{const}$ , tabela 11b, OM70,  $M \neq \text{const}$ ;  
 tabela 12b, DM70,  $M \neq \text{const}$

## OM70 i DM70

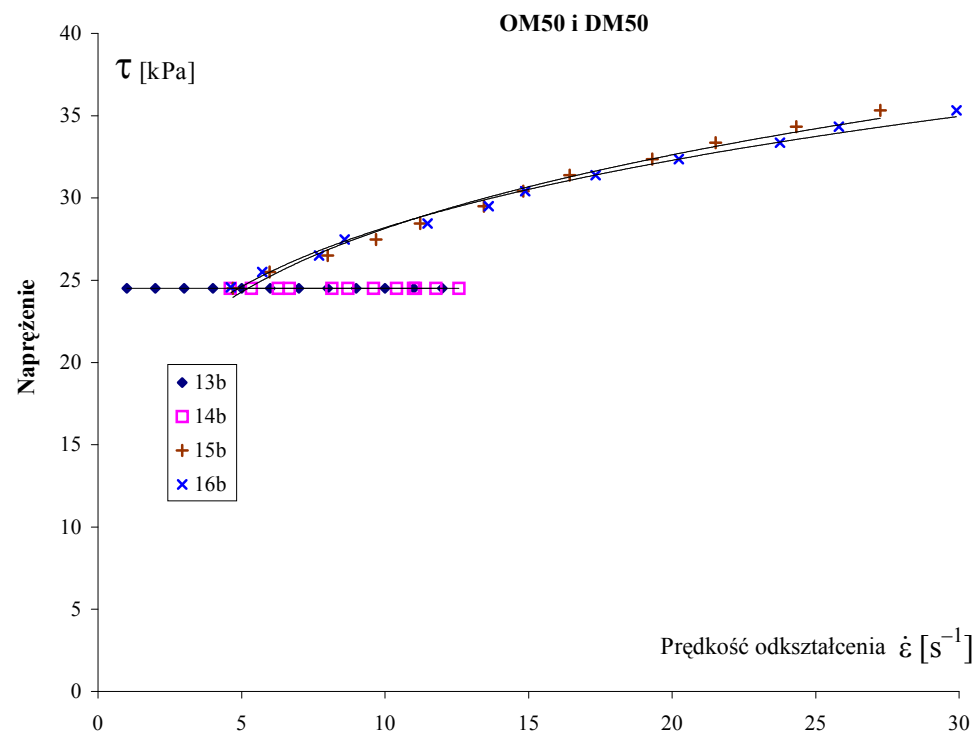


Rys. 4.9. Zależność lepkości  $\eta$  od bezwymiarowego współczynnika czasu  $t$  oraz równania przebiegu tych zależności dla przypadków:  
 tabela 9b, OM70,  $M = \text{const}$ ; tabela 10b, DM70,  $M = \text{const}$ ; tabela 11b, OM70,  $M \neq \text{const}$ ;  
 tabela 12b, DM70,  $M \neq \text{const}$

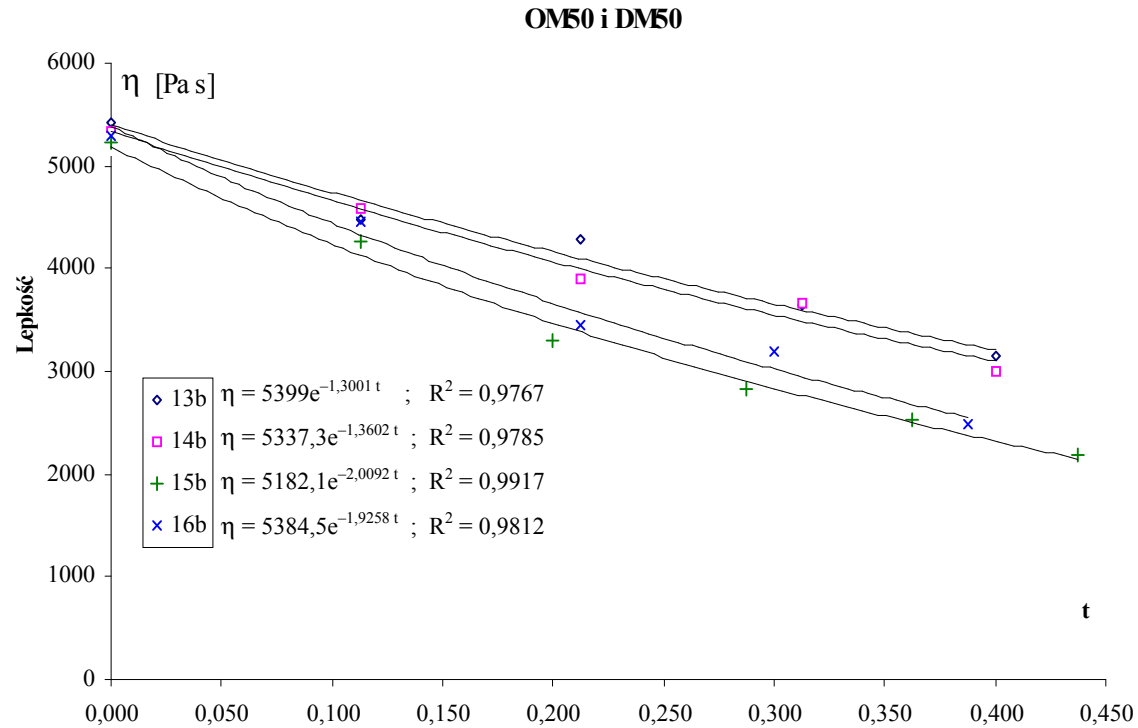


Rys. 4.10. Zależność prędkości odkształceń  $\dot{\epsilon}$  od bezwymiarowego współczynnika czasu  $t$  oraz równania przebiegu tych zależności dla przypadków:  
 tabela 9b, OM70,  $M = \text{const}$ ; tabela 10b, DM70,  $M = \text{const}$ , tabela 11b, OM70,  $M \neq \text{const}$ ;  
 tabela 12b, DM70,  $M \neq \text{const}$

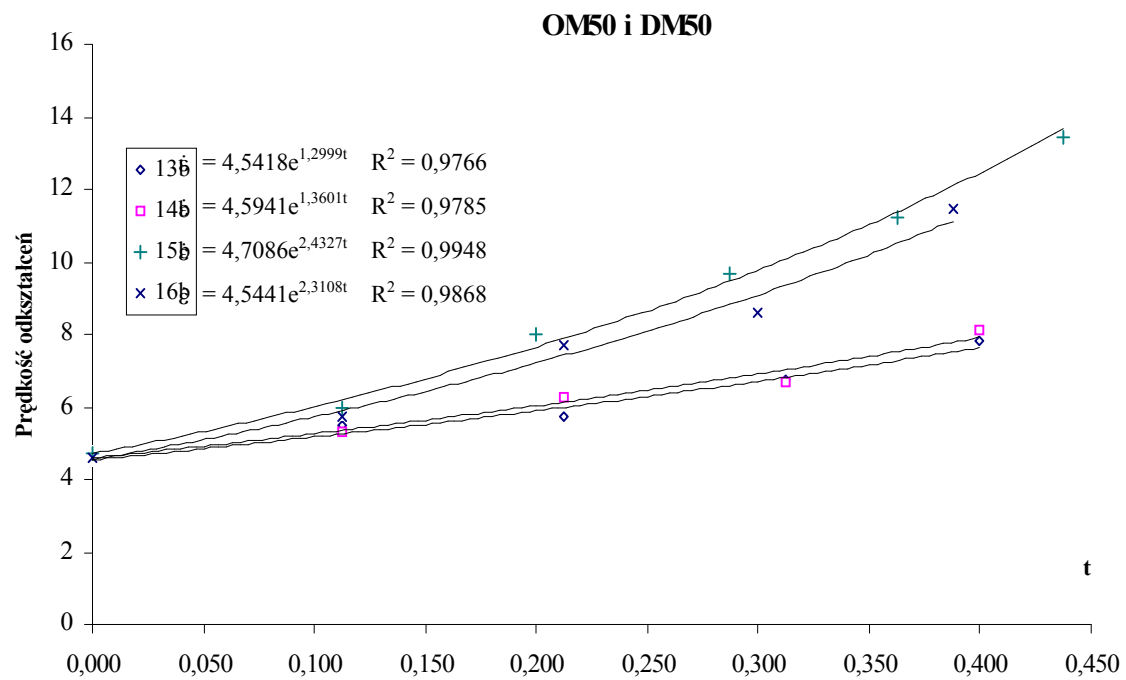




Rys. 4.11. Zależność naprężeń  $\tau$  od prędkości odkształceń  $\dot{\epsilon}$  oraz równania przebiegu tych zależności dla przypadków:  
 tabela 13b, OM50,  $M = \text{const}$ ; tabela 14b, DM50,  $M = \text{const}$ , tabela 15b, OM50,  $M \neq \text{const}$ ;  
 tabela 16b, DM50,  $M \neq \text{const}$



Rys. 4.12. Zależność lepkości  $\eta$  od bezwymiarowego współczynnika czasu  $t$  oraz równania przebiegu tych zależności dla przypadków:  
 tabela 13b, OM50,  $M = \text{const}$ ; tabela 14b, DM50,  $M = \text{const}$ , tabela 15b, OM50,  $M \neq \text{const}$ ;  
 tabela 16b, DM50,  $M \neq \text{const}$



Rys. 4.13. Zależność prędkości odkształceń  $\dot{\epsilon}$  od bezwymiarowego współczynnika czasu  $t$  oraz równania przebiegu tych zależności dla przypadków:  
 tabela 13b, OM50,  $M = \text{const}$ ; tabela 14b, DM50,  $M = \text{const}$ , tabela 15b, OM50,  $M \neq \text{const}$ ;  
 tabela 16b, DM50,  $M \neq \text{const}$

#### 4.5.8. Opis graficznych zależności reologicznych ciasta

Dla każdego z obu typów ciasta (typ „O” i typ „D”) sporządzono jeden wykres, na którym umieszczono cztery krzywe opisane odpowiednimi numerami tabel z danymi dla ich wykreślenia (tabela 4.4). Spośród 20 wykresów (rys. 4.2-4.21) sporządzonych na podstawie zależności pomiędzy wielkościami zawartymi w tabelach 1a-16a (Aneks 2) oraz 1b-16b, dla określenia wyrażenia modelującego właściwości reologiczne badanych ciast, poddano analizie zależności funkcyjne pokazane na wykresach (rys. 4.2-4.13).

Wykreślone krzywe dotyczą następujących zależności funkcyjnych:

- $\tau = f(\dot{\epsilon})$ ; naprężenie ścinające w funkcji prędkości odkształceń,
- $\eta = f(t)$ ; lepkość strukturalna w funkcji bezwymiarowego współczynnika  $t$  czasu,
- $\dot{\epsilon} = f(t)$ ; prędkość odkształceń w funkcji bezwymiarowego współczynnika  $t$  czasu.

Wprowadzenie bezwymiarowego współczynnika  $t$  dla czasu pomiaru pozwala na utrzymanie zgodności wymiarów (dymensji) w zależnościach opisujących przebieg zmienności odpowiednich krzywych na wykresach. Bezwymiarowy współczynnik  $t$  czasu pomiaru określa zależność:

$$t = \frac{t_p}{t_o}, \quad (4.28)$$

gdzie:

- $t$  – bezwymiarowy współczynnik czasu pomiaru,
- $t_p$  – czas rozpoczęcia pomiarów; s,
- $t_o$  – czas odniesienia; czas trwania (okres) pomiarów, s.

Czas odniesienia można określić względem maksymalnej (lub zbliżonej) wartości czasu przeprowadzania serii pomiarów (w eksperymencie dla serii 12 pomiarów czas maksymalny wynosi  $t_{pmax} = 77$  min), jako:

$$t_o \geq t_{pmax}. \quad (4.29)$$

Na podstawie analizy czasów dla poszczególnych serii pomiarowych oraz powyższej zależności przyjęto, że:

$$t_o = 80 \text{ min}$$

Krzywe zależności funkcyjnych sporządzono dla dwóch przypadków:

- pomiary w pełnym (całkowitym) zakresie czasu ( $t_p = \max$ ); zależności funkcyjne  $\tau(\dot{\epsilon})$ , funkcja potęgowa (rys. 4.2, 4.5, 4.8, 4.11),
- pomiary w ograniczonym do ok. 30 min. zakresie czasu, będącego częścią pełnego przedziału czasu, w którym wykonywano pomiary, tj. czas jaki

upłynął do najbliższego pomiaru po upływie 30 min. ( $t_p = \text{ok. } 30 \text{ min.}$ ); zależności funkcyjne  $\eta(t)$  oraz  $\dot{\epsilon}(t)$ , funkcja wykładnicza (4.2-4.13).

Potrzeba uwzględnienia dwóch przypadków przedziału czasowego wynika z faktu, że czas trwania serii 12 pomiarów przekracza zwykle 70 min – znacznie powyżej czasu przydatności technologicznej ciasta (ok. 30 min).

Przebieg krzywych zależności funkcyjnych badanych wielkości  $\eta(t)$  oraz  $\dot{\epsilon}(t)$  w pełnym zakresie czasu pomiarów (rys. 4.14-4.21), można opisać w wielu przypadkach jedynie wyrażeniami wielomianowymi – dla uzyskania odpowiednio dużej zgodności z danymi z eksperymentu. Wykresy na rysunkach 4.14-4.21 sporządzone dla pełnego zakresu czasu pomiaru umieszczono w Aneksie 3.

W ograniczonym, do ok. 30 min, zakresie czasu pomiarów, zależności funkcyjne, zwłaszcza lepkości i prędkości odkształceń, możliwe są do opisanie (po założeniu wystarczająco dużego współczynnika korelacji) względnie prostymi i dogodnymi w stosowaniu funkcjami wykładniczymi – dla wszystkich rodzajów ciasta i przypadków obciążeń.

Dla każdej (razem 12) wykreślonej krzywej (rys. 4.2-4.13) określono równanie regresji z odpowiadającymi współczynnikami determinacji  $R^2$ , (kwadrat współczynnika korelacji). Typ krzywej dobrano, tak aby współczynnik determinacji był jak najbliższy jedności, przyjmując względnie prostą postać matematyczną równania przebiegu krzywej.

#### 4.5.9. Niepewności pomiarowe

Wartości mierzonych wielkości fizycznych są obarczone niepewnością pomiarową (błędem pomiaru), definiowaną teoretycznie jako różnica między wartością z pomiaru a wartością rzeczywistą. Praktycznie niepewność pomiarową można określić poprzez odchylenie (różnicę) wartości z pojedynczego pomiaru i wartości średniej z pomiarów [5, 26, 43]. Na niepewność pomiarową składają się niepewności (odchylenia, błędy) o charakterze systematycznym (dokładność przyrządu, niepewność maksymalna) oraz przypadkowym (większe od niepewności systematycznej). W rozważanych pomiarach (czasy opadania kulki), niepewności przypadkowe różnicujące wyniki pomiarów w tych samych warunkach mają charakter losowy i spowodowane są zwłaszcza:

- zmiennością właściwości badanego materiału (właściwości reologiczne); np. aktywność biologiczna ciasta – wydzielanie się pęcherzyków gazów fermentacyjnych, odchylenia czasu przygotowywania ciasta, odchylenia ilości składników ciasta,
- wpływem historii odkształceń i naprężeń na prowadzone pomiary,
- wpływem warunków pomiaru; np. temperatura, wilgotność składników, wypełnienie próbkówki,
- wpływem sposobu (metody) prowadzenia pomiarów; np. wpływ własności przyrządów, wpływ zmysłów określających wskazania przyrządów – stopera, czujnika drogomierza.

Ze względu na losowy charakter niepewności przypadkowych niezbędnym jest korzystanie z instrumentów statystyki matematycznej i rachunku prawdopodobieństwa w określaniu ich wartości dla przeprowadzanych pomiarów.

**Półówkowy czas opadania  $t_1$**  – czas opadania kulki na połowie drogi 30 mm, tj. 15 mm, wyznaczony jako średni z  $n_1 = 3$  pomiarów:

$$t_1 = \frac{\sum_{i=1}^{n_1} t_{1i}}{n_1} = \frac{t_{11} + t_{12} + t_{13}}{3}; \text{ dla } i = 1, 2, \dots, n_1; n_1 = 3. \quad (4.30)$$

Odchylenie od wartości średniej:

$$\delta_{1i} = t_1 - t_{1i}, \quad (4.31)$$

stąd:

$$t_{1i} = t_1 - \delta_{1i}. \quad (4.32)$$

**Całkowity czas opadania  $t_2$**  – czas opadania kulki na drodze 30 mm, wyznaczony jako średni z  $n_2 = 3$  pomiarów:

$$t_2 = \frac{\sum_{j=1}^{n_2} t_{2j}}{n_2} = \frac{t_{21} + t_{22} + t_{23}}{3}; \text{ dla } j = 1, 2, \dots, n_2; n_2 = 3. \quad (4.33)$$

Odchylenie od wartości średniej:

$$\delta_{2j} = t_2 - t_{2j}, \quad (4.34)$$

stąd:

$$t_{2j} = t_2 - \delta_{2j}. \quad (4.35)$$

**Średni czas opadania  $t_s$**  – wyznaczony jako średnia arytmetyczna z czasów: półówkowego  $2t_1$  i całkowitego  $t_2$ :

$$t_s = \frac{2t_1 + t_2}{2} = \frac{1}{2} \left( \frac{2 \sum_{i=1}^{n_1} t_{1i}}{n_1} + \frac{\sum_{j=1}^{n_2} t_{2j}}{n_2} \right); \quad (4.36)$$

dla  $n_1 = n_2$  oraz dla  $2n_1 = 2n_2 = n = 6$  będzie:

$$t_s = \frac{2t_{11} + 2t_{12} + 2t_{13} + t_{21} + t_{22} + t_{23}}{n}. \quad (4.37)$$

Średni czas  $t_s$  można zatem wyznaczyć jako:

$$t_s = \frac{\sum_{k=1}^n t_{sk}}{n}; \text{ dla } k = 1, 2, \dots, n; n = 6. \quad (4.38)$$

Odchylenie od wartości średniej:

$$\delta_k = t_s - t_{sk}. \quad (4.39)$$

Wykorzystując wartości odchyłeń dla czasów połówkowego i całkowitego można określić relację między opisanymi odchyleniami w postaci:

$$\sum_{k=1}^n \delta_k = \sum_{i=1}^{n_1} 2\delta_{1i} = \sum_{j=1}^{n_2} \delta_{2j} = 0. \quad (4.40)$$

Na podstawie powyższych zależności określono następujące równości:

$$\begin{aligned} \delta_1 &= \delta_{11}; & \delta_2 &= \delta_{12}; & \delta_3 &= \delta_{13}; \\ \delta_4 &= \delta_{21}; & \delta_5 &= \delta_{22}; & \delta_6 &= \delta_{23}. \end{aligned} \quad (4.41)$$

Do wyznaczenia niepewności pomiarowej, wykorzystuje się dla rozkładu normalnego prawdopodobieństwa zdarzeń (pomiarów), odchylenie standardowe (średni błąd kwadratowy) – dla małej ilości prób, tj.  $10 < n < 30$  w postaci:

$$\sigma_n = \sqrt{\frac{1}{n-1} \sum_{i=1}^n \delta_i^2}, \quad \text{dla } i = 1, 2, \dots, n, \quad (4.42)$$

Dla bardzo małej ilości pomiarów, tj.  $3 < n < 30$ , dla średniej arytmetycznej z pomiarów, stosuje się zależność na odchylenie standardowe w postaci [5, 43]:

$$\sigma = \sqrt{\frac{1}{n(n-1)} \sum_{i=1}^n \delta_i^2}, \quad (4.43)$$

lub

$$\sigma = \frac{1}{\sqrt{n}} \sigma_n. \quad (4.44)$$

W przypadku bardzo małej ilości pomiarów wyznaczanej wielkości, w celu uzyskania podobnej pewności jak dla dużej liczebności pomiarów w rozkładzie normalnym, stosuje się rozkład prawdopodobieństwa Studenta – odchylenie standardowe w rozkładzie Studenta dąży do wartości odchylenia w rozkładzie normalnym. Między odchyleniami standardowymi w rozkładach Studenta i normalnym zachodzi relacja:

$$\sigma_t = b_{n,\alpha} \sigma_n \quad \text{lub} \quad \sigma_t = b_{n,\alpha} \sigma, \quad (4.45)$$

gdzie:

- $\sigma_t$  – odchylenie standardowe w rozkładzie Studenta,
- $b_{n,\alpha}$  – współczynnik korekcyjny, wartość krytyczna rozkładu prawdopodobieństwa (prawdopodobieństwo uzyskania wartości  $b$  większej od krytycznej jest równe poziomowi istotności  $\alpha$ ).

Wartość krytyczną można określić jako:

$$b_{n,\alpha} = \frac{\delta}{\sigma_n} \sqrt{n} = \frac{\delta}{\sigma}, \quad (4.46)$$

gdzie:

- $\delta$  – odchylenie średnie, średnia arytmetyczna z wartości modułów odchyleń  $\delta_i$  od wartości średniej.

Odchylenie średnie pomiarów wyznacza zależność:

$$\delta = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n |\delta_i| \quad \text{dla} \quad i = 1, 2, \dots, n. \quad (4.47)$$

Współczynnik korekcyjny Studenta można wyznaczyć bezpośrednio z tablic dla znanego poziomu istotności  $\alpha$  oraz dla tzw. liczby stopni swobody określonej jako:

$$r = n - 1. \quad (4.48)$$

Wyznaczając wartość współczynnika korekcyjnego dla znanej ilości pomiarów (tym samym dla znanej wartości liczby stopni swobody), można przy pomocy tablic rozkładu Studenta określić poziom istotności  $\alpha$  lub granice jego wartości. Poziom istotności można wyrazić wartością bezwzględną lub względną (%). Znajomość poziomu istotności pozwala na wyznaczenie przedziału ufności, określającego prawdopodobieństwo, iż przeprowadzone pomiary zawierają się w granicach tego przedziału, który opisuje zależność:

$$\Delta = (1 - \alpha)100\%. \quad (4.49)$$

Dla wyznaczonych wartości współczynnika korekcyjnego Studenta [5, 43], wykorzystując tablice rozkładu, określono wartość liczbową poziomu istotności  $\alpha$  (tab. 4.5) dla obu przypadków obciążeń oraz dla dwóch zakresów czasu pomiaru:

- zakres do czasu odpowiadającego ostatniemu pomiarowi z serii 12 pomiarów (czas maksymalny),
- zakres do czasu odpowiadającego najbliższemu pomiarowi powyżej 30 min pomiaru (czas ok. 30 min).



Z analizy zebranych w tabeli 4.5 wartości współczynnika korekcyjnego Studenta oraz wartości poziomu istotności dla wykonanych pomiarów wynika:

- dla czasu pomiaru do wartości maksymalnej i stałego obciążenia maksymalna wartość poziomu istotności  $\alpha$  (poza jednym przypadkiem, tj. 19,2%, dla ciasta OP750) nie przekracza wartości 15%, zatem przedział ufności wynosi ponad 85%.
- dla czasu pomiaru do wartości maksymalnej i dla zmiennego obciążenia maksymalna wartość poziomu istotności  $\alpha$  (poza jednym przypadkiem, tj. 16,5%, dla ciasta OP750) również nie przekracza wartości 15%, co odpowiada przedziałowi ufności ponad 85%.
- dla czasu pomiaru w zakresie do ok. 30 min, dla obu przypadków obciążeń, maksymalna wartość poziomu istotności  $\alpha$  (poza jednym przypadkiem, tj. 16,5%, dla ciasta OP750 i dla  $M \neq \text{const}$ ) nie przekracza wartości 15%, co odpowiada przedziałowi ufności ponad 85%.

Tabela 4.5. Zakres wartości poziomu istotności  $\alpha$

Lp.	Rodzaj ciasta	Oś bezw. wsp. czasu	Zakres wartości współczynnika $b_{n,\alpha}$ min/max		Wartość poziomu istotności $\alpha$ max/min [%]	
			$M = \text{const}$	$M \neq \text{const}$	$M = \text{const}$	$M \neq \text{const}$
1	OP 500	max	1,9267/2,1039	1,9687/2,1073	11,75/8,3	11/8,1
		ok. 30'	1,9382/2,1039	1,9687/2,0972	11,4/8,3	11/8,5
2	DP500	max	1,7882/2,0843	2,0342/2,1037	14/8,75	9,7/8,2
		ok. 30'	1,8761/2,0843	2,065/2,1037	13/8,75	9,1/8,2
3	OP750	max	1,5202/2,0741	1,6707/2,084	19,2/8,95	16,5/8,75
		ok. 30'	1,5202/2,0741	1,7619/2,049	19,2/8,95	14,5/8,15
4	DP750	max	1,797/2,1005	1,7315/2,055	14/8,25	15/9,2
		ok. 30'	1,9517/2,1005	1,9119/2,055	11,1/8,25	10,2/9,2
5	OM70	max	1,8151/2,1057	1,8439/2,0973	13,7/8,2	13/8,5
		ok. 30'	1,8151/2,1057	1,9011/2,0467	13,7/8,2	12/9,4
6	DM70	max	1,7742/2,0592	1,9161/2,1043	14,5/8,25	11,6/8,2
		ok. 30'	1,9877/2,0592	1,9368/2,094	10,4/8,25	11,4/8,6
7	OM50	max	1,9626/2,0849	1,9483/2,1014	11/8,75	11,2/8,25
		ok. 30'	2,0243/2,0849	1,9483/2,1014	9,8/8,75	11,2/8,25
8	DM50	max	1,9269/2,0964	1,8755/2,0928	11,75/8,5	12,5/8,5
		ok. 30'	1,9979/2,0748	1,9674/2,0928	10,3/8,95	10,6/8,6

Dla rozważanego przypadku pomiarów, tj. dla średniego czasu opadania  $t_s$ , na podstawie zależności (4.39), (4.42) oraz (4.44) otrzymuje się wyrażenie na odchylenie standardowe wartości średniej, w postaci [56]:

$$\sigma_t = b_{n,\alpha} \sqrt{\frac{1}{n(n-1)} \sum_{k=1}^n \delta_k^2}, \text{ dla } k = 1, 2, \dots, n; n = 6. \quad (4.50)$$

Wyznaczone wartości niepewności pomiarowych dla wielkości związanych z pomiarami czasu opadania kulki w próbkowce z ciastem (wartości bezpośrednich wielkości pomiarowych) umożliwiają wyznaczenie odpowiednich wartości niepewności pomiarowych dla wielkości pochodnych (pośrednich wielkości pomiarowych). Niepewność pomiarową dla lepkości strukturalnej w postaci odchylenia standardowego wyznaczyć można wykorzystując odpowiednie wartości odchylenia standardowego dla średniego czasu opadania kulki jako:

$$\sigma_s = 10^{-3} MK \sigma_t. \quad (4.51)$$

Znajomość wartości bezwzględnej odchylenia standardowego dla lepkości pozwala na wyznaczenie wartości względnej tego odchylenia w postaci:

$$\sigma_w = \frac{\sigma_s}{\eta} 100\%. \quad (4.52)$$

Niepewność maksymalną (błąd maksymalny) wielkości mierzonej (np. lepkości) określa wyrażenie:

$$\Delta_{\max} = 3\sigma. \quad (4.53)$$

Najbardziej prawdopodobną wartość niepewności pomiarowej można określić z zależności na miarę dokładności pomiaru:

– w rozkładzie normalnym:

$$h = \frac{1}{\sigma_n \sqrt{2}}, \quad (4.54)$$

– w rozkładzie Studenta dla lepkości:

$$h = \frac{1}{\sigma \sqrt{2}}. \quad (4.55)$$

Odpowiednie dla pomierzonych wielkości bezpośrednich, wartości niepewności pomiarowych  $\sigma, \delta, \sigma_t, b_{n,\alpha}$  ujęto w tabelach 1a-16a (Aneks 2). Dla podstawowej wielkości pochodnej, tj. lepkości strukturalnej  $\eta$ , niepewność pomiarową w postaci bezwzględnej wartości odchylenia standardowego  $\sigma_s$  oraz względne odchylenie standardowe  $\sigma_w$  podano w tabelach 1b-16b. Analiza wartości niepewności pomiarowych, szczególnie względnego odchylenia standardowego pozwala na stwierdzenie, iż poza jednym przypadkiem (tj.  $\sigma_w = 12,2\%$ , ciasto OP500, tab. 1b) wartość odchylenia względnego nie przekracza 8,8%, co w zastosowaniach technicznych i naukowych, zwłaszcza w odniesieniu do materiału jakim jest ciasto, jest wartością zadawalającą.

#### 4.5.10. Wyrażenia modelujące właściwości reologiczne badanego ciasta

##### Wyrażenie funkcyjne $\eta(t)$

Zależność tę przedstawiono na wykresach dla obu przypadków zakresu czasów pomiarów. W pełnym zakresie czasu (rys. 4.14, 4.16, 4.18, 4.20; Aneks 3), dla wszystkich rodzajów ciast i obu sposobów obciążania, krzywe zależności  $\eta(t)$  opisuje równanie regresji w postaci wielomianu 2 lub 3 stopnia ze współczynnikami determinacji,  $R^2_{\min} = 0,987$  dla (OP i DP500) do  $R^2_{\max} = 0,9991$  dla (OP i DP750).

Dla ograniczonego do ok. 30 min. zakresu czasu pomiarów (rys. 4.3, 4.6, 4.9, 4.12) krzywa zależności  $\eta(t)$ , dla wszystkich rodzajów ciast i obciążeń, jest opisana funkcją wykładniczą umieszczoną na wykresie dla każdej krzywej, ogólnie w postaci [18, 19]:

$$\eta = \eta_0 e^{-\frac{1}{u}t} = \eta_0 \exp\left(-\frac{1}{u}t\right), \quad (4.56)$$

gdzie:

- $\eta$  – lepkość strukturalna,
- $\eta_0$  – lepkość początkowa materiału, dla  $t_p = 0$ ,
- $t$  – bezwymiarowy współczynnik czasu pomiaru
- $u$  – wykładnik potęgowy, ( $\frac{1}{u} = 0,0126 - 0,0422$ ).

Zakres zmienności współczynnika determinacji wynosi od  $R^2_{\min} = 0,9545$ , (OP i DP750) do  $R^2_{\max} = 0,9987$ , (OM i DM70).

##### Wyrażenie funkcyjne $\dot{\epsilon}(t)$

Zależność funkcyjna  $\dot{\epsilon}(t)$  w pełnym zakresie czasów pomiaru dla wszystkich rodzajów ciast i obu obciążeń określona jest krzywą (rys. 4.15, 4.17, 4.19, 4.21; Aneks 3) opisaną równaniem regresji w postaci wyrażenia wielomianowego od 1 do 3 stopnia ze współczynnikami determinacji w zakresie  $R^2_{\min} = 0,9876$  (OM i DM70), do  $R^2_{\max} = 0,9990$  (OP i DP750).

Dla ograniczonego do ok. 30 min. czasu pomiarów (rys. 4.4, 4.7, 4.10, 4.13), krzywa zależności funkcyjnej  $\dot{\epsilon}(t)$ , dla wszystkich rodzajów ciast i obciążeń może być opisana funkcją wykładniczą w ogólnej postaci [18, 19]:

$$\dot{\epsilon}(t) = \dot{\epsilon}_0 e^{\frac{1}{w}t} = \dot{\epsilon}_0 \exp\left(\frac{1}{w}t\right), \quad (4.57)$$

gdzie:

- $\dot{\epsilon}$  – prędkość odkształceń,

- $\dot{\varepsilon}_0$  – współczynnik prędkości odkształceń, dla  $t_p = 0$ ,  
 $t$  – bezwymiarowy współczynnik czasu pomiaru,  
 $w$  – wykładnik potęgowy ( $1/w = 0,0162-0,0476$ ).

Zakres wartości współczynnika determinacji wynosi od  $R^2_{\min} = 0,9547$  (OP i DP750) do  $R^2_{\max} = 0,9986$  (OM i DM70).

### Wyrażenie funkcyjne $\tau(\dot{\varepsilon})$

Zależność  $\tau(\dot{\varepsilon})$  na wykresach (rys. 4.2, 4.5, 4.8, 4.11) przedstawiono wyłącznie w pełnym zakresie przedziału czasowego prowadzonych pomiarów, co odpowiada wartości bezwymiarowego współczynnika  $t$  czasu pomiaru bliskiego jedności. Dla wszystkich rodzajów badanych ciast i dla obu przypadków obciążeń, przebieg zależności  $\tau(\dot{\varepsilon})$  na wykresach posiada jednakowy charakter i jednakową ogólną postać – zależność typu potęgowego [18, 19]:

$$\tau(\dot{\varepsilon}) = \eta \dot{\varepsilon}^{\frac{1}{m}}. \quad (4.58)$$

Podstawiając do wyrażenia (4.58), odpowiednio:  $\dot{\varepsilon} = \dot{\varepsilon}_0$ ;  $\eta = \eta_0$ , dla  $t_p = 0$  oraz  $t = 0$ ; otrzymuje się zależność na naprężenie początkowe:

$$\tau_0 = \eta_0 \dot{\varepsilon}_0^{\frac{1}{m}}. \quad (4.59)$$

Opierając się na wykresach  $\tau(t)$  oraz powyższych zależnościach, wyrażenie modelowe dla ciasta będzie:

$$\tau(\dot{\varepsilon}) = \tau(t) = \tau_0 + \eta \dot{\varepsilon}^{\frac{1}{m}}, \quad (4.60)$$

gdzie:

- $\tau_0$  – początkowe naprężenie ścinające, granica płynięcia,  
 $\eta$  – lepkość strukturalna,  
 $\dot{\varepsilon}$  – prędkość odkształcenia,  
 $m$  – wykładniki potęgowe ( $1/m = 0,1496 - 0,2285$ ).

Dla stałego obciążenia ( $M = \text{const}$ ) zależność wg (4.60) redukuje się do (pokazanej na wykresach) postaci:

$$\tau(\dot{\varepsilon}) = \tau_0.$$

Postać zależności (4.60) odpowiada formą matematyczną wyrażeniu modelowemu Herschela-Bulkleya (dla argumentów niezależnych od czasu), wynikającemu z wyrażenia dla modelu Szulmana (4.20) przy założeniu, że wykładnik  $n = 1$ .

Występujące w zależności (4.60) argumenty  $\eta$  i  $\dot{\epsilon}$  są funkcjami czasu, co powoduje, iż w ogólnym przypadku również naprężenie  $\tau$  jest funkcją czasu (jego bezwymiarowego współczynnika  $t$ ):

$$\tau = f(\eta, \dot{\epsilon}, t).$$

Dla zakresu pomiaru ok. 30 min, w którym określono formułę (4.60), po podstawieniu do niej zależności (4.56) i (4.57), otrzymuje się [19]:

$$\tau(t) = \tau_0 + \eta_0 \dot{\epsilon}_0^m e^{\left(\frac{1}{m} \frac{1}{w} - \frac{1}{u}\right)t}, \quad (4.61)$$

lub

$$\tau(t) = \tau_0 + \eta_0 \dot{\epsilon}_0^m \exp\left[\left(\frac{1}{m} \frac{1}{w} - \frac{1}{u}\right)t\right]. \quad (4.62)$$

Wartości wykładników oraz współczynników początkowych dla poszczególnych rodzajów krzywych, odpowiadających rodzajom ciast i sposobowi obciążania podczas badań, podano w zależnościach opisujących krzywe na odpowiednich wykresach (rys. 4.2-4.13), dodatkowo wartości tych współczynników zestawiono w tabeli 4.6. Z analizy wartości wykładników i wielkości początkowych z tabeli 4.6 wynika, że zmienność tych wartości zawarta jest w zakresie:

$$\begin{aligned} \frac{1}{m} &\in (0,1496 - 0,2285); & \eta_0 &\in (3385 - 5482); & \text{Pa s,} \\ \frac{1}{w} &\in (1,2999 - 3,8068); & \dot{\epsilon}_0 &\in (4,3351 - 7,2357); & \text{s}^{-1}, \\ \frac{1}{u} &\in (-3,3731 - 1,3001); & \tau_0 &\in (7,85 - 12,26); & \text{kPa.} \end{aligned}$$

Bezwymiarowy współczynnik  $t$  czasu pomiaru:  $t \in (0 - 0,4375)$ .  
Można zatem zależność (4.61) przedstawić w dogodnej postaci:

$$\tau = \tau_0 + \tau_0 e^{\frac{t}{\lambda}}, \quad (4.63)$$

gdzie:

$\frac{1}{\lambda}$  – bezwymiarowy wykładnik zastępczy:

$$\frac{1}{\lambda} = \left(\frac{1}{m} \frac{1}{w} - \frac{1}{u}\right). \quad (4.64)$$

Tabela 4.6. Wartości wykładników i wielkości początkowych w zależnościach modelujących właściwości reologiczne

Rodzaj ciasta	Oznaczenia krzywej	Wykładniki			Lepkość początkowa $\eta_0$ [Pa s]	Prędkość odkształcenia początkowego $\dot{\epsilon}_0$ [s <sup>-1</sup> ]	Obciąż. i naprężenia początkowego $M_0/\tau_0$ [kPa]
		1/m	1/u	1/w			
		[-]	[-]	[-]			
OP500	1b		-1,6726	1,8163	4144,8	4,6206	90/8,83
	3b	-0,2285	-1,9542	2,4797	4455	4,3351	100/9,81
DP500	2b		-2,804	2,8040	4382,8	5,5946	115/11,28
	4b	-0,1496	-3,3731	3,8068	4636,7	5,2737	120/11,77
OP750	5b		-2,1126	2,1124	3599,1	5,4515	80/7,85
	7b	-0,2183	-2,5932	3,1016	3829,2	5,1209	80/7,85
DP750	6b		-2,3087	2,3097	3622,7	6,7692	100/9,81
	8b	-0,1818	-2,4894	2,9505	3384,9	7,2357	90/8,83
OM70	9b		-1,5803	1,5803	4532,2	5,4101	115/11,28
	11b	-0,1927	-2,3166	2,7468	5054,7	4,8397	120/11,77
DM70	10b		-1,6614	1,6614	5286,2	4,6384	125/12,26
	12b	-0,1861	-1,8172	2,1880	5482	4,4778	125/12,26
OM50	13b		-1,3001	1,2999	5399	4,5418	125/12,26
	15b	-0,2128	-2,0092	2,4327	5182,1	4,7086	125/12,26
DM50	14b		-1,3602	1,3601	5337,3	4,5941	115/11,28
	16b	-0,1958	-1,9258	2,3108	5384,5	4,5441	115/11,28

Zależność przedstawiona w postaci (4.60) oraz zawierającej rozwiniętą formę wykładników w postaci (4.61) a także (4.63) ze skróconą formą wykładnika – jest poszukiwaną zależnością modelową właściwości badanych rodzajów ciast w przedziale czasu do ok. 30 min.

Wobec tego, iż wyrażenie (4.61) jest funkcją czasu należy oszacować stopień wpływu czasu na opis odkształceń materiału, wykorzystując kryterialną liczbę Debory [22] w postaci:

$$De = \frac{t_m}{t_{pr}}, \quad (4.65)$$

gdzie:

$t_m$  – czas charakterystyczny dla płynącego materiału,

$t_{pr}$  – czas charakterystyczny procesu dla przepływu.

Stosowanie powyższego kryterium wiąże się z uwzględnieniem tzw. funkcji wiskozymetrycznych –  $N_1, N_2, N_3$ , opisujących składowe normalne tensora naprężeń w przestrzeni kartezjańskiej zależnościami:

$$N_1 = \sigma_{xx} - \sigma_{yy} = \tau_{xx} - \tau_{yy}, \quad (4.66)$$

$$N_2 = \sigma_{yy} - \sigma_{zz} = \tau_{yy} - \tau_{zz}, \quad (4.67)$$

$$N_3 = N_1 + N_2. \quad (4.68)$$

Dla płynów newtonowskich:

$$\tau = \eta \dot{\epsilon}, \quad N_1 = 0, \quad N_2 = 0. \quad (4.69)$$

Dla płynów nienewtonowskich (przy małych prędkościach ścinania):

$$\tau = \eta_e \dot{\epsilon}, \quad \varphi_1 = \frac{N_1}{\dot{\epsilon}^2}, \quad \varphi_2 = \frac{N_2}{\dot{\epsilon}^2}, \quad (4.70)$$

gdzie:

$\varphi_1, \varphi_2$  – współczynniki naprężeń normalnych.

Dla płynów wykazujących znaczącą sprężystość funkcja wiskozymetryczna  $N_1$  przyjmie następującą wartość:

$$\frac{N_1}{2\tau} > 0,5.$$

Funkcja wiskozymetryczna  $N_2$  posiada wartość:

$$N_2 \ll 0.$$

Relacje pomiędzy obiema funkcjami wiskozymetrycznymi zwykle kształtują zależność:

$$|N_2| \ll N_1. \quad (4.71)$$

Na ogół wystarcza przyjęcie maksymalnej wartości funkcji  $N_2$ , tj.  $N_2 = 0$ .

W wielu zagadnieniach technicznych wystarcza na ogół przyjęcie za czas  $t_m$  wartości stałej czasowej w odpowiednim równaniu modelowym płynu. Szacunkowy rząd wartości czasu  $t_m$  można określić z zależności:

$$t_m \approx -\frac{\Phi_1}{\eta_e} = \frac{N_1}{\tau \cdot \dot{\epsilon}}. \quad (4.72)$$

Szacunkowy czas charakterystyczny procesu płynięcia  $t_{pr}$ , można określić z zależności:

$$t_{pr} \approx \frac{L_c}{v_c}, \quad (4.73)$$

gdzie:

- $L_c$  – charakterystyczny wymiar liniowy w kierunku przepływu,
- $v_c$  – charakterystyczna prędkość przepływu (np. prędkość deformacji).

Dla małych wartości liczby  $De$  wpływ efektów pamięci można zaniedbać i przybliżone relacje między wielkościami dynamicznymi i kinematycznymi przepływu można określić uogólnieniem prawa Newtona. Natomiast dla wartości liczby  $De$  większych, tj. wynikających z porównywalnych wartości czasów charakterystycznych, efekty pamięci w opisie przepływu powinny być uwzględnione [19, 22].

Dla występujących w doświadczalnym wyznaczaniu wartości mierzonych wielkości reologicznych ciasta tj.:

$$t_{pr} \approx \frac{L_c}{v_c} \approx \frac{0,03}{0,0003} = 100 \text{ s}; \quad (4.74)$$

wyznaczyć można wartość czasu  $t_m$  dla  $N_1 \approx \tau$  oraz  $\dot{\epsilon} \approx 5 \text{ s}^{-1}$ :

$$t_m = \frac{N_1}{\tau \cdot \dot{\epsilon}} \cong \frac{1}{\dot{\epsilon}} \cong 0,2 \text{ s}, \quad (4.75)$$

zatem liczba Debory będzie:

$$De = \frac{t_m}{t_{pr}} \cong 0,002. \quad (4.76)$$

Wartości liczby  $De$  można uznać za wystarczająco małą, gdyż oba czasy charakterystyczne  $t_m$  oraz  $t_{pr}$  nie są porównywalne (różnica dwóch rzędów wielkości). Ponadto uwzględniając krótki czas trwania pojedynczego zabiegu formowania (ok. 10 s dla jednej tacy z kęsami), można w konsekwencji zaniedbać efekty pamięci procesu odkształcania ciasta, co prowadzi do pominięcia bezwymiarowego współczynnika  $t$  czasu pomiaru w zależnościach reologicznych określonych postaciami (4.61) i (4.63).

Wykorzystując zależność (4.24) dla modelu Szulmana, w powiązaniu z zależnością (4.60), odpowiadającą wyrażeniu modelowemu Herschela – Bulkleya, można zależność (4.60) przedstawić w zapisie tensorowym w postaci:



$$\sigma_{ij} = |\mathbf{p}\delta_{ij}| + 2 \left[ \tau_o + \eta A_H^{\frac{1}{m}} \right] A_H^{-1} \dot{\epsilon}_{ij}, \quad (4.77)$$

gdzie:

$$\Gamma_H = \left[ \tau_o + (\eta_H A_H)^{\frac{1}{m}} \right] A_H^{-1} = \left[ \tau_o + \eta A_H^{\frac{1}{m}} \right] A_H^{-1}. \quad (4.78)$$

Następnie, formalnie podobną do wyrażenia modelowego (4.77), postać eksperymentalnie wyznaczonego wyrażenia modelowego (4.61) i (4.63) dla badanych rodzajów ciast – uwzględniając wartość liczby Debory i jej konsekwencje – można analogicznie do (4.77) i (4.78) przedstawić:

– funkcjonał lepkości uogólnionej

$$\Gamma_E = \left( \tau_o + \tau_o A_E^{\frac{1}{m}} \right) A_E^{-1} = \left( \tau_o + \eta_o \dot{\epsilon}_o^{\frac{1}{m}} A_E^{\frac{1}{m}} \right) A_E^{-1}, \quad (4.79)$$

– model matematyczny właściwości ciasta, wyznaczony eksperymentalnie, w zapisie trójwymiarowym:

$$\sigma_{ij} = |\mathbf{p}\delta_{ij}| + 2\Gamma_E \dot{\epsilon}_{ij} = |\mathbf{p}\delta_{ij}| + 2 \left( \tau_o + \eta_o \dot{\epsilon}_o^{\frac{1}{m}} A_E^{\frac{1}{m}} \right) A_E^{-1} \dot{\epsilon}_{ij}. \quad (4.80)$$

W powyższych zależnościach, dla wyznaczenia natężenia prędkości deformacji  $A_E$ , można wykorzystać wyrażenie w ogólnej postaci (4.10) przedstawione we współrzędnych kulistych.

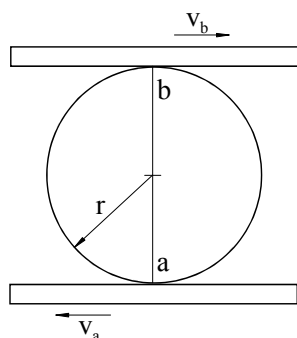
## 5. MODELOWANIE PROCESU FORMOWANIA

Kęs ciasta w trakcie formowania ulega przemieszczaniu oraz zmienia się jego kształt (deformuje się), w wyniku czego powstaje kształt kulistopodobny. Ruch kęsa i jego deformacje zachodzą pod wpływem sił będących przyczyną ruchu i tworzących swoje pole.

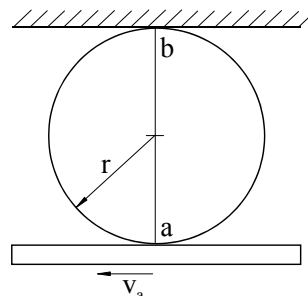
Rozważania dotyczące procesu formowania kęsa ciasta ograniczono do opisu oddziaływania pola wielkości mechanicznych (kinematycznych i dynamicznych). Wpływ wielkości niemechanicznych (cieplnych i biochemicznych), ze względu na krótki czas trwania operacji formowania (kilka do kilkunastu sekund) oraz praktycznie niezmiennie wielkości termodynamiczne (temperatura, wymiana ciepła), został pominięty.

### 5.1. KONFIGURACJA FORMOWANIA

W celu określenia zależności między wielkościami kinematycznymi opisującymi formowanie kęsa ciasta, opracowano konfigurację geometryczną modelującą formowanie kęsa opierając się na przedstawionym w uproszczeniu sposobie formowania kęsa w kształt kulisty, między dwiema płaskimi powierzchniami roboczymi – rysunki 5.1, 5.2.



Rys. 5.1. Formowanie kuliste między dwiema powierzchniami ruchomymi



Rys. 5.2. Formowanie kuliste między powierzchnią ruchomą i nieruchomą

Formowanie może zachodzić dla przypadku [16, 47], gdy obie powierzchnie wykonują ruch formujący (rys. 5.1) oraz gdy tylko jedna powierzchnia wykonuje taki ruch, a druga jest nieruchoma (rys. 5.2). Układ z rysunku 5.2 wykorzystany zostanie dla przeprowadzenia rozważań oraz analizy kinematyki kęsa ciasta w ruchu obiegowym i obrotowym i dalej nazywany będzie układem otwartym (podstawowym).



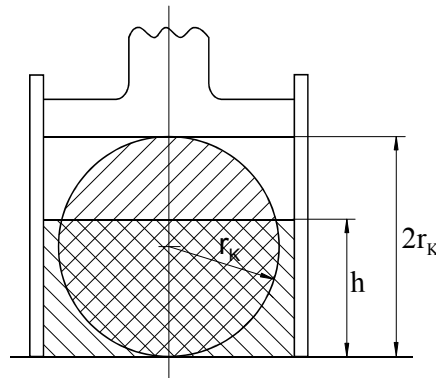
$$R_o = \sqrt{R^2 + r^2}. \quad (5.2)$$

W środku 0 formowanego kęsa (środek masy i środek geometryczny) umieszczony został ruchomy kartezjański układ odniesienia  $(x, y, z)$ , którego początek jest przemieszczany końcem promienia  $R_o$ . Ruchomy układ współrzędnych prostokątnych jest przemieszczany ruchem postępowym wzdłuż okręgu obtaczania (nie obracając się) – układ ten krąży razem z formowanym kęsem. Również w środku 0 znajduje się początek następnego układu odniesienia – układu współrzędnych kulistych (sferycznych)  $(r, \vartheta, \varphi)$ . W układzie tym położenie promienia wodzącego  $r$  określone jest kątami  $\vartheta$  (od osi  $z$ ) oraz  $\varphi$  (od osi  $x$ ). Podczas formowania wartości kątów  $\vartheta$  i  $\varphi$  są funkcjami częstości obrotów własnych kęsa  $n_k$ , w postaci:

$$\vartheta \in (0, \pi n_k), \quad (5.3)$$

$$\varphi \in (0, 2\pi n_k). \quad (5.4)$$

Koniec promienia  $r$  (na powierzchni kuli) wyznacza kolejne miejsca styku kęsa z powierzchniami formującymi oraz jednocześnie miejsce przyłożenia (zaczepienia) prędkości formujących. Miejsca styku zmieniają swoje współrzędne w układzie współrzędnych kulistych, obiegając całą powierzchnię kęsa, aż do jego uformowania. Miejsce styku kęsa z powierzchnią formującą (aktywną-dolną i bierną-górną) znajduje się jednocześnie na obwodzie okręgu obtaczania i krąży (jako ciągle nowe na kęsie) po tym okręgu.



Rys. 5.4. Transformacja kęsa z postaci prostopadłościowej w kulistą

Objętość ciasta, w której zachodzą deformacje formujące kęs w kształt kulisty ograniczona jest powierzchnią płynną wyznaczoną końcem promienia wodzącego  $r$ . Zmienna (aktualna) wartość promienia  $r$  może przyjmować wartości odpowiadające połowie wysokości bryły prostopadłościowej ciasta po podzie-

leniu (rys. 5.4) do wartości promienia odpowiadającego uformowanemu w kształt kulisty kęsowi, jak poniżej:

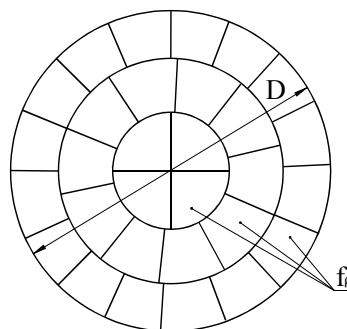
$$r \in \left( \frac{h}{2}, r_k \right). \quad (5.5)$$

W przedstawionym układzie (rys. 5.3), określającym konfigurację formowania, wyznaczone zostaną odpowiednie wielkości kinematyczne.

## 5.2. KINEMATYKA FORMOWANIA KULISTEGO

Analiza kinematyczna procesu formowania kształtek kulistych przeprowadzona zostanie opierając się na przebiegu formowania kęsów ciasta w maszynach dzieląco – formujących z nożem gwiazdzistym. Proces formowania modeluje konfiguracja formowania z rysunku 5.3.

Kształt geometryczny nieuformowanego (bezpośrednio po podziale) kęsa wtórnego ciasta jest prostopadłościanem o podstawie odpowiadającej kształtem, powierzchniom między płytkami (ostrzami) noża gwiazdzistego (rys. 5.5) i o wysokości odpowiadającej grubości sprasowanego kęsa pierwotnego (rys. 1.10, 1.11).



Rys. 5.5. Komory dzielące i formujące noża gwiazdzistego

W trakcie formowania zachodzi znaczna deformacja kęsa wtórnego (z bryły prostopadłościennej w bryłę kulistą, rysunek 5.4), spowodowana jego przemieszczaniem między powierzchniami formującymi w komorze roboczej (tj. płytkami noża, tacą formującą i płytą segmentową).

Opis analityczny przebiegu formowania kęsa dotyczy fazy tuż przed wytworzeniem kształtu kulistego kęsa ciasta. Objętość kęsa w postaci prostopadłościennej jest równa objętości w postaci kulistej, na tej podstawie wykorzystując rysunek 5.4 oraz rysunek 5.5 można wyznaczyć promień  $r_k$  kształtki kulistej, jako:

$$r_k = \sqrt[3]{\frac{3 f_p \cdot h}{4 \pi}}, \quad (5.6)$$

gdzie:

- $r_k$  – promień końcowy kształtki kulistej,
- $f_p$  – powierzchnia między płytkami noża ( $f_p = \text{const}$ ),
- $h$  – grubość (wysokość) kęsa po sprasowaniu i podzieleniu.

Powierzchnię  $f_p$  między płytkami noża gwiazdzystego można wyznaczyć z oczywistych zależności geometrycznych dla przyjętej ilości  $\lambda$  komór roboczych w nożu gwiazdzystym ( $\lambda$  – krotność podziału noża) i określonej zewnętrznej średnicy  $D$  noża. Grubość kęsa  $h$  można wyznaczyć znając masę  $M_k$  kęsa pierwotnego, gęstość ciasta oraz średnicę noża – przy założeniu nieściśliwości ciasta.

W następnych podpunktach przedstawione zostaną poszczególne przypadki formowania kęsa ciasta.

#### a) Formowanie kęsa w układzie otwartym

Formowany kęs pokazany na rysunkach 5.2 i 5.3 przemieszczany jest ruchami dolnej (aktywnej) powierzchni formującej po okręgu obtaczania  $R$  w przestrzeni między obiema powierzchniami formującymi [16]. Jednoczesne oddziaływanie obu powierzchni skutkuje pojawieniem się prędkości  $\mathbf{v}_F$  formowania (wektor wypadkowy) w obu miejscach (a i b) styku kęsa z powierzchniami formującymi. Z analizy konfiguracji formowania (rys. 5.3), w aspekcie rozkładu wektorów prędkości działających na kęs w miejscu jego styku z powierzchniami formującymi wynika, iż wektor prędkości wypadkowej  $\mathbf{v}_F$  może być przedstawiony w układzie współrzędnych  $(x, y, z)$  w postaci sumy wektorów składowych:

$$\mathbf{v}_F = \mathbf{v}_x + \mathbf{v}_y + \mathbf{v}_z = \mathbf{v}_K + \mathbf{v}_z, \quad (5.7)$$

$$v_F = \sqrt{v_x^2 + v_y^2 + v_z^2}. \quad (5.8)$$

Wektor  $\mathbf{v}_K$ , działający na powierzchni formującej jest jednocześnie styczny do powierzchni kęsa i jest określony zależnościami:

$$\mathbf{v}_K = \mathbf{v}_x + \mathbf{v}_y, \quad (5.9)$$

$$v_K = \sqrt{v_x^2 + v_y^2}. \quad (5.10)$$

W układzie współrzędnych biegunowych  $(R, \beta)$ , związanym z powierzchnią formującą, wektor  $\mathbf{v}_K$  można wyrazić zależnościami:

$$\mathbf{v}_K = \mathbf{v}_R + \mathbf{v}_\beta, \quad (5.11)$$

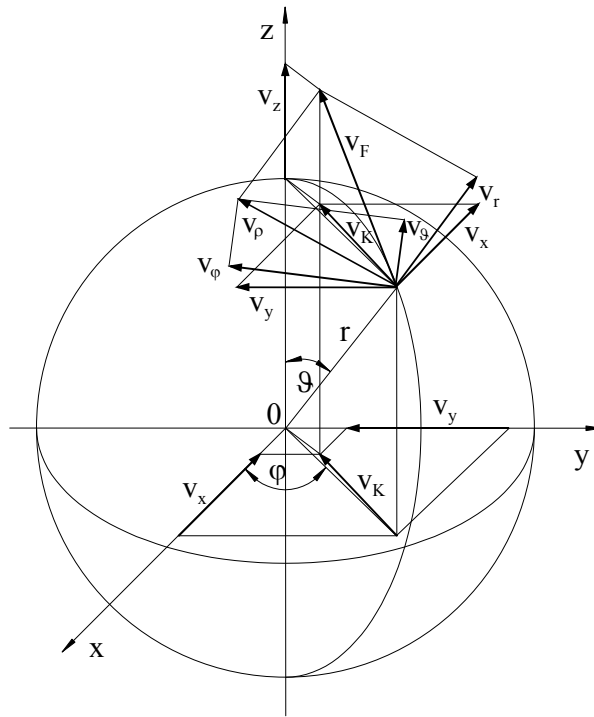
$$v_K = \sqrt{v_R^2 + v_\beta^2}, \quad (5.12)$$

gdzie:

$\mathbf{v}_\beta$  – składowa wektora  $\mathbf{v}_K$ , obwodowa, styczna do okręgu R

$\mathbf{v}_R$  – składowa wektora  $\mathbf{v}_K$  wzdłuż promienia R.

Na rysunku 5.6 przedstawiono kęs kulisty z rysunku 5.3 z pokazanym rozkładem prędkości na powierzchni kęsa w układach współrzędnych z nim związanych, tj. współrzędnych prostokątnych (x, y, z) oraz kulistych (r,  $\varphi$ ,  $\vartheta$ ).



Rys. 5.6. Rozkład prędkości na powierzchni formowanego kęsa

Wektor wypadkowy  $\mathbf{v}_F$  prędkości formowania można przedstawić we współrzędnych kulistych w postaci sumy jego składowych:

$$\mathbf{v}_F = \mathbf{v}_r + \mathbf{v}_\varphi + \mathbf{v}_\vartheta = \mathbf{v}_r + \mathbf{v}_\rho, \quad (5.13)$$

$$v_F = \sqrt{v_r^2 + v_\varphi^2 + v_\vartheta^2}. \quad (5.14)$$

Składowe  $\mathbf{v}_\rho$ ,  $\mathbf{v}_\varphi$ ,  $\mathbf{v}_\vartheta$  znajdują się na płaszczyźnie stycznej do powierzchni kęsa w przemieszczającym się po jego powierzchni miejscu styku z powierzchniami roboczymi i jednocześnie prostopadłej do promienia  $r$ , kiedy spełnione są następujące warunki:

- wektor  $\mathbf{v}_\rho$  jest prostopadły do promienia  $r$ ,
- wektor  $\mathbf{v}_\varphi$  jest równoległy do płaszczyzny  $(x, y)$ ,
- wektor  $\mathbf{v}_\vartheta$  znajduje się w płaszczyźnie  $(r, z)$ .

Składowa  $\mathbf{v}_r$  znajduje się na promieniu  $r$  i jest prostopadła do płaszczyzny stycznej do powierzchni formowanego kęsa.

Wykorzystując zależności geometryczne przedstawione na rysunkach 5.3 i 5.6 można określić wzajemne relacje składowych wektora  $\mathbf{v}_F$  wynikające z zależności (5.7) i (5.13) w rozważanych układach współrzędnych oraz można wyznaczyć składowe wektora  $\mathbf{v}_F$  w układzie współrzędnych  $(x, y, z)$  w zależności od składowych wektora  $\mathbf{v}_F$  we współrzędnych kulistych.

W ogólnym przypadku (dowolne położenie wektora  $\mathbf{v}_F$  na powierzchni kęsa), moduły (długości) składowych wektora  $\mathbf{v}_F$  w układzie współrzędnych kulistych, zrzutowane na osie układu współrzędnych prostokątnych będą:

- składowa  $v_z$  w funkcji składowych  $\mathbf{v}_\vartheta, \mathbf{v}_r$ :

$$\mathbf{v}_z = \mathbf{v}_{\vartheta z} + \mathbf{v}_{rz}, \quad (5.15)$$

zatem składowa  $v_z$ , po zrzutowaniu jej składowych na oś  $z$ , będzie:

$$v_z = v_\vartheta \sin \vartheta + v_r \cos \vartheta, \quad (5.16)$$

- składowa  $v_x$  w funkcji składowych  $\mathbf{v}_\vartheta, \mathbf{v}_\varphi, \mathbf{v}_r$ :

$$\mathbf{v}_x = \mathbf{v}_{\vartheta x} + \mathbf{v}_{\varphi x} + \mathbf{v}_{rx}, \quad (5.17)$$

zatem składowa  $v_x$ , po zrzutowaniu jej składowych na płaszczyznę  $(x, y)$  oraz oś  $x$  przyjmie postać:

$$v_x = v_\vartheta \cos \vartheta \cos \varphi + v_\varphi \sin \varphi + v_r \sin \vartheta \cos \varphi, \quad (5.18)$$

- składowa  $v_y$  w funkcji składowych  $\mathbf{v}_\vartheta, \mathbf{v}_\varphi, \mathbf{v}_r$ :

$$\mathbf{v}_y = \mathbf{v}_{\vartheta y} + \mathbf{v}_{\varphi y} + \mathbf{v}_{ry}, \quad (5.19)$$

zatem składowa  $v_y$ , po zrzutowaniu jej składowych na oś  $y$ , będzie:

$$v_y = v_\vartheta \cos \vartheta \sin \varphi + v_\varphi \cos \varphi + v_r \sin \vartheta \sin \varphi, \quad (5.20)$$



Wyznaczone składowe  $v_x, v_y, v_z$ , wypadkowej prędkości  $v_F$ , po podstawieniu do wzoru (5.8) pozwalają na określenie tej wypadkowej we współrzędnych kulistych w postaci funkcji  $v_F(r, \vartheta, \varphi)$ .

Kęs w trakcie formowania wchodzi w kontakt z powierzchniami roboczymi swymi ciągle nowymi miejscami styku, dla których zależności powyższe przyjmują wartości odpowiadające granicznym wartościom kątów  $\vartheta$  oraz  $\varphi$  tj.  $\vartheta = 0$  i  $\varphi = \pi$ , a także  $\varphi = 0$  i  $\varphi = 2\pi$ . W miejscach styku kęsa z powierzchniami formującymi (w miejscach tych płaszczyzna styczna, na której rozłożono wektor wypadkowy  $\mathbf{v}_F$  pokrywa się z powierzchniami formującymi) zachodzą szczególne relacje między składowymi prędkości w układach współrzędnych, kulistym  $(r, \varphi, \vartheta)$  oraz kartezjańskim  $(x, y, z)$  w postaci:

$$\begin{aligned} \mathbf{v}_r &\cong \mathbf{v}_z, \\ \mathbf{v}_\rho &\cong \mathbf{v}_K, \\ \mathbf{v}_\varphi &\cong \mathbf{v}_y, \\ \mathbf{v}_\vartheta &\cong \mathbf{v}_x. \end{aligned} \quad (5.21)$$

Wykorzystując relacje (5.21) w miejscach styku kęsa, dla poszczególnych układów współrzędnych, będzie:

$$\mathbf{v}_K = \mathbf{v}_\rho = \mathbf{v}_x + \mathbf{v}_y = \mathbf{v}_R + \mathbf{v}_\beta = \mathbf{v}_\varphi + \mathbf{v}_\vartheta. \quad (5.22)$$

Na rysunku 5.7 przedstawiono rzut formowanego kęsa ciasta na płaszczyznę formującą  $(x_0, y_0)$ .

W miejscu styku kęsa pokazano rozkład działających prędkości. Składowe  $v_x$  oraz  $v_y$  prędkości  $v_K$ , działającej na powierzchni styku mogą być wyznaczone w układzie współrzędnych biegunowych  $(R, \beta)$  w postaci:

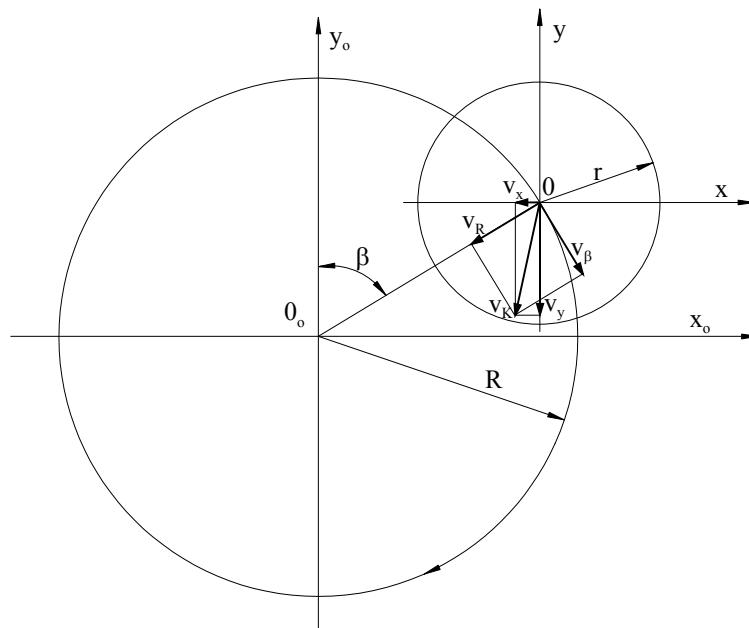
$$|v_x| = v_K \operatorname{tg}(90 - \beta), \quad (5.23)$$

$$|v_y| = v_K \operatorname{tg}\beta. \quad (5.24)$$

Te same składowe w funkcji składowych  $v_R$  i  $v_\beta$ , prędkości  $v_K$ , w układzie współrzędnych biegunowych, wyznaczają zależności:

$$|v_x| = v_R \operatorname{tg}\beta + v_\beta \operatorname{ctg}\beta, \quad (5.25)$$

$$|v_y| = v_R \operatorname{ctg}\beta + v_\beta \operatorname{tg}\beta. \quad (5.26)$$



Rys. 5.7. Rozkład prędkości w płaszczyźnie formowania kęsa

Na przemieszczanie kęsa między powierzchniami formującymi w stałym układzie odniesienia  $(x_0, y_0, z_0)$  składają się:

- ruch postępowy kęsa (obiegowy, krążący) po okręgu  $R$ ,
- ruch obrotowy kęsa wokół swego środka masy w układzie unoszonym  $(x, y, z)$ .

Ruch postępowy kęsa po okręgu wykonywany jest przez stół z tacą formującą, zapewniając jednakowe tory ruchu wszystkich punktów na powierzchni tacy – gwarantując jednakowy rozkład prędkości dla wszystkich kęsów znajdujących się jednocześnie na tacy i umożliwiając jednakowy przebieg formowania kęsów na całej powierzchni tacy (rys. 1.13). Ruch roboczy tacy wymusza jednocześnie ruchy obrotowe kęsów wokół swych środków masy.

Superpozycja obu ruchów daje ruch wypadkowy – formujący na powierzchni kęsa. Oba rodzaje ruchów przemieszczających określić można za pomocą odpowiednich prędkości kątowych:

- prędkość kątową  $\omega_R$  powierzchni formującej; aktywnej, wektor ten jest prostopadły do powierzchni formującej,
- prędkość kątową  $\omega_p$  obrotów kęsa wokół swego środka masy, wektor ten jest równoległy do powierzchni formującej i jest przemieszczany po okręgu obtaczania  $R$  z prędkością kątową  $\omega_R$ .

Prędkość kątową  $\omega_R$  ruchu kęsa po okręgu  $R$ :

$$\omega_R = \frac{\pi n_R}{30}. \quad (5.27)$$

Prędkość obwodowa (liniowa) ruchu kęsa po okręgu R:

$$v_\beta = \omega_R R = \frac{\pi n_R}{30} R, \quad (5.28)$$

gdzie:

$n_R$  – częstość obrotów stołu z tacą w ruchu po okręgu R.

Prędkość kątowna obracającego się kęsa, o aktualnym promieniu  $r$ , wokół swego środka masy, w ruchu po okręgu R:

$$\omega_p = \frac{v_K}{r} = \frac{\sqrt{v_\beta^2 + v_R^2}}{r} = \sqrt{\frac{R^2}{r^2} \omega_R^2 + \omega_r^2}. \quad (5.29)$$

Prędkość liniowa wzdłuż promienia R:

$$v_R = r\omega_r. \quad (5.30)$$

Wypadkowa prędkość kątowna formowania kęsa określona jest jako:

$$\omega_K = \sqrt{\omega_R^2 + \omega_p^2} = \sqrt{\left(1 + \frac{R^2}{r^2}\right) \omega_R^2 + \omega_r^2}. \quad (5.31)$$

Wypadkowa prędkość obwodowa formowania kęsa będzie:

$$v_F = \omega_K r = r \sqrt{\left(1 + \frac{R^2}{r^2}\right) \omega_R^2 + \omega_r^2}. \quad (5.32)$$

Wykorzystując wyznaczone prędkości, można wyznaczyć przyspieszenia dośrodkowe:

– w ruchu kęsa po okręgu R:

$$a_R = \frac{v_\beta^2}{R} = \omega_R^2 R, \quad (5.33)$$

– w ruchu obrotowym kęsa wokół swego środka:

$$a_r = \frac{v_K^2}{r} = \omega_p^2 r = r \sqrt{\frac{R^2}{r^2} \omega_R^2 + \omega_r^2}. \quad (5.34)$$

Przyspieszenie wypadkowe będzie:

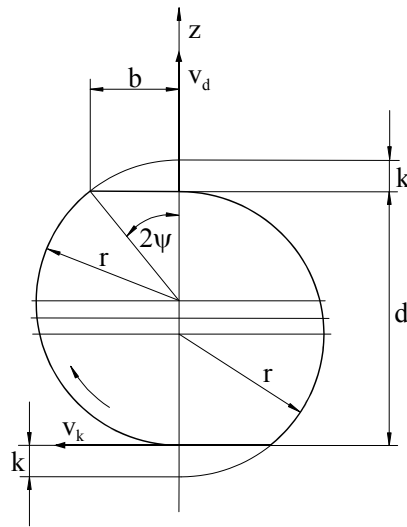
$$a_K = \sqrt{a_R^2 + a_r^2} = \sqrt{\left(1 + \frac{R^2}{r^2}\right) \omega_R^2 R^2 + \omega_r^2 r^2}. \quad (5.35)$$

Ilość obrotów (częstość obrotów) kęsa w jednostce czasu wyznacza zależność:

$$n_K = \frac{v_F}{2\pi r} = \frac{1}{2\pi} \sqrt{\left(1 + \frac{R^2}{r^2}\right) \omega_R^2 + \omega_r^2}. \quad (5.36)$$

### b) Deformacje kęsa w układzie otwartym

Kęs ciasta podczas formowania spowodowanego oddziaływaniem powierzchni formujących (rys. 5.1 i 5.2) podlega deformacjom pokazanym na rysunku 5.8 [17, 64].



Rys. 5.8. Deformacje kęsa w trakcie formowania kulistego

Dla przypadku formowania (rys. 5.2), pokazano na rysunku 5.8 wektor prędkości  $v_K$  (działający na powierzchni  $f_b$ ) w układzie współrzędnych biegunowych  $(R, \beta)$  oraz oś  $z$  układu współrzędnych  $(x, y, z)$ , związanego ze środkiem kęsa (rys. 5.3). Prędkość  $v_K$  w trakcie obtaczania daje w układzie  $(x, y, z)$  odpowiednie składowe  $v_x$  oraz  $v_y$ , natomiast w układzie  $(R, \beta)$  składowe  $v_R$  oraz  $v_\beta$ . Składowe te działają na powierzchni  $f_b$  i wyznaczone są z zależności trygonometrycznych w układzie współrzędnych biegunowych  $(R, \beta)$  w formie wzorów (5.23) i (5.24).

Z deformacją kęsa ciasta związana jest postępująca zmiana odległości  $d$  formujących powierzchni. Deformacja powodująca spłaszczenie kęsa na powierzchni  $f_b$  określona jest dwiema wielkościami, promieniową  $k$  oraz obwodem  $b$  (średnica spłaszczenia). Przyjęto, że na każde pół obrotu kęsa zmiana jego wymiarów określona jest przez wielkości  $k$  oraz  $b$ , charakteryzujące postępującą deformację kęsa. W rozważaniach obie wielkości traktowane są doraźnie jako miary zachodzącej deformacji. Deformacje te, na skutek złożonego kine-

matycznie ruchu kęsa, występują w ciągle zmieniających się miejscach styku powierzchni kęsa z powierzchniami formującymi.

Prędkość przemieszczania kęsa po okręgu obtaczania w ogólnym przypadku (rys. 5.1), kiedy obie powierzchnie formujące posiadają swoje prędkości (powierzchnia górna:  $v_b$ , dolna:  $v_a$ ) określa zależność:

$$v_o = \kappa \frac{v_a + v_b}{2} \cos \frac{\alpha}{2}. \quad (5.37)$$

Dla rzeczywistego układu obtaczania,  $\kappa$  jest współczynnikiem poślizgu materiału kęsa o powierzchnię formującą (zwykle dla ciasta, zależnie od rodzaju powierzchni formujących,  $\kappa = 0,6-0,8$ , współczynnik ten może przyjmować wielkości bliskie 1 dla powierzchni z gniazdami profilowanymi, ułatwiającymi formowanie). W rozważaniach dotyczących ruchów kęsa (obiegowego i obrotowego) pomija się poślizg materiału kęsa (ciasta) na powierzchniach formujących. W szczególnym przypadku, gdy górna powierzchnia formująca jest nieruchoma, tj. dla  $v_b = 0$  (rys. 5.2), wypadkową prędkość przemieszczania kęsa po okręgu obtaczania (przy pominięciu poślizgu) można wyrazić jako:

$$v_o = \frac{v_a}{2} \cos \frac{\alpha}{2}. \quad (5.38)$$

Rysunek 5.9 przedstawia w rozwinięciu na płaszczyznę, pobocznice walca o promieniu  $R$  prostopadłą do płaszczyzny okręgu  $R$  (powierzchni formowania) z położeniami formowanego kęsa o zmieniającym się promieniu (od  $r_1$  do  $r$ ) w dwóch miejscach obwodu okręgu obtaczania  $R$ , odpowiadających połowie obrotu kęsa. Na rysunku 5.9 przedstawiono składowe  $v_{a1}$  oraz  $v_{a2}$  prędkości  $v_a$  w miejscu styku kęsa z okręgiem  $R$ , która odpowiada prędkości  $v_\beta$  przedstawionej na rysunkach 5.3 i 5.7, zatem:

$$v_a = v_\beta.$$

Składowe prędkości  $v_a$  opisują zależności:

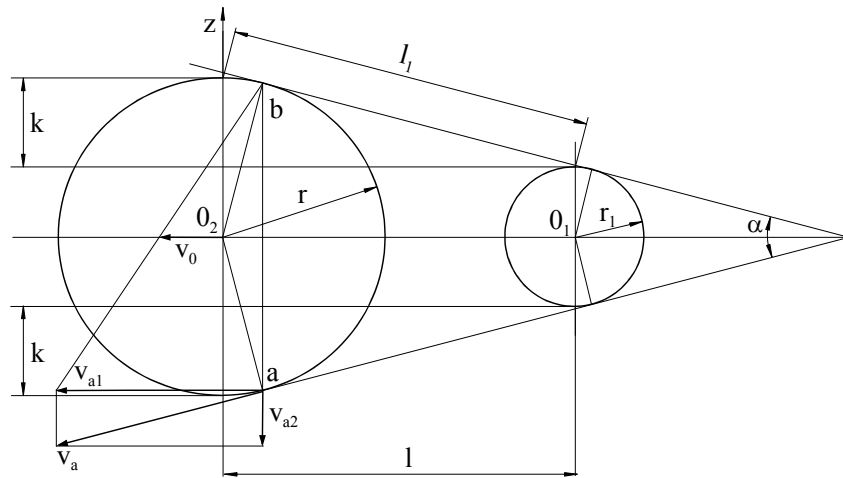
$$v_{a1} = v_a \cos \frac{\alpha}{2}, \quad (5.39)$$

$$v_{a2} = v_a \sin \frac{\alpha}{2}. \quad (5.40)$$

Składowa  $v_{a2}$  przemieszcza promieniowo masę kęsa, wpływając na jego deformację. Składowa  $v_{a1}$  zostanie wykorzystana do wyznaczenia prędkości przemieszczania  $v_o$  kęsa w ruchu obtaczającym.

Z analizy rysunku 5.9 wynika relacja opisująca prędkość środka kęsa jako:

$$v_o = \frac{1}{2} v_{a1}. \quad (5.41)$$



Rys. 5.9. Zmiana wymiarów kęsa formowanego między dwiema powierzchniami roboczymi

Dla wypadkowej prędkości  $v_0$  przemieszczania kęsa po okręgu  $R$ , zachodzi związek z częstością obrotów  $n_K$  kęsa, w postaci:

$$v_0 = \frac{\pi r}{30} n_K. \quad (5.42)$$

Wykorzystując zależności geometryczne z rysunku 5.9, przy założeniu dostatecznie małej wartości kąta  $\alpha$  i elementarnych wielkości kinematycznych, wyznaczyć można wielkości opisujące przemieszczanie kęsa między jego dwoma przykładowymi położeniami odpowiadającymi połowie obrotu kęsa.

Droga pokonywana przez kęs w trakcie jego przemieszczania z prędkością  $v_0$ , z jednego położenia w drugie, w jednostce czasu i dla elementarnych wielkości, będzie:

$$\int_0^l dl = \int_0^l v_0 dt. \quad (5.43)$$

Po uwzględnieniu (5.38) i wykonaniu całkowania, otrzymuje się zależność na drogę kęsa w jednostce czasu w postaci:

$$l = v_0 = \frac{v_a}{2} \cos \frac{\alpha}{2}. \quad (5.44)$$

Zmiana wymiarów kęsa o wartość  $k$  (deformacja promieniowa) na drodze  $l$ , wyrażona w formie elementarnych wartości tych wielkości przyjmie postać:

$$\int_0^k dk = \operatorname{tg} \frac{\alpha}{2} \int_0^l dl. \quad (5.45)$$

Wynikiem całkowania jest tzw. deformacja dla połowy obrotu kęsa, odpowiadająca opisowi z rysunku 5.8:

$$k = \operatorname{tg} \frac{\alpha}{2}. \quad (5.46)$$

Podstawiając (5.44) do (5.46) otrzymuje się:

$$k = \frac{v_a}{2} \sin \frac{\alpha}{2}. \quad (5.47)$$

Dla połowy obrotu kęsa na drodze  $l_1$  oraz dla małych wartości kąta  $\alpha$  można przyjąć:

$$l_1 = \pi r \approx l, \quad (5.48)$$

zatem deformacja promieniowa  $k$  według (5.46) przyjmie wartość:

$$k = \pi r \operatorname{tg} \frac{\alpha}{2}. \quad (5.49)$$

Z zależności między wielkościami kinematycznymi przedstawionymi na rysunku 5.9 można wyznaczyć wyrażenia:

$$\frac{k}{\pi r} = \sin \frac{\alpha}{2}, \quad (5.50)$$

stąd:

$$k = \pi r \sin \frac{\alpha}{2}. \quad (5.51)$$

Zależność (5.51) jest ściślejsza od (5.49), dla małych wartości kąta  $\alpha$ . Obie zależności mogą być traktowane równorzędnie.

Prędkość  $v_d$  (rys. 5.8) jest prędkością zmiany wymiarów formowanego kęsa związanej z powstawaniem deformacji promieniowej  $k$ , zatem  $v_d$  jest prędkością deformacji kęsa. Deformacja kęsa na połowę jego obrotu, w jednostce czasu, dla obu powierzchni formujących będzie:

$$\int_{t=0}^{t=1} v_d dt = 2 \int_0^k dk, \quad (5.52)$$

po scałkowaniu otrzymuje się:

$$2k = v_d. \quad (5.53)$$

Podstawiając do (5.51) zależność (5.47) otrzymuje się wyrażenie:

$$v_d = v_a \sin \frac{\alpha}{2}. \quad (5.54)$$

Zależność (5.54) odpowiada zależności (5.40) co prowadzi do konstatacji, iż:

$$v_d = v_{a2}. \quad (5.55)$$

Po podstawieniu do (5.53) zależności ((5.49) będzie:

$$v_d = 2\pi r \operatorname{tg} \frac{\alpha}{2}, \quad (5.56)$$

lub po podstawieniu (5.51):

$$v_d = 2\pi r \sin \frac{\alpha}{2}. \quad (5.57)$$

Z analizy kinematyki formowania (rys. 5.8 i 5.9) można określić zależność opisującą związek między deformacją promieniową  $k$  kęsa a prędkością deformacji  $v_d$  (na jeden obrót kęsa obracającego się z częstością  $n_k$  zachodzą cztery deformacje  $k$ ) w postaci:

$$k = \frac{1}{4} \frac{60v_d}{n_k} = 15 \frac{v_d}{n_k}. \quad (5.58)$$

Po podstawieniu do (5.58) zależności (5.42) i uwzględnieniu (5.41), otrzymuje się:

$$k = \pi r \frac{v_d}{v_{a1}}. \quad (5.59)$$

Zależności geometryczne przedstawione na rysunku 5.8 pozwalają na wyznaczenie deformacyjnego spłaszczenia kęsa – jako powierzchniowej deformacji  $f_b$  o średnicy  $b$ , w postaci:

$$b = \sqrt{r^2 - (r - k)^2} = \sqrt{2rk - k^2}. \quad (5.60)$$

Po uwzględnieniu zależności (5.48) oraz (5.51), otrzymuje się:

$$b = \pi r \sqrt{\frac{2}{\pi} \operatorname{tg} \frac{\alpha}{2} - \operatorname{tg}^2 \frac{\alpha}{2}}, \quad (5.61)$$



lub

$$b = \pi r \sqrt{\frac{2}{\pi} \sin \frac{\alpha}{2} - \sin^2 \frac{\alpha}{2}}. \quad (5.62)$$

Postępująca w trakcie formowania deformacja kęsa powoduje zmianę jego wymiarów – od wartości początkowej  $h$  do jego wartości końcowej, wyznaczonej średnicą  $2r_K$ . Zakres zmiany promienia kęsa po jego uformowaniu, będzie:

$$\int_{\frac{h}{2}}^{r_K} dr = r_K - \frac{h}{2} = v_d t_c. \quad (5.63)$$

gdzie:

$t_c$  – całkowity czas formowania; czas cyklu roboczego.

Teoretyczna ilość obrotów formujących kęsa  $n_f$  dla całego zakresu zmiany jego promienia:

$$n_f = \frac{r_K - \frac{h}{2}}{4k}. \quad (5.64)$$

Czas trwania formowania kęsa (czas cyklu roboczego) po uwzględnieniu (5.59) oraz (5.64):

$$t_c = \frac{r_K - \frac{h}{2}}{v_d} = \frac{60}{n_K} n_f. \quad (5.65)$$

W trakcie jednego obrotu kęsa (rys. 5.8) powstają cztery jego deformacje o powierzchni  $f_b$  (promieniowa  $k$  i obwodowa  $b$ ), zatem powierzchnia deformowana na 1 obrót kęsa, będzie:

$$4f_b = \pi b^2. \quad (5.66)$$

Teoretyczna, minimalna ilość obrotów kuli kęsa w celu objęcia całej powierzchni  $F_K$ , deformacjami powierzchniowymi  $f_b$ , wynosi:

$$n_b = \frac{F_K}{4f_b} = 4 \frac{r^2}{b^2}. \quad (5.67)$$

Wyznaczona ilość obrotów kęsa  $n_b$  powinna być skorelowana z (5.36) oraz z (5.67):

$$n_f \leq n_b \geq n_K. \quad (5.68)$$

Długość drogi formowania na powierzchni deformowanego kęsa:

$$L_f = n_b 2\pi r = 8\pi \frac{r^3}{b^2}. \quad (5.69)$$

Niezbędna, minimalna ilość obrotów  $n_0$  kęsa po obwodzie okręgu obtaczania  $L_R$  dla zrealizowania drogi formowania  $L_f$  na powierzchni kęsa:

$$n_0 = \frac{L_f}{L_R} = 4 \frac{r^3}{Rb^2}. \quad (5.70)$$

Częstość obrotów stołu  $n_R$  (zależności 5.27 i 5.28) wymuszająca formowanie i odpowiednią ilość  $n_f$  obrotów kęsa, powinny również być skorelowane:

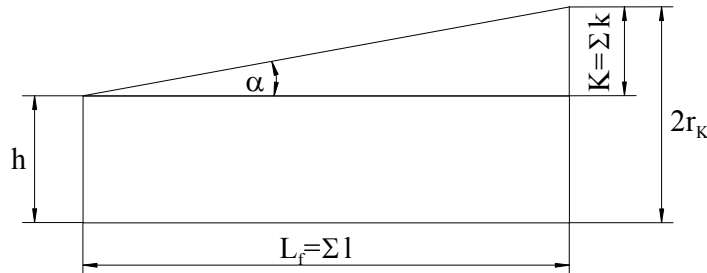
$$n_R = n_0 t_c \geq n_f. \quad (5.71)$$

Na rysunku 5.10 pokazano zmienność wymiarów kęsa w trakcie formowania w ujęciu schematycznym. Analogicznie do (5.45) i (5.63) można przedstawić zależność:

$$\int_0^K dk = \int_{\frac{h}{2}}^{r_k} dr, \quad (5.72)$$

po scałkowaniu której, będzie:

$$K = r_k - \frac{h}{2}. \quad (5.73)$$



Rys. 5.10. Schematyczne ujęcie zmiany wymiarów formowanego kęsa

Zależność (5.73) wykazuje, iż suma deformacji  $\Sigma k$  powinna być równa sumie zmian promienia  $r$  kęsa na sumarycznej drodze  $\Sigma l$  formowania kęsa. Wykorzystując zależności geometryczne przedstawione na rysunku 5.9, otrzymuje się:

$$K = L_f \operatorname{tg} \alpha. \quad (5.74)$$

Uwzględniając (5.73) oraz (5.69), będzie:

$$K = 2r_k - h = 2\pi r_k n_k \operatorname{tg}\alpha . \quad (5.75)$$

Dla jednakowych warunków formowania w układzie uproszczonym – intensywność obtaczania, właściwości materiału, warunki otoczenia – można przyjąć, iż wartość kąta  $\alpha$  odpowiada kątowi określonymu na rysunku 5.9.

Występujące w zależnościach w podpunktach a i b wielkości kinematyczne i parametry zależą (w ogólności) od właściwości reologicznych deformowanego materiału, reprezentowanych przez lepkość efektywną  $\eta_e$ . Zatem można, dla rozważanych przypadków formowania, zapisać zależności:

$$\begin{aligned} f_b &= f_b(\eta_e), \\ k &= k(\eta_e), \\ b &= b(\eta_e), \\ \alpha &= \alpha(\eta_e). \end{aligned} \quad (5.76)$$

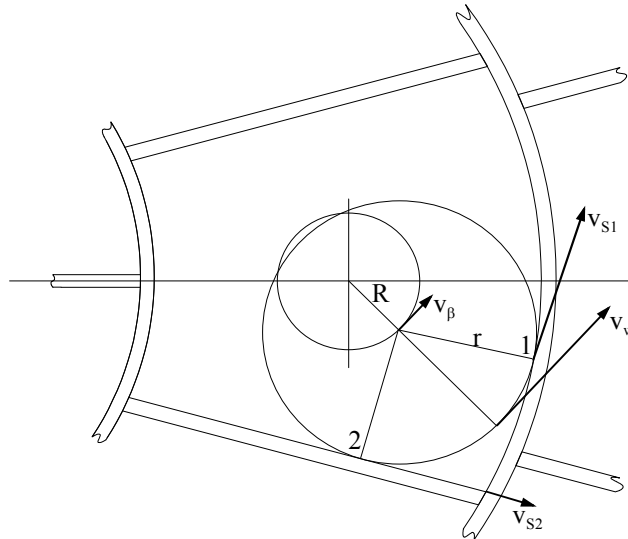
Podstawowe znaczenie w opisie formowania posiada prędkość deformacji  $\mathbf{v}_d$ , występująca w zależnościach opisujących deformacje zachodzące podczas formowania materiału kęsa. Wyznaczenie prędkości deformacji pozwoli na określenie odpowiednich wartości parametrów roboczych maszyny formującej kęsy ciasta.

Prędkość deformacji kęsa może być wyznaczona, przy uwzględnieniu właściwości reologicznych materiału, ze związków między tensorem prędkości deformacji  $\mathbf{D}$  (jego składowymi) a tensorem naprężeń  $\mathbf{S}$  (jego składowymi), występujących w równaniach ruchu płynu (materiału) opisujących formowanie.

### c) Formowanie kęsa w komorze roboczej

Formowanie kęsa w komorze formującej noża gwiazdzistego odpowiada rzeczywistemu układowi formowania w dzielarko-formierce. Formowanie w tym układzie polega na tym, iż kęs wprawiony w ruch powierzchnią formującą tacy, wykonuje ruch obtaczający wewnątrz nieruchomej komory, jej ścianki ograniczają zakres tego ruchu.

Na rysunku 5.11 pokazano występujące deformacje formowanego kęsa na skutek oddziaływania ścianek komory w płaszczyźnie przechodzącej przez środek kęsa i równoległej do płaszczyzny tacy formującej. Pokazane deformacje zachodzą na dwóch ściankach komory i posiadają (podobnie jak dla przypadku rys. 5.8) dwa rodzaje miar, deformacje promieniowe oraz deformacje obwodowe. Deformacje te zachodzą w trakcie ćwierci obrotu kęsa (co ćwierć obrotu kęsa kolejne dwie ścianki komory oddziałują na materiał kęsa).



Rys. 5.11. Deformacyjne oddziaływanie ścianek komory formującej

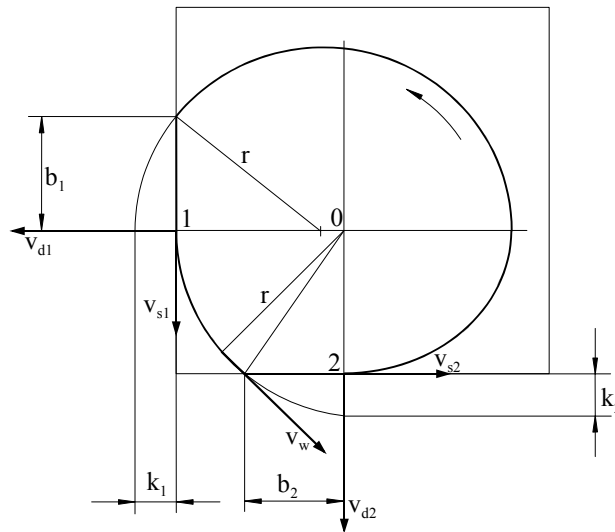
Przemieszczanie kęsa w komorze formującej (rys. 5.11) jest wynikiem oddziaływania na kęs następujących ruchów składowych:

- ruchu kęsa po okręgu obtaczania wewnątrz komory formującej (prędkość kątowna i obwodowa z zależności (5.27) i (5.28))
- ruchu obrotowego kęsa wywołanego powierzchnią formującą tacy (prędkość kątowna i obwodowa, zależności (5.29), (5.31), (5.32))
- ruchu obrotowego kęsa w płaszczyźnie równoległej do powierzchni tacy, wywołanego oddziaływaniem ścianek noża w komorze formującej.

Prędkość przemieszczania kęsa w komorze formującej od oddziaływania powierzchni formującej tacy określić można z analizy przebiegu tego oddziaływania (rys. 5.11 i 5.12) w miejscach styku 1 i 2 kęsa ze ściankami komory formującej. Na rysunku 5.12 przedstawiono uproszczony przekrój komory formującej o kształcie kwadratowym oraz pokazano powstające dodatkowe deformacje materiału kęsa posiadające średnice  $b_1$  i  $b_2$ . Deformacje te przyspieszają proces formowania. Na skutek ruchu obtaczającego i bezwładności kęsa, ścianki komory oddziałują biernie na kęs ciasta, powodując powstanie dodatkowych deformacji kęsa na jego obwodzie.

Prędkość środka kęsa w ruchu po okręgu obtaczania (rys. 5.11), wg (5.28):

$$v_{\beta} = \omega_R R . \quad (5.77)$$



Rys. 5.12. Uproszczony kształt kwadratowy komory formującej w płaszczyźnie równoległej do tacy

Prędkość na powierzchni (obwodzie) kęsa w ruchu po okręgu obtaczania:

$$v_S = v_{S1} = v_{S2} = \omega_R (R + r). \quad (5.78)$$

Prędkość wypadkowa przemieszczania kęsa w komorze formującej w płaszczyźnie równoległej do płaszczyzny okręgu obtaczania – od jednoczesnego oddziaływania na kęs dwóch ścianek komory formującej (miejsce styku 1 i 2, rys. 5.11 i 5.12), będzie:

$$v_W = \sqrt{v_{S1}^2 + v_{S2}^2} = \sqrt{2} v_S = \sqrt{2} \omega_R (R + r). \quad (5.79)$$

Prędkość kątową ruchu obrotowego kęsa w komorze formującej od jednoczesnego oddziaływania obu ścianek komory:

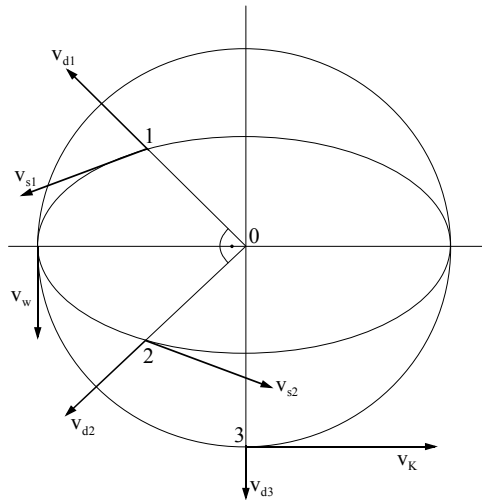
$$\omega_S = \frac{v_W}{r} = \sqrt{2} \omega_R \left( \frac{R}{r} + 1 \right). \quad (5.80)$$

Prędkość kątową ruchu obrotowego kęsa od oddziaływania powierzchni tacy wyznacza zależność (5.29).

Na rysunku 5.13 pokazano deformacje i prędkości zachodzące podczas formowania kęsa w komorze roboczej i pochodzące od oddziaływania tacy (stołu) oraz ścianek komory (noża).

Sposób wyznaczenia wypadkowej prędkości kątowej kęsa w ruchu w komorze formującej wynika z analizy wszystkich ruchów (rys. 5.12 i 5.13), zatem (jak dla (5.31)):

$$\omega_f = \sqrt{\omega_S^2 + \omega_K^2} = \omega_R \sqrt{\left(\frac{R}{r} + 1\right)^2 + \frac{\omega_r^2}{\omega_R^2} + 2}. \quad (5.81)$$



5.13. Deformacyjne oddziaływanie ścianek komory i tacy formującej

Wypadkowa prędkość liniowa obtaczania na powierzchni kęsa, obwodowa (jak dla 5.32):

$$v_f = \omega_f r. \quad (5.82)$$

#### d) Deformacje kęsa w komorze roboczej

Opierając się na rysunkach 5.12 i 5.13, analogicznie do poprzednio przeprowadzonych rozważań, można wyznaczyć odpowiednie prędkości oddziaływania na materiał kęsa. Prędkość przemieszczania kęsa wywołana oddziaływaniem tacy (analogicznie do (5.41)), będzie:

$$v_o = \frac{v_\beta}{2}.$$

Deformacja  $k_3$  określona jest podobnie do wyrażenia (5.46) jako:

$$k_3 = \text{tg} \frac{\alpha}{2}. \quad (5.83)$$

Droga  $l$  kęsa odpowiada wartości określonej zależnością (5.44).

Dla  $l \cong l_1$  oraz  $l_1 = \pi r$  otrzymuje się deformację połówkową podobnie do (5.49), w postaci:

$$k_3 = \pi r \operatorname{tg} \frac{\alpha}{2}. \quad (5.84)$$

Prędkość deformacji (oddziaływanie jednej tylko powierzchni) na pół obrotu kęsa, w jednostce czasu, w miejscu styku kęsa z tacą, będzie:

$$v_{d3} = k_3. \quad (5.85)$$

Po uwzględnieniu (5.83) oraz (5.44) otrzymuje się:

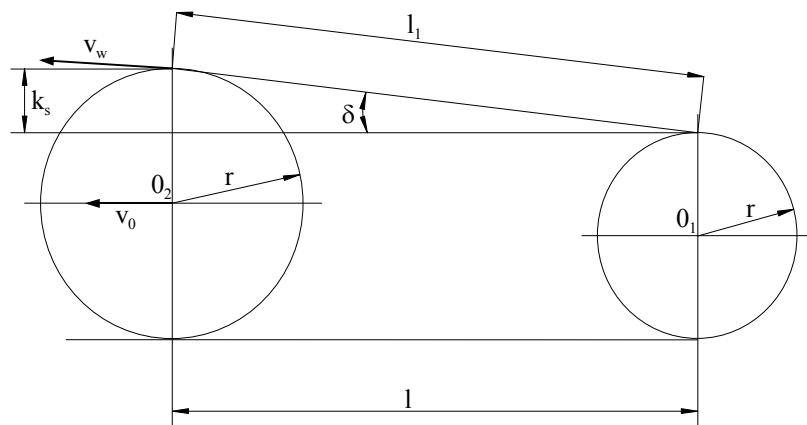
$$v_{d3} = v_o \sin \frac{\alpha}{2} = \frac{v_\beta}{2} \sin \frac{\alpha}{2}. \quad (5.86)$$

Deformacja połówkowa analogicznie do (5.58):

$$k_3 = 30 \frac{v_{d3}}{n_K}. \quad (5.87)$$

Na kęs w trakcie formowania w komorze formującej noża (rys. 5.11) mogą oddziaływać dwie ścianki komory (noża) lub jedna. Do rozważań przyjęto oddziaływanie dwóch ścianek komory oraz powierzchni formującej tacy.

Na rysunku 5.14 (analogicznie do rys. 5.9) wyznaczone wielkości kinematyczne i geometryczne przedstawiono na płaszczyźnie powstałej z rozwinięcia poboczniczy walca równoległej do toru ruchu obtaczającego w komorze roboczej noża, w odniesieniu do ćwierci obrotu kęsa.



Rys. 5.14. Zmiana wymiarów kęsa w komorze formującej dla  $\frac{1}{4}$  obrotu kęsa

Deformacja promieniowa kęsa (podobnie do 5.46) od każdej z obu ścianek komory, będzie:

$$k_s = k_1 = k_2 = l \operatorname{tg} \delta. \quad (5.88)$$

Droga  $l$ , po której przemieszcza się kęsa w jednostce czasu:

$$l = v_w \cos \delta. \quad (5.89)$$

Droga  $l_1$  (rys. 5.13) na ćwierć obrotu kęsa:

$$l_1 = \frac{\pi r}{2}. \quad (5.90)$$

Uwzględniając (5.48) i wykorzystując (5.90), deformacja  $k_s$  będzie podobnie jak dla zależności (5.49):

$$k_s = \frac{\pi r}{2} \operatorname{tg} \delta. \quad (5.91)$$

Dla warunku:

$$v_{ds} = v_{d1} = v_{d2}, \quad (5.92)$$

prędkość deformacji kęsa na ćwierć obrotu w jednostce czasu dla styku kęsa z jedną ścianką i po uwzględnieniu (5.88), (5.89), (5.91), określa zależność:

$$v_{ds} = 2k_s = 2l \operatorname{tg} \delta = 2v_w \sin \delta = \pi r \operatorname{tg} \delta. \quad (5.93)$$

Prędkość deformacji kęsa na ćwierć jego obrotu w jednostce czasu, wypadkowa dla obu miejsc jednoczesnego styku kęsa ze ściankami noża, przyjmuje wartość:

$$v_{dw} = \sqrt{2(v_{ds})^2} = \sqrt{2} v_{ds} \quad (5.94)$$

oraz odpowiednio po wykorzystaniu (5.94), np.:

$$v_{dw} = \sqrt{2} \pi r \operatorname{tg} \delta. \quad (5.95)$$

W trakcie formowania kęsa w komorze roboczej noża gwiazdzistego (rys. 5.11 i 5.13), na kęsa mogą oddziaływać jednocześnie trzy powierzchnie (taca oraz dwie ścianki komory noża). Uwzględniając ten fakt, wypadkowa prędkość deformacji może być wyznaczona po uwzględnieniu (5.84) i (5.95), w jednostce czasu, na ćwierć obrotu kęsa przez zależność:

$$\begin{aligned} v_d &= \sqrt{v_{d3}^2 + v_{dw}^2} = \sqrt{\left(\pi r \operatorname{tg} \frac{\alpha}{2}\right)^2 + \left(\sqrt{2} \pi r \operatorname{tg} \delta\right)^2} = \\ &= \pi r \sqrt{\operatorname{tg}^2 \frac{\alpha}{2} + 2 \operatorname{tg}^2 \delta}. \end{aligned} \quad (5.96)$$



Wypadkowa prędkość deformacji  $v_d$  (5.96) związana jest z jednoczesnym występowaniem deformacji obwodowych, pochodzących z dwóch rodzajów oddziaływań na kęs ciasta; na styku kęsa z powierzchnią tacy i na styku ze ściankami komory (noża).

Deformacyjne spłaszczenie kęsa – deformacja  $f_3$  o średnicy  $b_3$  – w miejscu styku kęsa z tacą określa wyrażenie (5.61), po uwzględnieniu zależności (5.84), otrzymuje się:

$$b_3 = \pi r \sqrt{\frac{2}{\pi} \operatorname{tg} \frac{\alpha}{\pi} - \operatorname{tg}^2 \frac{\alpha}{2}}. \quad (5.97)$$

W miejscach styku kęsa ze ściankami komory formującej, średnica  $b_s$  deformacyjnego spłaszczenia kęsa o powierzchni  $f_s$  będzie:

$$b_s = b_1 = b_2 = \sqrt{2rk_s - k_s^2}. \quad (5.98)$$

Po uwzględnieniu wyrażenia (5.91) będzie:

$$b_s = \pi r \sqrt{\frac{2}{\pi} \operatorname{tg} \delta - \operatorname{tg}^2 \delta}. \quad (5.99)$$

W trakcie formowania w komorze formującej, na ćwierć obrotu kęsa, zachodzą jednocześnie deformacje powierzchniowe  $f_3$  i  $f_s$ , pochodzące z dwóch rodzajów oddziaływań powierzchni formujących. Na jeden obrót kęsa będą następujące ilości deformacji powierzchniowych;

– na styku kęsa z powierzchnią tacy:

$$2f_3 = \frac{\pi b_c^2}{2}, \quad (5.100)$$

– na styku kęsa ze ściankami noża:

$$8f_s = 2\pi b_s^2. \quad (5.101)$$

Łączna powierzchnia deformacji powierzchniowych  $f_w$  na jeden obrót kęsa:

$$f_w = 2f_3 + 8f_s = \frac{\pi}{2} (b_3^2 + 4b_s^2). \quad (5.102)$$

Minimalna liczba obtoczyń kęsa w celu pokrycia całej powierzchni  $F_K$  kęsa deformacjami powierzchniowymi  $f_w$  określona jest zależnością:

$$n_d = \frac{F_K}{f_w} = 8 \frac{r^2}{(b_3^2 + 4b_s^2)}. \quad (5.103)$$

Droga obtaczania na powierzchni kęsa, droga formowania kęsa:

$$L_f = n_d \cdot 2\pi r = 16\pi \frac{r^3}{(b_3^2 + b_S^2)}. \quad (5.104)$$

Minimalna ilość obtoczeń formujących kęs, po obwodzie okręgu obtaczania  $L_R$  w czasie cyklu roboczego  $t_c$ :

$$n_0 = \frac{L_f}{L_R} = 8 \frac{r^3}{R(b_3^2 + b_S^2)}. \quad (5.105)$$

Częstość obrotów stołu (tacy) wymuszająca formowanie i odpowiednie ilości obrotów kęsa:

$$n_R = \frac{n_0}{t_c} \leq n. \quad (5.106)$$

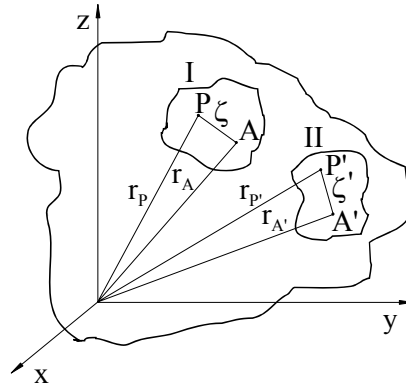
Podobnie jak dla punktu b), prędkość deformacji określona dla opisanego rodzaju formowania (rys. 5.12 i 5.13) zostanie wyznaczona z zależności opisujących tensor prędkości deformacji w przyjętej konfiguracji formowania uwzględniając właściwości reologiczne ciasta. Po określeniu prędkości deformacji, możliwe stanie się wyznaczenie odpowiednich wielkości kinematycznych dla opisanego układu formowania.

Wyznaczone wielkości kinematyczne i zależności je opisujące mogą zostać (w wielu przypadkach) bezpośrednio wykorzystane praktycznie podczas prac projektowo-konstrukcyjnych, przy określaniu odpowiednich wielkości kinematycznych oraz geometrycznych mechanizmu formującego.

### 5.3. KINEMATYKA PUNKTU MATERIALNEGO PŁYNU

W kinematyce płynów zgodnie z pierwszym twierdzeniem Helmholtza dotyczącym opisu ruchu elementu płynu w obszarze płynnym [39, 45] – ruch elementu płynu jest superpozycją ruchów: unoszenia (translacyjnego), obrotowego i deformującego (odkształcenie elementu płynu). W ogólności ruch objętościowego elementu płynu opisany jest przez prędkości  $\mathbf{v}$ , poszczególnych (nieidentyfikowanych) punktów materialnych elementu płynu w obszarze płynnym. Obszar płynny ograniczony powierzchnią płynną wyznaczony jest przez objętość formowanego materiału kęsa. Prędkości  $\mathbf{v}$  są w każdej chwili  $t$  funkcjami promienia wodzącego dowolny punkt materialny w stałym układzie odniesienia (współrzędnych) przedstawionym na rysunku 5.15. Rysunek ten pokazuje przemieszczanie elementu płynu z położenia I w położenie II z jednoczesnym obrotem punktu P wokół bieguna A na promieniu  $\xi$ .

Opis ruchu punktu materialnego w elemencie objętościowym płynu (ciasta) wiąże się z uwzględnieniem ruchu lokalnego (ruch punktów elementu płynu względem dowolnie wybranego bieguna w elemencie płynu [45]).



Rys. 5.15. Przemieszczanie elementu płynu w obszarze płynnym

W przypadku, gdy punktem elementu płynu jest punkt P (identyfikacja punktu) prędkość punktu P jest określona jako:

$$\mathbf{v} = \mathbf{v}_p. \quad (5.107)$$

Zatem twierdzenie Helmholtza dotyczące prędkości punktu P w rozpatrywanym elemencie płynu opisuje zależność:

$$\mathbf{v}_p = \mathbf{v}_A + \mathbf{v}_T, \quad (5.108)$$

gdzie:

- $\mathbf{v}_p$  – prędkość dowolnie wybranego punktu materialnego P elementu płynu względem nieruchomego układu odniesienia,
- $\mathbf{v}_A$  – prędkość dowolnie przyjętego bieguna A względem nieruchomego układu odniesienia – prędkość unoszenia (translacji),
- $\mathbf{v}_T$  – prędkość względna punktu materialnego P elementu płynu względem bieguna A.

Prędkość względna  $\mathbf{v}_T$  jest wynikiem działania tensora prędkości względnej  $\dot{\mathbf{T}}_w$  (opisującego kinematyczne zachowanie się płynu) na wektor  $\xi$  odległości punktu P elementu płynu od bieguna A (rys. 5.15).

Prędkość względna określona jest jako:

$$\mathbf{v}_T = \frac{d\xi}{dt} = \dot{\mathbf{T}}_w \xi \quad (5.109)$$

oraz dalej po rozłożeniu tensora  $\dot{\mathbf{T}}_w$  na składowe w postaci:

$$\mathbf{v}_T = \dot{\mathbf{W}} \xi + \dot{\mathbf{D}} \xi = \mathbf{v}_\omega + \mathbf{v}_d. \quad (5.110)$$

Prędkość względna  $\mathbf{v}_T$  jest zatem sumą dwóch prędkości, prędkości  $\mathbf{v}_\omega$ , która jest prędkością sztywnych obrotów elementu płynu wokół bieguna A oraz prędkości  $\mathbf{v}_d$ , będącej prędkością deformacji w elemencie płynu. Obie prędkości  $\mathbf{v}_\omega$  oraz  $\mathbf{v}_d$  wyznaczone są z rozkładu tensora prędkości względnej  $\dot{\mathbf{T}}_w$  na składowe, symetryczną  $\dot{\mathbf{D}}$  oraz antysymetryczną  $\dot{\mathbf{W}}$  i są wynikiem działania tych składowych na wektor odległości  $\xi$ . W konsekwencji prędkość punktu P, zidentyfikowanego w elemencie płynu, względem nieruchomego układu odniesienia, będzie:

$$\mathbf{v}_P = \mathbf{v}_A + \mathbf{v}_T = \mathbf{v}_A + \mathbf{v}_\omega + \mathbf{v}_d. \quad (5.111)$$

Tensor antysymetryczny (dewiator)  $\dot{\mathbf{W}}$  dotyczy obrotów elementu płynu, traktowanego jak ciało sztywne wokół bieguna A. Składowe tensora antysymetrycznego (tensora obrotów sztywnych) są proporcjonalne do składowych rotacji prędkości punktu materialnego elementu płynu. Działając tensorem  $\dot{\mathbf{W}}$  na wektor  $\xi$ , otrzymuje się wyrażenie na prędkość obwodową punktu materialnego elementu płynu wokół bieguna A (prędkość sztywnych obrotów) w postaci zależności:

$$\mathbf{v}_\omega = \dot{\mathbf{W}} \xi = \frac{1}{2} \text{rot} \mathbf{v} \times \xi = \boldsymbol{\omega} \times \xi, \quad (5.112)$$

gdzie prędkość kątowa  $\boldsymbol{\omega}$  elementu płynu wokół osi przechodzącej przez biegun A (jak dla ciała sztywnego), jest:

$$\boldsymbol{\omega} = \frac{1}{2} \text{rot} \mathbf{v}. \quad (5.113)$$

Prędkość  $\mathbf{v}$  jest prędkością punktu P, gdyby element objętościowy obracał się jak ciało sztywne z prędkością kątową  $\boldsymbol{\omega}$  wokół osi przechodzącej przez biegun A.

Składowa symetryczna  $\dot{\mathbf{D}}$  (tensor prędkości deformacji) tensora prędkości względnej  $\dot{\mathbf{T}}_w$  opisuje prędkość wzajemnych przemieszczeń cząstek płynu wewnątrz rozpatrywanego elementu płynu, skutkujących deformacją. Działając tensorem  $\dot{\mathbf{D}}$  na wektor  $\xi$ , otrzymuje się zależność na prędkość deformacji  $\mathbf{v}_d$  elementu płynu w postaci:

$$\mathbf{v}_d = \dot{\mathbf{D}} \xi. \quad (5.114)$$

Składowe tensora prędkości deformacji opisują prędkość odkształceń objętościowych (ślad tensora  $\dot{\mathbf{D}}$ ) oraz prędkość odkształceń postaciowych (pozostałe składowe tensora  $\dot{\mathbf{D}}$ ). Odkształcenia objętościowe (zmiana objętości) elementu płynu opisane są zależnością:

$$\operatorname{div} \mathbf{v} = \operatorname{tr} \dot{\mathbf{D}}, \quad (5.115)$$

gdzie:

$\operatorname{tr} \dot{\mathbf{D}}$  – ślad (przekątna) tensora prędkości deformacji, będący pierwszym niezmiennikiem tensora  $\mathbf{I}_1$  (niezależnym od układu odniesienia).

Jeżeli w płynie nie występują odkształcenia objętościowe lub są pomijalnie małe, wtedy:

$$\operatorname{div} \mathbf{v} = 0. \quad (5.116)$$

Analiza kinematyki płynu skutkuje koniecznością uwzględnienia w jej rozważaniach właściwości reologicznych ciasta będącego płynem nienewtonowskim w postaci odpowiedniego wyrażenia modelującego te właściwości. Występowanie odkształceń postaciowych w płynie wiąże się z istnieniem w nim naprężeń ścinających i opisane jest modelową zależnością między tensorem naprężeń ścinających a tensorem prędkości deformacji (4.68).

Powiązanie rozważań zawartych w podrozdziałach 5.2. oraz 5.3. prowadzi do określenia odpowiedniości występujących oznaczeń wielkości kinematycznych. Występująca w zależności (5.7) składowa  $\mathbf{v}_z$  wektora prędkości formowania  $\mathbf{v}_F$  jest prędkością zmiany wzajemnego położenia powierzchni formujących, w miejscach styku a i b z kęsem oraz określa jednocześnie prędkość zmiany wymiaru i kształtu powierzchni kęsa – jego deformacji postaciowej i objętościowej. Występuje zatem odpowiedniość oznaczeń zawartych we wzorach (5.111) i (5.7):

$$\mathbf{v}_z \cong \mathbf{v}_d. \quad (5.117)$$

Po porównaniu (5.7), (5.9), (5.11), (5.28) z (5.111), będzie:

$$\mathbf{v}_A = \mathbf{v}_\beta, \quad (5.118)$$

$$\mathbf{v}_\omega = \mathbf{v}_K, \quad (5.119)$$

$$\mathbf{v}_T = \mathbf{v}_K + \mathbf{v}_z. \quad (5.120)$$

oraz po porównaniu (5.31), (5.32) z (5.112), (5.113), będzie:

$$\omega = \omega_K, \quad (5.121)$$

$$\mathbf{v} = \mathbf{v}_F. \quad (5.122)$$

Podane związki wielkości kinematycznych określone według zasad ruchu ciała sztywnego oraz płynu (ciała odkształcalnego) pozwalają na wzajemne sprzężenie występujących wielkości i ich interpretację kinematyczną.

#### 5.4. TENSOR PRĘDKOŚCI DEFORMACJI W KONFIGURACJI FORMOWANIA

Dla opisu deformacji zachodzących w płynie należy wyznaczyć składowe tensora prędkości deformacji w przyjętym układzie współrzędnych kulistych (sferycznych) pokazanym na rysunkach 5.3 i 5.6. W tym celu należy dokonać transformacji składowych tensora z uogólnionego ortogonalnego układu współrzędnych krzywoliniowych ( $q_1, q_2, q_3$ ) do układu kulistego ( $r, \vartheta, \varphi$ ).

Współrzędne kuliste w układzie współrzędnych kartezjańskich ( $x, y, z$ ) przedstawiają poniższe zależności [39, 45, 57]:

$$r = \sqrt{x^2 + y^2 + z^2}, \quad (5.123)$$

$$x = r \sin \vartheta \cos \varphi, \quad (5.124)$$

$$y = r \sin \vartheta \sin \varphi, \quad (5.125)$$

$$z = r \cos \vartheta. \quad (5.126)$$

Wykorzystując ogólną zależność na tensor prędkości deformacji w postaci:

$$\dot{\epsilon}_{ik} = \frac{1}{2}(v_{i,k} + v_{k,i}), \quad (5.127)$$

składowe tensora prędkości deformacji w uogólnionym, potrójnie ortogonalnym układzie współrzędnych liniowych ( $q_1, q_2, q_3$ ), opisuje podany układ zależności:

$$\begin{aligned} \dot{\epsilon}_{11} &= \frac{1}{H_1} \frac{\partial v_1}{\partial q_1} + \frac{v_2}{H_1 H_2} \frac{\partial H_1}{\partial q_2} + \frac{v_3}{H_1 H_3} \frac{\partial H_1}{\partial q_3}, \\ \dot{\epsilon}_{22} &= \frac{1}{H_2} \frac{\partial v_2}{\partial q_2} + \frac{v_3}{H_2 H_3} \frac{\partial H_2}{\partial q_3} + \frac{v_1}{H_2 H_1} \frac{\partial H_2}{\partial q_1}, \\ \dot{\epsilon}_{33} &= \frac{1}{H_3} \frac{\partial v_3}{\partial q_3} + \frac{v_1}{H_3 H_1} \frac{\partial H_3}{\partial q_1} + \frac{v_2}{H_3 H_2} \frac{\partial H_3}{\partial q_2}, \\ \dot{\epsilon}_{23} = \dot{\epsilon}_{33} &= \frac{1}{2} \left[ \frac{1}{H_3} \frac{\partial v_2}{\partial q_3} + \frac{1}{H_2} \frac{\partial v_3}{\partial q_2} - \frac{v_2}{H_2 H_3} \frac{\partial H_2}{\partial q_3} - \frac{v_3}{H_2 H_3} \frac{\partial H_3}{\partial q_2} \right], \\ \dot{\epsilon}_{31} = \dot{\epsilon}_{13} &= \frac{1}{2} \left[ \frac{1}{H_1} \frac{\partial v_3}{\partial q_1} + \frac{1}{H_3} \frac{\partial v_1}{\partial q_3} - \frac{v_3}{H_3 H_1} \frac{\partial H_3}{\partial q_1} - \frac{v_1}{H_3 H_1} \frac{\partial H_1}{\partial q_3} \right], \\ \dot{\epsilon}_{12} = \dot{\epsilon}_{21} &= \frac{1}{2} \left[ \frac{1}{H_2} \frac{\partial v_1}{\partial q_2} + \frac{1}{H_1} \frac{\partial v_2}{\partial q_1} - \frac{v_1}{H_1 H_2} \frac{\partial H_1}{\partial q_2} - \frac{v_2}{H_1 H_2} \frac{\partial H_2}{\partial q_1} \right]. \end{aligned} \quad (5.128)$$

Dla wykonania stosownych obliczeń należy wyznaczyć współczynniki Lamego ( $H_1, H_2, H_3$ ) w podanych zależnościach na składowe tensora. W tym celu należy określić różniczkę łuku w układzie ( $q_1, q_2, q_3$ ), jako:

$$(ds)^2 = \sum (H_i dq_i)^2. \quad (5.129)$$

Współrzędne  $(q_1, q_2, q_3)$  wyrażone przez współrzędne kuliste można wyrazić zależnościami:

$$q_1 = r; \quad q_2 = \vartheta; \quad q_3 = \varphi. \quad (5.130)$$

We współrzędnych kulistych różniczka łuku po wykorzystaniu wzorów Rodriquesa [57] wyrażona jest w postaci:

$$(ds)^2 = (dr)^2 + (rd\vartheta)^2 + (r \sin \vartheta d\varphi)^2, \quad (5.131)$$

stąd bezpośrednio współczynniki Lamego dla współrzędnych kulistych będą:

$$H_1 = 1; \quad H_2 = r; \quad H_3 = r \sin \vartheta. \quad (5.132)$$

Po odpowiednim uwzględnieniu oznaczeń z układu współrzędnych kulistych  $(r, \vartheta, \varphi)$  w układzie współrzędnych uogólnionych  $(q_1, q_2, q_3)$ , otrzymuje się układ równań na składowe tensora prędkości deformacji w nieuproszczonej ogólnej postaci:

$$\begin{aligned} \dot{\varepsilon}_{rr} &= \frac{\partial v_r}{\partial r}, \\ \dot{\varepsilon}_{\vartheta\vartheta} &= \frac{1}{r} \frac{\partial v_\vartheta}{\partial \vartheta} + \frac{v_r}{r}, \\ \dot{\varepsilon}_{\varphi\varphi} &= \frac{1}{r \sin \vartheta} \frac{\partial v_\varphi}{\partial \varphi} + \frac{v_r}{r} + \frac{v_\vartheta}{r} \operatorname{ctg} \vartheta, \\ \dot{\varepsilon}_{\varphi\vartheta} &= \dot{\varepsilon}_{\vartheta\varphi} = \frac{1}{2} \left[ \frac{1}{r \sin \vartheta} \frac{\partial v_\vartheta}{\partial \varphi} + \frac{1}{r} \frac{\partial v_\varphi}{\partial \vartheta} - \frac{v_\varphi}{r} \operatorname{ctg} \vartheta \right], \\ \dot{\varepsilon}_{r\varphi} &= \dot{\varepsilon}_{\varphi r} = \frac{1}{2} \left[ \frac{\partial v_\varphi}{\partial r} + \frac{1}{r \sin \vartheta} \frac{\partial v_r}{\partial \varphi} - \frac{v_\varphi}{r} \right], \\ \dot{\varepsilon}_{r\vartheta} &= \dot{\varepsilon}_{\vartheta r} = \frac{1}{2} \left[ \frac{1}{r} \frac{\partial v_r}{\partial \vartheta} + \frac{\partial v_\vartheta}{\partial r} - \frac{v_\vartheta}{r} \right]. \end{aligned} \quad (5.133)$$

Występujące w powyższych zależnościach, w układzie współrzędnych kulistych, składowe  $v_r, v_\vartheta, v_\varphi$  prędkości formowania  $v_F$ , w wyniku analizy rysunków 5.3 i 5.6, określono w powiązaniu ze składowymi prędkości  $v_F$  we współrzędnych  $(x, y, z)$ . Prędkość wypadkowa formowania  $v_F$  określona została zależnościami (5.113) oraz (5.114).

Natężenie prędkości odkształceń  $A$  według zależności (4.10) we współrzędnych kulistych, niezbędne w zależnościach modelowych badanego ciasta (pływu) będzie:

$$A = \left[ 2 \left( \dot{\epsilon}_{rr}^2 + \dot{\epsilon}_{\theta\theta}^2 + \dot{\epsilon}_{\varphi\varphi}^2 + 2\dot{\epsilon}_{r\theta}^2 + 2\dot{\epsilon}_{\theta\varphi}^2 + 2\dot{\epsilon}_{\varphi r}^2 \right) \right]^{\frac{1}{2}}. \quad (5.134)$$

Dla powiązania deformacji (prędkości deformacji) z naprężeniami, wykorzystane zostanie uogólnienie prawa Newtona zaproponowane przez Stokesa.

## 5.5. DYNAMIKA FORMOWANIA KULISTEGO

Analizie dynamicznej formowania kulistego kęsów ciasta poddany zostanie jedynie uproszczony przypadek formowania w układzie otwartym (rys. 5.2). Przypadek ten jest wystarczająco reprezentatywny dla proponowanego sposobu (metody) opisu maszynowego formowania kęsów ciasta. Ograniczenie powyższego opisu wynika również z tego, iż analiza dynamiczna przypadków formowania kulistych kształtek w komorze roboczej (rys. 5.11) wykazuje znaczną złożoność opisu matematyczno – fizycznego i istotnie utrudnia praktyczne jej stosowanie.

Siły zewnętrzne, działające na kęs podczas formowania, powodują przekształcenie kęsa z postaci początkowej (bryła graniastosłupa) w końcową (kulistą). Siły te wykonują pracę transformacji kęsa ciasta – pracę formowania.

Proces formowania kęsa ciasta w ogólności zależy od:

- właściwości reologicznych formowanego materiału, ponadto, m.in. od jego gęstości, masy, składu fizyko-chemicznego, ciśnienia, wilgotności, temperatury,
- wielkości kinematycznych i dynamicznych, wywołujących formowanie; siły, momenty, prędkości formowania oraz sposób formowania (konfiguracja przestrzeni roboczej i powierzchni formujących).

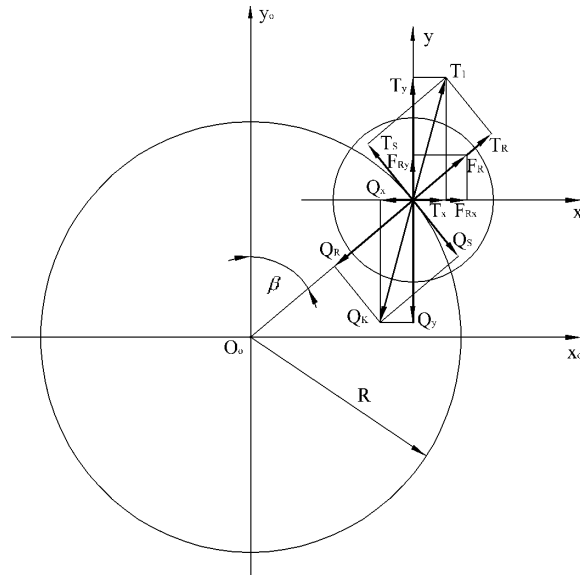
Materiał formowanego kęsa reaguje („odpowiada”) siłami wewnętrznymi materiału na działające siły zewnętrzne. Podstawowy warunek zaistnienia deformacji kształtujących materiał kęsa sprowadza się do tego, iż siły zewnętrzne oraz ich momenty działające na materiał kęsa muszą równoważyć (w istocie być większe) siły oddziaływania (reakcji) materiału – siły oporu reologicznego.

### 5.5.1. Siły i naprężenia w układzie otwartym formowania

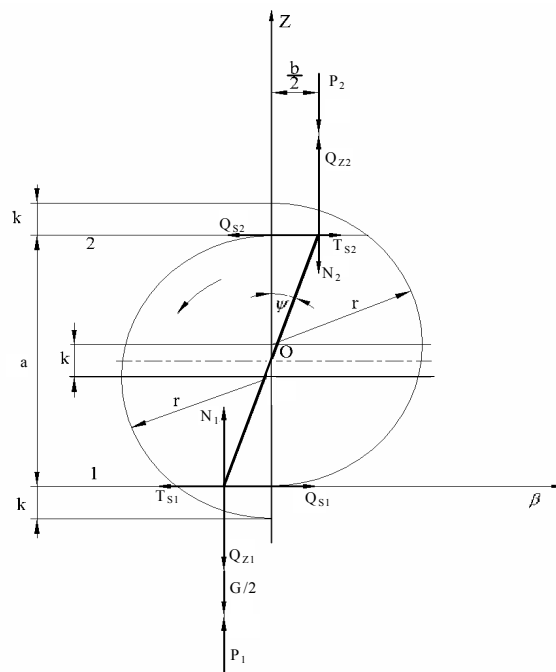
Na rysunkach 5.16, 5.17 i 5.18, odpowiednio do rysunków 5.3 i 5.8 przedstawiono kęs formowany w kształt kulisty. Na kęs oddziałują siły od obu powierzchni formujących, ruchomej (aktywnej) 1 oraz nieruchomej (biernej) 2 (jak na rys. 5.2).

Rysunek 5.16 jest podobny do rysunku 5.6 i przedstawia rozkład sił działających na kęs na powierzchni aktywnej 1, na której zaznaczono stały układ współrzędnych  $(x_0, y_0)$  oraz stały układ współrzędnych biegunowych  $(R, \beta)$ , a także układ współrzędnych prostokątnych  $(x, y)$  związany z kęsem i unoszony ruchem postępowym po okręgu obtaczania  $R$ . Działające siły rozłożono na składowe w układach odniesienia  $(x, y)$  oraz  $(R, \beta)$ .





Rys. 5.16. Rozkład sił działających na kęs ciasta dla przypadku formowania otwartego

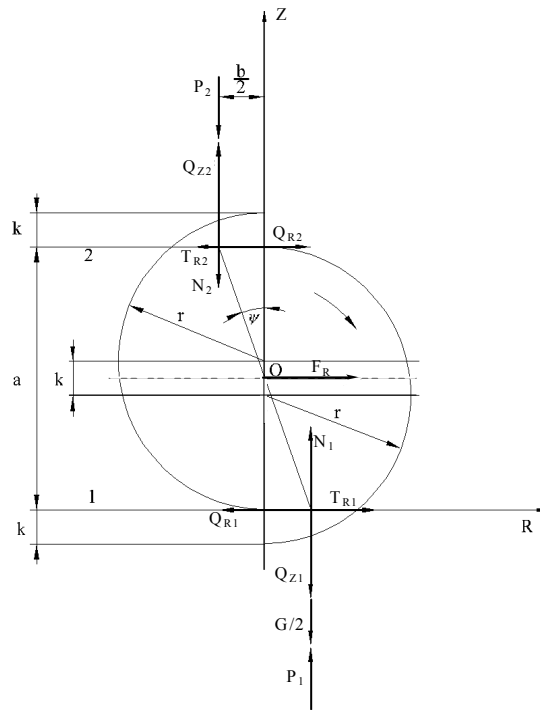


Rys. 5.17. Rozkład sił w płaszczyźnie przekroju kęsa przechodzącej przez jego środek i stycznej do okręgu obtaczania oraz prostopadłej do powierzchni tacy

Rysunek 5.17 przedstawia rozkład sił na powierzchni przechodzącej przez środek 0 kęsa, stycznej do okręgu R i prostopadłej do powierzchni układu współrzędnych (R,  $\beta$ ). Przekrój kęsa jest analogiczny do przekroju przedstawionego na rysunku 5.8. Na przekroju tym w układzie odniesienia (z,  $\beta$ ) pokazano siły i składowe sił od oddziaływania powierzchni 1 i 2 na powierzchnię deformacji  $f_b$  kęsa.

Rysunek 5.18 przedstawia rozkład sił na powierzchni przechodzącej przez środek 0 kęsa oraz promień R i prostopadłej do powierzchni układu współrzędnych biegunowych (R,  $\beta$ ). Na przekroju pokazano siły i składowe sił od oddziaływania powierzchni roboczych 1 i 2 na powierzchnię  $f_b$  deformacji kęsa. Aktualną odległość „a” powierzchni formujących 1 oraz 2 wyznacza zależność geometryczna wynikająca z rysunków 5.17 i 5.18, w postaci:

$$a = 2r - k . \quad (5.135)$$



Rys. 5.18. Rozkład sił w płaszczyźnie przekroju kęsa przechodzącej przez jego środek i promień okręgu obtaczania oraz prostopadłego do powierzchni tacy

Analiza deformacji kęsa będącej skutkiem działających sił dotyczy małych (elementarnych) odkształceń kęsa, zatem uprawnione jest założenie stałych i jednakowych wartości chwilowych wielkości geometrycznych  $f_b, k, b, \psi$ , cha-

rakteryzujących przebieg deformacji kęsa. Linia łącząca środki średnic b ze środkiem kęsa (odchylona o kąt  $\psi$ ) jest linią działania odpowiednich sił wypadkowych (dla przejrzystości rysunków nie zaznaczonych).

W celu dokonania analizy dynamicznej przebiegu deformacji kęsa w układach pokazanych na rysunkach 5.16, 5.17 i 5.18 określone zostaną siły i momenty działające na formowany kęs ciasta oraz ich warunki równowagi w przyjętych doraźnie układach współrzędnych.

**a) Siły działające równoległe do osi z i prostopadle do powierzchni roboczych;**

- Siła ciężkości kęsa (reprezentująca siły masowe, rys. 5.17 i 5.18):

$$G = mg. \quad (5.136)$$

- Siły nacisku powierzchni roboczych (formujących) na kęs:

$P_1$  – na powierzchni aktywnej

$P_2$  – na powierzchni biernej (reakcja)

Zakłada się równość tych sił, czyli:

$$|P_1| = |P_2| = P. \quad (5.137)$$

- Siła odśrodkowa (bezwładności) od obrotu kęsa wokół swojego środka masy będąca reakcją od siły dośrodkowej, działająca wzdłuż promienia kęsa:

$$Q_r = \frac{I\omega_k^2}{r}, \quad (5.138)$$

gdzie:

$I$  – moment bezwładności bryły kulistej:

$$I = \frac{2}{5}mr^2. \quad (5.139)$$

Składowe siły odśrodkowej w układzie  $(x, y, z)$  będą:

$$\mathbf{Q}_r = \mathbf{Q}_x + \mathbf{Q}_y + \mathbf{Q}_z. \quad (5.140)$$

Składowa siły odśrodkowej działająca wzdłuż osi z i normalna do formujących powierzchni roboczych 1 i 2, rysunek 5.17 i 5.18:

$$|Q_{z1}| = |Q_{z2}| = Q_z, \quad (5.141)$$

- Wypadkowe siły normalne do powierzchni deformacji fb kęsa, powodujące tarcie kęsa o powierzchnie robocze, rysunek 5.17 i 5.18:
  - na styku z powierzchnią aktywną 1:

$$\mathbf{N}_1 = \mathbf{P}_1 + \mathbf{G} + \mathbf{Q}_{z1}, \quad (5.142)$$

$$N_1 = P_1 - G - Q_{z1}, \quad (5.143)$$

– na styku z powierzchnią bierną 2:

$$N_2 = P_2 + Q_{z2}, \quad (5.144)$$

$$-N_2 = -P_2 + Q_{z1}. \quad (5.145)$$

**b) Siły działające na powierzchniach roboczych i do nich równoległe;**

- Składowa siły odśrodkowej  $Q_r$  na powierzchniach roboczych (z odpowiednim indeksem identyfikującym 1 lub 2 w układzie  $(x, y)$ ):

$$Q_{xy} = Q_K = Q_x + Q_y, \quad (5.146)$$

na powierzchni współrzędnych biegunowych  $(R, \beta)$ :

$$Q_K = Q_R + Q_S \quad (5.147)$$

oraz:

$$Q_{xy} = Q_K = \sqrt{Q_x^2 + Q_y^2} = \sqrt{Q_R^2 + Q_S^2}. \quad (5.148)$$

Odpowiednie składowe tej siły w układach  $(x, y)$  oraz  $(R, \beta)$  na powierzchniach roboczych, wiążą zależności:

$$\begin{aligned} Q_R &= Q_{xR} + Q_{yR}, \\ Q_S &= Q_{xS} + Q_{yS}, \\ Q_x &= Q_{Rx} + Q_{Sx}, \\ Q_y &= Q_{Ry} + Q_{Sy}. \end{aligned} \quad (5.149)$$

Składowe te mogą być wyrażone w układzie  $(R, \beta)$  w funkcji kąta  $\beta$  w postaci odpowiednich zależności trygonometrycznych jako:

$$\begin{aligned} Q_{Rx} &= Q_R \operatorname{ctg}(90 - \beta), \\ Q_{Sx} &= Q_S \operatorname{ctg}\beta, \\ Q_{Ry} &= Q_R \operatorname{tg}(90 - \beta), \\ Q_{Sy} &= Q_S \operatorname{tg}\beta. \end{aligned} \quad (5.150)$$

- Siła odśrodkowa w obiegu kęsa po okręgu obtaczania  $R$ , równoległa do  $(x, y)$ :

$$F_R = m\omega_R^2 R, \quad (5.151)$$

składowe tej siły w układzie  $(x, y)$  będą:

$$F_R = F_{Rx} + F_{Ry}. \quad (5.152)$$

- Siły tarcia – tarcie kęsa w miejscu styku z powierzchniami roboczymi ma charakter mieszany, tzn. występuje tarcie od ruchu tocznego kęsa, określone siłą tarcia:

$$T = \mu \frac{N}{r} \quad (5.153)$$

oraz tarcie ślizgowe określone jako:

$$T = \mu N. \quad (5.154)$$

W węźle tarcia jakim jest miejsce styku kęsa z powierzchnią formującą, występują trudno wyznaczalne analitycznie zjawiska dynamiczne, wynikające z faktu, iż w miejscu tarcia występuje zmienność obciążeń dynamicznych zarówno co do wartości, jak i kierunku oraz z faktu, że miejsce tarcia (styku) posiada określoną powierzchnię  $f_b$ , której rozmiary określone średnicą  $b$ , w powiązaniu z właściwościami reologicznymi ciasta, wpływają na wartość powstających sił tarcia. Ponadto na wartość występujących w węźle tarcia sił tarcia, istotny wpływ w rzeczywistym procesie formowania ma pokrywanie (posypywanie) mąką powierzchni współpracujących (zarówno ciasta, jak i maszyny) w celu zmniejszenia efektu adhezji powierzchni. W wyniku tych zabiegów następuje radykalne zmniejszenie tych efektów, a w konsekwencji sił tarcia.

Z przytoczonych względów, do rozważań przyjęto tarcie ślizgowe tj. większą wartość sił tarcia, zapewniając tym samym większą wartość sił wymuszających formowanie, co może spowodować skrócenie czasu formowania.

Siła tarcia kęsa w miejscu styku z powierzchniami roboczymi przeciwdziała ruchowi formowanego kęsa i może być określona zależnościami:

- na powierzchni aktywnej 1:

$$-T_1 = \mu N_1 = \mu(P_1 - Q_z - G), \quad (5.155)$$

- na powierzchni biernej 2:

$$T_2 = \mu N_2 = \mu(Q_z - P_2), \quad (5.156)$$

gdzie:

- $\mu$  – kinematyczny współczynnik tarcia kęsa o powierzchnie robocze,  
dla tarcia ciasta o żeliwo;  $\mu \approx 0,68$ ,  
dla tarcia ciasta o tworzywo sztuczne;  $\mu \approx 0,52$ .

Siły tarcia na obu powierzchniach roboczych 1 i 2 są równoległe do powierzchni  $(x, y)$  oraz  $(R, \beta)$ , zatem we współrzędnych będą zależnościami:

– układ (x, y)

$$\begin{aligned} \mathbf{T}_1 &= \mathbf{T}_{x1} + \mathbf{T}_{y1}, \\ \mathbf{T}_2 &= \mathbf{T}_{x2} + \mathbf{T}_{y2}, \end{aligned} \quad (5.157)$$

– układ (R, β)

$$\begin{aligned} \mathbf{T}_1 &= \mathbf{T}_{R1} + \mathbf{T}_{S1}, \\ \mathbf{T}_2 &= \mathbf{T}_{R2} + \mathbf{T}_{S2} \end{aligned} \quad (5.158)$$

oraz odpowiednio

$$\begin{aligned} T_1 &= \sqrt{T_{x1}^2 + T_{y1}^2} = \sqrt{T_{R1}^2 + T_{S1}^2}, \\ T_2 &= \sqrt{T_{x2}^2 + T_{y2}^2} = \sqrt{T_{R2}^2 + T_{S2}^2}. \end{aligned} \quad (5.159)$$

Składowe sił tarcia w układach (x, y) oraz (R, β) na obu powierzchniach roboczych wiążą zależności:

$$\begin{aligned} \mathbf{T}_R &= \mathbf{T}_{xR} + \mathbf{T}_{yR}, \\ \mathbf{T}_S &= \mathbf{T}_{xS} + \mathbf{T}_{yS}, \\ \mathbf{T}_x &= \mathbf{T}_{Rx} + \mathbf{T}_{Sx}, \\ \mathbf{T}_y &= \mathbf{T}_{Ry} + \mathbf{T}_{Sy}. \end{aligned} \quad (5.160)$$

Składowe te (podobnie jak składowe  $Q_k$ ) mogą być wyrażone w układzie współrzędnych biegunowych w funkcji kąta β, w postaci analogicznych zależności trygonometrycznych:

$$\begin{aligned} T_{Rx} &= T_R \operatorname{ctg}(90 - \beta), \\ T_{Sx} &= T_S \operatorname{ctg}\beta, \\ T_{Ry} &= T_R \operatorname{tg}(90 - \beta), \\ T_{Sy} &= T_S \operatorname{tg}\beta. \end{aligned} \quad (5.161)$$

### c) Równowaga sił działających na kęs w trakcie formowania;

- Siły działające wzdłuż osi z, prostopadłe do powierzchni roboczych:
  - powierzchnia aktywna 1:

$$P_1 - G - Q_{z1} + N_1 = 0, \quad (5.162)$$

- powierzchnia bierna 2:

$$Q_{z2} - P_2 - N_2 = 0. \quad (5.163)$$

- Siły działające na powierzchniach roboczych, równoległe do nich i do płaszczyzny  $(x, y)$  oraz  $(R, \beta)$ :
  - składowe sił i siły działające na powierzchniach 1 i 2 wzdłuż promienia R:

$$F_R + T_{R1} - Q_{R1} - T_{R2} + Q_{R2} = 0, \quad (5.164)$$

- składowe sił działające na powierzchniach 1 i 2 stycznie do okręgu R:

$$Q_{S1} - T_{S1} - Q_{S2} + T_{S2} = 0, \quad (5.165)$$

- składowe sił działające na powierzchniach 1 i 2 wzdłuż osi x:

$$F_{Rx} + T_{x1} - Q_{x1} - T_{x2} + Q_{x2} = 0, \quad (5.166)$$

- składowe sił działających na powierzchniach 1 i 2 wzdłuż osi y:

$$F_{Ry} + T_{y1} - Q_{y1} - T_{y2} + Q_{y2} = 0. \quad (5.167)$$

**d) Momenty sił działające na kęs względem jego środka 0;**

- moment od siły ciężkości G kęsa:

$$M_G = G \frac{b}{2}, \quad (5.168)$$

- moment od sił nacisku P:

$$M_P = P b, \quad (5.169)$$

- moment od sił tarcia T:

$$M_T = \frac{a}{2}(T_1 + T_2), \quad (5.165)$$

- moment od składowej  $Q_K$  siły odśrodkowej  $Q_r$ :

$$M_A = Q_K a, \quad (5.170)$$

- moment od składowej  $Q_z$  siły odśrodkowej  $Q_r$ :

$$M_B = Q_z b, \quad (5.171)$$

- moment od sił normalnych N (do powierzchni deformacji fb):

$$M_N = \frac{b}{2}(N_1 + N_2), \quad (5.172)$$

- moment od siły odśrodkowej  $F_R$ :

$$M_R = 0. \quad (5.173)$$

**e) Równowaga momentów sił działających na kęs;**

Momenty (5.168-5.173) powodują powstanie momentu formującego kęs (są składowymi tego momentu). Moment formujący  $M_F$  określa zależność:

$$M_F = M_G + M_P + M_T + M_A - M_B. \quad (5.174)$$

Uwzględniając zależności na siły normalne (5.142; 5.144) i moment od tych sił w postaci (5.172) otrzymuje się:

$$M_F = M_T + M_A + M_N. \quad (5.175)$$

Po dokonaniu odpowiednich podstawień i przekształceń, moment formujący będzie:

$$M_F = \frac{1}{2}G(b + a\mu) + P(b - a\mu) + Q_K a + Q_Z(a\mu - b). \quad (5.176)$$

Moment formujący dla jednego kęsa, powinien być zrównoważony (lub być mniejszy) momentem napędowym  $M_m$  mechanizmu formującego maszyny:

$$M_m \geq M_F \lambda, \quad (5.177)$$

gdzie:

$\lambda$  – liczba formowanych kęsów, krotność noża wieńcowego.

Siły i momenty (rys. 5.16, 5.17, 5.18), jako oddziaływania wymuszające deformacje materiału kęsa działają na powierzchni kęsa, na której powstaje deformacja powierzchniowa  $f_b$  (określona średnicą  $b$ ). Zatem odnosząc wartości oddziaływań wymuszających do powierzchni deformacji można wyznaczyć naprężenia wymuszające deformacje. Naprężenia te powodują reakcję materiału kęsa określoną składowymi tensora naprężeń (stycznymi i normalnymi). Wypadkowa, wymuszających sił normalnych powoduje powstanie w materiale kęsa wypadkowego naprężenia normalnego (ciśnienia), które na pół obrotu kęsa wyraża zależność:

$$\sigma_f = \frac{|N_1| + |N_2|}{2f_b}. \quad (5.178)$$

Wypadkowe naprężenie wymuszające powinno być większe (lub równe) od reakcji odpowiedniego naprężenia w materiale kęsa (od składowych tensora naprężeń  $\sigma_{ij}$ ). Wypadkowy moment  $M_F$  wymuszający deformacje (formujący kęs) powoduje powstanie w materiale kęsa wypadkowych naprężeń ścinających  $\tau_f$ , które powinny być zrównoważone odpowiednimi składowymi  $\tau_{ij}$  tensora naprężeń  $\sigma_{ij}$ .



## 6. RÓWNANIA RUCHU FORMOWANEGO CIASTA

Równania ruchu opisują zachowanie się płynu (ciasta) w trakcie jego przepływu podczas procesu formowania kęsów ciasta w kształtki kuliste. Dla opisu zachowania się ciał w zjawiskach fizycznych zachodzących w realizowanych procesach technologicznych wykorzystuje się zasady zachowania wielkości fizycznych charakteryzujących te procesy. Zasady zachowania i równania z nich wynikające są prawdziwe i stosowalne dla dowolnego ośrodka ciągłego uczestniczącego w procesie fizycznym [39, 45, 57].

Opierając się na sformułowanym układzie równań oraz dokonanych uściśleniach zależności między wielkościami występującymi w równaniach, zaproponowane zostaną z możliwym do przyjęcia przybliżeniem postaci równań, opisujące ruch płynu podczas formowania kęsów ciasta [12, 35, 45].

### 6.1. PODSTAWOWE ZASADY ZACHOWANIA WIELKOŚCI FIZYCZNYCH

W rozważanym procesie mechanicznego formowania kęsów ciasta, opis ruchu i jego przyczyn stosownymi równaniami oraz opis wpływu poszczególnych wielkości fizycznych wynika z fizycznych zasad zachowania wielkości fizycznych [35, 39, 45, 57], tj.: masy, pędu i momentu pędu oraz energii.

**Zasada zachowania masy** – dla płynów, zasada zachowania masy reprezentowana jest przez równanie ciągłości. Równanie ciągłości można przedstawić w obszarze  $B$  wypełnionym płynem, w postaci [39]:

ogólna zasada zachowania masy:

$$\frac{d}{dt} \int_B \rho d\beta = 0, \quad (6.1)$$

zapis wektorowy dla pochodnej substancjalnej (materialnej):

$$\frac{\partial \rho}{\partial t} + \nabla \cdot (\rho \mathbf{v}) = 0, \quad (6.2)$$

lub dla pochodnej lokalnej (lokalna zasada zachowania masy):

$$\frac{\partial \rho}{\partial t} + \rho \nabla \cdot \mathbf{v} = 0, \quad (6.3)$$

zapis wskaźnikowy dla lokalnej zasady zachowania masy:

$$\dot{\rho} + \rho v_{i,i} = 0, \quad (6.4)$$

gdzie:

- $d$  – element objętości obszaru  $B$  (objętości kęsa),
- $\rho$  – gęstość masy (płynu),
- $\mathbf{v}$  – wektorowe pole prędkości płynu.

Prędkość płynu użyta w równaniach opisujących jego przepływ opisuje poprzednio określona zależność (5.122), w postaci:

$$\mathbf{v} = \mathbf{v}_F$$

Prędkość wypadkową formowania  $\mathbf{v}_F (v_r, v_\theta, v_\varphi)$ , w konfiguracji zjawiska (w układzie współrzędnych kulistych) opisują zależności (5.113) i (5.114).

**Zasada zachowania pędu** – postuluje, iż prędkość zmiany pędu  $\dot{\mathbf{P}}$  elementu płynu w obszarze płynnym  $B$  w chwili  $t$  jest równa wypadkowej działających sił zewnętrznych  $\mathbf{F}$ , tj. sumie wszystkich sił masowych (oddziaływania dalekiego zasięgu) i sumie wszystkich sił powierzchniowych (oddziaływania kontaktowe) [39]:

$$\dot{\mathbf{P}} = \mathbf{F}, \quad (6.5)$$

lub

$$\int_B \rho \dot{\mathbf{v}} d\beta = \int_B \rho \mathbf{f} d\beta + \int_\Sigma \mathbf{t}_n d\sigma, \quad (6.6)$$

Wykorzystując w wyrażeniu (6.6), na zasadę zachowania pędu w formie całkowej, wzór Gaussa-Ostrogradskiego (po uwzględnieniu symetryczności tensora naprężeń  $\mathbf{S} = \mathbf{S}^T$ ), w postaci:

$$\int_\Sigma \mathbf{t}_n d\sigma = \int_B \nabla \cdot \mathbf{S} d\beta, \quad (6.7)$$

otrzymuje się formę różniczkową zasady zachowania pędu:

– zapis wektorowy:

$$\rho \dot{\mathbf{v}} = \rho \mathbf{f} + \nabla \cdot \mathbf{S}, \quad (6.8)$$

– zapis wskaźnikowy:

$$\rho \dot{v}_i = s_{ij,j} + \rho f_i, \quad (6.9)$$

gdzie:

- $\mathbf{f}$  – pole wektorowe intensywności sił masowych na jednostkę masy,
- $\mathbf{S}$  – tensor naprężenia,
- $s_{ij}$  – składowe tensora naprężenia (oznaczane również jako  $\sigma_{ij}$ ),
- $\mathbf{t}_n$  – pole wektorowe intensywności sił powierzchniowych,

$\Sigma$  – powierzchnia obszaru B (brzeg obszaru płaskiego),  
 $d\sigma$  – element powierzchni  $\Sigma$ .

**Zasada zachowania momentu pędu** – postuluje, że prędkość zmiany momentu pędu  $\dot{\mathbf{W}}$  jest równa wypadkowemu momentowi  $\mathbf{M}$  działającemu na element płynu w chwili t w obszarze płynnym B [39]:

$$\dot{\mathbf{W}} = \mathbf{M}, \quad (6.10)$$

oraz

$$\int_B (\rho \mathbf{r}_p \times \dot{\mathbf{v}}) d\beta = \int_B (\rho \mathbf{r}_p \times \mathbf{f} + \rho \mathbf{n}_m) d\beta + \int_\Sigma (\mathbf{r}_p \times \mathbf{t}_n + \mathbf{n}_n) d\sigma, \quad (6.11)$$

– forma skrócona:

$$\rho \mathbf{n} + \nabla \cdot \mathbf{Z}^T + \mathbf{e} \cdot \mathbf{S} = 0, \quad (6.12)$$

– zapis wskaźnikowy:

$$\rho n_i + z_{ji,j} + e_{ijk} s_{jk} = 0, \quad (6.13)$$

gdzie:

- $\mathbf{n}_m$  – intensywność momentów masowych,
- $\mathbf{n}_n$  – intensywność momentów powierzchniowych,
- $\mathbf{W}$  – moment pędu,
- $\mathbf{r}_p$  – wektor położenia elementu płynu względem punktu,
- $e_{ijk}$  – symbol permutacyjny (alternator Levi-Civita),
- $\mathbf{Z}$  – tensor naprężeń momentowych.

**Zasada zachowania energii** – postuluje w ogólności, że przyrost energii płynu zawartego w obszarze B jest równy sumie:

- pracy wykonanej przez siły mechaniczne (np. masowe i powierzchniowe),
- energii wytworzonej we wnętrzu obszaru (np. cieplnej, pracy sił wewnętrznych – naprężeń deformujących),
- energii zewnętrznej (np. od przewodnictwa) dostarczonej do obszaru B płynu przez powierzchnię płynną.

Rozważania dotyczące zasady zachowania energii ograniczone zostaną do oddziaływań w polu wielkości mechanicznych, zatem określona zostanie zasada zachowania energii mechanicznej płynu. Energia całkowita N jest sumą energii wewnętrznej E i kinetycznej K lub inaczej: na moc  $\dot{N}$  pracy sił zewnętrznych, składa się moc  $\dot{E}$  sił wewnętrznych oraz moc  $\dot{K}$  prędkości zmiany energii kinetycznej (moc od energii kinetycznej) [39, 45]:

– ogólnie moc pracy od sił zewnętrznych:

$$\dot{N} = \dot{E} + \dot{K}, \quad (6.14)$$

– w formie całkowej:

$$\int_B \rho \mathbf{f} \cdot \mathbf{v} \, d\beta + \int_{\Sigma} \mathbf{t}_n \cdot \mathbf{v} \, d\sigma = \int_B \mathbf{S} \cdot \dot{\mathbf{D}} \, d\beta + \int_B \rho \dot{\mathbf{v}} \cdot \mathbf{v} \, d\beta, \quad (6.15)$$

– jeżeli  $\mathbf{t}_n = \mathbf{S}\mathbf{n}$ , to (podobnie jak dla (6.7)):

$$\int_{\Sigma} \mathbf{t}_n \cdot \mathbf{v} \, d\sigma = \int_B \nabla \cdot (\mathbf{S} \mathbf{v}) \, d\beta \quad (6.16)$$

– zatem wyrażenie (6.15) będzie:

$$\int_B \rho \mathbf{f} \cdot \mathbf{v} \, d\beta + \int_B \nabla \cdot (\mathbf{S} \mathbf{v}) \, d\beta = \int_B \mathbf{S} \cdot \dot{\mathbf{D}} \, d\beta + \int_B \rho \dot{\mathbf{v}} \cdot \mathbf{v} \, d\beta, \quad (6.17)$$

– różniczkowa forma wektorowa równania energii mechanicznej:

$$\rho \mathbf{f} \cdot \mathbf{v} + \nabla \cdot (\mathbf{S}\mathbf{v}) = \mathbf{S} \cdot \dot{\mathbf{D}} + \rho \dot{\mathbf{v}} \cdot \mathbf{v}, \quad (6.18)$$

– zapis wskaźnikowy:

$$\rho f_i v_i + s_{ij} v_{i,i} + v_i s_{ij,i} = s_{ij} \dot{\epsilon}_{ij} + \rho \dot{v}_i v_i, \quad (6.19)$$

gdzie:

K – energia kinetyczna,

N – energia całkowita,

E – energia wewnętrzna,

$\dot{\mathbf{D}}$  – tensor prędkości deformacji,

$\mathbf{n}$  – wektor normalnej do powierzchni elementu płynu.

## 6.2. SFORMUŁOWANIE RÓWNAŃ

Wykorzystując określone formy równań wynikające z ogólnych zasad zachowania wielkości fizycznych dla pola wielkości mechanicznych opisujących proces formowania, można sformułować równania ruchu płynu (ciasta). W tym celu konieczne jest poczynienie pewnych założeń wstępnych dotyczących właściwości płynu oraz jego zachowania się w zjawisku przepływu w procesie technologicznym.

### 6.2.1. Równanie ciągłości

W równaniu określonym wyrażeniem (6.3) lub (6.4) występują w zasadzie wielkości kinematyczne związane gęstością płynu (ciasta). Właściwości ciasta zależą przede wszystkim od składu i technologicznego sposobu jego wytwarzania. Wytwarzanie ciasta, ze względu na wymogi technologiczne, zachodzi w dość wąskim ( $\pm 2^\circ\text{C}$ ) przedziale temperatur ok.  $30^\circ\text{C}$ , zatem można przyjąć

izotermiczność procesu obróbki ciasta. Wpływ temperatury na gęstość i właściwości reologiczne, w tym zakresie wartości temperatur, może być pominięty.

Ciasto wykazuje cechy płynu barotropowego, tzn. że jego gęstość zależy od ciśnienia, gdyż na skutek rozrostu (fermentacji) następuje wydzielanie się pęcherzyków gazów fermentacyjnych, powodując spulchnienie masy kęsa ciasta prowadzące do zmiany gęstości.

Przed procesem formowania następuje mechaniczne sprasowanie kęsa ciasta (ciśnienie 0,2-0,4 Mpa) lub jego sprasowanie ręczne, tzw. przegniecenie, powodujące ujednorodnienie masy przez likwidację ewentualnych pęcherzy gazów oraz wyrównanie kształtu geometrycznego. Ciśnienie wywierane na ciasto podczas prasowania (czy przegniatania) powoduje zmniejszenie objętości i zwiększenie jego gęstości, tak że postulaty dotyczące ciągłości, jednorodności oraz izotropowości znajdują swoje uzasadnienie. Bezpośrednio po operacji prasowania następuje formowanie (ręczne lub mechaniczne). Można zatem dalej przyjąć, iż gęstość pierwotnego kęsa ciasta po prasowaniu jest jednakowa i to w całej objętości. Zatem uzasadnione jest przyjęcie w równaniu ciągłości nieściśliwości płynu ze względu na stałą gęstość (szczególny przypadek płynu barotropowego). Równanie ciągłości przyjmuje więc prostszą postać:

– zapis wektorowy:

$$\nabla \cdot \mathbf{v} = 0, \quad (6.20)$$

– zapis wskaźnikowy:

$$v_{i,i} = 0. \quad (6.21)$$

W rozważaniach wykorzystane zostanie równanie ciągłości w podanej powyżej postaci.

### 6.2.2. Równanie pędu

W równaniu pędu (6.6) oraz (6.8) występują:

- wektorowe pole sił masowych  $\mathbf{f}$ , (siły dalekiego zasięgu),
- wektorowe pole sił powierzchniowych  $\mathbf{t}_n$ , (siły kontaktowe),
- tensor naprężeń  $\mathbf{S}$ , wiążący wielkość kinematyczną jaką jest prędkość płynu z naprężeniami występującymi w płynie.

Występujące w rozważaniach pole sił masowych w istniejącym polu grawitacyjnym (o charakterze skalarnym), pozwala na określenie jednostkowej siły masowej  $\mathbf{f}_g$  w postaci:

$$\mathbf{f}_g = \mathbf{g}. \quad (6.22)$$

gdzie:

$\mathbf{g}$  – przyspieszenie ziemskie.

Do sił masowych można zaliczyć siły bezwładności, które wyznaczane są odpowiednimi zależnościami z kinematyki ruchu płynu w przyjętej konfiguracji formowania.

Jednostkowe siły bezwładności  $\mathbf{f}_r$  ogólnie wyraża zależność (analogiczna do jednostkowych sił grawitacyjnych), w postaci:

$$\mathbf{f}_r = \mathbf{a}_K, \quad (6.23)$$

gdzie:

$\mathbf{a}_K$  – przyspieszenie dośrodkowe (na promieniu  $r$  oraz  $R$ ), (5.35).

Wektor wypadkowej pola sił masowych, mających charakter sił dalekiego zasięgu, wyrażony może być zależnością:

wektorową:

$$\mathbf{f} = \mathbf{f}_g + \mathbf{f}_r = \mathbf{g} + \mathbf{a}_K, \quad (6.24)$$

lub wskaźnikową:

$$f_i = g_i + (a_K)_i. \quad (6.25)$$

Równanie zachowania pędu (6.8), uwzględniające powyższe zależności, będzie: zapis wektorowy:

$$\rho \dot{\mathbf{v}} = \rho(\mathbf{g} + \mathbf{a}_K) + \nabla \cdot \mathbf{S}, \quad (6.26)$$

zapis wskaźnikowy:

$$\rho \dot{v}_i = \rho [g_i + (a_K)_i] + \sigma_{ij,j}. \quad (6.27)$$

Siły powierzchniowe, mające charakter sił kontaktowych, można podzielić na dwa rodzaje:

- siły  $\mathbf{t}_S$ , występujące na powierzchni rozpatrywanego elementu płynu i związane z własnościami materiału. Siły te są reprezentowane przez tensor naprężeń  $\mathbf{S}$ ,
- siły  $\mathbf{b}_T$ , występujące na powierzchni obrabianego kęsa spowodowane tarcie, wywołanym oddziaływaniem formujących powierzchni roboczych.

Wartość jednostkowej siły powierzchniowej  $\mathbf{b}_T$  na powierzchni kuli kęsa, reprezentującej wyłącznie tarcie wyraża zależność:

$$b_T = \frac{\sum_{i=1}^3 |T_i|}{4\pi r^2}, \quad (6.28)$$

gdzie:

$T_i$  – siła tarcia na styku materiału kęsa i powierzchni roboczej.

Uwzględniając opisane siły, wektor sił powierzchniowych można ogólnie przedstawić w postaci:

$$\mathbf{t}_n = \mathbf{t}_S + \mathbf{b}_T, \quad (6.29)$$

W członie „ $\nabla \cdot \mathbf{S}$ ” zależności (6.7), uwzględnione zostały wszystkie wypadkowe siły powierzchniowe, oddziaływujące na rozpatrywany element B płynu (ciała).

Równanie zachowania pędu, po uwzględnieniu składników sił powierzchniowych z zależności (6.29) oraz składników sił masowych z zależności (6.24), określają wyrażenia:

zapis wektorowy:

$$\rho \dot{\mathbf{v}} = \rho \mathbf{f} + \nabla \cdot (\mathbf{t}_n) = \rho (\mathbf{g} + \mathbf{a}_K) + \nabla \cdot \mathbf{S} + \nabla \cdot \mathbf{b}_T, \quad (6.30)$$

zapis wskaźnikowy:

$$\rho \dot{v}_i = \rho f_i + (t_n)_{i,1} = \rho [g_i + (a_K)_i] + \sigma_{ij,j} + (b_T)_{i,1}. \quad (6.31)$$

Zależności te mogą być wykorzystane w przypadku możliwości formalnego rozdzielania naprężeń powierzchniowych na składniki. Do dalszych rozważań przyjęto równanie ruchu odzwierciedlające zasadę zachowania pędu w formie zależności (6.30) oraz (6.31).

### 6.2.3. Równanie momentu pędu

W rozważanym procesie (zjawisku) formowania kęsów ciasta w kształty kuliste przez obtaczanie (zaokrąglanie), co powoduje transformacje bryły kęsa ciasta, analizy wymagają wartości występujących momentów – tj. momenty masowe (od sił masowych) i powierzchniowe (od sił powierzchniowych).

W trakcie formowania masa obrabianego kęsa nie ulega zmianie, pozostaje stała (jeśli pominąć: ubytek masy na skutek ścierania oraz wzrost masy na skutek smarowania kęsa olejem lub posypywania mąką).

Prędkość kęsa zarówno od obrotów wokół swego środka masy na promieniu  $r$  (zaokrąglanie) jak i od ruchu po okręgu o promieniu  $R$  (obtaczanie), po osiągnięciu wartości roboczej prawie nie ulega zmianie – można zatem przyjąć jej stałość. Następnie można przyjąć, iż siły od grawitacji oraz od bezwładności są stałe, zatem w konsekwencji można pominąć zmianę momentu pędu od sił masowych.

Najbardziej znaczącymi siłami występującymi na powierzchni formowanego kęsa są siły tarcia wywołane formującymi powierzchniami roboczymi. Siły tarcia powodują powstanie momentów powierzchniowych, których intensywność zależy od własności stykających się materiałów na powierzchni ich wzajemnego oddziaływania oraz od wartości wielkości fizycznych (kinematycznych i dynamicznych) występujących na tej powierzchni. W trakcie trwającej dość krótko (kilka sekund) operacji formowania kęsa wartość sił tarcia jest praktycznie stała.

Uwzględniając wartość oraz zmienność wielkości wpływających na wywoływanie zmiany momentu pędu od sił powierzchniowych można uznać, że zmiana momentu pędu od sił powierzchniowych jest również pomijalna.

Przedstawiona analiza potwierdza zasadność pomijania w klasycznej mechanice ośrodków ciągłych momentów masowych i powierzchniowych, co prowadzi do stwierdzenia, iż równania (6.12) lub (6.13) wynikające z zasady zachowania momentu pędu wyraża równanie symetrii tensora naprężenia w postaci:

$$\mathbf{S} = \mathbf{S}^T \quad \text{lub} \quad s_{ij} = s_{ji} \quad \text{albo} \quad \sigma_{ij} = \sigma_{ji}. \quad (6.32)$$

Równanie to uzupełnia równanie pędu płynu (6.8) lub (6.9).

#### 6.2.4. Równanie energii mechanicznej

Równanie energii mechanicznej w ogólnej postaci (6.17) lub (6.18) zawiera człony dotyczące energii kinetycznej oraz energii wewnętrznej. Wykorzystując równanie pędu można wyznaczyć zmianę energii kinetycznej i wewnętrznej (jako, że absolutna wartość energii wewnętrznej dla materii nie jest znana). W tym celu należy wymnożyć skalarnie równanie pędu w postaci (6.7) przez prędkość  $\mathbf{v}$  płynu, otrzymując [45]:

$$\rho \dot{\mathbf{v}} \cdot \mathbf{v} = \mathbf{v} \nabla \cdot \mathbf{S} + \rho \mathbf{f} \cdot \mathbf{v}. \quad (6.33)$$

Otrzymane wyrażenie określa zmianę energii kinetycznej. W zapisie wskaźnikowym równanie (6.33) przyjmie formę:

$$\rho \dot{v}_i v_i = v_i \sigma_{ij,j} + \rho f_i v_i. \quad (6.34)$$

Po odjęciu stronami równań (6.18) oraz (6.33) otrzymuje się wyrażenie na zmianę energii wewnętrznej w postaci:

zapis wektorowy:

$$\mathbf{S} \cdot \dot{\mathbf{D}} = \nabla \cdot (\mathbf{S}\mathbf{v}) - \mathbf{v} \nabla \cdot \mathbf{S}, \quad (6.35)$$

zapis wskaźnikowy:

$$\sigma_{ij} \dot{\epsilon}_{ij} = \sigma_{ij} v_{i,j}. \quad (6.36)$$

Wielkość z prawej strony przedstawia dyssypację (rozproszenie) energii mechanicznej, wykazując przekształcenie części energii mechanicznej (pracy sił powierzchniowych) w energię wewnętrzną (ciepło) płynu  $\dot{E} = \mathbf{S} \cdot \dot{\mathbf{D}}$  i w konsekwencji prowadzące do wzrostu temperatury płynu (w przypadku znacznej wartości energii dyssypowanej oraz długiego czasu trwania procesu).

Jeżeli na skutek warunków przebiegu procesu (niewielki stopień przekształcania pracy sił zewnętrznych w energię wewnętrzną – krótki czas trwania procesu, nieznaczająca zmiana temperatury) wpływ dyssypacji energii mechanicznej może być pominięty, to równania (6.35) oraz (6.36) przyjmą postać:



$$\mathbf{S} \cdot \dot{\mathbf{D}} = 0 \quad \text{lub} \quad \sigma_{ij} \dot{\epsilon}_{ij} = 0. \quad (6.37)$$

Zatem równanie opisujące zmianę energii mechanicznej redukuje się do prostszego i wygodniejszego w użyciu równania określającego zmianę energii kinetycznej w postaci (6.33) lub (6.34), zależności te zostaną wykorzystane w dalszych rozważaniach.

Podobnie jak dla zasady zachowania pędu, w przypadku gdy jest możliwe określenie składników sił powierzchniowych występujących w równaniu na moc pracy sił zewnętrznych (6.15), można uwzględnić te składniki w członie równania (6.18) oraz (6.33) jak niżej:

zapis wektorowy:

$$\nabla \cdot (\mathbf{S}\mathbf{v} + \mathbf{b}_T \mathbf{v}) = \nabla \cdot (\mathbf{S}\mathbf{v}) + \nabla \cdot (\mathbf{b}_T \mathbf{v}), \quad (6.38)$$

zapis wskaźnikowy:

$$\sigma_{ij} v_{i,j} + v_i \sigma_{ij,j} + b_{T,i} v_{i,j} + v_i (b_{T,i})_{,j}. \quad (6.39)$$

W takim jednak przypadku bardzo komplikują się postacie zależności opisujących zasadę zachowania energii, znakomicie utrudniając analityczne wyznaczenie wartości zmiany energii w trakcie obróbki formującej.

### 6.3. UKŁAD RÓWNAŃ RUCHU

Układ równań wynikający z zasad zachowania masy, pędu, momentu pędu i energii mechanicznej płynu nie jest układem zamkniętym. Zawiera on następujące wielkości do wyznaczenia:

$$\rho, \mathbf{v}, \mathbf{f}, \mathbf{S}.$$

Wielkości te odpowiadają trzynastu wielkościom funkcyjnym skalarnym. Sformułowane równania nie zawierają informacji dotyczących własności materiałowych rozpatrywanego ośrodka (ciasta) oraz sposobu jego reagowania na oddziaływania zewnętrzne. W celu zamknięcia układu równań należy dołączyć zależność sprzęgającą tensor naprężeń z tensorem prędkości deformacji w płynie – co powoduje spadek ilości niewyznaczonych wielkości skalarnych do dziewięciu (wyrażenie na związek tensora naprężeń z tensorem deformacji wprowadza nowe dwie wielkości, ciśnienie  $p$  i lepkość uogólnioną  $\Gamma$ ). Określenie zależności funkcyjnej dla sił masowych  $\mathbf{f}$ , gęstość płynu  $\rho$  i funkcjonau lepkości uogólnionej  $\Gamma$ , (co powoduje wyznaczenie pięciu wielkości skalarnych) oraz odpowiedni dobór warunków brzegowych i początkowych przepływu pozwala na zrównoważenie liczby równań z liczbą niewyznaczonych wielkości skalarnych zawartych w tych równaniach.

Pole sił masowych, sprowadzone do sił ciężkości (grawitacji) i sił bezwładności, może zostać wyznaczone zależnością (6.24) oraz (6.25). Gęstość płynu, określona jako stała (przy określeniu równania ciągłości) jest wielkością

skalarną wyznaczoną doświadczalnie lub analitycznie (dla znanej objętości i masy kęsa). Lepkość uogólniona  $\Gamma$  płynu podlega pośrednio doświadczalnemu wyznaczeniu przez pomiary, tzw. lepkości strukturalnej (rozdział 4 niniejszych rozważań), stanowiąc argument (w postaci funkcjonału) w wyrażeniu modelującym właściwości płynu (ciasta).

Opierając się na przeprowadzonych rozważaniach, po uwzględnieniu dokonanych założeń, można przedstawić układ równań przepływu ciasta podczas formowania w następującej postaci:

- równanie ciągłości (6.21), dla stałej gęstości ośrodka:

$$v_{i,i} = 0,$$

- równanie pędu (6.31) i momentu pędu (6.32):

$$\rho \dot{v}_i = \rho f_i + (t_n)_{i,i} = \rho [g_i + (a_K)_i] + \sigma_{ij,j} + (b_T)_{i,i},$$

$$\sigma_{ij} = \sigma_{ji},$$

- równanie energii mechanicznej (6.19), po uwzględnieniu (6.21) oraz braku rozproszenia energii mechanicznej (6.37):

$$\sigma_{ij} \dot{\epsilon}_{ij} = 0,$$

- reprezentuje równanie energii kinetycznej, które po uwzględnieniu (6.25) przyjmie postać (6.34), jn.:

$$\rho \dot{v}_i v_i = v_i \sigma_{ij,j} + \rho [g_i + (a_K)_i] v_i,$$

- równanie zależności naprężeń i prędkości deformacji w materiale ciasta: funkcjonał lepkości uogólnionej wg (4.79) w postaci:

$$\Gamma_E = \left( \tau_o + \tau_o A_E^{\frac{1}{m}} \right) A_E^{-1},$$

- tensor naprężeń w nieściśliwym materiale kęsa wg (4.80) w postaci:

$$\sigma_{ij} = -p \delta_{ij} + 2\Gamma_E \dot{\epsilon}_{ij}.$$

Przedstawione równania stanowią komplet zależności, które dla podjęcia próby ich rozwiązania w konfiguracji procesu formowania będą sprowadzone do zapisu we współrzędnych sferycznych.

### 6.3.1. Układ równań we współrzędnych sferycznych

Konfiguracja w której opisano przebieg procesu formowania kęsa ciasta w kształtki kuliste określona została we współrzędnych sferycznych (kulistych), opierając się na rysunku 5.3 i wzorach (5.123-5.126).

Sformułowany powyżej układ równań opisujący formowanie we współrzędnych kulistych przyjmie postać:

**Równanie ciągłości** dla  $\mathbf{v}(v_r, v_\vartheta, v_\varphi)$ , zależność (6.21):

$$\nabla \cdot \mathbf{v} = \frac{1}{r} \left( 2v_r + \frac{\partial v_r}{\partial r} r + \frac{\partial v_\vartheta}{\partial \vartheta} + v_\vartheta \operatorname{ctg} \vartheta + \frac{1}{\sin \vartheta} \frac{\partial v_\varphi}{\partial \varphi} \right) = 0. \quad (6.40)$$

**Równanie pędu;** człony równania pędu określone są następująco:

- pochodna substancjalna prędkości  $\mathbf{v}(r, \vartheta, \varphi, t)$  materiału ciasta, ogólnie lewa strona równania pędu:

$$\rho \dot{\mathbf{v}} = \rho \frac{d\mathbf{v}}{dt} = \rho \left[ \frac{\partial \mathbf{v}}{\partial t} + (\mathbf{v} \cdot \nabla) \mathbf{v} \right], \quad (6.41)$$

powyższą zależność można przedstawić następująco:

$$\rho \frac{d\mathbf{v}}{dt} = \rho \left[ \frac{\partial \mathbf{v}}{\partial t} + \mathbf{v}(\nabla \times \mathbf{v}) - \frac{1}{2} \nabla v^2 \right], \quad (6.42)$$

człon ze składowymi pochodnej substancjalnej prędkości:

$$\rho \frac{dv_r}{dt} = \rho \left[ \frac{\partial v_r}{\partial t} + v_r \frac{\partial v_r}{\partial r} + \frac{v_\vartheta}{r} \frac{\partial v_r}{\partial \vartheta} + \frac{v_\varphi}{r \sin \vartheta} \frac{\partial v_r}{\partial \varphi} - \frac{v_\vartheta^2 + v_\varphi^2}{r} \right], \quad (6.43)$$

$$\rho \frac{dv_\vartheta}{dt} = \rho \left[ \frac{\partial v_\vartheta}{\partial t} + v_r \frac{\partial v_\vartheta}{\partial r} + \frac{v_\vartheta}{r} \frac{\partial v_\vartheta}{\partial \vartheta} + \frac{v_\varphi}{r \sin \vartheta} \frac{\partial v_\vartheta}{\partial \varphi} + \frac{v_\vartheta v_\varphi - v_\varphi^2 \operatorname{ctg} \vartheta}{r} \right], \quad (6.44)$$

$$\rho \frac{dv_\varphi}{dt} = \rho \left[ \frac{\partial v_\varphi}{\partial t} + v_r \frac{\partial v_\varphi}{\partial r} + \frac{v_\vartheta}{r} \frac{\partial v_\varphi}{\partial \vartheta} + \frac{v_\varphi}{r \sin \vartheta} \frac{\partial v_\varphi}{\partial \varphi} + \frac{v_r v_\varphi + v_\vartheta v_\varphi \operatorname{ctg} \vartheta}{r} \right], \quad (6.45)$$

- człon sił masowych, odpowiednie składowe przyspieszeń będą dla przyspieszenia ziemskiego  $\mathbf{g}$ :

$$g_r, g_\vartheta, g_\varphi,$$

dla przyspieszenia dośrodkowego  $\mathbf{a}_K$ :

$$(a_K)_r, (a_K)_\vartheta, (a_K)_\varphi,$$

– człon dywergencji sił powierzchniowych, w postaci:

$$\begin{aligned} \nabla \cdot \mathbf{b}_T = & \frac{2}{r} (\mathbf{b}_T)_r + \frac{\partial}{\partial r} (\mathbf{b}_T)_r + \frac{1}{r} (\mathbf{b}_T)_\vartheta \operatorname{ctg} \vartheta + \frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial \vartheta} (\mathbf{b}_T)_\vartheta + \\ & + \frac{1}{r \sin \vartheta} \frac{\partial}{\partial \varphi} (\mathbf{b}_T)_\varphi, \end{aligned} \quad (6.46)$$

– człon dywergencji tensora naprężeń, będzie ogólnie:

$$\nabla \cdot \mathbf{S} = -\nabla p + [\nabla \cdot (2\Gamma_E \dot{\mathbf{D}})] = -\nabla p + (\nabla \cdot \boldsymbol{\tau}), \quad (6.47)$$

składowe gradientu ciśnienia z powyższej zależności:

$$\nabla_r p = \frac{\partial p}{\partial r}; \quad \nabla_\vartheta p = \frac{1}{r} \frac{\partial p}{\partial \vartheta}; \quad \nabla_\varphi p = \frac{1}{r \sin \vartheta} \frac{\partial p}{\partial \varphi}. \quad (6.48)$$

Dywergencja tensora naprężeń ścinających we współrzędnych krzywoliniowych uogólnionych ze współczynnikami Lamé'go [45], będzie:

$$(\nabla \cdot \boldsymbol{\tau})_i = \frac{1}{H_i} \sum_{k=1}^3 \left[ \frac{1}{H_1 H_2 H_3} \frac{\partial}{\partial q_k} \left( H_1 H_2 H_3 \frac{H_i}{H_k} \tau_{ik} - \tau_{kk} \frac{\partial \ln H_k}{\partial q_i} \right) \right], \quad (6.49)$$

Składowe powyższej funkcji dywergencji we współrzędnych kulistych będą:

$$(\nabla \boldsymbol{\tau})_r = \frac{1}{r^3 \sin \vartheta} \left[ r \sin \vartheta \frac{\partial}{\partial r} (r^2 \tau_{rr}) + \frac{\partial}{\partial \vartheta} (r^2 \sin \vartheta \tau_{r\vartheta} - \tau_{\vartheta\vartheta}) + \frac{\partial}{\partial \varphi} (r^2 \tau_{r\varphi} - \tau_{\varphi\varphi}) \right], \quad (6.50)$$

$$(\nabla \boldsymbol{\tau})_\vartheta = \frac{1}{r^3 \sin \vartheta} \left[ \sin \vartheta \frac{\partial}{\partial r} (r^3 \tau_{\vartheta r}) + r^2 \frac{\partial}{\partial \vartheta} (\sin \vartheta \tau_{\vartheta\vartheta}) + \frac{\partial}{\partial \varphi} (r^2 \tau_{\vartheta\varphi} - \tau_{\varphi\varphi} \operatorname{ctg} \vartheta) \right], \quad (6.51)$$

$$(\nabla \boldsymbol{\tau})_\varphi = \frac{1}{r \sin \vartheta} \left[ \frac{\sin \vartheta}{r^2} \frac{\partial}{\partial r} (r^3 \tau_{\varphi r}) + \frac{1}{\sin \vartheta} \frac{\partial}{\partial \vartheta} (\sin^2 \vartheta \tau_{\varphi\vartheta}) + \frac{\partial}{\partial \varphi} \tau_{\varphi\varphi} \right]. \quad (6.52)$$

Występujące powyżej naprężenia ścinające  $\boldsymbol{\tau}$  opisują zależności wynikające z (4.80), w postaci ogólnej (dla uproszczenia zapisu wprowadzono  $\Gamma_E = \Gamma$ ):

$$\tau_{ik} = 2\Gamma_{ik} \dot{\boldsymbol{\varepsilon}}_{ik}. \quad (6.53)$$

Poszczególne składowe naprężeń ścinających występujących w wyrażeniach na składowe tensora naprężeń, będą:

$$\begin{aligned}
\tau_{rr} &= 2\Gamma_{rr}\dot{\epsilon}_{rr}; & \tau_{\vartheta r} &= 2\Gamma_{\vartheta r}\dot{\epsilon}_{\vartheta r}; & \tau_{\varphi r} &= 2\Gamma_{\varphi r}\dot{\epsilon}_{\varphi r}; \\
\tau_{r\vartheta} &= 2\Gamma_{r\vartheta}\dot{\epsilon}_{r\vartheta}; & \tau_{\vartheta\vartheta} &= 2\Gamma_{\vartheta\vartheta}\dot{\epsilon}_{\vartheta\vartheta}; & \tau_{\vartheta\varphi} &= 2\Gamma_{\vartheta\varphi}\dot{\epsilon}_{\vartheta\varphi}; \\
\tau_{r\varphi} &= 2\Gamma_{r\varphi}\dot{\epsilon}_{r\varphi}; & \tau_{\varphi\vartheta} &= 2\Gamma_{\varphi\vartheta}\dot{\epsilon}_{\varphi\vartheta}; & \tau_{\varphi\varphi} &= 2\Gamma_{\varphi\varphi}\dot{\epsilon}_{\varphi\varphi}.
\end{aligned} \tag{6.54}$$

Przy różniczkowaniu naprężeń ścinających należy uwzględnić zależność na funkcjonal lepkości uogólnionej, wynikającą bezpośrednio z wyrażeń (4.79) i (5.134) oraz (5.133), a ogólnie przedstawioną w postaci funkcji:

$$\Gamma_{ik} = f(A_{ik}) \quad \text{a następnie} \quad \Gamma_{ik} = f(\dot{\epsilon}_{ik}), \tag{6.55}$$

Składowe  $\sigma_{ij}$  tensora naprężeń  $\mathbf{S}$  we współrzędnych sferycznych wyznaczone są opierając się na modelowych zależnościach (4.60) oraz (4.80), które określają właściwości badanego ciasta. Składowe tensora naprężeń we współrzędnych kulistych, wykorzystujące zależności (5.133) na składowe  $\dot{\epsilon}_{ij}$  tensora

$\mathbf{D}$  prędkości deformacji oraz zależność (4.15), wyrażone są w ogólnej postaci:

$$\begin{aligned}
\sigma_{rr} &= -p + \tau_{rr} = -p + 2\Gamma_E \dot{\epsilon}_{rr} = -p + 2\Gamma_E \frac{\partial v_r}{\partial r}, \\
\sigma_{\vartheta\vartheta} &= -p + \tau_{\vartheta\vartheta} = -p + 2\Gamma_E \dot{\epsilon}_{\vartheta\vartheta} = -p + 2\Gamma_E \frac{1}{r} \left( \frac{\partial v_\vartheta}{\partial \vartheta} + v_r \right), \\
\sigma_{\varphi\varphi} &= -p + \tau_{\varphi\varphi} = -p + 2\Gamma_E \dot{\epsilon}_{\varphi\varphi} = -p + 2\Gamma_E \frac{1}{r} \left( \frac{1}{\sin \vartheta} \frac{\partial v_\varphi}{\partial \varphi} + v_r + v_\vartheta \operatorname{ctg} \vartheta \right), \\
\sigma_{\varphi\vartheta} &= \tau_{\varphi\vartheta} = 2\Gamma_E \dot{\epsilon}_{\varphi\vartheta} = \frac{1}{r} \Gamma_E \left( \frac{1}{\sin \vartheta} \frac{\partial v_\vartheta}{\partial \varphi} + \frac{\partial v_\varphi}{\partial \vartheta} - v_\varphi \operatorname{ctg} \vartheta \right), \\
\sigma_{r\varphi} &= \tau_{r\varphi} = 2\Gamma_E \dot{\epsilon}_{r\varphi} = \frac{1}{r} \Gamma_E \left( r \frac{\partial v_\varphi}{\partial r} + \frac{1}{\sin \vartheta} \frac{\partial v_r}{\partial \varphi} - v_\varphi \right), \\
\sigma_{r\vartheta} &= \tau_{r\vartheta} = 2\Gamma_E \dot{\epsilon}_{r\vartheta} = \frac{1}{r} \Gamma_E \left( \frac{\partial v_r}{\partial \vartheta} + r \frac{\partial v_\vartheta}{\partial r} - v_\vartheta \right).
\end{aligned} \tag{6.56}$$

**Funkcjonal lepkości uogólnionej**  $\Gamma_E$ , według wzoru (4.79), posiada postać:

$$\Gamma_E = \eta_o \dot{\epsilon}_o^{\frac{1}{m}} \left( 1 + A \frac{1}{E} \right) A_E^{-1} = \tau_o \left( 1 + A \frac{1}{E} \right) A_E^{-1}. \tag{6.57}$$

W zależnościach (6.56), dla modelu eksperymentalnego ciasta, funkcjonal  $\Gamma_E$  jest określony we współrzędnych sferycznych, m.in. przez funkcję natężenia prędkości deformacji  $A_E$ , opisaną wyrażeniem (5.134). Jest zatem funkcją składowych  $\dot{\varepsilon}_{ij}$  tensora prędkości deformacji  $\mathbf{D}$ ,

- moduł dewiatora prędkości deformacji  $A_E$  (funkcjonal natężenia prędkości deformacji) w wyrażeniu (6.57) we współrzędnych sferycznych ogólnie określa zależność (5.134), wykorzystująca zależności (5.133), zatem będzie:

$$A_E = \frac{\sqrt{2}}{r} \left[ \left( \left( r \frac{\partial v_r}{\partial r} \right)^2 + \left( \frac{\partial v_\vartheta}{\partial \vartheta} + v_r \right)^2 + \left( \frac{1}{\sin \vartheta} \frac{\partial v_\varphi}{\partial \varphi} + v_r + v_\vartheta \operatorname{ctg} \vartheta \right)^2 + \left( \frac{1}{\sin \vartheta} \frac{\partial v_\vartheta}{\partial \varphi} + \frac{\partial v_\varphi}{\partial \vartheta} - v_\varphi \operatorname{ctg} \vartheta \right)^2 + \left( r \frac{\partial v_\varphi}{\partial r} + \frac{1}{\sin \vartheta} \frac{\partial v_r}{\partial \varphi} - v_\varphi \right)^2 + \left( \frac{\partial v_r}{\partial \vartheta} + r \frac{\partial v_\vartheta}{\partial r} - v_\vartheta \right)^2 \right]^{\frac{1}{2}}. \quad (6.58)$$

**Równanie momentu pędu** w postaci (6.32) spełniają odpowiednio składowe tensora naprężeń określonego zależnościami (6.56):

$$\sigma_{r\vartheta} = \sigma_{\vartheta r}; \quad \sigma_{r\varphi} = \sigma_{\varphi r}; \quad \sigma_{\vartheta\varphi} = \sigma_{\varphi\vartheta}. \quad (6.59)$$

**Równanie energii kinetycznej** – traktowane jest jako rozprężone od pozostałych; poszczególne jego człony określone mogą być poprzez wykorzystanie poprzednio wyznaczonych zależności:

- człon  $\rho v_i v_i$ ; wykorzystując zależności (6.41) i (6.43),
- człon  $v_i \sigma_{ij}$ ; wykorzystując zależności (6.50-6.52),
- człon  $\rho [g_i + (a_K)_i] v_i$ ; wykorzystując zależności (6.44), (6.45).

Przedstawiony układ równań poddany zostanie analizie dla określenia możliwości jego uproszczenia i dalej efektywnego rozwiązania.

### 6.3.2. Założenia uściślające i upraszczające

W trakcie formułowania układu równań i przedstawiania go we współrzędnych kulistych poczynione zostały wstępne założenia uściślające i upraszczające [22, 35, 39, 45], dotyczące zwłaszcza:

- ciągłości, jednorodności i izotropowości ciasta,
- nieściśliwości ciasta, jego stałej gęstości (szczególny przypadek barotropii),
- izotermiczności zjawiska i pominięcia wielkości termodynamicznych, oddzielenie równania energii od pozostałych równań,
- pomijania dyssypacji energii mechanicznej,
- pomijania momentów od sił masowych i powierzchniowych,

- nieuwzględnienie (mała wartość liczby Debory) argumentu (wpływu) czasu w wyrażeniu modelującym właściwości ciasta.
- stacjonarność operacji formowania w trakcie każdego cyklu formowania.

Dalsze upraszczanie (tzw. ogólny stopień uproszczenia) wielkości charakterystycznych (argumentów – zmiennych zależnych i niezależnych) występujących w sformułowanym układzie równań, w wyniku uściślenia i szacowania wartości może nastąpić w powiązaniu z konfiguracją zjawiska formowania. Przebieg procesu maszynowego formowania kształtek kulistych charakteryzują, poza wielkościami kinematycznymi i dynamicznymi, również wielkości geometryczne, związane z przyjętymi układami współrzędnych – kartezjańskim, biegunowym, sferycznym. Są to zwłaszcza:

- promień  $R$ , obtaczania kęsa ciasta na powierzchni roboczej,
- promień  $r$ , określający rozmiar kęsa; promień wodzący,
- współrzędne kątowe  $\vartheta$  oraz  $\varphi$ , opisujące we współrzędnych kulistych położenie promienia wodzącego  $r$ .

Zwykle w rzeczywistych warunkach formowania wartości promieni: kęsa  $r$  oraz obtaczania  $R$  są prawie takie same (czasami promień  $R$  jest mniejszy od promienia  $r$ ), zatem uprawnione jest szacunkowe przyjęcie zależności:

$$R \cong r. \quad (6.60)$$

Uwzględniając taką relację pomiędzy promieniami można szacunkowo przyjąć, że chwilowe wartości współrzędnych kątowych  $\vartheta$  oraz  $\varphi$  są prawie takie same:

$$\vartheta \cong \varphi. \quad (6.61)$$

Przyjmując takie założenia można określić relacje pomiędzy odpowiednimi wielkościami kinematycznymi (prędkościami), będącymi funkcjami tych współrzędnych, skutkiem będą następujące wzajemne zależności:

$$v_{\vartheta} \cong v_{\varphi} \quad (6.62)$$

oraz

$$\frac{\partial v_{\vartheta}}{\partial \vartheta} \cong \frac{\partial v_{\varphi}}{\partial \varphi}; \quad \frac{\partial v_{\vartheta}}{\partial \varphi} \cong \frac{\partial v_{\varphi}}{\partial \vartheta}; \quad \frac{\partial v_{\vartheta}}{\partial \vartheta} \cong \frac{\partial v_{\vartheta}}{\partial \varphi}; \quad \frac{\partial v_{\varphi}}{\partial \varphi} \cong \frac{\partial v_{\varphi}}{\partial \vartheta}, \quad (6.63)$$

$$\frac{\partial v_{\vartheta}}{\partial r} \cong \frac{\partial v_{\varphi}}{\partial r}. \quad (6.64)$$

Z przyjętego założenia (6.60) wynika, że stół roboczy w trakcie formowania, powinien wykonywać intensywne ruchy obtaczające. Na skutek stosowania tych relacji mechanizm obtaczający posiada znaczną prędkość obrotową (mały promień obtaczania  $R$  – większa częstość obrotów). Względnie mała wartość promienia  $R$  determinuje intensywniejsze formowanie – dla uformowania kęsa

niezbędna jest określona droga jego obtaczania, będąca wielokrotnością obwodu okręgu obtaczania (dla małego promienia  $R$  potrzebna jest większa ilość obrotów kęsa). Większa prędkość obrotowa wywołuje powstanie większego przyspieszenia dośrodkowego i większą reakcję siły bezwładności (siła odśrodkowa). Można zatem przyjąć, że wartość siły odśrodkowej jest znacznie większa od siły ciężkości szybko obtaczanego (wirującego) kęsa. Skutkuje to możliwością zaniedbania przyspieszenia ziemskiego  $g$  w równaniach ruchu, powodując ich uproszczenie, zatem:

$$g = 0. \quad (6.65)$$

Ponadto większa ilość obrotów niezbędnych dla uformowania kęsa powoduje, że na jeden obrót kęsa przypada mniejsza wartość jego deformacji promieniowej i dalej występuje mniejsza prędkość deformacji promieniowej. Dominują deformacje obwodowe, decydująco wpływając na przebieg procesu formowania. Relatywnie małe zmiany prędkość deformacji promieniowej pozwalają na przyjęcie szacunkowych relacji wartości poszczególnych pochodnych cząstkowych w postaci:

$$\frac{\partial v_g}{\partial \vartheta} \gg \frac{\partial v_g}{\partial r}; \quad (6.66)$$

$$\frac{\partial v_\varphi}{\partial \varphi} \gg \frac{\partial v_\varphi}{\partial r} \quad (6.67)$$

oraz jeśli  $v_r = \text{const}$ , to:

$$\frac{\partial v_r}{\partial \vartheta} \cong \frac{\partial v_r}{\partial r} \cong 0; \quad (6.68)$$

$$\frac{\partial v_r}{\partial \varphi} \cong \frac{\partial v_r}{\partial r} \cong 0. \quad (6.69)$$

Na podstawie (6.61), można przyjąć:

$$\frac{\partial b_g}{\partial \vartheta} \cong \frac{\partial b_\varphi}{\partial \varphi}. \quad (6.70)$$

Analogicznie zasadne jest założenie upraszczające w odniesieniu do składowych promieniowych  $(b_T)_r$  sił powierzchniowych w zależności (6.45), powodując, że składowe te są do pominięcia (dla uproszczenia zapisu wprowadzono:  $b_T = b$ ):

$$b_r = 0. \quad (6.71)$$



Dla składowych przyspieszenia dośrodkowego (dla uproszczenia zapisu wprowadzono:  $a_k = a$ ), można przyjąć, iż występuje jedynie składowa  $a_r$ , pozostałe składowe zatem będą:

$$a_\vartheta = 0; \quad a_\varphi = 0. \quad (6.72)$$

Przyjęte uproszczenia i oszacowania pozwalają na uproszczenie sformułowanych równań opisujących proces formowania maszynowego w, tzw. układzie otwartym formowania.

### 6.3.3. Formy uproszczone równań w konfiguracji formowania

W określonym (podrozdział 6.3. oraz podrozdział 6.3.1.) układzie równań zastosowano upraszczające postulaty w postaci wyrażeń (6.60 - 6.72).

**Równanie ciągłości** (6.40), po uwzględnieniu (6.63):

$$\nabla \cdot \mathbf{v} = \frac{1}{r} \left( 2v_r + \frac{\partial v_r}{\partial r} + \frac{\partial v_\vartheta}{\partial \vartheta} \left( 1 + \frac{1}{\sin \vartheta} \right) + v_\vartheta \operatorname{ctg} \vartheta \right) = 0, \quad (6.73)$$

wykorzystując relacje (6.68), otrzymuje się:

$$\nabla \cdot \mathbf{v} = \frac{1}{r} \left( 2v_r + \frac{\partial v_\vartheta}{\partial \vartheta} \left( 1 + \frac{1}{\sin \vartheta} \right) + v_\vartheta \operatorname{ctg} \vartheta \right) = 0. \quad (6.74)$$

**Równanie pędu** według (6.43), po uwzględnieniu (6.63), (6.66 - 6.69) oraz stacjonarności zjawiska przepływu, w trakcie cyklu formowania pozwala na określenie następujących zależności:

Pominięcie pochodnej lokalnej w zależnościach (6.43), tj.:

$$\frac{\partial v_\vartheta}{\partial t} = \frac{\partial v_\varphi}{\partial t} = 0. \quad (6.75)$$

Składowe lewej strony równania pędu, zredukowane do konwekcyjnej będą:

$$\rho \frac{dv_r}{dt} = -2\rho \frac{v_\vartheta^2}{r}, \quad (6.76)$$

$$\rho \frac{dv_\vartheta}{dt} = \rho \frac{1}{r} \left( rv_r \frac{\partial v_\vartheta}{\partial r} + v_\vartheta \frac{\partial v_\vartheta}{\partial \vartheta} \left[ 1 + \frac{1}{\sin \vartheta} \right] + v_\vartheta^2 (1 - \operatorname{ctg} \vartheta) \right), \quad (6.77)$$

$$\rho \frac{dv_\varphi}{dt} = \rho \frac{1}{r} \left( rv_r \frac{\partial v_\vartheta}{\partial r} + v_\vartheta \frac{\partial v_\vartheta}{\partial \vartheta} \left[ 1 + \frac{1}{\sin \vartheta} \right] + v_\vartheta^2 \left[ \frac{v_r}{v_\vartheta} + \operatorname{ctg} \vartheta \right] \right). \quad (6.78)$$

Składowe prawej strony równania pędu:

Składowe od przyspieszenia dośrodkowego z wyrażenia (5.34), po wykorzystaniu (6.72) przyjmą postać:

$$\rho \mathbf{a}_r. \quad (6.79)$$

Dywergencja od sił powierzchniowych, po uwzględnieniu (6.70) będzie:

$$\nabla \cdot \mathbf{b}_T = \frac{1}{r} b_\vartheta \operatorname{ctg} \vartheta + \frac{1}{r} \frac{\partial b_\vartheta}{\partial \vartheta} + \frac{1}{r \sin \vartheta} \frac{\partial b_\varphi}{\partial \varphi}, \quad (6.80)$$

– składowe dywergencji od sił powierzchniowych będą:

$$\nabla_\vartheta b_T = \frac{1}{r} \left( b_\vartheta \operatorname{ctg} \vartheta + \frac{\partial b_\vartheta}{\partial \vartheta} \right), \quad (6.81)$$

$$\nabla_\varphi b_T = \frac{1}{r \sin \vartheta} \frac{\partial b_\vartheta}{\partial \vartheta}. \quad (6.82)$$

Występujące powyżej siły powierzchniowe określone są odpowiednimi składowymi sił tarcia (6.28), wyrażonych zależnościami (5.158) i (5.161).

Dywergencja tensora naprężeń:

– składowe gradientu ciśnienia, po uwzględnieniu (6.61) przyjmą postać:

$$\nabla_r p = \frac{\partial p}{\partial r}; \quad \nabla_\vartheta p = \frac{\partial p}{\partial \vartheta}; \quad \nabla_\varphi p = \frac{1}{r \sin \vartheta} \frac{\partial p}{\partial \vartheta}. \quad (6.83)$$

Dla wyznaczania poszczególnych składowych tensora naprężeń istotne jest założenie (wynikające z rzeczywistego przebiegu operacji formowania), iż naprężenie normalne od ciśnienia w materiale kęsa jest znacznie mniejsze od naprężeń ścinających (jest bardzo małe), zatem:

$$p \delta_{ij} \ll \tau_{ij}. \quad (6.84)$$

W konsekwencji pochodne cząstkowe od ciśnienia oraz dalej składowe gradientu ciśnienia (6.83) są pomijalnie małe:

$$\nabla_r p \cong 0; \quad \nabla_\vartheta p \cong 0; \quad \nabla_\varphi p \cong 0. \quad (6.85)$$

– składowe dywergencji tensora naprężeń  $\sigma$ , zawierające składowe dywergencji tensora naprężeń ścinających według (6.50-6.52), po wykonaniu niezbędnych działań i uwzględnieniu stosownych uproszczeń wynikających z (6.61), będą na podstawie (6.47) oraz (6.84) i (6.85):

$$\begin{aligned}
\nabla_r \sigma &= \frac{1}{r \sin \vartheta} \left[ 2\tau_{rr} \sin \vartheta + \tau_{r\vartheta} \cos \vartheta + r \frac{\partial \tau_{rr}}{\partial r} + \right. \\
&\quad \left. + \frac{\partial \tau_{r\vartheta}}{\partial \vartheta} (1 + \sin \vartheta) - 2 \frac{1}{r^2} \frac{\partial \tau_{\vartheta\vartheta}}{\partial \vartheta} \right], \\
\nabla_{\vartheta} \sigma &= \frac{1}{r \sin \vartheta} \left[ 3\tau_{\vartheta r} \sin \vartheta + \tau_{\vartheta\vartheta} \cos \vartheta + r \frac{\partial \tau_{\vartheta r}}{\partial r} \sin \vartheta + \right. \\
&\quad \left. + \frac{\partial \tau_{\vartheta\vartheta}}{\partial \vartheta} \left( 1 + \sin \vartheta - \frac{1}{r^2} \text{ctg} \vartheta \right) \right], \quad (6.86) \\
\nabla_{\varphi} \sigma &= \frac{1}{r \sin \vartheta} \left[ 3\tau_{\vartheta r} \sin \vartheta + 2\tau_{\vartheta\vartheta} \cos \vartheta + \right. \\
&\quad \left. + r \frac{\partial \tau_{\vartheta r}}{\partial r} + \frac{\partial \tau_{\vartheta\vartheta}}{\partial \vartheta} (1 + \sin \vartheta) \right].
\end{aligned}$$

Poprzednio podane zależności pozwalają na określenie składowych równania pędu zawierającego uproszczone człony składowych (6.76-6.82) oraz składowych (6.86), zatem:

$$\begin{aligned}
\rho \frac{dv_r}{dt} &= \rho a_r + \nabla_r \sigma, \\
\rho \frac{dv_{\vartheta}}{dt} &= \nabla_{\vartheta} b_T + \nabla_{\vartheta} \sigma, \quad (6.87) \\
\rho \frac{dv_{\varphi}}{dt} &= \nabla_{\varphi} b_T + \nabla_{\varphi} \sigma.
\end{aligned}$$

Występujące w powyższych wyrażeniach (6.86) oraz w (6.54) naprężenia ścinające określone są zależnościami (4.80). W zależnościach na naprężenia ścinające  $\tau_{ij}$ , występujący funkcjonal  $\Gamma_E$  lepkości uogólnionej, określony przez (6.57), zależy odpowiednio (poprzez moduł  $A_E$  dewiatora tensora prędkości deformacji) od składowych  $\dot{\epsilon}_{ij}$  tensora prędkości deformacji. Składowe tensora prędkości deformacji (5.133) w zależnościach na naprężenia ścinające, po stosownych uproszczeniach wynikających z relacji (6.66- 6.69), będą:

$$\begin{aligned}
\dot{\epsilon}_{rr} &\cong 0, \\
\dot{\epsilon}_{\vartheta\vartheta} &= \frac{1}{r} \frac{\partial v_{\vartheta}}{\partial \vartheta} + \frac{v_r}{r}, \quad (6.88) \\
\dot{\epsilon}_{\varphi\varphi} &= \frac{1}{r} \left( \frac{1}{\sin \vartheta} \frac{\partial v_{\vartheta}}{\partial \vartheta} + v_r + v_{\vartheta} \text{ctg} \vartheta \right),
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}\dot{\varepsilon}_{\varphi\vartheta} = \dot{\varepsilon}_{\vartheta\varphi} &= \frac{1}{2r} \left[ \frac{1}{\sin\vartheta} \frac{\partial v_\vartheta}{\partial\vartheta} + \frac{\partial v_\vartheta}{\partial\vartheta} - v_\vartheta \operatorname{ctg}\vartheta \right], \\ \dot{\varepsilon}_{r\varphi} = \dot{\varepsilon}_{\varphi r} &= \frac{1}{2r} \left[ r \frac{\partial v_\vartheta}{\partial r} - v_\vartheta \right], \\ \dot{\varepsilon}_{r\vartheta} = \dot{\varepsilon}_{\vartheta r} &= \frac{1}{2r} \left[ r \frac{\partial v_\vartheta}{\partial r} - v_\vartheta \right].\end{aligned}$$

Moduł dewiatora tensora prędkości deformacji (6.58), po uwzględnieniu przyjętych uproszczeń oraz (6.88), przyjmie postać:

$$A_E = \frac{\sqrt{2}}{r} \left[ \left( \frac{\partial v_\vartheta}{\partial\vartheta} + v_r \right)^2 + \left( \frac{\partial v_\vartheta}{\partial\vartheta} \frac{1}{\sin\vartheta} + v_r + v_\vartheta \operatorname{ctg}\vartheta \right)^2 + \left[ \left( \frac{\partial v_\vartheta}{\partial\vartheta} \frac{1}{\sin\vartheta} + \frac{\partial v_\vartheta}{\partial\vartheta} - v_\vartheta \operatorname{ctg}\vartheta \right)^2 + 2 \left( r \frac{\partial v_\vartheta}{\partial r} - v_\vartheta \right)^2 \right]^{\frac{1}{2}}. \quad (6.89)$$

W wyrażeniu (6.57) dla funkcjonu lepkości uogólnionej  $\Gamma_E$ , należy podstawić moduł  $A_E$  dewiatora prędkości deformacji (6.89) wykorzystując składowe  $\varepsilon_{ij}$  (6.85) tensora prędkości deformacji. Następnie można wyznaczyć poszczególne składowe tensora naprężeń  $\sigma$ , określonego zależnościami (6.56). Na podstawie zależności (6.84-6.86) składowe tensora naprężeń z ogólnej postaci (6.56) redukują się do odpowiadających im naprężeń ścinających. Uwzględniając (6.84-6.86) oraz założenia upraszczające i (6.68), składowe te przyjmą następującą postać:

$$\begin{aligned}\sigma_{rr} = -p + \tau_{rr} &= 0, \\ \sigma_{\vartheta\vartheta} = -p + \tau_{\vartheta\vartheta} &= 2\Gamma_E \frac{1}{r} \left( \frac{\partial v_\vartheta}{\partial\vartheta} + v_r \right), \\ \sigma_{\varphi\varphi} = -p + \tau_{\varphi\varphi} &= 2\Gamma_E \frac{1}{r} \left( \frac{\partial v_\vartheta}{\partial\vartheta} \frac{1}{\sin\vartheta} + v_r + v_\vartheta \operatorname{ctg}\vartheta \right), \\ \sigma_{\varphi\vartheta} = \tau_{\varphi\vartheta} &= \Gamma_E \frac{1}{r} \left( \frac{\partial v_\vartheta}{\partial\vartheta} \frac{1}{\sin\vartheta} + \frac{\partial v_\vartheta}{\partial\vartheta} - v_\vartheta \operatorname{ctg}\vartheta \right), \\ \sigma_{r\varphi} = \tau_{r\varphi} &= \Gamma_E \frac{1}{r} \left( r \frac{\partial v_\vartheta}{\partial r} - v_\vartheta \right), \\ \sigma_{r\vartheta} = \tau_{r\vartheta} &= \Gamma_E \frac{1}{r} \left( r \frac{\partial v_\vartheta}{\partial r} - v_\vartheta \right).\end{aligned} \quad (6.90)$$

Pochodne cząstkowe naprężeń ścinających w zależnościach na składowe dywergencji tensora naprężeń (6.86), po uwzględnieniu założeń upraszczających, dotyczą czterech składowych naprężeń ścinających w postaci:

$$\frac{\partial}{\partial r} \tau_{\theta r} = \frac{\partial}{\partial r} (2\Gamma_{\theta r} \dot{\epsilon}_{\theta r}) = 2 \left( \dot{\epsilon}_{\theta r} \frac{\partial}{\partial r} \Gamma_{\theta r} + \Gamma_{\theta r} \frac{\partial}{\partial r} \dot{\epsilon}_{\theta r} \right), \quad (6.91)$$

– pochodne cząstkowe wewnątrz nawiasu po wykorzystaniu (6.57) będą:

$$\frac{\partial}{\partial r} \Gamma_{\theta r} = \tau_0 \left[ \left( 2 - \frac{1}{m} \right) A - A^{-2} \right] \frac{\partial}{\partial r} A, \quad (6.92)$$

$$\frac{\partial}{\partial r} \dot{\epsilon}_{\theta r} = \frac{1}{2r} \left( r \frac{\partial^2 v_{\theta}}{\partial r^2} - \frac{\partial v_{\theta}}{\partial r} + \frac{1}{r} v_{\theta} \right), \quad (6.93)$$

– pozostałe trzy pochodne przyjmują postaci analogiczne do powyższych:

$$\frac{\partial}{\partial \vartheta} \tau_{\theta \vartheta} = \frac{\partial}{\partial \vartheta} (2\Gamma_{\theta \vartheta} \dot{\epsilon}_{\theta \vartheta}) = 2 \left( \dot{\epsilon}_{\theta \vartheta} \frac{\partial}{\partial \vartheta} \Gamma_{\theta \vartheta} + \Gamma_{\theta \vartheta} \frac{\partial}{\partial \vartheta} \dot{\epsilon}_{\theta \vartheta} \right), \quad (6.94)$$

$$\frac{\partial}{\partial \vartheta} \Gamma_{\theta \vartheta} = \tau_0 \left[ \left( 2 - \frac{1}{m} \right) A - A^{-2} \right] \frac{\partial}{\partial \vartheta} A, \quad (6.95)$$

$$\frac{\partial}{\partial \vartheta} \dot{\epsilon}_{\theta \vartheta} = \frac{1}{r} \frac{\partial^2 v_{\theta}}{\partial \vartheta^2}, \quad (6.96)$$

$$\frac{\partial}{\partial \vartheta} \tau_{\theta r} = \frac{\partial}{\partial \vartheta} (2\Gamma_{\theta r} \dot{\epsilon}_{\theta r}) = 2 \left( \dot{\epsilon}_{\theta r} \frac{\partial}{\partial \vartheta} \Gamma_{\theta r} + \Gamma_{\theta r} \frac{\partial}{\partial \vartheta} \dot{\epsilon}_{\theta r} \right), \quad (6.97)$$

$$\frac{\partial}{\partial \vartheta} \Gamma_{\theta r} = \tau_0 \left[ \left( 2 - \frac{1}{m} \right) A - A^{-2} \right] \frac{\partial}{\partial \vartheta} A, \quad (6.98)$$

$$\frac{\partial}{\partial \vartheta} \dot{\epsilon}_{\theta r} = \frac{1}{2r} \left( r \frac{\partial^2 v_{\theta}}{\partial r \partial \vartheta} - \frac{\partial v_{\theta}}{\partial \vartheta} \right). \quad (6.99)$$

$$\frac{\partial}{\partial r} \tau_{rr} = \frac{\partial}{\partial r} (2\Gamma_{rr} \dot{\epsilon}_{rr}) = 2 \left( \dot{\epsilon}_{rr} \frac{\partial}{\partial r} \Gamma_{rr} + \Gamma_{rr} \frac{\partial}{\partial r} \dot{\epsilon}_{rr} \right) = 2\dot{\epsilon}_{rr} \frac{\partial}{\partial r} \Gamma_{rr}, \quad (6.100)$$

$$\frac{\partial}{\partial r} \Gamma_{rr} = \tau_0 \left[ \left( 2 - \frac{1}{m} \right) A - A^{-2} \right] \frac{\partial}{\partial r} A, \quad (6.101)$$

$$\frac{\partial}{\partial r} \dot{\epsilon}_{rr} \cong 0. \quad (6.102)$$

Funkcjonał dewiatora tensora prędkości deformacji (6.89) w skróconym zapisie przyjmie postać:

$$A_E = A = \frac{\sqrt{2}}{r} [MA]^{1/2}. \quad (6.103)$$

Występujące w wyrażeniach (6.92), (6.95), (6.98), (6.101) pochodne cząstkowe modułu A określone są zależnościami:

$$\frac{\partial}{\partial r} A = -\frac{\sqrt{2}}{r^2} [MA]^{1/2} + \frac{\sqrt{2}}{2r} [MA]^{-1/2} \frac{\partial}{\partial r} [MA], \quad (6.104)$$

gdzie poszczególne składniki w powyższym wyrażeniu:

$$\frac{\partial}{\partial r} [MA] = 2 \left[ \begin{aligned} & \left( \frac{\partial v_\vartheta}{\partial \vartheta} + v_r \right) \frac{\partial^2 v_\vartheta}{\partial r \partial \vartheta} + \left( \frac{1}{\sin \vartheta} \frac{\partial v_\vartheta}{\partial \vartheta} + v_\vartheta \operatorname{ctg} \vartheta + v_r \right) \\ & \left( \frac{1}{\sin \vartheta} \frac{\partial^2 v_\vartheta}{\partial r \partial \vartheta} + \frac{\partial v_\vartheta}{\partial r} \operatorname{ctg} \vartheta \right) + \left( \frac{1}{\sin \vartheta} \frac{\partial v_\vartheta}{\partial \vartheta} + \frac{\partial v_\vartheta}{\partial \vartheta} - v_\vartheta \operatorname{ctg} \vartheta \right) \\ & \left( \frac{\partial^2 v_\vartheta}{\partial r \partial \vartheta} \left( \frac{1}{\sin \vartheta} + 1 \right) - \frac{\partial v_\vartheta}{\partial r} \operatorname{ctg} \vartheta \right) + 2r \frac{\partial^2 v_\vartheta}{\partial r^2} \left( r \frac{\partial v_\vartheta}{\partial r} - v_\vartheta \right) \end{aligned} \right] \quad (6.105)$$

oraz:

$$\frac{\partial}{\partial \vartheta} A = \frac{\sqrt{2}}{2r} [MA]^{1/2} \frac{\partial}{\partial \vartheta} [MA], \quad (6.106)$$

gdzie:

$$\frac{\partial}{\partial \vartheta} [MA] = 2 \left[ \begin{aligned} & \frac{\partial^2 v_\vartheta}{\partial \vartheta^2} \left( \frac{\partial v_\vartheta}{\partial \vartheta} + v_r \right) + \left( \frac{\partial v_\vartheta}{\partial \vartheta} \frac{1}{\sin \vartheta} + v_\vartheta \operatorname{ctg} \vartheta + v_r \right) \\ & \left( \frac{\partial^2 v_\vartheta}{\partial \vartheta^2} \frac{1}{\sin \vartheta} + \frac{\partial v_\vartheta}{\partial \vartheta} \operatorname{ctg} \vartheta \left( 1 - \frac{1}{\sin \vartheta} \right) - v_\vartheta \frac{1}{\sin^2 \vartheta} \right) + \\ & + 2 \left( r \frac{\partial v_\vartheta}{\partial r} - v_\vartheta \right) \left( r \frac{\partial^2 v_\vartheta}{\partial r \partial \vartheta} - \frac{\partial v_\vartheta}{\partial r} \right) + \left( \frac{\partial v_\vartheta}{\partial \vartheta} \left( \frac{1}{\sin \vartheta} + 1 \right) - v_\vartheta \operatorname{ctg} \vartheta \right) \\ & \left( \frac{\partial^2 v_\vartheta}{\partial \vartheta^2} \left( \frac{1}{\sin \vartheta} + 1 \right) - \frac{\partial v_\vartheta}{\partial \vartheta} \operatorname{ctg} \vartheta \left( \frac{1}{\sin \vartheta} + 1 \right) + v_\vartheta \frac{1}{\sin^2 \vartheta} \right) \end{aligned} \right]. \quad (6.107)$$

Występujący w zależnościach (6.86) funkcyjonał lepkości uogólnionej (6.57) określony formułą (6.89) lub (6.103) przedstawia wyrażenie:

$$\Gamma_E = \eta_0 \dot{\epsilon}_0^{\frac{1}{m}} \left\{ 1 + \left( \frac{\sqrt{2}}{r} [MA]^{\frac{1}{2}} \right)^{\frac{1}{m}} \right\} \left( \frac{\sqrt{2}}{r} [MA]^{\frac{1}{2}} \right)^{-1}. \quad (6.108)$$

Pochodne cząstkowe w wyrażeniach na składowe  $\dot{\epsilon}_{ij}$  tensora prędkości deformacji (6.88) podstawione do (6.91), (6.94), (6.97), (6.100) oraz po uwzględnieniu ich w wyrażeniu (6.89) na moduł dewiatora A, które podstawione zostaną do (6.92), (6.95), (6.98), (6.101), pozwalają wyznaczyć pochodne cząstkowe naprężeń ścinających, a po scałkowaniu same naprężenia  $\tau_{ij}$ . Wyznaczone naprężenia ścinające oraz ich pochodne mogą następnie zostać podstawione do wyrażen na trzy kierunkowe składowe dywergencji naprężeń (6.84-6.86).

Wyznaczone i uproszczone zależności (6.73-6.108), stanowią komplet równań opisujących formowanie kęsów ciasta w kształtki kuliste w tzw. układzie otwartym formowania. Sformułowany we współrzędnych kulistych i odpowiednio uproszczony układ równań pozwala, po stosownych uproszczeniach, na podjęcie próby ich rozwiązania względem składowych prędkości formowania ( $v_r, v_\vartheta, v_\varphi$ ), a następnie wyznaczenia odpowiednich naprężeń występujących podczas formowania kęsów ciasta.

### 6.3.4. Analiza układu uproszczonych równań

Sformułowany we współrzędnych kulistych układ równań, mimo swojej merytorycznej kompletności, posiada bardzo skomplikowane i uwikłane zależności między licznymi oraz różnorodnymi argumentami występującymi w poszczególnych równaniach.

Rozwiązywanie analityczne tego układu równań metodami klasycznymi prowadzi do bardzo złożonych wyrażen, utrudniając otrzymanie efektywnych rozwiązań.

Dla układu równań ruchu opisujących przepływ we współrzędnych kulistych oraz następnie uproszczonych do dwuwymiarowych zależności (w których wielkości fizyczne ujęte równaniami są funkcjami dwóch argumentów – promienia  $r$  i kąta  $\vartheta$  opisującego położenie tego promienia), należy ocenić możliwość wykorzystania metod przybliżonego rozwiązywania równań ruchu. Przybliżone rozwiązania układu równań ruchu są znane i wykorzystywane zwłaszcza dla przepływów w szczelinowych kanałach między powierzchniami nieruchomymi lub ruchomymi [14, 15, 59, 61]. Typowymi i często stosowanymi sposobami przybliżonego rozwiązywania równań różniczkowych, opisujących przepływ płynu (szczególnie w warstwie przyściennej), są metody:

- samopodobieństwa,
- małego parametru,
- uśrednionej bezwładności (Targa),

- przybliżeń asymptotycznych,
- momentów (przybliżeń całkowych).

**Metoda samopodobieństwa** – znajduje zastosowanie tylko dla płynów newtonowskich, co ogranicza możliwość jej stosowania. Metoda ta polega na wyznaczeniu transformacji zmiennych, tak aby zapewnić samopodobieństwo. W związku z tym transformacja taka nakłada ograniczenia na konfigurację przepływu. W wyniku transformacji równania różniczkowe cząstkowe sprowadzone zostają do układu równań różniczkowych zwyczajnych. Zwykle rozwiązanie tych równań wymaga stosowania dalszych metod przybliżonych lub metod numerycznych (dla ustalonej konfiguracji zjawiska).

**Metoda małego parametru** – polega na wyznaczeniu, tzw. małego parametru spełniającego w postaci bezwymiarowej warunek:

$$0 < \mu_p \ll 1.$$

Możliwość określenia i zastosowania małego parametru prowadzi do traktowania równania różniczkowego nieliniowego jako mało różniącego się od liniowego (linearyzacja równania). Metoda ta (np. Poincarego) umożliwia poszukiwanie rozwiązań okresowych równań różniczkowych nieliniowych, których funkcje można rozwinąć w szereg potęgowy (Fouriera) względem małego parametru. W metodzie tej (uciążliwej analitycznie) nie ma ograniczeń co do kształtu geometrycznego obiektu uczestniczącego w przepływie i dzięki temu metoda ta jest efektywna dla złożonych konfiguracji przepływu.

**Metoda uśrednionej bezwładności** – polega na uśrednianiu wartości składników bezwładnościowych w równaniach ruchu [59]. W metodzie tej można dokładnie określić wartości oraz rozkłady ciśnień przepływu w kanale (szczelinowym). Rozkład prędkości w tej metodzie jest określony zgrubnie – z małym przybliżeniem.

**Metoda przybliżeń asymptotycznych** – polega na podwójnym uśrednianiu składników bezwładnościowych i prowadzi do otrzymania asymptotycznych rozwiązań metodą kolejnych iteracji. Rozwiązania w tej metodzie są podobne do uzyskanych w metodzie małego parametru, mogą to być rozwiązania w postaci pola prędkości przepływu. Zwykle rozwiązaniem początkowym jest, tzw. przybliżenie Reynoldsa – zaniedbanie członów bezwładnościowych.

**Metoda momentów** – zwana też metodą przybliżeń całkowych [14, 15, 59]. Metoda ta pozwala na dokładne wyznaczenie rozkładu ciśnień w przepływie (przybliżenie pędu i energetyczne). Dokładność tej metody jest wyższa od dokładności uzyskanej w metodzie uśrednionej bezwładności, gdzie pole prędkości jest wyznaczane z małą dokładnością (zgrubnie).

Z przeprowadzonych rozważań wynika, iż pożądanymi wielkościami z rozwiązywania układu równań, mającymi wpływ na formowanie kęsa ciasta są prędkości składowe ( $v_r, v_\theta, v_\phi$ ) prędkości wypadkowej  $v_F$  oraz naprężenia występujące w materiale kęsa. Spośród wymienionych metod, jedynie metody małego parametru i przybliżeń asymptotycznych, pozwalają na wyznaczenie



pola prędkości powiązanego z polem naprężeń z odpowiednim przybliżeniem – dokładnością. Ze względu na stopień złożoności wyrażeń oraz zależności pomiędzy wielkościami mającymi wpływ na formowanie, a także na konieczność prowadzenia skomplikowanych i pracochłonnych obliczeń – wykorzystanie obu metod jest bardzo utrudnione (dalsze uproszczenia równań mogą prowadzić do otrzymania trywialnych rozwiązań). W celu uzyskania efektywnych rozwiązań sformułowanego i uproszczonego układu równań, zastosowanie mogą znaleźć jedynie metody numeryczne.

## 7. APLIKACJA PROJEKTOWA OPRACOWANYCH MODELII

Na układ równań przedstawiony w postaci zależności (6.73-9.108) zawartych w podrozdziale 6.3.3., składają się sformułowane wyrażenia wykorzystujące przyjęte założenia upraszczające dla określonych warunków początkowych i brzegowych w przyjętej konfiguracji geometrycznej, tzw. otwartego układu formowania. Dla poszukiwania rozwiązań równań sformułowanych w przyjętym stopniu uproszczenia, pozwalającym na przybliżone wyznaczenie odpowiednich wielkości wpływających na formowanie, możliwe jest zastosowanie do obliczeń metod numerycznych. Zastosowanie komputera do wyznaczania rozwiązań, mimo swej pracochłonności i złożoności (wdrożenie działającego programu obliczeniowego), może pozwolić na wyznaczenie stosownych rozwiązań i uzyskanie wyników przydatnych (pomimo występujących ograniczeń wskutek przyjętych uproszczeń) w zastosowaniach praktycznych, dla określenia i doboru odpowiednich wartości wielkości kinematycznych mechanizmów maszyny formującej.

### 7.1. WARUNKI ROZWIĄZYWANIA UPROSZCZONEGO ZAGADNIENIA FORMOWANIA

Dla rozwiązania wyznaczonego układu równań (6.73-6.108), konieczne jest określenie obszaru rozwiązywania oraz warunków początkowych i brzegowych. Układ równań sformułowano w obszarze określonym rysunkami: 5.3, 5.4, 5.6, 5.7, na których zaznaczono odpowiednie wielkości geometryczne i kinematyczne, wpływające na przebieg operacji formowania w kształtki kuliste.

W ogólnym przypadku wyznaczeniu podlegają (poprzednio określone w rozdziale 5) trzy składowe prędkości formowania, będące funkcjami zmiennych w przyjętym układzie współrzędnych (zmiennych) sferycznych

$$v_r(r, \vartheta, \varphi); \quad v_\vartheta(r, \vartheta, \varphi); \quad v_\varphi(r, \vartheta, \varphi)$$

oraz składowe  $\tau_{ij}$  tensora naprężeń ścinających.

W wyniku uproszczeń określonych wyrażeniami (6.60-6.72) i (6.84) oraz (6.85) w tzw. ogólnym stopniu uproszczenia, w którym wartości poszukiwanych wielkości można określić z przybliżeniem uzasadnionym przyjętymi uproszczeniami, wyznaczeniu podlegają dwie składowe prędkości oraz składowe naprężeń, będące funkcjami jedynie dwóch argumentów:

$$v_r(r, \vartheta), \quad v_\vartheta(r, \vartheta), \quad (7.1)$$

$$\tau(r, \vartheta). \quad (7.2)$$

Zakres wartości argumentów dla wyznaczanych funkcjami wielkości opisany jest zależnościami (5.3) oraz (5.5), w postaci:

$$\vartheta \in (0, \pi n_k) \quad \text{oraz} \quad r \in \left( \frac{h}{2}, r_k \right).$$

Zmienne:  $r_k$  – promień końcowy, formowanej kształtki kulistej oraz  $n_k$  – liczba obrotów kęsa, niezbędna dla uformowania kształtki kulistej, określone są odpowiednio zależnościami (5.6) oraz (5.36). W wyrażeniach (5.3), (5.5), (5.6) wyznaczyć należy następujące wielkości:

– grubość  $h$ , sprasowanego kęsa ciasta (rys. 5.4), jako:

$$h = \frac{1}{\lambda f_p} \frac{\pi D^2}{4}, \quad (7.3)$$

lub w postaci:

$$h = \frac{4M_k}{\pi D^2 \rho}, \quad (7.4)$$

gdzie:

- $\rho$  – gęstość ciasta (tab. 4.3),
- $\lambda$  – ilość gniazd w nożu wieńcowym (odpowiadająca przyjętej ilości kęsów wtórnych otrzymywanych z podziału kęsa pierwotnego),
- $M_k$  – masa kęsa pierwotnego ciasta,
- $D$  – średnica noża wieńcowego (rys. 5.5).

W zależnościami (7.3) i (7.4) należy wyznaczyć wielkości:

– powierzchnię podstawy komory formującej noża wieńcowego:

$$f_p = \frac{1}{\lambda} \frac{\pi D^2}{4}, \quad (7.5)$$

– masę kęsa pierwotnego ciasta:

$$M_k = \lambda m_k, \quad (7.6)$$

gdzie:

- $m_k$  – masa kęsa wtórnego ciasta, wynikająca z masy pieczywa.

Przyjęty, tzw. ogólny stopień uproszczenia (punkt 6.3.3.) układu równań (6.73-6.108) oraz warunki określone zależnościami (7.1-7.6) pozwalają na zastosowanie do rozwiązywania tego układu równań metod numerycznych.

W równaniach zawierających wyrażenia modelowe (6.57) określające właściwości ciasta występują parametry materiałowe, których wartości dla poszczególnych rodzajów ciast zawarto w tabeli 4.6. Wartości charakterystycznych współczynników geometrycznych i materiałowych we wzorach (7.3-7.6) dobrano wyłącznie przykładowo. Współczynniki te uzupełniają niezbędne dane dla wyznaczenia wartości odpowiednich wielkości charakterystycznych występujących w równaniach.

Wielkości otrzymane z rozwiązań numerycznych równań sformułowanych z wykorzystaniem uproszczeń wynikających z tzw. ogólnego stopnia uproszczenia, wyznaczone mogą być jedynie w przybliżeniu, na wartość którego mają wpływ wykorzystywane modele – właściwości materiału kęsa oraz zwłaszcza konfiguracji formowania w tzw. układzie otwartym. W celu przykładowej ilustracji możliwości wykorzystania dokonanego opisu formowania kęsów ciasta sformułowanymi równaniami, zastosowane zostaną dalsze uproszczenia i szacunki wielkości występujących w równaniach.

## 7.2. SZCZEGÓLNY PRZYPADEK UPROSZCZENIA I ROZWIĄZANIA RÓWNAŃ

W przypadku dokonania dalej idących uproszczeń niż określone relacjami (6.66-6.69), dla tzw. szczególnego stopnia uproszczenia o mniejszym stopniu przybliżenia wartości wyznaczanych wielkości, można otrzymać analityczne rozwiązania bezpośrednio z układu równań opisujących formowanie. W tym celu poszerzone zostanie upraszczające założenie dotyczące składowej promieniowej prędkości deformacji kęsa – jeśli przyjąć, iż składowa promieniowa prędkości deformacji jest pomijalnie mała, to można przyjąć następujące szacunkowe relacje (w miejsce określonych zależnościami (6.66-6.69)):

$$v_r \cong 0, \quad (7.7)$$

oraz

$$\frac{\partial v_r}{\partial r} \cong 0; \quad \frac{\partial v_r}{\partial \vartheta} \cong 0; \quad \frac{\partial v_r}{\partial \varphi} \cong 0. \quad (7.8)$$

**Równanie ciągłości** (6.40), po uwzględnieniu (6.63) oraz (7.7) i (7.8) przyjmie postać:

$$\nabla \cdot \mathbf{v} = \frac{1}{r} \left( \frac{\partial v_\vartheta}{\partial \vartheta} + v_\vartheta \operatorname{ctg} \vartheta + \frac{1}{\sin \vartheta} \frac{\partial v_\vartheta}{\partial \vartheta} \right) = 0, \quad (7.9)$$

po przekształceniach będzie:

$$\frac{\partial v_\vartheta}{\partial \vartheta} \left( \frac{\sin \vartheta + 1}{\cos \vartheta} \right) + v_\vartheta = 0. \quad (7.10)$$

W wyniku rozwiązania powyższej postaci równania ciągłości otrzymuje się:

$$v_{\vartheta} = C - \sin \vartheta - 1, \quad (7.11)$$

stąd zasadna jest zależność:

$$\frac{\partial}{\partial r} v_{\vartheta} = 0. \quad (7.12)$$

Dla zależności (7.11), po jej scałkowaniu, można wyznaczyć stałą całkowania jak następuje:

$$\text{dla kąta: } \vartheta = 0, \text{ będzie: } \sin \vartheta = 0, \quad v_{\vartheta} = 0 \text{ oraz } C = 1,$$

zatem wyrażenie na poszukiwaną prędkość przyjmie postać:

$$v_{\vartheta} = -\sin \vartheta. \quad (7.13)$$

Po uwzględnieniu przyjętych założeń (6.61) i (6.62), druga składowa prędkości będzie:

$$v_{\vartheta} = v_{\varphi} = -\sin \vartheta. \quad (7.14)$$

Otrzymane składowe pozwalają na wyznaczenie wypadkowej prędkości formowania na powierzchni kęsa ciasta, w postaci:

$$v_F = \sqrt{v_{\vartheta}^2 + v_{\varphi}^2} = \sqrt{2} \sin \vartheta. \quad (7.15)$$

W sformułowanych równaniach opisujących formowanie, można zatem stosować uproszczenia będące skutkiem powyżej wyznaczonej zależności (7.12), gdyż składowa prędkości jest wyłącznie funkcją kąta  $\vartheta$ , tj.:  $v_{\vartheta}(\vartheta)$ . Wykorzystując wyrażenie na składową prędkości można ściślej określić zależności będące funkcjami prędkości i jej pochodnych. Występujące w tych zależnościach pochodne prędkości, po zastosowaniu formuł (7.7) lub (7.8), przyjmą postacie:

$$\frac{\partial v_{\vartheta}}{\partial \vartheta} = -\cos \vartheta; \quad \frac{\partial^2 v_{\vartheta}}{\partial \vartheta^2} = \sin \vartheta; \quad \frac{\partial^3 v_{\vartheta}}{\partial \vartheta^3} = \cos \vartheta. \quad (7.16)$$

Wartości powyższych pochodnych mogą być wykorzystane w odpowiednich zależnościach opisujących składowe dywergencji tensora naprężeń (6.86).

**Równanie pędu** według (6.42), po uwzględnieniu wzorów (6.63), (7.7), (7.8) oraz stacjonarności zjawiska przepływu, pozwala na określenie następujących zależności:

**Składowe lewej strony równania pędu** (6.76-6.78), zredukowane do składowej konwekcyjnej, będą:

$$\rho \frac{dv_r}{dt} = -2\rho \frac{1}{r} \sin^2 \vartheta, \quad (7.17)$$

$$\rho \frac{dv_\vartheta}{dt} = \rho \frac{1}{r} (\sin \vartheta \cos \vartheta + \cos \vartheta + \sin^2 \vartheta (1 - \operatorname{ctg} \vartheta)), \quad (7.18)$$

$$\rho \frac{dv_\varphi}{dt} = \rho \frac{1}{r} (\sin \vartheta \cos \vartheta + \cos \vartheta + \sin^2 \vartheta \operatorname{ctg} \vartheta). \quad (7.19)$$

**Składowe prawej strony równania pędu:**

- składowa od przyspieszenia dośrodkowego, w postaci (6.79)
- składowe dywergencji od sił powierzchniowych: przyjęto dodatkowe założenie upraszczające, pomijające zmianę kątową sił powierzchniowych, w postaci:

$$\frac{\partial b_\vartheta}{\partial \vartheta} \cong 0, \quad \text{oraz} \quad \nabla_\varphi = 0, \quad (7.20)$$

zatem składowa dywergencji sił powierzchniowych zredukuje się do postaci:

$$\nabla_\vartheta b_T = \frac{1}{r} b_\vartheta \operatorname{ctg} \vartheta, \quad (7.21)$$

- składowe dywergencji tensora naprężeń (6.86), należy określić opierając się na wyznaczonych postaciach składowych naprężeń ścinających, za pomocą wielkości wchodzących w ich skład:
- składowe tensora prędkości deformacji (6.88), po uwzględnieniu (7.12):

$$\dot{\varepsilon}_{rr} = 0,$$

$$\dot{\varepsilon}_{\vartheta\vartheta} = -\frac{1}{r} \cos \vartheta,$$

$$\dot{\varepsilon}_{\varphi\varphi} = -\frac{1}{r} \operatorname{ctg} \vartheta (1 + \sin \vartheta), \quad (7.22)$$

$$\dot{\varepsilon}_{\varphi\vartheta} = \dot{\varepsilon}_{\vartheta\varphi} = -\frac{1}{2r} [\operatorname{ctg} \vartheta (1 - \sin \vartheta) + \cos \vartheta],$$

$$\dot{\varepsilon}_{r\varphi} = \dot{\varepsilon}_{\varphi r} = \frac{1}{2r} \sin \vartheta,$$

$$\dot{\varepsilon}_{r\vartheta} = \dot{\varepsilon}_{\vartheta r} = \frac{1}{2r} \sin \vartheta.$$

Pochodne cząstkowe (6.93), (6.96), (6.99) określają wyrażenia:

$$\frac{\partial}{\partial r} \dot{\varepsilon}_{\vartheta r} = -\frac{1}{2r^2} \sin \vartheta, \quad (7.23)$$

$$\frac{\partial}{\partial \vartheta} \dot{\varepsilon}_{\vartheta \vartheta} = \frac{1}{r} \sin \vartheta, \quad (7.24)$$

$$\frac{\partial}{\partial \vartheta} \dot{\varepsilon}_{\vartheta r} = \frac{1}{2r} \cos \vartheta. \quad (7.25)$$

Składowe tensora naprężeń określone zależnościami (6.90), będą:

$$\begin{aligned} \sigma_{rr} &= \tau_{rr} = 0, \\ \sigma_{\vartheta\vartheta} &= \tau_{\vartheta\vartheta} = 2\Gamma_E \frac{1}{r} \cos \vartheta, \\ \sigma_{\varphi\varphi} &= \tau_{\varphi\varphi} = 2\Gamma_E \frac{1}{r} \operatorname{ctg} \vartheta (\sin \vartheta - 1), \\ \sigma_{\varphi\vartheta} &= \tau_{\varphi\vartheta} = -\Gamma_E \frac{1}{r} [\operatorname{ctg} \vartheta (1 - \sin \vartheta) + \cos \vartheta], \quad \sigma_{r\varphi} = \tau_{r\varphi} = \Gamma_E \frac{1}{r} \sin \vartheta, \\ \sigma_{r\vartheta} &= \tau_{r\vartheta} = \Gamma_E \frac{1}{r} \sin \vartheta. \end{aligned} \quad (7.26)$$

Moduł dewiatora tensora prędkości deformacji (6.89) dla przyjętych uproszczeń według (7.7), (7.8) i (7.12), przyjmie postać:

$$A_E = \frac{\sqrt{2}}{r} \left[ \operatorname{ctg}^2 \vartheta [(1 + \sin \vartheta)^2 + 1] + \sin^2 \vartheta + 1 \right]^{\frac{1}{2}}, \quad (7.27)$$

stąd bezpośrednio wyrażenie MA będzie:

$$MA = \left[ \operatorname{ctg}^2 \vartheta [(1 + \sin \vartheta)^2 + 1] + \sin^2 \vartheta + 1 \right]. \quad (7.28)$$

Funkcjonał lepkości uogólnionej  $\Gamma_E$  wg (6.57), po wykorzystaniu powyższych wyrażen, przyjmie formę analogiczną do (6.108):

$$\Gamma_E = \eta_o \dot{\varepsilon}_o^{\frac{1}{m}} \left\{ 1 + \left( \frac{\sqrt{2}}{r} [MA]^{\frac{1}{2}} \right)^{\frac{1}{m}} \right\} \left\{ \left( \frac{\sqrt{2}}{r} [MA]^{\frac{1}{2}} \right)^{-1} \right\}. \quad (7.29)$$

Pochodne cząstkowe modułu A, we wzorach (6.92), (6.95), (6.98), (6.101):  
– według (6.104), będą odpowiednio:

$$\frac{\partial}{\partial r} A = 0, \quad \text{gdyż} \quad \frac{\partial}{\partial r} [MA] = 0, \quad (7.30)$$

– według (6.106), będą odpowiednio:

$$\frac{\partial}{\partial \vartheta} A = \frac{\sqrt{2}}{2r} [MA]^{-\frac{1}{2}} \frac{\partial}{\partial \vartheta} [MA], \quad (7.31)$$

gdzie:

$$\frac{\partial}{\partial \vartheta} [MA] = 2 \begin{bmatrix} -\text{ctg}\vartheta(1+\sin\vartheta) \left( 1 + \frac{1}{\sin\vartheta} - \cos\vartheta \text{ctg}\vartheta \left( 1 - \frac{1}{\sin\vartheta} \right) \right) + \\ -\text{ctg}\vartheta \left( 1 + \sin\vartheta + \cos\vartheta \text{ctg}\vartheta \left( 1 + \frac{1}{\sin\vartheta} \right) - \frac{1}{\sin\vartheta} \right) + \sin\vartheta \cos\vartheta \end{bmatrix}. \quad (7.32)$$

Dysponując powyżej określonymi wyrażeniami (7.23-7.25) oraz (7.27-7.32) i (6.106) można wyznaczyć poszczególne pochodne cząstkowe naprężeń określonych zależnościami (6.91-6.102), a następnie po odpowiednich podstawieniach, można wyznaczyć składowe (6.86) dywergencji tensora naprężeń  $\sigma$ .

Składowe równania pędu, po uwzględnieniu wyznaczonych wyrażen:

– dla lewej strony równania pędu – (7.19-7.21),  
 – dla prawej strony równania pędu – (7.22-7.25), (7.27-7.32),  
 mogą być przedstawione analogicznie do ogólnej postaci zależności (6.87), spełniając te zależności tożsamościowo w postaci:

$$\begin{aligned} \rho \frac{dv_r}{dt} &= \rho a_r + \nabla_r \sigma, \\ \rho \frac{dv_\vartheta}{dt} &= \nabla_\vartheta b_r + \nabla_\vartheta \sigma, \\ \rho \frac{dv_\varphi}{dt} &= \nabla_\varphi \sigma. \end{aligned} \quad (7.33)$$

Podane zależności, pozwalają na analityczne wyznaczenie poszukiwanych wielkości z uwzględnieniem właściwości ciasta, tj. prędkości i naprężeń, jako wielkości wpływających na przebieg formowania. Wykorzystane zostaną odpowiednio parametry i współczynniki wyznaczone doświadczalnie.

### 7.3. WYNIKI UPROSZCZONYCH ROZWIĄZAŃ

Wyznaczenie wartości poszukiwanych składowych naprężeń ścinających, w powiązaniu z bezpośrednio wyznaczonymi składowymi prędkościami, dokonane zostało przykładowo dla jednego rodzaju ciasta OP 500, opisanego krzywą 3b na rysunkach 4.2-4.4. Dla tego rodzaju ciasta odpowiednie parametry i współczyn-



niki materiałowe dobrano z tabel 4.3 oraz 4.6. Ponadto wykorzystano zależności (7.3-7.6) i w oparciu o nie określono niezbędne wielkości geometryczne.

W przeprowadzonych obliczeniach wykorzystano następujące dane liczbowe:

1. Masa kęsa pierwotnego	$M_k = 1800 \text{ g}$
2. Średnica noża wieńcowego	$D = 0,380 \text{ m}$
3. Gęstość ciasta	$\rho = 1179000 \text{ g}\cdot\text{m}^{-3}$
4. Grubość kęsa pierwotnego	$h = 0,0135 \text{ m}$
5. Masa kęsa wtórnego	$m_k = 60 \text{ g}$
6. Promień końcowy kęsa	$r_{\max} = r_k = 0,0230 \text{ m}$
7. Promień początkowy	$r_{\min} = 0,0067 \text{ m}$
8. Ilość obrotów kęsa w cyklu roboczym	$n_k = 30 \text{ ob. min}^{-1}$
9. Ilość gniazd w nożu wieńcowym	$\lambda = 30$

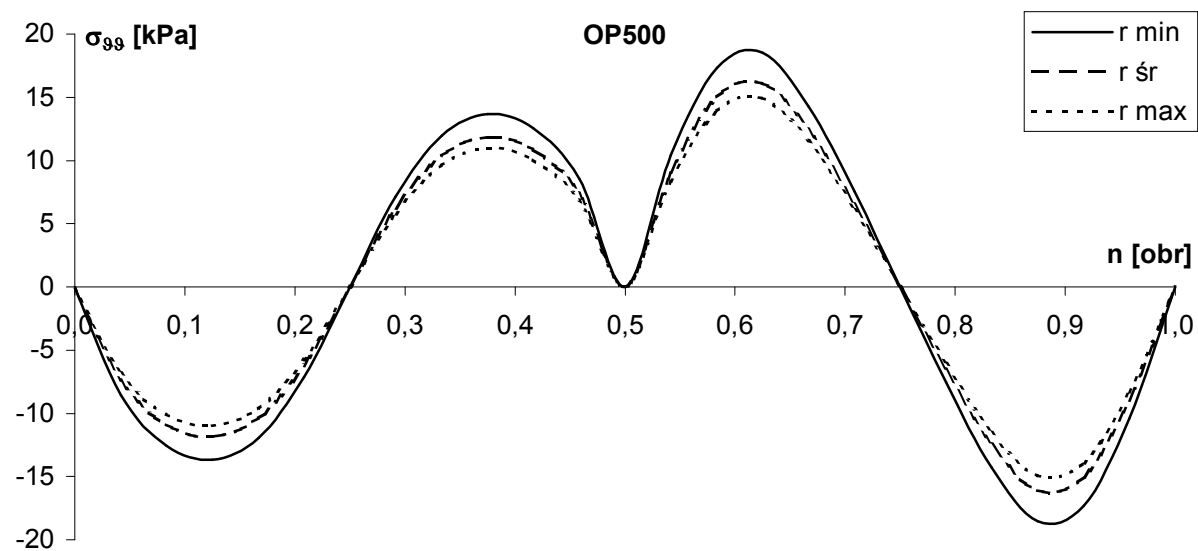
Wykorzystując zależności (7.13-7.15) oraz (7.26), z uwzględnieniem wyrażen (7.27-7.29), wyznaczono naprężenia ścinające dla formowanego kęsa ciasta w zakresie całego cyklu roboczego formowania, realizowanego w trakcie założonej liczby  $n_k$  obrotów kęsa. Do niezbędnych obliczeń zastosowano standardowy program Microsoft Excel. Na rysunkach 7.1-7.4 pokazano przebieg krzywych naprężeń ścinających w trakcie jednego obrotu formowanego kęsa. Ograniczenie pokazanej zmienności naprężeń do jednego obrotu kęsa jest wystarczające ze względu na cykliczność tej zmienności.

#### 7.4. Dyskusja otrzymanych wyników

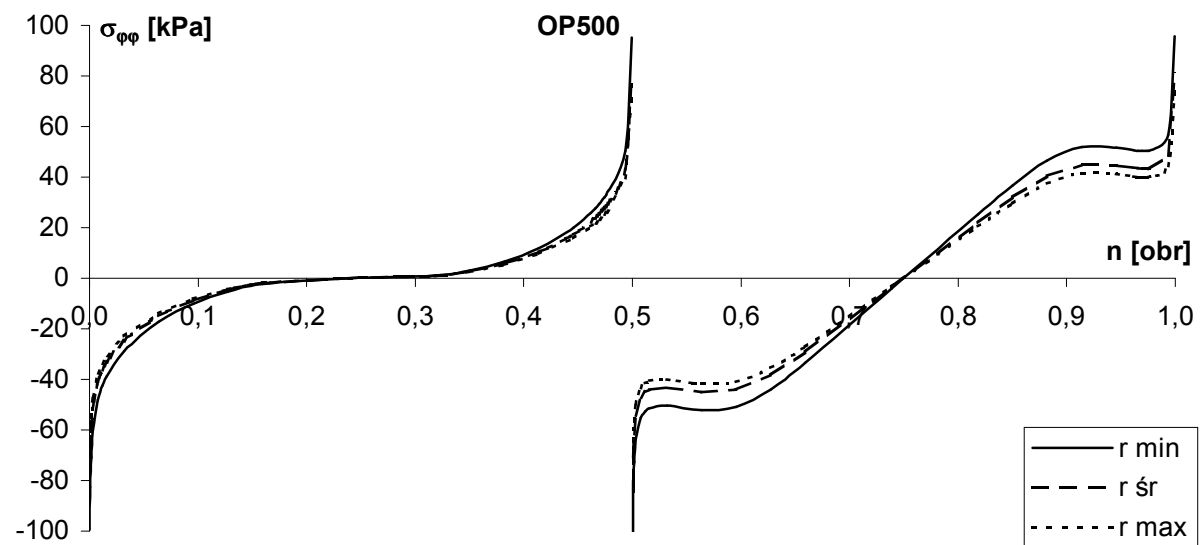
Przebiegi i zmienność poszukiwanych wielkości prędkości oraz naprężeń na wykresach (rys. 7.1-7.4) posiadają charakter cykliczny, wynikający z istoty operacji formowania kęsów kulistych (powtarzalne ruchy obtaczające).

Ze względu na przyjęte założenia dotyczące znacznych uproszczeń przedmiotowych równań oraz wykorzystanie istniejących rozwiązań konstrukcyjnych, otrzymane wyniki posiadają głównie charakter jakościowy. Wyznaczone wartości oddają jedynie przybliżone relacje pomiędzy występującymi wielkościami. Wyznaczone wielkości, prędkość formowania  $v_F$  i jej składowe oraz składowe naprężenia ścinających  $\tau_{ij}$ , mogą być wykorzystane do określenia odpowiednich wielkości kinematycznych, opisanych zależnościami w punkcie 5.1., podpunkt a) oraz wielkości dynamicznych, opisanych zależnościami przedstawionymi w podrozdziale 5.5.1., zwłaszcza zależnościami (5.178-5.180). Cykliczność zmian wartości określonych wielkości rzutuje na sposób ich praktycznego wykorzystania – np. poprzez wyznaczanie wartości granicznych czy maksymalnych. Uzyskane w wyniku obliczeń wartości wielkości kinematycznych i dynamicznych mogą być wykorzystane jako tzw. pierwsze przybliżenie wartości poszczególnych wielkości, przy projektowaniu i konstruowaniu stosownych układów roboczych maszyn formujących kęsy ciasta. Dokładniejsze wartości poszukiwanych wielkości mogą być osiągnięte z rozwiązań numerycznych sformułowanego układu równań określonych zależnościami (6.73-6.108).

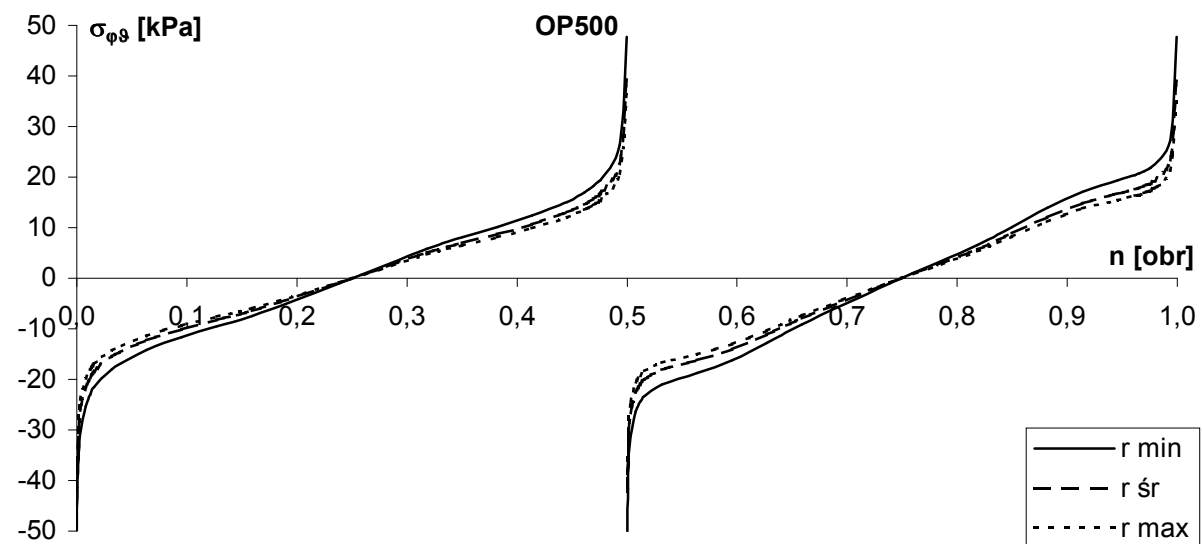
Wykresy zmienności naprężeń podczas formowania kęsów ciasta OP500  
w kształtki kuliste w trakcie jednego obrotu kęsa



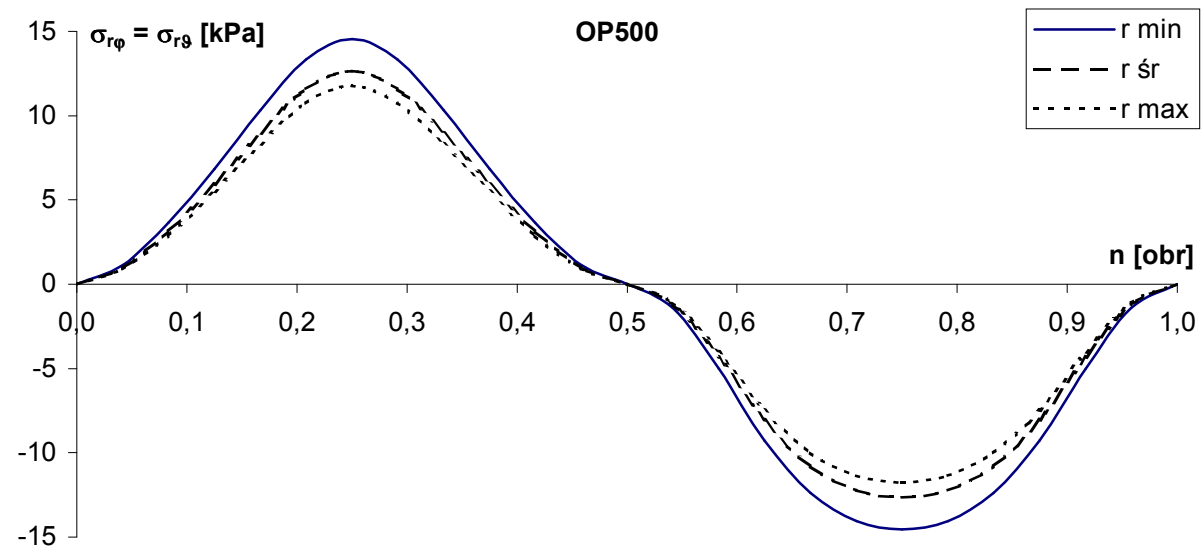
Rys. 7.1. Zmienność składowej  $\sigma_{99} = \tau_{99}$  naprężenia, na powierzchni kęsa dla zmian promienia  $r$  kęsa w trakcie jednego jego obrotu



Rys. 7.2. Zmienność składowej  $\sigma_{\phi\phi} = \tau_{\phi\phi}$  naprężenia, na powierzchni kęsa dla zmian promienia  $r$  kęsa w trakcie jednego jego obrotu



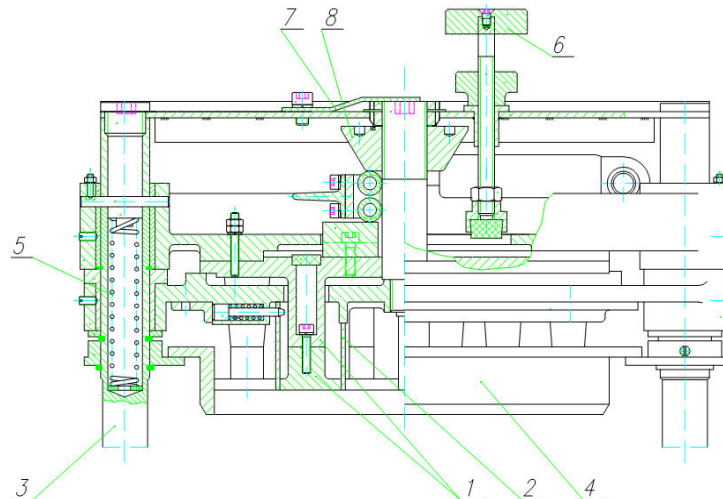
Rys. 7.3. Zmienność składowej  $\sigma_{\phi\theta} = \tau_{\phi\theta}$  naprężenia, na powierzchni kęsa dla zmian promienia  $r$  kęsa w trakcie jednego jego obrotu



Rys. 7.4. Zmienność składowej  $\sigma_{r\phi} = \tau_{r\phi}$  naprężenia, na powierzchni kęsa dla zmian promienia  $r$  kęsa w trakcie jednego jego obrotu

Na podstawie analizy możliwości aplikacyjnego wykorzystania, w projektowaniu i konstruowaniu opracowanych modeli (właściwości ciasta i formowania kulistego) oraz podstawowych wielkości kinematycznych i dynamicznych, występujących podczas formowania, można zaprojektować układ formujący maszynowo kuliste kęsy ciasta.

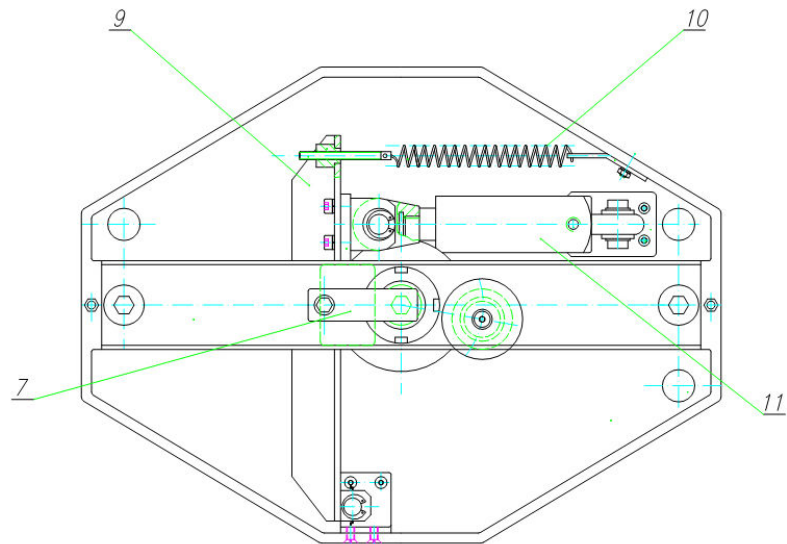
Na powyższych rysunkach przedstawiono konstrukcję (firma IBIS Szubin) głowicy dzielarko – formierki z nożem gwiazdzistym (wieńcowym), (rys. 7.5 i 7.6). Operacja formowania dokonywana jest w komorach roboczych według opisu przebiegu formowania pokazanym na rysunku 5.11 oraz 1.8. Na rysunku 7.7 pokazano konstrukcję układu mechanizmu realizującego ruch formujący stołu roboczego. W zespole przedstawionym na rysunku 7.7 osadzone są kolumny prowadzące głowicy pokazane na rysunku 7.5. Ruch kolumn (i głowicy), w celu sprasowania i podzielenia kęsa pierwotnego (rys. 1.10 i 1.11), realizowany jest siłownikami hydraulicznymi (nie pokazanymi na rysunku).



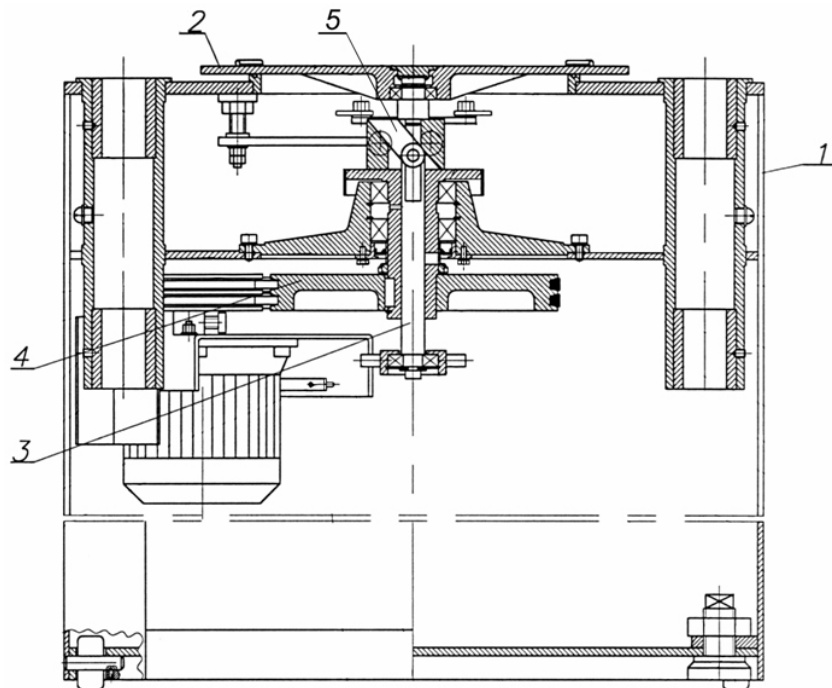
Rys. 7.5. Głowica formująca (półprzekrój):

- 1 – płyta prasująca, 2 – nóż gwiazdzisty (wieńcowy), 3 – kolumny prowadzące, 4 – pierścień okalający, 5 – sprężyna cofania noża, 6 – zderzak, 7, 8 – elementy blokady noża

W konstrukcji pokazywanej maszyny wykorzystano wyniki dotyczące określenia wartości niektórych wielkości kinematycznych i dynamicznych występujących w układzie formowania – wyznaczonych podczas opracowywania wcześniejszej wersji dzielarko – formierki [11]. Dokumentacja konstrukcyjna [11] dotyczy dzielarko – formierki dla bułek drobnych, wytwarzającej kęsy kuliste o masie 40-115 g.



Rys. 7.6. Głowica formująca (widok z góry):  
7, 9 – elementy blokady noża, 10 – sprężyna, 11 – siłownik hydrauliczny



Rys. 7.7. Układ formowania (przekrój bez głowicy):  
1 – korpus, 2 – płyta stołu formującego, 3 – suwak mechanizmu krzywkowego, 4 – przekładnia pasowa, 5 – mechanizm krzywkowy

Podkreślić należy, że podczas opracowywania konstrukcji maszyn: [11] oraz pokazanych na rysunkach 7.5-7.7, wiele wielkości roboczych (kinematycznych i dynamicznych) wyznaczano empirycznie (często metodą prób) lub intuicyjnie, wykorzystując doświadczenie zawodowe konstruktora.



## 8. PODSUMOWANIE I WNIOSKI

Z analizy istniejącego stanu wiedzy, dotyczącej zagadnienia formowania kęsów ciasta w kształtki kuliste, uwzględniając właściwości materiałowe (w tym reologiczne) ciasta, wynika brak uporządkowanego, jednolitego i spójnego ujęcia zagadnienia.

Informacje źródłowe dotyczące właściwości reologicznych ciasta są rozproszone i zwykle nie dotyczą pożądanego kontekstu rozważań, tj. określenia modelu matematycznego opisującego właściwości reologiczne ciasta, zwłaszcza w postaci równania konstytutywnego w postaci nadającej się do zastosowania w analitycznym opisie operacji formowania kęsów. W przypadku potrzeby wyznaczenia zależności modelującej właściwości reologiczne konkretnych rodzajów ciast, niezbędne staje się zatem wyznaczenie na doraźne potrzeby tej zależności, przeprowadzając badania eksperymentalne właściwości określonych ciast.

W odniesieniu do fenomenologicznego ujęcia operacji formowania kęsów ciasta, występujące opisy [62, 63, 65] posiadają charakter zawężony i niepełny, jedynie pośrednio związany z formowaniem w kształtki kuliste.

W praktyce przemysłowej, konstruuje się i buduje wiele różnorodnych maszyn wykonujących operacje formowania ciasta w pożądaną kształtki. Maszyny te często naśladując formowanie manualne posiadają rozwiązania konstrukcyjne wynikające z własnych (projektanta i producenta maszyn), wieloletnich prób i doświadczeń oraz doskonalenia stosowanych rozwiązań konstrukcyjnych – obecnie rzadko spotykane są oryginalne rozwiązania konstrukcyjne układów formujących.

Istniejący stan wiedzy dotyczący podjętego zagadnienia oraz powszechność stosowania operacji formowania, pozostająca w związku ze znaczną ilością piekarń (małych i średnich) i wynikające stąd zapotrzebowanie na coraz sprawniejsze i doskonalsze technicznie maszyny powodują, że w niniejszej pracy podjęto próbę w miarę ścisłego matematycznie opisu zagadnienia w ujęciu zawierającym fenomenologię procesu formowania oraz właściwości reologiczne określonego rodzaju ciasta.

Dla udowodnienia zasadności i poprawności sformułowanej w opracowaniu tezy przyjęto określone hipotezy badawcze. Przedstawione rozważania potwierdzają prawidłowość i słuszność tezy i wszystkich przyjętych hipotez badawczych:

1. W rozdziale 4. przedstawiono badania eksperymentalne, w wyniku których opracowano równania konstytutywne modelujące matematycznie właściwości ciasta w określonych warunkach i zakresie czasu trwania obróbki formującej. Opracowany model właściwości reologicznych ciasta dzięki swojej budowie (model należy do grupy modeli potęgowych) oraz prostocie (podobieństwo do modelu Herschela – Bulkleya) pozwala na wykorzystanie w sformułowanych równaniach i umożliwia otrzymanie ich efektywnych rozwiązań.

2. W rozdziale 5. dokonano opisu wybranych aspektów kinematyki i dynamiki formowania kęsów ciasta w kształtki kuliste. Opracowane odpowiednią oryginalną konfigurację geometryczną modelującą proces formowania kęsa ciasta. Ponadto sformułowano podstawowe zależności (w formie umożliwiającej bezpośrednio ich wykorzystanie w zastosowaniach praktycznych) pomiędzy wielkościami fizycznymi wpływającymi na przebieg formowania, wykorzystując również oryginalną (autorską) konfigurację opisu podstawowych zależności wielkości uczestniczących w deformacji kęsa.

3. W rozdziale 5. i 6., opierając się na opracowanych modelach właściwości ciasta oraz operacjach formowania określono zależności pomiędzy wybranymi wielkościami mechanicznymi. Matematyczny opis zagadnienia, wynikający z właściwości ciasta oraz charakteru procesu formowania, doprowadził do sformułowania układu równań we współrzędnych sferycznych, opisujących formowanie kęsów ciasta w kształtki kuliste. Następnie dokonano odpowiednich uproszczeń równań w celu umożliwienia i ułatwienia rozwiązania utworzonego układu równań. Wprowadzone uproszczenia zredukowały zapis równań we współrzędnych w przestrzeni trójwymiarowej (układ współrzędnych sferycznych) do układu współrzędnych dwuwymiarowych (płaski układ współrzędnych biegunowych).

4. W rozdziale 6. i 7. sformułowany układ równań przedstawiono dla dwóch stopni uproszczenia występujących wielkości i relacji wybranych wielkości geometrycznych, kinematycznych i dynamicznych:

– Zestaw równań wyznaczający z większym przybliżeniem poszukiwane wielkości (tzw. ogólny stopień uproszczenia). Wyjściowe równania opracowane w trójwymiarowym układzie współrzędnych sferycznych, przedstawiono ze stosownymi uproszczeniami we współrzędnych biegunowych opisanymi w podrozdziale 6.3.3. Opracowany układ równań umożliwia sformułowanie odpowiedniego algorytmu w celu numerycznego ich rozwiązania oraz dokonania stosownych obliczeń dla wybranych warunków brzegowych i parametrów materiałowych rozważanych rodzajów ciast.

– Zestaw równań wyznaczający poszukiwane wielkości w mniejszym stopniu przybliżenia (tzw. szczególny stopień uproszczenia). Równanie ciągłości przedstawiono w układzie jednowymiarowym, umożliwiając natychmiastowe wyznaczenie składowych prędkości formowania. Natomiast wyjściowe równania składowych pędu we współrzędnych sferycznych, po wykonanych uproszczeniach opisanych w podrozdziale 7.2 przedstawiono w przestrzeni dwuwymiarowej. Dla tego szczególnego stopnia uproszczenia możliwe jest bezpośrednio analityczne wyznaczenie poszukiwanych wielkości, przyjmując odpowiednie wartości parametrów i współczynników materiałowych. Ze względu na pracochłonność obliczeń wykorzystano program komputerowy.

W wyniku dokonanych obliczeń opracowano tabele i wykresy pokazujące zmienność składowych naprężeń ścinających w trakcie cyklu roboczego. Następnie dokonano krótkiej oceny otrzymanych wyników, podkreślając możli-

wość aplikacyjnego wykorzystania opracowanych modeli matematycznych (materiału ciasta i przebiegu formowania).

W opisie zjawiska formowania w kształtki kuliste, odbywającego się w rzeczywistej przestrzeni roboczej w głowicy z nożem wieńcowym, występują oddziaływania 5. lub 6. ścian komory roboczej, powstałe pomiędzy powierzchnią górną (płyta głowicy) a dolną (płyta stołu roboczego) oraz ściankami noża wieńcowego. Opis kinematyki oraz dynamiki dotyczący formowania kęsa w rzeczywistych warunkach i w rzeczywistej konfiguracji geometrycznej komory roboczej, nastręcza wiele utrudnień komplikując (a nawet uniemożliwiając) jednoznaczny i w miarę ścisły opis przebiegu operacji formowania.

Dla konfiguracji, odpowiadającej formowaniu w rzeczywistej komorze roboczej (rys. 5.11-5.14), rozważania ograniczono jedynie do opisu kinematyki formowania kęsa. Analiza dynamiki w takiej komorze, możliwa mimo trudności, prowadzi do znacznego skomplikowania opisu złożonych przecież oddziaływań na kęs ciasta podczas jego formowania, w stopniu praktycznie wykluczającym możliwość (przejrzystego) sformułowania układu równań, opisujących formowanie w takiej konfiguracji, a przy tym nadającego się (i możliwego) do jego rozwiązania oraz wyznaczenia zależności pomiędzy poszukiwanymi wielkościami wpływającymi na formowanie.

Powyższe względy zdecydowały o przyjęciu w prowadzonych rozważaniach uproszczonego modelu fenomenologicznego formowania. W modelu tym opis ograniczono do oddziaływania jedynie dwóch ścian (górnej i dolnej) komory formującej – konfigurację tę określono jako tzw. układ otwarty – ze względu na brak ograniczenia przestrzeni roboczej bocznymi ściankami. Oddziaływania ścianek górnej i dolnej (powierzchnia dolnej ścianki jest aktywna, wykonuje ruch obtaczający) jest decydujące dla przebiegu formowania. Dla modelu otwartego przeprowadzono stosowne rozważania dotyczące kinematyki i dynamiki oraz opisu układem równań operacji formowania kęsa ciasta w kształtki kuliste.

Poszukiwane rozwiązania układu równań opisujących formowanie z uwzględnieniem właściwości ciasta, dotyczą podstawowych wielkości, tj. składowych prędkości formowania na powierzchni kęsa oraz składowych naprężeń występujących na powierzchni i wewnątrz masy kęsa.

Otrzymane rozwiązania analityczne, dla szczególnego przypadku uproszczenia równań oraz potencjalne rozwiązania numeryczne dla ogólnego przypadku uproszczenia, pozwalają na weryfikację zasadności i prawidłowości przyjętych metod i modeli opisujących operację formowania. Wyniki rozwiązań, w zależności od rodzaju obrabianego ciasta, pozwalają na wyznaczenie parametrów roboczych mechanicznego formowania kęsów ciasta. Wyniki te uzupełniając cele poznawcze rozważań, jako rezultaty o charakterze użytkowym, umożliwią ich aplikacyjne wykorzystanie w projektowanych układach mechanizmów maszyn formujących kęsy ciasta.

Konkludując można stwierdzić, iż przeprowadzone rozważania i otrzymane rezultaty nie tylko potwierdzają osiągnięcie założonych celów i słuszność przyjętych założeń i hipotez, ale stanowią istotny wkład w poszerzenie teorii

maszynowego formowania kęsów ciasta w kształtki kuliste. Zauważyć należy, że istnieje możliwość przeniesienia (adaptacji) zastosowanej metody opisu i rozważań na formowanie kształtek kulistych innymi sposobami (np. według schematów na rysunkach 1.4-1.7) oraz innych kształtek, np. walcowych lub plackowatych, cechujących się większą prostotą opisu, na co pozwala uniwersalność przyjętej metody opisu operacji formowania kęsów ciasta.

## ANEKSY

### ANEKS 1 (do rozdziału 4)

#### 4.1.1. Transformacje ciała – odkształcenia i deformacje

Transformacja materiału kęsa ciasta (jego rozważanych elementów materialnych) zachodząca między określonymi konfiguracjami odniesienia w przestrzeni powoduje powstanie deformacji ciała i przemieszczanie (ruch) jego elementów materialnych. Opis zachowania deformowanego ciała może być dokonany za pomocy wybranych miar zachodzących odkształceń w przyjętych konfiguracjach ciała w przestrzeni (odniesienia – początkowej i aktualnej – bieżącej) [39, 45]. W opisie przestrzennym rozpatruje się ruch ciała jako odwzorowanie jego konfiguracji aktualnej w konfiguracji materialnej (Lagrange'a). Konfiguracja odniesienia ciała może wpływać na opis jego ruchu. W trakcie ruchu deformowanego ciała, zmieniają się odległości między jego cząstkami oraz kształt i rozmiary rozpatrywanych elementów materialnych.

#### 4.1.2. Podstawowe miary deformacji i odkształcenia

**Gradient deformacji**; opisuje ruch deformowanego ciała, w trakcie którego zachodzi transformacja elementu materialnego z konfiguracji początkowej do aktualnej. Gradient deformacji jest tensorem określającym zależność [39]:

$$d\mathbf{x} = \mathbf{F}d\hat{\mathbf{x}}, \quad (\text{A4.1})$$

gdzie:

- $\hat{\mathbf{x}}$  – wektor położenia materialnego elementu ciała w konfiguracji odniesienia (początkowej),
- $\mathbf{x}$  – wektor położenia materialnego elementu ciała w konfiguracji aktualnej,
- $\mathbf{F}$  – tensor gradientu deformacji.

Z własności transformacji wynika, że wykorzystując **tensor gradientu deformacji**  $\mathbf{F}$  można utworzyć tensory deformacji, Cauchy (prawy) i Greena-Fingera (lewy), w postaci:

**tensor deformacji prawy:**

$$\mathbf{C} = \mathbf{F}^T \mathbf{F}, \quad (\text{A4.2})$$

**tensor deformacji lewy:**

$$\mathbf{C}^{-1} = \mathbf{B} = \mathbf{F}\mathbf{F}^T. \quad (\text{A4.3})$$

Tensor gradientu deformacji można przedstawić w postaci związku tensorów:

$$\mathbf{F} = \mathbf{R}\mathbf{U} = \mathbf{V}\mathbf{R}, \quad (\text{A4.4})$$

gdzie:

- $\mathbf{U}, \mathbf{V}$  – tensory rozciągnięcia (przemieszczenia elementu ciała), lewy i prawy,
- $\mathbf{R}$  – tensor obrotu.

Dla  $\mathbf{U} = \mathbf{V} = \mathbf{I}$  tensor  $\mathbf{F} = \mathbf{R}\mathbf{I}$  i opisuje sztywny obrót, dla  $\mathbf{R} = \mathbf{I}$  tensor  $\mathbf{F} = \mathbf{U} = \mathbf{V}$  i opisuje czystą deformację (odkształcenie postaciowe).

Pomiędzy tensorami rozciągnięcia (przemieszczenia)  $\mathbf{U}$  a  $\mathbf{V}$  zachodzą związki:

$$\mathbf{U} = \mathbf{R}^T \mathbf{V} \mathbf{R} \quad \text{oraz} \quad \mathbf{V} = \mathbf{R} \mathbf{U} \mathbf{R}^T. \quad (\text{A4.5})$$

Element materialny ciała w wyniku transformacji deformującej, między konfiguracjami odniesienia i aktualnej, podlegać może:

- przemieszczeniu (przesunięciu)
- rozciągnięciu lub skróceniu (zmianie długości)
- odkształceniu postaciowemu (kątem odkształcenia powiązany jest ze składową styczną tensora deformacji).

Deformacja dowolnego elementu materialnego w cząstce ciała jest zatem złożeniem – superpozycją: przemieszczenia, sztywnego obrotu i wydłużenia.

**Tensory odkształcenia (Lagrange'a i Eulera)**; opisują zmiany długości elementu materialnego ciała, tj. odkształcenia i wyrażone są w postaci:

$$\mathbf{E} = \frac{1}{2}(\mathbf{C} - \mathbf{I}) \quad (\text{A4.6})$$

oraz:

$$\mathbf{e} = \frac{1}{2}(\mathbf{I} - \mathbf{c}). \quad (\text{A4.7})$$

Tensory deformacji i odkształcenia są funkcjami tensorów przemieszczenia  $\mathbf{U}$  oraz  $\mathbf{V}$ .

**Tensor gradientu przemieszczenia**; określony jest zależnością:

$$\nabla \mathbf{U} = \text{Grad} \mathbf{U} = \mathbf{F} - \mathbf{I}. \quad (\text{A4.8})$$

Wykorzystanie tensora gradientu przemieszczenia umożliwia utworzenie dwóch tensorów w postaci:

$$\nabla \mathbf{U} = \hat{\mathbf{E}} + \hat{\mathbf{R}}, \quad (\text{A4.9})$$

**tensor małych odkształceń:**

$$\hat{\mathbf{E}} = \frac{1}{2}(\nabla \mathbf{U} + \nabla \mathbf{U}^T) \quad \text{oraz} \quad \hat{\mathbf{e}} = \frac{1}{2}(\nabla \mathbf{u} + \nabla \mathbf{u}^T), \quad (\text{A4.10})$$

**tensor małych lokalnych obrotów:**

$$\widehat{\mathbf{R}} = \frac{1}{2}(\nabla\mathbf{U} - \nabla\mathbf{U}^T) \text{ oraz } \widehat{\mathbf{r}} = \frac{1}{2}(\nabla\mathbf{u} + \nabla\mathbf{u}^T). \quad (\text{A4.11})$$

Tensory te można przedstawić w funkcji tensorów przemieszczenia oraz obrotów, a także wyrazić przez nie tensorzy odkształcenia.

**Szczególne przypadki odkształceń i ruchu ciała.**

- Czysta deformacja (brak obrotów);

$$\mathbf{R} = \mathbf{I} \text{ oraz } \widehat{\mathbf{R}} = \mathbf{0}.$$

tensor przemieszczeń:

$$\mathbf{U} = \widehat{\mathbf{E}} + \mathbf{I},$$

tensor odkształceń:

$$\mathbf{E} = \widehat{\mathbf{E}} + \frac{1}{2}\widehat{\mathbf{E}}^2.$$

- Skończone odkształcenia i małe obroty;

$$\mathbf{R} \cong \mathbf{I} \text{ oraz } \widehat{\mathbf{R}} \cong \mathbf{0},$$

zatem tensor odkształcenia:

$$\mathbf{E} = \widehat{\mathbf{E}} + \frac{1}{2}(\widehat{\mathbf{E}}^2 + \widehat{\mathbf{E}}\widehat{\mathbf{R}} + \widehat{\mathbf{R}}^T\widehat{\mathbf{E}}).$$

- Małe główne wydłużenia i skończone obroty;

$$\mathbf{U} \cong \mathbf{I},$$

tensor obrotów:

$$\mathbf{R} \cong (\widehat{\mathbf{E}} + \widehat{\mathbf{R}} + \mathbf{I}).$$

- Małe odkształcenia i małe obroty;

$$\text{grad}\mathbf{U} \ll \mathbf{I},$$

konsekwencją będzie teoria małych deformacji wyrażona tensorami małych odkształceń:

$$\mathbf{E} = \widehat{\mathbf{E}} \text{ oraz } \mathbf{e} = \widehat{\mathbf{e}}.$$

- Małe odkształcenia, obroty i przemieszczenia; jeżeli przemieszczenia w porównaniu z wymiarami ciała są małe oraz gradient przemieszczenia jest też mały, opisu można dokonać klasyczną liniową teorią małych deformacji.

### 4.1.3. Gradient prędkości

W wielu przypadkach występuje ciągły ruch płynącego ciała, w trakcie którego zachodzą znaczne przemieszczenia w krótkich odstępach czasu – mają miejsce duże prędkości przemieszczeń w ciele. W takich przypadkach, w opisie ruchu, jako miarę deformowanego ciała, wykorzystuje się chwilowe położenie (prędkość) cząstki ciała w przyjętym obszarze przestrzeni. Przemieszczanie cząstki w płynie określone jest przez gradient pola prędkości  $\mathbf{v}$  cząstki, będący tensorem prędkości przemieszczania cząstki [39, 64], w postaci:

$$\frac{d\mathbf{v}}{d\mathbf{x}} = \text{grad}\mathbf{v} = \mathbf{L}, \quad (\text{A4.12})$$

gdzie:

$d\mathbf{x}$  – wektor położenia cząstki między jej dwoma rozpatrywanymi położeniami w konfiguracji aktualnej.

Tensor ten (jak każdy dwuwskaźnikowy) można przedstawić w postaci sumy dwóch tensorów, otrzymując zależność określającą składowe tensory jako:

$$\mathbf{L} = \mathbf{D} + \mathbf{W} = \frac{1}{2}(\mathbf{L} + \mathbf{L}^T) + \frac{1}{2}(\mathbf{L} - \mathbf{L}^T), \quad (\text{A4.13})$$

gdzie:

- $\mathbf{L}$  – gradient pola prędkości; tensor prędkości,
- $\mathbf{D}$  – część symetryczna – kulista tensora prędkości, tensor prędkości deformacji,
- $\mathbf{W}$  – część antysymetryczna – dewiator tensora prędkości, tensor spinu tensor chwilowej prędkości obrotowej.

Tensor prędkości deformacji określa zależność:

$$\mathbf{D} = \frac{1}{2}(\mathbf{L} + \mathbf{L}^T), \quad (\text{A4.14})$$

w notacji wskaźnikowej (w przestrzeni kartezjańskiej) uwzględniając składowe, będzie:

$$D_{ij} = \frac{1}{2}(v_{i,j} + v_{j,i}), \quad (\text{A4.15})$$

oraz:

$$\dot{\varepsilon}_{ij} = \frac{1}{2}(v_{i,j} + v_{j,i}), \quad (\text{A4.16})$$



gdzie:

$v_i$  – prędkość elementu płynu, cząstki,

$\dot{\epsilon}_{ij}$  – składowa tensora prędkości deformacji, prędkość deformacji (ścina-  
nia).

Tensor spinu określa zależność:

$$\mathbf{W} = \frac{1}{2}(\mathbf{L} - \mathbf{L}^T), \quad (\text{A4.17})$$

w notacji wskaźnikowej, będzie:

$$W_{ij} = \frac{1}{2}(v_{i,j} - v_{j,i}). \quad (\text{A4.18})$$

Tensor spinu można powiązać z wektorem wiru  $\mathbf{w}$ , w postaci zależności:

$$\mathbf{w} = \frac{1}{2} \text{rot} \mathbf{v}. \quad (\text{A4.19})$$

Wektor wiru można wyrazić poprzez tensor spinu, jako:

$$w_i = -\frac{1}{2} e_{ijk} W_{jk}, \quad (\text{A4.20})$$

gdzie:

$w_i$  – wektor wiru,

$e_{ijk}$  – symbol permutacyjny, tensor Ricciiego, alternator Levi-Civita,

Wektor wiru można utożsamiać z wektorem prędkości kątowej  $\boldsymbol{\omega}$  dla sztywnego ruchu obrotowego ciała, zatem:

$$\mathbf{w} \equiv \boldsymbol{\omega}. \quad (\text{A4.21})$$

#### 4.2.1. Związki miar odkształcenia i tensora prędkości deformacji

Wprowadzenie tensora prędkości deformacji było niezależne od tensorów odkształcenia – dotyczy pola prędkości cząstek w ciele. Tensory deformacji i odkształcenia są funkcjami gradientu deformacji, pochodna materialna tensora deformacji prowadzi do zależności [39]:

$$\dot{\mathbf{C}} = \dot{\mathbf{F}}^T \mathbf{F} + \mathbf{F}^T \dot{\mathbf{F}} \quad (\text{A4.22})$$

oraz po przekształceniach:

$$\dot{\mathbf{C}} = 2\mathbf{F}^T \mathbf{D} \mathbf{F}. \quad (\text{A4.23})$$

Pochodna materialna tensora odkształceń (Lagrange'a) będzie:

$$2\dot{\mathbf{E}} = \dot{\mathbf{C}}. \quad (\text{A4.24})$$

Po podstawieniu powyższego do poprzedniego, otrzymuje się:

$$\dot{\mathbf{E}} = \mathbf{F}^T \mathbf{D} \mathbf{F}. \quad (\text{A4.25})$$

Tensor prędkości deformacji oraz tensor prędkości odkształcenia są różnymi miarami deformowania ciała. Związek między tymi tensorami można wyznaczyć wykorzystując gradient przemieszczenia, zatem:

$$\dot{\mathbf{E}} = (\nabla \mathbf{u} + \mathbf{I})^T \mathbf{D} (\nabla \mathbf{u} + \mathbf{I}). \quad (\text{A4.26})$$

Jeśli przemieszczenia są małe, tj.  $\nabla \mathbf{u} \ll \mathbf{I}$ , to wtedy powyższa zależność określa równoważność tensora prędkości odkształceń i prędkości deformacji, w postaci:

$$\dot{\mathbf{E}} = \mathbf{D}. \quad (\text{A4.27})$$

Dla tensora odkształcenia Eulera zależność od tensora prędkości deformacji przyjmie formę:

$$\dot{\mathbf{e}} = \mathbf{D} - \mathbf{e} \mathbf{D} - \mathbf{D} \mathbf{e} - \mathbf{e} \mathbf{W} + \mathbf{W} \mathbf{e}, \quad (\text{A4.28})$$

z której wynika, że tensor prędkości deformacji nie jest pochodną czasową tensora Eulera.

Dla rozważanego przypadku odkształcania ciała przez jego formowanie, konieczne jest w opisie zachowania się ciała, uwzględnienie odpowiedniego ruchu oraz rozmiarów zachodzących deformacji ciała w określonej konfiguracji przestrzennej.

#### 4.2.2. Naprężenia w deformowanym ciele

Występujące w ciele (w formowanym materiale) naprężenia, będące skutkiem działających sił, opisane są tensorem naprężeń. Tensor naprężeń (tensor dwuwskaznikowy) określa ogólnie znana zależność w postaci [39, 45]:

$$\mathbf{S} = \mathbf{P} + \mathbf{T} = \frac{1}{2}(\mathbf{S} + \mathbf{S}^T) + \frac{1}{2}(\mathbf{S} - \mathbf{S}^T), \quad (\text{A4.29})$$

lub w zapisie wskaźnikowym:

$$S_{ij} = \frac{1}{2}(\sigma_{ij} + \sigma_{ji}) + \frac{1}{2}(\sigma_{ij} - \sigma_{ji}), \quad (\text{A4.30})$$

gdzie:

$\mathbf{S}$  – tensor naprężeń,

$\mathbf{P}$  – część symetryczna – kulista, tensora naprężeń,

$\mathbf{T}$  – część antysymetryczna – dewiator, tensora naprężeń,  
 $\sigma_{ij}$  – naprężenie, składowa tensora naprężeń.

Równanie charakterystyczne opisujące tensor naprężeń  $\mathbf{S}$ , jako:

$$\lambda^3 - \lambda^2 \mathbf{I}_\sigma - \lambda \mathbf{II}_\sigma - \mathbf{III}_\sigma = 0, \quad (\text{A4.31})$$

posiada rozwiązanie względem argumentu  $\lambda$  w postaci pierwiastków będących tzw. naprężeniami głównymi  $\sigma_I, \sigma_{II}, \sigma_{III}$  (składowe normalne tensora naprężeń), współczynniki w tym równaniu to niezmienniki tensora naprężeń określone jako [39, 64]:

$$\mathbf{I}_\sigma = \text{tr} \mathbf{S}, \quad \mathbf{II}_\sigma = \frac{1}{2} (\text{tr} \mathbf{S}^2 - \text{tr}^2 \mathbf{S}), \quad \mathbf{III}_\sigma = \det \mathbf{S}. \quad (\text{A4.32})$$

Tensor kulisty posiada składowe określone przez:

$$\mathbf{P} = \frac{1}{2} (\mathbf{S} + \mathbf{S}^T) \quad (\text{A4.33})$$

oraz:

$$P_{ij} = \frac{1}{2} (S_{ij} + S_{ji}) = \frac{1}{2} (\sigma_{ij} + \sigma_{ji}).$$

Pierwszy niezmiennik tensora naprężeń określa zależność:

$$\mathbf{I}_\sigma = \text{tr} \mathbf{S} = P_{ii} = 3\sigma_{ii} = 3\sigma = 3p \quad (\text{A4.34})$$

a następnie:

$$p = \frac{1}{3} \text{tr} \mathbf{S}, \quad (\text{A4.35})$$

gdzie:

$\sigma_{ii}$  – składowa normalna tensora naprężeń,  
 $p$  – naprężenie normalne, ciśnienie hydrostatyczne, składowa tensora kulistego.

Dewiator tensora naprężeń posiada składowe opisane zależnościami:

$$\mathbf{T} = \frac{1}{2} (\mathbf{S} - \mathbf{S}^T) = \mathbf{S} - \frac{1}{3} \text{tr} \mathbf{S} \mathbf{I}. \quad (\text{A4.36})$$

W notacji wskaźnikowej:

$$T_{ij} = \tau_{ij} = \frac{1}{2} (S_{ij} - S_{ji}) = \frac{1}{2} (\sigma_{ij} - \sigma_{ji}), \quad (\text{A4.37})$$

po uwzględnieniu (A4.30) oraz (A4.35), wyrażenie (A4.37) będzie:

$$\tau_{ij} = \sigma_{ij} - p\delta_{ij} \quad (\text{A4.38})$$

stąd:

$$\sigma_{ij} = p\delta_{ij} + \tau_{ij}, \quad (\text{A4.39})$$

gdzie:

- $\tau_{ij}$  – naprężenie styczne, składowa dewiatora tensora naprężeń,
- $\delta_{ij}$  – tensor jednostkowy, delta Kroneckera.

Wykorzystując pojęcie głównych naprężeń stycznych, można za pomocą niezmienników tensora naprężeń  $\mathbf{S}$  wyrazić niezmienniki dewiatora naprężeń i następnie otrzymać [39, 64]:

$$\begin{aligned} \mathbf{I}_T = \text{tr}\mathbf{T} &= 0, & \mathbf{II}_T &= \frac{1}{2} \text{tr}\mathbf{T}^2 = \mathbf{II}_\sigma + \frac{1}{3} \mathbf{I}_\sigma^2, \\ \mathbf{III}_T = \det\mathbf{T} &= \mathbf{III}_\sigma + \frac{1}{3} \mathbf{I}_\sigma \mathbf{II}_\sigma + \frac{2}{27} \mathbf{I}_\sigma^3. \end{aligned} \quad (\text{A4.40})$$

#### 4.2.3. Miary naprężenia w konfiguracji odniesienia

Pole tensorowe opisujące ruch i deformacje określono względem przyjętych konfiguracji; tensor Lagrange'a względem konfiguracji odniesienia, tensor Eulera względem konfiguracji aktualnej. Tensor naprężenia (Cauchy) określono jako aktualny stan naprężenia w konfiguracji aktualnej. Tensorów określonych w konfiguracji odniesienia nie można wiązać z tensorem naprężenia. Należy zatem opisać relacje między chwilowym (aktualnym) stanem naprężenia w aktualnej konfiguracji a stanem naprężenia w konfiguracji odniesienia. Relacje te można opisać przy pomocy tensorów Pioli-Kirchhoffa, tzw. pierwszego i drugiego [39].

##### Pierwszy tensor Pioli-Kirchhoffa

Pierwszy tensor P-K, tensor naprężeń nominalnych  $\mathbf{S}$  jest niesymetryczny, w konfiguracji aktualnej opisany jest zależnością w postaci:

$$\mathbf{SdF} = d\mathbf{t}, \quad (\text{A4.41})$$

gdzie:

- $d\mathbf{F}$  – powierzchnia elementarna w konfiguracji odniesienia,
- $d\mathbf{t}$  – siła elementarna działająca na powierzchnię elementarną w konfiguracji aktualnej.

Tensor ten w konfiguracji odniesienia będzie:

$$\boldsymbol{\sigma} = \mathbf{J}^{-1} \mathbf{S} \mathbf{F}^T \quad \text{lub} \quad \mathbf{S} = \mathbf{J} \boldsymbol{\sigma} (\mathbf{F}^T)^{-1}, \quad (\text{A4.42})$$

w notacji wskaźnikowej:

$$\sigma_{ij} = \mathbf{J}^{-1} S_{ik} x_{j,k} \quad \text{lub} \quad S_{ik} = \mathbf{J} \sigma_{ij} \hat{x}_{k,j} \quad (\text{A4.43})$$

gdzie:

- $\mathbf{J}$  – lokalny stosunek objętości materialnego elementu objętościowego w konfiguracji aktualnej i odniesienia,
- $\hat{x}$  – współrzędna położenia elementu materialnego w konfiguracji odniesienia,
- $x$  – współrzędna położenia elementu materialnego w konfiguracji aktualnej.

Ze względu na niesymetryczność tensora  $\mathbf{S}$  nie można go wykorzystać w równaniach konstytutywnych. Tensor ten musi być odpowiednio zmodyfikowany dla otrzymania symetrycznej miary naprężenia.

#### **Drugi tensor Pioli-Kirchhoffa**

W konfiguracji odniesienia na elementarną powierzchnię  $dF$  działa siła  $d\mathbf{S}$ , otrzymuje się zależność uwzględniającą drugi tensor Pioli-Kirchhoffa:

$$d\mathbf{S} = \mathbf{S}_K dF, \quad (\text{A4.44})$$

gdzie:

- $d\mathbf{S}$  – elementarna siła w konfiguracji odniesienia,
- $\mathbf{S}_K$  – drugi tensor Pioli-Kirchhoffa

Po wykorzystaniu pierwszego tensora P-K, będzie:

$$\mathbf{S}_K = \mathbf{F}^{-1} \mathbf{S} \quad (\text{A4.45})$$

$$\boldsymbol{\sigma} = \mathbf{J}^{-1} \mathbf{S} \mathbf{F}^T \quad (\text{A4.46})$$

oraz w układzie współrzędnych kartezjańskich:

$$S_K = \hat{x}_{k,i} S_{il} \quad (\text{A4.47})$$

$$\sigma_{ij} = \mathbf{J}^{-1} S_{ik} x_{j,k} \quad (\text{A4.48})$$

#### **4.2.4. Klasyczne modele ośrodków ciągłych**

Najprostszymi modelami, spośród wielu różnych modeli odzwierciedlających własności reologiczne materiałów, są jednowymiarowe modele liniowe, które idealizują zachowanie się materiałów opisywanych w teorii ośrodków

ciągłych. Własności tych materiałów opisane są elementarnymi cechami (parametrami) reologicznymi – sprężystością, plastycznością, lepkością. W wyniku poddania materiałów prostym oddziaływaniom mechanicznym określa się (pomiarami) siłę, przemieszczenie, prędkość przemieszczenia: opierając się na tych wielkościach wyznacza się naprężenie, odkształcenie i prędkość deformacji. Dla określenia złożonych własności materiałów opisywanych jednowymiarowymi liniowymi zależnościami konstytucyjnymi wykorzystuje się zasadę superpozycji (zasadę Boltzmanna). Zależności te mogą być jedno-, dwu- lub wieloparametrowe. Jednowymiarowe modele wieloparametrowe pozwalają na bardziej przybliżony (dokładniejszy) opis zachowania się rzeczywistych materiałów reologicznych – często z wystarczającym dla celów użytkowych przybliżeniem. Modele jednowymiarowych (jedno i wieloparametrowych) nie można opisać przestrzennie – tensorowo. Opisu przestrzennego dokonuje się w wyniku uogólnienia polegającego na opisie wielkości kinematycznych i dynamicznych za pomocą relacji tensorowych między polami tensorowymi poszczególnych wielkości fizycznych, umożliwiając zastąpienie jednowymiarowych skalarnych równań konstytutywnych opisujących elementarne (podstawowe) właściwości reologiczne materiałów. Do opisu przestrzennego wykorzystującego odpowiednie relacje tensorowe dotyczące wielkości fizycznych wynikających z własności materiałów, dla niektórych przypadków właściwości i rodzajów rozpatrywanych ciał, znajdują zastosowanie tzw. klasyczne modele ośrodków ciągłych.

Dla klasycznych modeli ośrodków ciągłych postuluje się ciągłość, jednorodność oraz izotropowość materiału. Do ośrodków tych w ogólności zaliczyć można ciała [39, 64]:

- ciekłe (płynne)
- sprężyste
- plastyczne
- reologiczne
- sypkie.

W rozważaniach pominięty został opis ośrodków sypkich, jako nie należących do podejmowanego rodzaju zagadnień.

#### **Ośrodki ciekłe**

Do ośrodków tego rodzaju zalicza się ciecze oraz część gazów. Ośrodki te określa się również jako płyny, zatem można mówić o ośrodkach płynnych. Cieczą jest taki ośrodek ciągły, który w stanie równowagi nie przenosi naprężeń stycznych. Ciecz w ruchu powinna spełniać następujące założenia:

- deformacja nie wpływa na aktualny stan naprężenia,
- zależności wiążące aktualne wielkości ruchu nie zależą od historii ruchu.

Jeżeli zarówno w stanie równowagi, jak i w ruchu cieczy nie występują naprężenia styczne (ciecz jest nielepka), to jest to ciecz idealna [39].

#### **Ciecz Stokesa**

Cieczą Stokesa nazywa się taki ośrodek ciągły, w którym naprężenie związane jest z ruchem cieczy tylko poprzez tensor prędkości deformacji, zatem na-

prężenie w cząstce elementarnej cieczy zależy wyłącznie od jej położenia  $\mathbf{x}$ , prędkości  $\mathbf{v}$  i gradientu prędkości:

$$\mathbf{S} = \boldsymbol{\sigma} = \phi(\mathbf{x}, \mathbf{v}, \text{grad} \mathbf{v}), \quad (\text{A4.49})$$

gdzie:

$\mathbf{S}$  – tensor naprężeń (oznaczany również  $\boldsymbol{\sigma}$ ),

Dla cieczy Stokesa występuje również związek:

$$\mathbf{S} = \boldsymbol{\sigma} = \phi(\mathbf{D}). \quad (\text{A4.50})$$

Równanie konstytutywne będzie:

$$\mathbf{S} = \boldsymbol{\sigma} = (-p + \alpha_0)\mathbf{I} + \alpha_1\mathbf{D} + \alpha_2\mathbf{D}^2, \quad (\text{A4.51})$$

oraz:

$$\alpha_k = \alpha_k(\mathbf{I}_D, \mathbf{II}_D, \mathbf{III}_D); \quad k = 0, 1, 2; \quad \alpha_0(0,0,0) = 0,$$

gdzie:

$p$  – naprężenie statyczne, ciśnienie hydrostatyczne,

$\alpha_0, \alpha_1, \alpha_2$  – współczynniki będące funkcjami niezmienników tensorów.

Związek konstytutywny (A4.51) można przedstawić w formie relacji między częściami kulistymi tensorów  $\boldsymbol{\sigma}$  a  $\mathbf{D}$ , tj.  $\mathbf{S}$  (lub  $\boldsymbol{\sigma}$ ) a  $\mathbf{D}$  oraz między ich dewiatorami  $\mathbf{T}$  i  $\mathbf{D}^D$ , zatem:

$$\mathbf{S} = \boldsymbol{\sigma} = (-p + \alpha_0)\mathbf{I} + \alpha_1\mathbf{D} + \frac{1}{3}\alpha_2\text{tr}\mathbf{D}^2 = -p + \alpha(\mathbf{I}_D, \mathbf{II}_D, \mathbf{III}_D), \quad (\text{A4.52})$$

$$\mathbf{T} = (\alpha_1 + 2\alpha_2 D)\mathbf{D}^D + \alpha_2\left(\mathbf{D}^2 - \frac{2}{3}\mathbf{II}_D\mathbf{I}_D\right), \quad (\text{A4.53})$$

dla nieściśliwości, w zależnościach powyższych, będzie odpowiednio  $D = 0$  oraz  $\mathbf{D} = \mathbf{D}^D$ , zatem:

$$\boldsymbol{\sigma} = -p + \alpha_0 + \frac{1}{3}\text{tr}\mathbf{D}^2 \quad (\text{A4.54})$$

oraz:

$$\mathbf{T} = \alpha_1\mathbf{D} + \alpha_2\left(\mathbf{D}^2 - \frac{2}{3}\mathbf{II}_D\mathbf{I}_D\right). \quad (\text{A4.55})$$

### **Ciecz lepka Newtona**

Dla przepływu cieczy rzeczywistej zachodzi strata energii na skutek występowania procesów dyssypacji energii w wyniku tarcia wewnętrznego, proce-

sy te powodują istnienie naprężeń stycznych – ciecz rzeczywista jest cieczą lepką. Najprostszy model cieczy lepkiej jest modelem Newtona. Jeżeli w równaniu (A4.51) przyjąć, iż:

$$\alpha_0 = \lambda \mathbf{I}_D; \quad \alpha_1 = 2\eta; \quad \alpha_2 = 0; \quad (\text{A4.56})$$

to dla jednorodnej, izotropowej cieczy lepkiej – Newtona, będzie:

$$\mathbf{S} = \boldsymbol{\sigma} = (-p + \lambda \mathbf{I}_D) \mathbf{I} + 2\eta \mathbf{D}, \quad (\text{A4.57})$$

gdzie:

$\eta$  oraz  $\lambda$  – stałe materiałowe, współczynniki lepkości.

Po rozdeleniu związku (A4.57) na zależność między częściami kulistymi tensorów  $\mathbf{S}$  i  $\mathbf{D}$  oraz między ich dewiatorami  $\mathbf{T}$  i  $\mathbf{D}^D$ , będzie:

$$\mathbf{S} = \boldsymbol{\sigma} = p + (3\lambda + 2\eta) \mathbf{D}, \quad (\text{A4.58})$$

$$\mathbf{T} = 2\eta \mathbf{D}^D, \quad (\text{A4.59})$$

oraz:

$$\mathbf{S} = \boldsymbol{\sigma} = \frac{1}{3} \mathbf{I}_\sigma, \quad \mathbf{D} = \frac{1}{3} \mathbf{I}_D = \text{tr} \mathbf{D}, \quad (\text{A4.60})$$

gdzie:

$\eta$  – współczynnik lepkości postaciowej, lepkość dynamiczna,

$3\lambda + 2\eta$  – współczynnik lepkości objętościowej.

Dla cieczy nieściśliwej, tj. dla  $D = 0$ , będzie:

$$\mathbf{S} = \boldsymbol{\sigma} = -p, \quad (\text{A4.61})$$

$$\mathbf{T} = 2\eta \mathbf{D}. \quad (\text{A4.62})$$

Dla cieczy ściśliwej, tj. dla  $\mathbf{I}_D \neq 0$  i dla  $3\lambda + 2\eta = 0$ , będzie:

$$\mathbf{S} = \boldsymbol{\sigma} = -p,$$

$$\mathbf{T} = 2\eta \mathbf{D}^D. \quad (\text{A4.63})$$

Zależności te stanowią uzupełnienie (o 6 równań) równań ruchu płynu.

#### **Ciecz lepka quasi-liniowa**

Jeżeli w równaniu (A4.51) przyjmie się, iż  $\alpha_2 = 0$ , to dla nieokreślonych wartości  $\alpha_0, \alpha_1$  otrzymuje się postać:

$$\mathbf{S} = \boldsymbol{\sigma} = (-p + \alpha_0) \mathbf{I} + \alpha_1 \mathbf{D}. \quad (\text{A4.64})$$



Równanie to może nie opisywać cieczy Newtona, gdyż współczynniki  $\alpha_0$  oraz  $\alpha_1$  mogą być funkcjami niezmienników tensora  $\mathbf{D}$ , w postaci:

$$\begin{aligned}\alpha_0 &= 3\lambda(\mathbf{I}_D, \mathbf{II}_D, \mathbf{III}_D)\mathbf{D}, \\ \alpha_1 &= 2\eta(\mathbf{I}_D, \mathbf{II}_D, \mathbf{III}_D).\end{aligned}\quad (\text{A4.65})$$

Zatem zależność (A4.64) można zapisać jako:

$$\mathbf{S} = \boldsymbol{\sigma} = (-p + 3\lambda\mathbf{D})\mathbf{I} + 2\eta\mathbf{D}. \quad (\text{A4.66})$$

W wyrażeniu tym współczynniki nie są stałe, gdyż zależą od niezmienników tensora  $\mathbf{D}$ . Ciecz lepka quasi – liniowa reaguje na zmiany skali czasu – ujawniając właściwości reologiczne. Analogicznie do (A4.58) i (A4.59), będzie:

$$\mathbf{S} = \boldsymbol{\sigma} = -p(3\lambda + 2\eta)\mathbf{D}, \quad (\text{A4.67})$$

$$\mathbf{T} = 2\eta(\mathbf{I}_D, \mathbf{II}_D, \mathbf{III}_D)\mathbf{D}^D. \quad (\text{A4.68})$$

Dla przypadku nieściśliwości:

$$\mathbf{S} = \boldsymbol{\sigma} = -p, \quad (\text{A4.69})$$

$$\mathbf{T} = 2\eta(\mathbf{II}_D, \mathbf{III}_D)\mathbf{D}. \quad (\text{A4.70})$$

### Ośrodki sprężyste

Ośrodki sprężyste są to ciała, dla których naprężenie zależy od aktualnego stanu odkształcenia. Po odciążeniu ciała idealnie sprężyste powracają do swojej pierwotnej postaci – np. stanu naturalnego (wyjściowego, pierwotnego). Występowanie pamięci stanu naturalnego w ośrodkach sprężystych jest charakterystyczne. Dla ośrodków sprężystych dowolny proces jest odwracalny – nie występuje zatem dyssypacja energii podczas deformacji.

Odształcenia sprężyste względem obciążeń mogą być:

- Liniowo proporcjonalne: ciała liniowo sprężyste, opis deformacji tensorem małych odkształceń. Ciała te opisuje liniowa teoria sprężystości (przy założeniu geometrycznej i fizycznej liniowości, tj. małych odkształceń oraz liniowej zależności między tensorami naprężenia i odkształcenia).
- Nieliniowo proporcjonalne: ciała nieliniowo sprężyste (dla znacznej heterogeniczności rozkładu masy materiału). Ciała te opisuje nieliniowa teoria sprężystości (powyższe założenia są zbędne). Dla ciał idealnie sprężystych stan naprężenia zależy wyłącznie od stanu deformacji. Ciało sprężyste ma pamięć stanu początkowego, tj. naturalnego. Całkowita odwracalność procesu związana jest z koniecznością dostarczenia minimalnej energii po osiągnięciu deformacji.

**Izotropowy ośrodek liniowo sprężysty**

Liniowa teoria sprężystości, dla której zmiany opisuje się tensorem małych odkształceń (A4.10) zakłada, iż tensor odkształceń jest:

$$\boldsymbol{\varepsilon} = \widehat{\boldsymbol{\varepsilon}}. \quad (\text{A4.71})$$

Zgodnie z założeniem liniowej zależności tensora naprężeń od tensora odkształceń, tzw. uogólnienie prawa Hooke'a przyjmuje postać:

$$\boldsymbol{\sigma} = \mathbf{C} \cdot \boldsymbol{\varepsilon}, \quad (\text{A4.72})$$

lub

$$\boldsymbol{\varepsilon} = \mathbf{B} \cdot \boldsymbol{\sigma}, \quad (\text{A4.73})$$

gdzie:

- $\boldsymbol{\varepsilon}$  – tensor małych odkształceń,
- $\mathbf{C}$  – tensor sztywności,
- $\mathbf{B}$  – tensor podatności,
- $\boldsymbol{\sigma}$  – tensor naprężeń.

Tensor podatności i sztywności można opisać tzw. modułami sztywności  $\lambda_k$  oraz tensorem tzw. własnego stanu sprężystości  $\mathbf{w}$ . Dla izotropowych ciał sprężystych każde czyste ścinanie jest własnym stanem sprężystości, zatem ze zbioru (sześciu wymiarów tensora) modułów sztywności znajdują zastosowanie tylko dwa (istotnie różne), tj.:

$\lambda_1$  – jednokrotny moduł sztywności (współczynnik lepkości objętościowej),

$\lambda_2$  – pięciokrotny moduł sztywności (współczynnik lepkości objętościowej).

Do opisu izotropowego ośrodka sprężystego przyjmuje się dwie stałe materiałowe, tzw. parametry Lamé'go odpowiednio:

$\lambda$  – moduł sztywności, współczynnik ściśliwości,

$\eta$  – współczynnik lepkości postaciowej.

Prawo Hooke'a izotropowego ośrodka liniowo sprężystego przyjmuje postać:

$$\boldsymbol{\sigma} = \lambda (\text{tr}\boldsymbol{\varepsilon})\mathbf{I} + 2\eta \boldsymbol{\varepsilon}, \quad (\text{A4.74})$$

lub w postaci odwrotnej:

$$\boldsymbol{\varepsilon} = \frac{1}{\lambda_2} \left[ \boldsymbol{\sigma} - \frac{\lambda}{\lambda_1} (\text{tr}\boldsymbol{\sigma})\mathbf{I} \right]. \quad (\text{A4.75})$$

Parametry Lamé'go można wyrazić związkami:

$$\lambda_1 = 3\lambda + 2\eta, \quad (\text{A4.76})$$

$$\lambda_2 = 2\eta, \quad (\text{A4.77})$$

$$\lambda = \frac{1}{3}(\lambda_1 - \lambda_2). \quad (\text{A4.78})$$

W miejsce parametrów Lamé'go można wprowadzić następujące stałe:

- E – moduł Younga, odkształcenia liniowego (podłużnego),
- K – moduł ścisłości objętościowej, sprężystości objętościowej, odkształceń objętościowych,
- G – moduł ścinania, sprężystości postaciowej, odkształcenia postaciowego, Kirchhoffa,
- $\nu$  – współczynnik (liczba) Poissona.

Podane parametry opisują wzajemne związki w postaci:

$$E = \frac{\eta(3\lambda + 2\eta)}{\lambda + \eta} = \frac{\eta\lambda_1}{\lambda + \eta} = \rho a^2, \quad (\text{A4.79})$$

$$\nu = \frac{\lambda}{2(\lambda + \eta)}, \quad (\text{A4.80})$$

$$K = \frac{\lambda_1}{3} = \frac{3\lambda + 2\eta}{3} = \frac{E}{3(1 - 2\nu)}, \quad (\text{A4.81})$$

$$G = \eta = \frac{E}{2(1 + \nu)}, \quad (\text{A4.82})$$

$$\lambda_1 = 3K = \frac{E}{1 - 2\nu}, \quad (\text{A4.83})$$

$$\lambda_2 = 2G = \frac{E}{1 + \nu}, \quad (\text{A4.84})$$

gdzie:

- a – prędkość dźwięku w materiale,
- $\rho$  – gęstość materiału (ciała).

Z rozważań dotyczących sensu fizycznego powyższych stałych można wywieść ograniczenia dotyczące ich wartości:

$$\begin{aligned} 0 < E \leq 3\eta, \quad 0 < \eta \leq \infty, \\ 0 < K \leq \infty, \quad -1 < \nu \leq \frac{1}{2}, \\ 0 < G \leq \infty, \quad -\frac{2}{3}\eta < \lambda \leq \infty. \end{aligned}$$

Prawo Hooke'a według wzoru (A4.74) można przedstawić, po uwzględnieniu podstawienia (A4.10) i (A4.71) w przekształconej postaci [39]:

$$\operatorname{div} \boldsymbol{\sigma} = (\lambda + \eta) \operatorname{grad}(\operatorname{div} u) + \eta \Delta u. \quad (\text{A4.85})$$

Zależność powyższą można wykorzystać do sformułowania tzw. dynamicznego równania Lamé'go (podstawiając ją do równań ruchu), efektywnego w zastosowaniach dla warunków brzegowych ruchu w odkształceniach.

Rzeczywiste materiały zaliczane do ośrodków sprężystych posiadają pamięć stanów przeszłych, ale wśród nich mogą występować takie, które lepiej pamiętają stan bezpośrednio poprzedzający (który właśnie minął) niż stan początkowy. Są to materiały o krótkiej pamięci – tzw. hipersprężyste (Thruessdell).

### Ośrodki plastyczne

Rzeczywiste materiały odkształcalne wykazują w swym zachowaniu nie tylko odkształcenia sprężyste – odwracalne, ale również odkształcenia trwałe (nie-sprężyste), plastyczne – nieodwracalne. Deformacja plastyczna polega na przemieszczaniu się wewnątrz materiału jego cząstek lub ich struktur pod obciążeniem i posiada trwały charakter, ujawniający się zwłaszcza przy odciążeniu.

Plastyczna deformacja zależy od naprężeń oraz od właściwości fizycznych materiałów, warunków zewnętrznych (temperatura, promieniowanie), czasu trwania, historii odkształceń, itp. Zwykle badania plastyczności dotyczą następujących procesów:

- izotermicznych, w temperaturze otoczenia, deformacje niezależne od czasu,
- w podwyższonej temperaturze, deformacje zależą od czasu,
- dynamicznych, obciążenia od wybuchów, fale plastyczne.

Równania konstytutywne dla wymienionych rodzajów procesów i zachowań materiałów są na ogół nieliniowe i są trudne do rozwiązania.

### Warunki plastyczności

Ciało deformujące się pod wpływem obciążeń zewnętrznych, do momentu pojawienia się odkształceń plastycznych może zachowywać się jak ciało sprężyste lub sztywne. Po odciążeniu objawia się nieodwracalność deformacji plastycznych. Dla wielu materiałów można przyjąć, że granica plastyczności jest tożsama z granicą sprężystości. Warunkiem pojawienia się odkształceń plastycznych jest osiągnięcie przez naprężenie granicy plastyczności (przy rozciąganiu, ściskaniu czy ścinaniu), warunek ten przyjmuje formę:

$$|\boldsymbol{\sigma}| - |\boldsymbol{\sigma}_0| = 0 \quad \text{lub} \quad \boldsymbol{\sigma}^2 - \boldsymbol{\sigma}_0^2 = 0, \quad (\text{A4.86})$$

$$|\boldsymbol{\tau}| - |\mathbf{k}| = 0 \quad \text{lub} \quad \boldsymbol{\tau}^2 - \mathbf{k}^2 = 0, \quad (\text{A4.87})$$

gdzie:

- $\boldsymbol{\sigma}_0$  – graniczne naprężenie plastyczne,
- $\boldsymbol{\tau}$  – naprężenie styczne (ścinające),
- $\mathbf{k}$  – graniczne naprężenie styczne.

Dla złożonego stanu naprężenia (dla jednoczesnego występowania różnych rodzajów naprężeń) warunek plastyczności przybiera postać:

$$f(\boldsymbol{\sigma}) = 0 \quad (\text{A4.88})$$

gdzie:

$f$  – funkcja skalarna, funkcja płynięcia.

Dla ciał izotropowych funkcja płynięcia  $f$  zależy jedynie od trzech niezmienników tensora naprężeń:

$$f(\boldsymbol{\sigma}) = f(\mathbf{I}_{\boldsymbol{\sigma}}, \mathbf{II}_{\boldsymbol{\sigma}}, \mathbf{III}_{\boldsymbol{\sigma}}) \quad (\text{A4.89})$$

Dla ciał odkształcalnych, odkształceniom sprężystym odpowiadają zmiany objętości (gęstości) – jako skutek ciśnienia hydrostatycznego. Za zmiany kształtu (postaci) opowiadają deformacje od naprężeń ścinających i mało zależą od ciśnienia hydrostatycznego.

Ogólnie sformułowane warunki plastyczności (A4.86-A4.88) można uściślić przez wprowadzenie szczególnych (warunków) kryteriów odkształceń plastycznych. Rozważania dla wyróżnionych kryteriów odkształceń plastycznych ograniczono do materiałów izotropowych i izotermicznych:

a) Kryterium maksymalnego naprężenia (wg Rankina);

- odkształcenia plastyczne pojawiają się wtedy, gdy jedno z naprężeń głównych w złożonym stanie naprężenia osiągnie wartość granicy plastyczności  $\sigma_0$ :

$$(\sigma_I, \sigma_{II}, \sigma_{III})_{\max} = \sigma_0, \quad (\text{A4.90})$$

b) Kryterium maksymalnego odkształcenia (wg Saint – Venanta);

- odkształcenia plastyczne pojawiają się, gdy jedno z odkształceń głównych ( $\varepsilon_I, \varepsilon_{II}, \varepsilon_{III}$ ) jest równe odkształceniu granicznemu (za którym znajduje się już odkształcenie plastyczne):

$$\varepsilon_0 = \frac{\sigma_0}{E}, \quad (\text{A4.91})$$

c) Kryterium maksymalnych naprężeń stycznych (wg Treski);

- odkształcenia plastyczne pojawiają się, gdy jedno z głównych naprężeń stycznych osiągnie granicę plastyczności dla czystego ścinania:

$$(\tau_I, \tau_{II}, \tau_{III})_{\max} = k, \quad (\text{A4.92})$$

jeśli  $\sigma_I > \sigma_{II} > \sigma_{III}$  to wzór powyższy będzie:

$$\sigma_I - \sigma_{III} = 2k, \quad (\text{A4.93})$$

- d) Kryterium maksymalnej energii odkształcenia postaciowego (wg Hubera-Misesa-Hencky'ego), H-M-H;  
 – odkształcenia plastyczne pojawiają się gdy energia odkształcenia postaciowego osiągnie odpowiednią wartość dla danego rodzaju złożonego naprężenia; całkowita energia odkształcenia w sprężystym ciele izotropowym będzie:

$$\Phi = \frac{1}{2} \sigma_{ij} \varepsilon_{ij}, \quad (\text{A4.94})$$

lub

$$\Phi = \Phi_s + \Phi_p, \quad (\text{A4.95})$$

gdzie:

$\Phi_s$  – energia sprężystego odkształcenia postaciowego (energia dystorsji),

$\Phi_p$  – energia dylatacyjna.

Energję dystorsji wyraża zależność:

$$\Phi_s = \frac{1}{12G} [(\sigma_I - \sigma_{II})^2 + (\sigma_{II} - \sigma_{III})^2 + (\sigma_I - \sigma_{III})^2]. \quad (\text{A4.96})$$

Energja dylatacyjna będzie:

$$\Phi_p = \frac{1}{18K} (\sigma_I + \sigma_{II} + \sigma_{III})^2. \quad (\text{A4.97})$$

Dla prostego rozciągania lub ściskania:

$$\Phi_s = \frac{\sigma_0^2}{6G}, \quad (\text{A4.98})$$

zatem kryterium plastyczności H-M-H:

$$2\sigma_0^2 = (\sigma_I - \sigma_{II})^2 + (\sigma_{II} - \sigma_{III})^2 + (\sigma_I - \sigma_{III})^2. \quad (\text{A4.99})$$

Dla czystego ścinania (tj.  $\sigma_I = -\sigma_{II} = k$ ), będzie:

$$\Phi_s = \frac{1}{2G} k^2. \quad (\text{A4.100})$$

Następnie można określić związek między granicami plastyczności przy czystym ścinaniu i prostym rozciąganiu w postaci:

$$k = \frac{1}{\sqrt{3}} \sigma_0. \quad (\text{A4.101})$$

Podane kryteria uplastycznienia dotyczą ciał izotropowych bez wzmocnienia, dla których:

- funkcja płynięcia zależy tylko od niezmienników tensora naprężeń,
- powierzchnia płynięcia nie ulega zmianie w procesie plastycznej deformacji.

Dla ciał izotropowych występować może efekt plastycznego wzmocnienia materiału polegający na tym, że wstępne odkształcenie plastyczne ma wpływ na dalsze uplastycznienie – zależność warunku plastyczności od historii odkształceń plastycznych.

Ogólny warunek plastyczności, analogicznie do równania stanu, dla ciał wykazujących efekt wzmocnienia, funkcja płynięcia  $f$ , będzie:

$$f(\sigma, \varepsilon^p, \chi, \theta) = 0, \quad (\text{A4.102})$$

gdzie:

- $\chi$  – współczynnik funkcyjny zależny od stanu naprężenia i odkształcenia
- $\theta$  – temperatura
- $\varepsilon^p$  – odkształcenie plastyczne.

Do opisu zachowania się ciał odkształcalnych plastycznie znajdują zastosowanie teorie:

- plastycznego płynięcia (ciało idealnie plastyczne, ciało ze wzmocnieniem),
- deformacyjna,
- poślizgu (związana z budową krystaliczną materiału).

W teorii plastycznego płynięcia zakłada się:

- stan naprężenia zależy wyłącznie od prędkości odkształceń plastycznych,
- nieściśliwość ciała w stanie plastycznym,
- odkształcenie jest małe i opisywalne tensorem małych odkształceń.

Tensor małych odkształceń  $\varepsilon$  jest sumą odkształceń sprężystych  $\varepsilon^s$  i plastycznych  $\varepsilon^p$ :

$$\varepsilon = \varepsilon^s + \varepsilon^p \quad (\text{A4.103})$$

oraz

$$\dot{\varepsilon} = \dot{\varepsilon}^s + \dot{\varepsilon}^p. \quad (\text{A4.104})$$

Odształcenie sprężyste wyznacza się z teorii sprężystości (np. uogólnionego prawa Hooke'a), do wyznaczenia pozostają odkształcenia plastyczne. W tym celu wprowadza się pojęcie potencjału plastycznego (analogicznie do potencjału sprężystości, wyznaczanego doświadczalnie), w postaci funkcji skalarnej  $H(\sigma)$  równej funkcji płynięcia  $f$ , będzie zatem:

$$H(\sigma) = f. \quad (\text{A4.105})$$

Prawo plastycznego płynięcia przyjmie formę:

$$\dot{\varepsilon}_{ij}^p = \lambda \frac{\partial H}{\partial \sigma_{ij}} = \lambda \frac{\partial f}{\partial \sigma_{ij}}, \quad (\text{A4.106})$$

gdzie:

$\lambda$  – funkcja skalarna, ( $\lambda > 0$ ).

Na ogół dla ciał plastycznie odkształcalnych rzeczywista powierzchnia płynięcia zmienia zarówno swój kształt jak i położenie w przestrzeni w trakcie deformacji plastycznych – co jest istotą tzw. plastycznego wzmocnienia. Zatem w takim przypadku stosowna do opisu zachowania ciała jest teoria plastycznego płynięcia ciał plastycznych ze wzmocnieniem [39].

#### Teoria płynięcia ciał plastycznych ze wzmocnieniem

Teoria płynięcia ciał plastycznych ze wzmocnieniem należy do teorii plastycznego płynięcia zakładającej istnienie potencjału plastycznego tożsamego z funkcją płynięcia (A4.105), gdzie funkcję płynięcia określa zależność (A4.102). Prawo płynięcia, analogicznie do (A4.106), będzie:

$$\dot{\varepsilon}_{ij}^p = \Lambda \frac{\partial f}{\partial \sigma_{ij}}; \quad \Lambda > 0 \quad (\text{A4.107})$$

Funkcja płynięcia dla wszystkich stanów odkształceń przyjmuje wartości:

$$f \leq 0 \quad (\text{A4.108})$$

Dla  $f < 0$  płynięcie zachodzi wewnątrz powierzchni płynięcia, dla  $f = 0$  płynięcie plastyczne (odkształcenia) zachodzi na powierzchni płynięcia.

W przypadku występowania odkształceń plastycznych, tj. dla  $\dot{\varepsilon}_{ij}^p \neq 0$  powinna wystąpić zgodność prawa plastycznego płynięcia (A4.107) z funkcją płynięcia (A4.102) w postaci:

$$\dot{f} = 0 \quad \text{dla} \quad f = 0 \quad (\text{A4.109})$$

Równanie konstytutywne opisujące zachowanie się ciał plastycznych ze wzmocnieniem przyjmie postać:

$$\begin{aligned} \dot{\varepsilon}_{ij} &= 0 \quad \text{jeżeli} \quad f < 0 \quad \text{oraz} \\ \dot{\varepsilon}_{ij} &= 0 \quad \text{jeżeli} \quad f = 0 \quad \text{i} \quad \frac{\partial f}{\partial \sigma_{ij}} \dot{\sigma}_{ij} + \frac{\partial f}{\partial \theta} \dot{\theta} \leq 0, \end{aligned} \quad (\text{A4.110})$$



$$\dot{\varepsilon}_{ij} = \Lambda \frac{\partial f}{\partial \sigma_{ij}} \quad \text{jeżeli} \quad f=0 \quad \text{i} \quad \frac{\partial f}{\partial \sigma_{ij}} \dot{\sigma}_{ij} + \frac{\partial f}{\partial \theta} \dot{\theta} > 0, \quad \Lambda > 0.$$

Funkcję skalarną  $\Lambda$  wyznaczyć można dla  $\dot{f} = 0$  i dla wybranej, konkretnej wartości  $\chi$  we wzorze (A4.92). Dla procesów izotermicznych, tj. dla  $\theta = \text{const}$  odpowiednie człony w powyższych zależnościach znikają, upraszczając równania płynięcia.

W wielu przypadkach znajduje zastosowanie deformacyjna teoria plastyczności, która jest prostsza w aplikacji od teorii plastycznego płynięcia.

### Deformacyjna teoria plastyczności

W teorii deformacyjnej przyjmuje się dodatkowe założenie proporcjonalności dewiatorów naprężenia i odkształcenia. Plastyczne zachowanie się materiału podczas obciążania, w ramach tej teorii, opisują tzw. równania Hency'ego, w postaci:

$$e_{ij} = \varphi T_{ij}, \quad (\text{A4.111})$$

$$\varepsilon_{ij} = k \sigma \delta_{ij} + \varphi T_{ij}, \quad (\text{A4.112})$$

gdzie:

$e_{ij}$  – dewiator tensora odkształceń  $\varepsilon_{ij}$ ,

$\varphi$  – skalarny współczynnik będący funkcją tensorów naprężenia i odkształcenia,

$k$  – granica plastyczności przy czystym ścinaniu (określona w (A4.92) oraz (A4.101)).

Proces odciążania opisują równania z teorii sprężystości.

Wartość współczynnika funkcyjnego  $\varphi$  można określić z warunków plastyczności, np. dla kryterium H-M-H, będzie:

$$\varphi = \frac{1}{k} \Pi_{\varepsilon}^{1/2}. \quad (\text{A4.113})$$

Dla przyjętej wartości współczynnika  $\varphi$  w postaci:

$$\varphi = \frac{1}{2G}. \quad (\text{A4.114})$$

otrzymuje się z zależności (A4.111) i (A4.112) prawo Hooke'a.

Opisane teorie plastyczności dotyczą małych odkształceń (tensor  $\varepsilon$  oraz sumowalność – addytywność odkształceń sprężystych i plastycznych). Skoń-

czone odkształcenia sprężyste i plastyczne oraz lepkie można opisać wykorzystując tensory deformacji.

#### 4.3.1. Teoria nieściśliwych cieczy prostych

Spośród różnych koncepcji teoretycznego opisu [33, 39, 64] płynów nie-newtonowskich (nieklasycznych cieczy lepkosprężystych) równaniami konstytutywnymi, najbardziej ogólną z poznawczego punktu widzenia, jest teoria ośrodków prostych, a w szczególności teoria nieściśliwych cieczy prostych. Równania konstytutywne opisujące właściwości płynu, utworzone w ramach tej teorii, można podzielić na modele typu [64]:

- całkowego,
- różniczkowego,
- szybkościowego,
- mieszanego.

Ciecz prosta jest definiowana jako ciecz, dla której aktualny stan naprężenia jest określony historią gradientu deformacji oraz, którą charakteryzuje możliwie maksymalna symetria materialna. W ogólności nieściśliwą ciecz prostą można opisać równaniem konstytutywnym w postaci:

$$\mathbf{S}(t) = p\mathbf{I} + \mathbf{Y}_{s=0}^{\square\square}[\mathbf{G}(s)], \quad (\text{A4.115})$$

gdzie:

- $\mathbf{S}(t)$  – tensor naprężenia w chwili  $t$ ,
- $\mathbf{Y}$  – funkcjonal konstytutywny, izotropowy,
- $s$  – czas o  $s$  jednostek przed rozpatrywaną chwilą  $t$ ,
- $\mathbf{G}(s)$  – tensorowa historia deformacji będąca dziedziną funkcjonału  $\mathbf{Y}$ .

Historia tensora deformacji  $\mathbf{G}$  wyrażona przez tensor deformacji  $\mathbf{C}$  będzie:

$$\mathbf{G}(t-s) = \mathbf{G}(s) = \mathbf{C}(s) - \mathbf{I} \quad (\text{A4.116})$$

Tensor historii deformacji określony powyższą zależnością można przedstawić w postaci:

$$\mathbf{G}(s) = \left[ \text{tr} \mathbf{G}^T(s) \mathbf{G}(s) \right]^{\frac{1}{2}}. \quad (\text{A4.117})$$

Jeżeli do zależności powyższej wprowadzi się tzw. funkcję wpływu  $h(s)$ , określoną w przedziale  $0 \leq s < \infty$ , dla której zachodzi warunek w postaci:

$$\lim_{s \rightarrow \infty} s^r h(s) = 0 \quad \text{oraz} \quad h(0) = 1, \quad (\text{A4.118})$$

gdzie:

- $r$  – wykładnik potęgowy, rząd funkcji monotonicznej, to wyrażenie (A4.117) można przedstawić w postaci normy jako:

$$\|G(s)\|_h = \left\{ \int_0^\infty [h(s)|G(s)|]^2 ds \right\}^{\frac{1}{2}}. \quad (\text{A4.119})$$

Funkcja wpływu  $h(s)$  określa szybkość zmniejszania się wpływu poprzedniego stanu odkształceń. W koncepcji zanikającej pamięci materiału funkcja wpływu związana jest z pojęciem czasu naturalnego lub charakterystycznego. Warunek z zależności (A4.118) spełnia funkcja wykładnicza w postaci:

$$h(s) = \exp(-\beta s) \quad \text{dla} \quad \beta > 0. \quad (\text{A4.120})$$

Powyższa postać funkcji wykładniczej określającej funkcję wpływu wykorzystana może być do opisu zanikania pamięci lub zjawisk relaksacyjnych w materiałach reologicznych.

Dla nieściśliwych cieczy prostych spełnione powinny być następujące warunki:

$$G(s) = 0 \quad \text{oraz} \quad \det [I + G(s)] = 1. \quad (\text{A4.121})$$

#### Ciecze typu całkowego

Jeżeli w równaniu (A4.115) funkcjonal konstitutywny przedstawić w postaci sumy całek wielokrotnych zawierających historię deformacji, to otrzymuje się wyrażenie:

$$S(t) = pI + \sum_{k=1}^m \int_0^{s_k} \int_0^{s_k} \varphi_k(s_k) [G(s_k)] ds_k, \quad (\text{A4.122})$$

gdzie:

$\varphi_k$  – wieloliniowe, izotropowe funkcje tensorowe dla poszczególnych historii  $s_k$ .

Ośrodek (materiał) opisywany tym równaniem nazywany jest nieściśliwą cieczą typu całkowego (Greena–Rivlina) rzędu  $m$ . Równanie powyższe można rozwinąć dla dowolnego rzędu  $n$ . Przykładowo nieściśliwą cieczą typu całkowego rzędu drugiego można opisać następującą zależnością:

$$S(t) = pI + \int_0^{s_1} \int_0^{s_2} \alpha(s_1, s_2) G(s_1) G(s_2) ds_1 ds_2 + \int_0^\infty \int_0^\infty [\beta(s_1, s_2) (\text{tr} G(s_1)) G(s_2) + \gamma(s_1, s_2) G(s_1) G(s_2)] ds_1 ds_2, \quad (\text{A4.123})$$

gdzie:

$\alpha, \beta, \gamma$  – współczynniki (funkcje) materiałowe.

Równanie konstytutywne typu całkowego rzędu pierwszego w postaci:

$$\mathbf{S}(t) = -p\mathbf{I} + \int_0^{\infty} \alpha(s)\mathbf{G}(s)ds, \quad (\text{A4.124})$$

odpowiada tzw. nieściśliwej cieczy prostej rzędu pierwszego.

Znaczącą rolę odgrywa model nieściśliwej cieczy sprężystej Lodge'a w postaci:

$$\mathbf{S}(t) = -p\mathbf{I} + \int_0^t \mu(s)\mathbf{C}^{-1}(t-s)ds, \quad (\text{A4.125})$$

gdzie:

$\mu$  – współczynnik materiałowy, funkcja niezmienników tensora  $\mathbf{C}^{-1}$ .

Model Warda-Jenkinsa zawiera oba tensory deformacji przyjmując postać:

$$\mathbf{S}(t) = -p\mathbf{I} + \int_0^t [\mu_1(s)\mathbf{C}^{-1}(t-s) + \mu_2(s)\mathbf{C}(t-s)]ds, \quad (\text{A4.126})$$

gdzie:

$\mu_1, \mu_2$  – współczynniki materiałowe.

### Ciecze typu różniczkowego

Jeśli bardzo krótka historia tensora deformacji może opisać własności cieczy nieliniowej, to (po uwzględnieniu rozwinięcia Taylora przybliżającego historię tensora deformacji w pożądanym stopniu) równanie konstytutywne nieściśliwej cieczy przyjmie postać:

$$\mathbf{S}(t) = -p\mathbf{I} + f\left(\dot{\mathbf{C}}(t), \dots, \mathbf{C}^n(t)\right) \quad (\text{A4.127})$$

Z równania powyższego dla izotropowej cieczy, niezmienniczej względem układu odniesienia otrzymuje się równanie dla nieściśliwej cieczy typu różniczkowego rzędu  $n$  (ciecz Rivlina – Ericksena) w postaci:

$$\mathbf{S}(t) = -p\mathbf{I} + q(\mathbf{A}_1, \dots, \mathbf{A}_n); \quad \text{tr } \mathbf{A}_1 = 0, \quad (\text{A4.128})$$

Według Colemana-Nolla odpowiednie wzory dla powolnych przepływów, wyrażające ogólne równanie nieściśliwej cieczy prostej, można zastąpić następującym równaniem:

$$\mathbf{S}(t) = -p\mathbf{I} + \sum_{a, \dots, k}^n \mathbf{K}_{a, \dots, k}[\mathbf{A}_a, \dots, \mathbf{A}_k] = -p\mathbf{I} + \sum_{a, \dots, k}^n \mathbf{K}_a, \quad (\text{A4.129})$$

gdzie:

- $l$  – wieloliniowa funkcja tensorowa zmiennych tensorowych,
- $\mathbf{A}$  – zmienna tensorowa wielkości kinematycznej,
- $\mathbf{K}_a$  – tensor wielkości kinematycznej.

Ciecz spełniająca powyższe równanie nazywana jest cieczą typu różniczkowego stopnia  $n$  [64], odpowiadając postaci (A4.128);

dla  $n = 0$ , z zależności jw. wynika równanie nieściśliwej cieczy idealnej:

$$\mathbf{S} = -p\mathbf{I}, \quad (\text{A4.130})$$

dla  $n = 1$ , będzie równanie nieściśliwej cieczy Newtona:

$$\mathbf{S}(\mathbf{t}) = p\mathbf{I} + \mathbf{K}_1 = p\mathbf{I} + l_1[\mathbf{A}_1] = p\mathbf{I} + \eta_0\mathbf{A}_1, \quad (\text{A4.131})$$

gdzie:

- $\eta_0$  – stała, lepkość dynamiczna,
- $\mathbf{A}_1$  – odpowiada tensorowi prędkości deformacji.

Podana postać zależności (A4.131) pozwala na stwierdzenie, że każda nieściśliwa ciecz prosta w trakcie dostatecznie powolnego ruchu zachowuje się jak ciecz newtonowska. dla  $n > 1$ , np.  $n = 1 - 4$ , będzie:

$$\mathbf{S}(\mathbf{t}) = p\mathbf{I} + \mathbf{K}_1 + \mathbf{K}_2 + \mathbf{K}_3 + \mathbf{K}_4, \quad (\text{A4.132})$$

gdzie:

$$\begin{aligned} \mathbf{K}_2 &= \alpha_1\mathbf{A}_2 + \alpha_2\mathbf{A}_1^2, \\ \mathbf{K}_3 &= \beta\mathbf{A}_3 + \beta_2(\mathbf{A}_3\mathbf{A}_1 + \mathbf{A}_1\mathbf{A}_3) + \beta_3(\text{tr}\mathbf{A}_2)\mathbf{A}_1, \\ \mathbf{K}_4 &= \gamma_1\mathbf{A}_4 + \gamma_2(\mathbf{A}_3\mathbf{A}_1 + \mathbf{A}_1\mathbf{A}_3) + \gamma_3\mathbf{A}_2^2 + \gamma_4(\mathbf{A}_2\mathbf{A}_1^2 + \mathbf{A}_1^2\mathbf{A}_2) + \\ &+ \gamma_5(\text{tr}\mathbf{A}_2)\mathbf{A}_2 + \gamma_6(\text{tr}\mathbf{A}_2)\mathbf{A}_1^2 + [\gamma_7\text{tr}\mathbf{A}_3 + \gamma_8\text{tr}(\mathbf{A}_2\mathbf{A}_1)]\mathbf{A}_1, \end{aligned} \quad (\text{A4.133})$$

gdzie:

- $\alpha, \beta, \gamma$  – stałe materiałowe.

Równanie nieściśliwej cieczy różniczkowej stopnia drugiego w postaci odpowiadającej zależności (A4.129) przyjmuje formę:

$$\mathbf{S}(\mathbf{t}) = p\mathbf{I} + \eta_0\mathbf{A}_1 + \alpha_1\mathbf{A}_2 + \alpha_2\mathbf{A}_1^2; \quad \text{tr}\mathbf{A}_1 = 0, \quad (\text{A4.134})$$

lub

$$\mathbf{S}(\mathbf{t}) = p\mathbf{I} + \eta_0\mathbf{A}_1 + \eta_0\theta\mathbf{A}_2 + \eta_0(\theta_1 + \theta_2)\mathbf{A}_1^2, \quad (\text{A4.135})$$

gdzie:

- $\eta_0, \alpha_1, \alpha_2$  – stałe materiałowe wyznaczone doświadczalnie.  
 $\theta_1, \theta_2$  – stałe czasowe.

Często, ze względu na prostotę, wykorzystywana jest tzw. nieściśliwa ciecz Reinera-Rivlina będąca uogólnieniem równania Stokesa:

$$\mathbf{S}(t) = -p\mathbf{I} + \alpha_1\mathbf{D} + \alpha_2\mathbf{D}^2; \quad \text{tr}\mathbf{D} = 0 \quad (\text{A4.136})$$

gdzie:

- $\alpha_1, \alpha_2$  – współczynniki skalarne, funkcje niezmienników  $\text{tr}\mathbf{D}^2$  oraz  $\text{tr}\mathbf{D}^3$ .

Model ten uwzględnia nieliniową zależność lepkości oraz efekty dotyczące naprężeń normalnych. Równanie (A4.134) jest formalnie podobne do zależności (A4.52-A4.54) dla nieściśliwej cieczy Stokesa. W wyniku aproksymacji stopnia drugiego dla powolnych przepływów cieczy prostej (płynu prostego) o zanikającej pamięci, otrzymuje się inną postać równania (A4.134) w formie:

$$\mathbf{S} = \alpha_0\mathbf{I} + 2\eta_0\mathbf{D} + \alpha_1\mathbf{A}_2 + \alpha_2\mathbf{D}^2, \quad (\text{A4.137})$$

gdzie:

- $\mathbf{A}_1$  – tensorowa zmienna kinematyczna,  $\mathbf{A}_1 = \mathbf{D}$ ,  
 – tensor  $\mathbf{D}^2$  posiada macierz:

$$[\mathbf{D}^2] = [D_{ik}D_{kj}], \quad (\text{A4.138})$$

- tensor  $\mathbf{A}_2$  posiada macierz:

$$[\mathbf{A}_2] = \left[ \frac{d}{dt}D_{ij} + L_{ki}D_{kj} + L_{kj}D_{ik} \right]. \quad (\text{A4.139})$$

Tensory  $\mathbf{L}$  oraz  $\mathbf{D}$  określone są zależnościami (A4.14-A4.16).

Dla określenia sensu fizycznego współczynnika  $\alpha_0$  wyznaczony zostanie ślad tensora  $\mathbf{S}$  jako:

$$\text{tr}\mathbf{S} = 3\alpha_0 + \alpha_1\text{tr}\mathbf{A}_2 + \alpha_2\text{tr}\mathbf{D}^2. \quad (\text{A4.140})$$

Uwzględniając nieściśliwość, tj.  $\text{tr}\mathbf{D} = 0$ , zgodnie z (A4.37), będzie:

$$\text{tr}\mathbf{S} = -3p. \quad (\text{A4.141})$$

Wykorzystując powyższe w zależności (A4.140), otrzymuje się:

$$\alpha_0 = -p - \frac{1}{3}(\alpha_1\text{tr}\mathbf{A}_2 + \alpha_2\text{tr}\mathbf{D}^2), \quad (\text{A4.142})$$

zatem zależność na tensor naprężeń będzie:

$$\mathbf{S} = -p - \frac{1}{3}(\alpha_1 \text{tr} \mathbf{A}_2 + \alpha_2 \text{tr} \mathbf{D}^2) + 2\eta \mathbf{D} + \alpha_1 \mathbf{A}_2 + \alpha_2 \mathbf{D}^2. \quad (\text{A4.143})$$

Równanie w podanej postaci jest reologicznym równaniem płynu stopnia drugiego (cieczy typu różniczkowego stopnia drugiego) opisującym własności reologiczne płynów nienewtonowskich z zanikającą pamięcią.

#### Ciecze typu szybkościowego

Dla przepływu opisywanego ogólnym równaniem ośrodka prostego w postaci:

$$\mathbf{S}(t) = \int_{s=0}^{\square\square} \mathbf{f}(\mathbf{F}(s)), \quad (\text{A4.144})$$

gdzie:

$\mathbf{F}(s)$  – historia gradientu deformacji,

funkcje  $\mathbf{S}(s)$  i  $\mathbf{F}(s)$  spełniają równanie:

$$\dot{\mathbf{S}}^n = \left( \mathbf{f}(\mathbf{S}, \dot{\mathbf{S}}, \dots, \mathbf{T}; \mathbf{F}, \dot{\mathbf{F}}, \dots, \mathbf{F}^n) \right). \quad (\text{A4.145})$$

Równanie to określa ciecze (ośrodki) typu szybkościowego rzędu  $n$ .

Specyficzną kategorię stanowią ośrodki hygrosteryczne, łączące własności cieczy oraz ciała stałego, opisywane zależnością:

$$\frac{D\mathbf{S}}{Dt} = \hat{\mathbf{S}} = \psi(\mathbf{S}, \mathbf{D}, \rho), \quad (\text{A4.146})$$

gdzie:

$\frac{D}{Dt}$  – symbol pierwszej pochodnej Zaremby-Jaumanna,

$\hat{\mathbf{S}}$  – tzw. pochodna Zaremby-Jaumanna tensora naprężenia określona jako:

$$\frac{D\mathbf{S}}{Dt} = \hat{\mathbf{S}} = \dot{\mathbf{S}} + \mathbf{S}\mathbf{W} - \mathbf{W}\mathbf{S}. \quad (\text{A,147})$$

Wykorzystując powyższe równanie dla tzw. ośrodków hygrosterycznych, dla izotropowości funkcji  $\psi$  oraz jej liniowości względem tensora prędkości deformacji  $\mathbf{D}$ , można określić tzw. ośrodki hyposprężyste [64] opisujące przepływy ciał o własnościach plastycznych oraz dla pewnych założeń uogólniających ciał wykazujących własności sprężysto-plastyczno-lepkie.

### Ciecze typu mieszanego

Ośrodki typu mieszanego łączą w sobie własności oraz budowę równań konstytutywnych przedstawionych uprzednio. Spośród możliwych kombinacji do najczęściej stosowanych należą ciecze typu całkowo – różniczkowego (Greena – Rivlina) oraz całkowo – szybkościowego (Oldroyd oraz Green i Rivlin).

Do cieczy typu mieszanego (całkowo – szybkościowego) należy model Waltersa:

$$\left( \mathbf{I} + \frac{D}{Dt} \right) \mathbf{S}_E = \int_0^t \mu(\tau) \frac{D}{Dt} \mathbf{C}^{-1}(t) dt + 2\eta_0 \frac{D}{Dt} \mathbf{D}, \quad (\text{A4.148})$$

gdzie:

$\mathbf{S}_E$  – tzw. tensor ekstra naprężeń w postaci:

$$\mathbf{S}_E = \mathbf{S} + p\mathbf{I} \quad (\text{A4.149})$$

Teoria cieczy prostych nie ujmuje materiałów opisywanych prawem potęgowym, skądinąd bardzo popularnych i o względnie prostych zależnościach między podstawowymi własnościami reologicznymi.

### 4.3.2. Koncepcja cieczy nieprostych

Oprócz teorii cieczy prostych istnieje koncepcja cieczy nieprostych, dla której tensor naprężenia zależy od historii tensora prędkości deformacji oraz od historii tensora opisującego obrót bazy reologicznej [22, 39, 64]. Przykładem takiej cieczy nieprostych jest nieściśliwa ciecz lepkosprężysta Le Roy'a-Pierrada, dla której uogólniono zasadę superpozycji Boltzmanna dla dużych deformacji względem bazy obracającej się z rozpatrywaną cząstką materialną (tzw. baza reologiczna), w której szybkość transformacji odpowiada szybkości przebiegu deformacji w cieczy. Ogólnie dla cieczy nieściśliwej będzie:

$$\mathbf{S}_R(t) = p\mathbf{I} + \int_0^t \phi(s) \mathbf{S}_R(t) ds. \quad (\text{A4.150})$$

Po przyjęciu modelu Reinera-Rivlina równanie powyższe przyjmie formę:

$$\mathbf{S}_R(t) = -p\mathbf{I} + \int_{-\infty}^t \phi(s) \left[ \alpha_1 \mathbf{D}_R(t) + \alpha_2 \left( \mathbf{D}_R^2(t) - \frac{1}{3} \mathbf{I}_2 \mathbf{I} \right) \right] dt, \quad (\text{A4.151})$$

gdzie:

- indeks R przy wielkościach tensorowych oznacza, iż są one określone w odpowiedniej bazie reologicznej,
- $\mathbf{I}_2, \mathbf{I}_3$  – niezmienniki, odpowiednio drugi i trzeci.



Wielkości  $\alpha_1, \alpha_2$  są współczynnikami materiałowymi określonymi poprzez niezmienniki jako:

$$I_2 = \text{tr} \mathbf{D}_R^2; \quad I_3 = \text{tr} \mathbf{D}_R^3. \quad (\text{A4.152})$$

tworząc dalej zależności w postaci:

$$\varphi_1 = \mathbf{I}_2 \alpha_1 + \mathbf{I}_3 \alpha_2; \quad \varphi_2 = -\frac{1}{\mathbf{I}_2} \alpha_2; \quad (\text{A4.153})$$

otrzymuje się:

$$\mathbf{S}_R(t) = -p \mathbf{I} + \int_{-\infty}^t \phi(s) \left[ \frac{1}{\mathbf{I}_2} \varphi_1 \mathbf{D}_R + \varphi_2 \left( \mathbf{I}_3 \mathbf{D}_R - \mathbf{I}_2 \mathbf{D}_R^2 + \frac{1}{3} \mathbf{I}_2^2 \mathbf{I} \right) \right] dt. \quad (\text{A4.154})$$

W wyrażeniu powyższym wielkość funkcyjna  $\varphi_1(\mathbf{I}_2, \mathbf{I}_3)$  określa energię rozpraszaną w jednostce objętości i czasu, dla  $\varphi_2 = 0$ , lepkość cieczy w powyższym równaniu odpowiada prawu Newtona.

## ANEKS 2 (do rozdziału 4)

## Tabele wyników pomiarów ciasta – wielkości bezpośrednie

Tabela 1a. Ciasto OP500,  $w = 18,11 \text{ cm}^3$ ,  $M = 200 \text{ G} \cdot \text{cm}^{-2} = \text{const}$ 

Lp.	Czas rozpoczęcia	Połówkowy czas opadania	Odchylenie $2\delta_{1i}$			Całkowity czas opadania	Odchylenie $\delta_{2j}$			Odchylenie średnie	Odchylenie standardowe	Wartość krytyczna	Odchylenie standardowe
	$t_p[\text{min}]$	$t_1[\text{s}]$	$\delta_1$	$\delta_2$	$\delta_3$	$t_2[\text{s}]$	$\delta_4$	$\delta_5$	$\delta_6$	$\delta$	$\sigma$	$b_{n,\alpha}$	$\sigma_t$
1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13	14
1	0	101,6	40,4	-30,2	-10,2	205,6	34,6	-21,4	-13,2	25	12,217	2,0463	25,00
2	9	87,6	25,2	-8,4	-16,8	177,8	18,4	-8,8	-9,6	14,533	7,0616	2,0581	14,53
3	17	71	15	-8,6	-6,4	148	-7,6	-8,1	15,7	10,233	4,8641	2,1039	10,23
4	24	59,4	-8,8	12,4	-3,6	126,2	-8,2	6,2	2	6,8667	3,4343	1,9994	6,87
5	30	51,1	10,2	-6,2	-4	110,6	3,1	-4,4	1,3	4,8667	2,5109	1,9382	4,87
6	36	45,3	7,2	-14,4	7,2	94,4	-2,8	5,8	-3	6,7333	3,4714	1,9397	6,73
7	42	38	-8,8	6,8	2	78,5	6,4	-3,9	-2,5	5,0667	2,5173	2,0128	5,07
8	48	33,6	6,4	-7,2	0,8	67,6	5,2	3,1	-8,3	5,1667	2,5754	2,0062	5,17
9	54	31,4	-4,8	-6,8	11,6	61,8	4,6	-2,1	2,5	5,4	2,8027	1,9267	5,40
10	60	30,6	-6,4	2,8	3,6	60,2	-5,1	3,6	1,5	3,8333	1,8527	2,069	3,83
11	66	29,4	4,2	-4,8	0,6	59,4	2,8	-4,3	1,5	3,0333	1,5234	1,9912	3,03
12	72	26,6	-3,6	-0,8	4,4	58,2	4,3	3,2	-7,5	3,9667	1,9828	2,0006	3,97

Tabela 2a. Ciasto DP500,  $w = (13,11 + 5) \text{ cm}^3$ ,  $M = 250 \text{ G} \cdot \text{cm}^{-2} = \text{const}$ 

1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13	14
1	0	96,4	30,4	-9,6	-20,8	191	20,4	-1,5	-18,9	16,933	8,6112	1,9664	16,93
2	8	59	12,6	-10,4	-2,2	135	20,6	-16,4	-4,2	11,067	5,7234	1,9336	11,07
3	15	48,1	-7	3,2	3,8	98,2	-13,2	4,8	8,4	6,7333	3,374	1,9956	6,73
4	22	38,2	-5	5,6	-0,6	78,3	-6,9	0,3	6,6	4,1667	2,221	1,8761	4,17
5	28	33,1	8,4	-5,2	-3,2	63,8	4,2	-3,1	-1,1	4,2	2,1315	1,9704	4,20
6	34	28,6	-6,2	3	3,2	58	-4,6	2,5	2,1	3,6	1,7272	2,0843	3,60
7	40	27	-6,4	4,8	1,6	53	3,6	2,2	-5,8	4,0667	1,9833	2,0505	4,07
8	46	25,6	8,2	-6,2	-2	49	-2,5	1,6	0,9	3,5667	1,9942	1,7886	3,57
9	52	25	2,8	3,8	-6,6	47,6	-2,6	1,4	1,2	3,0667	1,5916	1,9267	3,07
10	58	23,6	-4,2	-2,4	6,6	46,6	3,2	-1,8	-1,4	3,2667	1,6573	1,9711	3,27
11	64	23	3,4	-2,6	-0,8	46	6,4	-3,3	-3,1	3,2667	1,6373	1,9952	3,27
12	70	21,6	-3,2	1,8	1,4	44,6	2,2	-4,5	2,3	2,5667	1,2359	2,0768	2,57

Tabela 3a. Ciasto OP500,  $w = 18,11 \text{ cm}^3$ ,  $M = 200-310 \text{ G}\cdot\text{cm}^{-2}$ 

1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13	14
1	0	111,2	21,2	-12,4	-9,4	229,3	26,9	-12,1	-14,8	16,133	7,7042	2,0941	16,13
2	9	90	-18,2	8,4	9,6	173,2	8,2	-4,3	-3,9	8,7667	4,4531	1,9687	8,77
3	16	61,6	-6,8	11,4	-4,6	131,2	-5,4	12,4	-7	7,9333	3,7828	2,0972	7,93
4	23	52,4	8,4	-5,2	-3,2	108,2	9,6	-4,7	-4,9	6	2,8641	2,0949	6,00
5	29	46	6,2	-3,4	-2,8	94,6	6,3	-2,1	-4,2	4,1667	1,9965	2,087	4,17
6	35	38,4	-5,6	3,4	2,2	79,2	-5,1	10,3	-5,2	5,3	2,6262	2,0182	5,30
7	41	34	3,8	2,4	-6,2	71	-3,1	8,2	-5,1	4,8	2,3202	2,0688	4,80
8	47	28,8	4,4	-2,2	-2,2	56,4	2,2	2,4	-4,6	3	1,4236	2,1073	3,00
9	53	24,6	3,2	-1,8	-1,4	49	1,7	-3,8	2,1	2,3333	1,1133	2,096	2,33
10	59	21,6	-4,4	2,2	2,2	39,4	-1,5	3,2	-1,7	2,5333	1,2168	2,0819	2,53
11	65	19,4	2,4	1,6	-4	36,2	2,9	-0,8	-2,1	2,3	1,1222	2,0495	2,30
12	71	16,2	1,4	1,2	-2,6	31,2	2,4	-1,1	-1,3	1,6667	0,792	2,1043	1,67

Tabela 4a. Ciasto DP500,  $w = (13,11 + 5) \text{ cm}^3$ ,  $M = 250\text{-}360 \text{ G}\cdot\text{cm}^{-2}$ 

1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13	14
1	0	102	-20,8	9,6	11,2	192,4	-25,2	13,1	12,1	15,333	7,3105	2,0974	15,33
2	8	57	-11,4	7,2	4,2	127	-16,4	8,7	7,7	9,2667	4,4847	2,0663	9,27
3	15	41,4	4,2	5,2	-9,4	95	9,3	-4,1	-5,2	6,2333	2,963	2,1037	6,23
4	22	31,4	3,2	-5,8	2,6	66	7,2	-3,3	-3,9	4,3333	2,0703	2,0931	4,33
5	28	23,8	2	-3,8	1,8	48,4	-3,1	0,9	2,2	2,3	1,1097	2,0727	2,30
6	34	18,6	6,4	-3	-3,4	40,6	4,3	-2,5	-1,8	3,5667	1,7272	2,065	3,57
7	40	16	-2,6	3,8	-1,2	32,4	5,8	-2,7	-3,1	3,2	1,5618	2,0489	3,20
8	46	13,8	1,8	0,6	-2,2	27	-2,5	1,3	1,2	1,6	0,7707	2,076	1,60
9	52	12	0,8	0,2	-1	24,4	-1,4	0,8	0,6	0,8	0,3933	2,0342	0,80
10	58	11,1	3,2	-1,6	-1,4	21,4	2,4	-1,3	-1,1	1,8333	0,8836	2,075	1,83
11	64	9,4	0,6	-0,8	0,2	19,2	0,3	0,6	-0,9	0,5667	0,2769	2,0466	0,57
12	70	8,6	1,2	-0,6	-0,6	16,4	-0,7	0,3	0,4	0,6333	0,3109	2,037	0,63

Tabela 5a. Ciasto OP750,  $w = 18,84 \text{ cm}^3$ ,  $M = 200 \text{ G}\cdot\text{cm}^{-2} = \text{const}$ 

1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13	14
1	0	97,8	-26,4	12,2	14,2	184,2	-16,2	11,4	4,8	14,2	6,983	2,0335	14,20
2	8	70	12,6	7,2	5,4	145,6	-8,2	4,4	3,8	6,9333	3,3705	2,0571	6,93
3	15	55,8	10,2	2,2	-12,4	120,6	9,3	-2,1	-7,2	7,2333	3,676	1,9677	7,23
4	22	47,4	3,2	2,4	-5,6	100,2	-4,5	-2,3	6,8	4,1333	1,9928	2,0741	4,13
5	29	39	0,8	-1,2	0,4	87	6,9	0,3	-7,2	2,8	1,8419	1,5202	2,80
6	35	38,1	0,6	-1,4	0,8	74,6	-3,2	-2,3	5,5	2,3	1,2746	1,8045	2,30
7	41	34,6	-6,6	5,2	1,4	67,4	0,3	-4,4	4,1	3,6667	1,9046	1,9252	3,67
8	47	30,6	-3,4	3,8	-0,4	65,4	-5,6	2,4	3,2	3,1333	1,5655	2,0015	3,13
9	53	29	2,2	1,4	-3,6	59,4	4,1	-0,2	-3,9	2,5667	1,3143	1,9529	2,57
10	59	28	-0,2	-0,6	0,8	57,6	-0,9	1,2	-0,3	0,6667	0,3357	1,9861	0,67
11	65	27	1,8	1,4	-3,2	54,4	0,7	0,2	-0,9	1,3667	0,7479	1,8274	1,37
12	71	26,2	-0,6	-0,4	1	51,4	-1,3	-0,4	1,7	0,9	0,4568	1,9702	0,90

Tabela 6a. Ciasto DP750,  $w = (13,84 + 5) \text{ cm}^3$ ,  $M = 250 \text{ G} \cdot \text{cm}^{-2} = \text{const}$ 

1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13	14
1	0	80,2	-4,2	8,6	-4,4	157,6	-20,3	9,2	11,1	9,6333	4,9359	1,9517	9,63
2	7	59,6	9,6	-16,4	6,8	112	-7,4	-4,2	12,6	9,5	4,6135	2,0592	9,50
3	14	43,8	-4,8	10,2	-5,4	87,6	-3,8	8,3	-4,5	6,1667	2,9429	2,0954	6,17
4	20	39	6,2	-2,8	-3,4	79	-3,2	5,6	-2,4	3,9333	1,8726	2,1005	3,93
5	26	34,4	-4,4	1,6	2,8	66,4	0,7	1,6	-2,3	2,2333	1,1269	1,9818	2,23
6	32	31,6	6,6	-2,2	-4,4	61,8	-5,4	1,6	3,8	4	1,9487	2,0527	4,00
7	38	28,1	-4,8	3,6	1,2	57,2	1,7	-2,8	1,1	2,5333	1,283	1,9746	2,53
8	44	26,6	0,8	1,4	-2,2	52,8	0,7	-0,9	0,2	1,0333	0,541	1,9101	1,03
9	50	25,3	0,4	1,4	-1,8	49,8	-1,4	3,6	-2,2	1,8	0,9151	1,9671	1,80
10	56	24	-0,2	-0,8	1	47,2	-0,3	-0,8	1,1	0,7	0,3474	2,0151	0,70
11	62	23	1,6	-0,4	-1,2	46,2	0,4	1,3	-1,7	1,1	0,5447	2,0196	1,10
12	68	22,6	-0,8	0,6	0,2	43,8	1,9	-3,1	1,2	1,3	0,7234	1,797	1,30

Tabela 7a. Ciasto OP750,  $w = 18,84 \text{ cm}^3$ ,  $M = 200-310 \text{ G}\cdot\text{cm}^{-2}$ 

1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13	14
1	0	106	10,2	14,6	-24,8	199	7,5	8,2	-15,7	13,5	6,5884	2,049	13,50
2	8	68	9,8	-6,6	-3,2	134,4	2,6	-4,8	2,2	4,8667	2,4798	1,9625	4,87
3	15	49	-3,8	-4,2	8	107	-12,6	-3,1	15,7	7,9	4,1269	1,9143	7,90
4	22	39,6	1,8	0,8	-2,6	79,6	4,3	3,1	-7,4	3,3333	1,7654	1,8881	3,33
5	29	30	-2,6	4,2	-1,6	61	1,2	0,9	-2,1	2,1	1,0586	1,9837	2,10
6	35	26	-0,8	0,6	0,2	53,6	-3,8	1,8	2	1,5333	0,8702	1,7619	1,53
7	41	23,2	1,2	-1,6	0,4	47,2	-6,4	3,3	3,1	2,6667	1,479	1,8031	2,67
8	47	21	0,2	0,4	-0,6	40	4,1	-2,6	-1,5	1,5667	0,9377	1,6707	1,57
9	53	18,6	0,4	-1,2	0,8	35	0,3	0,2	-0,5	0,5667	0,2955	1,9175	0,57
10	59	16,4	-1,8	2,4	-0,6	30,4	1,3	-0,3	-1	1,2333	0,6361	1,9388	1,23
11	65	15,4	-0,8	0,4	0,4	28	-0,9	-0,8	1,7	0,8333	0,4203	1,9826	0,83
12	71	13,8	1,2	-0,8	-0,4	25,2	-0,5	-0,6	1,1	0,7667	0,3679	2,084	0,77



Tabela 8a. Ciasto DP750,  $w = (13,84 + 5) \text{ cm}^3$ ,  $M = 250\text{-}360 \text{ G}\cdot\text{cm}^{-2}$ 

1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13	14
1	0	68,4	0,8	8,8	-9,6	142,4	12,4	-10,7	-1,7	7,3333	3,8357	1,9119	7,33
2	7	51,8	12,2	-4,2	-8	108	3,2	-8,6	5,4	6,9333	3,3855	2,048	6,93
3	14	38,6	-6,6	3,4	3,2	79	5,1	-11,3	6,2	5,9667	2,9297	2,0366	5,97
4	20	31,6	4,6	-1,4	-3,2	59	4,6	-3,3	-1,3	3,0667	1,4955	2,0505	3,07
5	26	27	5,8	-2,4	-3,4	48,6	-3,1	2,1	1	2,9667	1,483	2,0004	2,97
6	32	22,2	4,2	-2,4	-1,8	43,8	6,3	-2,5	-3,8	3,5	1,7031	2,055	3,50
7	38	19	-0,8	-0,6	1,4	35,2	0,9	0,2	-1,1	0,8333	0,4091	2,0372	0,83
8	44	16,2	-1,8	3,4	-1,6	29,4	-1,6	1,7	-0,1	1,7	0,8722	1,9492	1,70
9	50	13,9	-0,2	0,6	-0,4	28,4	-1,2	3,1	-1,9	1,2333	0,7123	1,7315	1,23
10	56	12,8	1,2	1,6	-2,8	24	-0,9	0,6	0,3	1,2333	0,6608	1,8664	1,23
11	62	11,2	-0,6	0,2	0,4	21	1,2	-0,7	-0,5	0,6	0,3022	1,9853	0,60
12	68	9,5	-1,6	0,8	0,8	17,5	-0,4	0,5	-0,1	0,7	0,3768	1,8576	0,70

Tabela 9a. Ciasto OM70,  $w = 17,99 \text{ cm}^3$ ,  $M = 250 \text{ G}\cdot\text{cm}^{-2} = \text{const}$ 

1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13	14
1	0	89	16,2	-7,4	-8,8	194,2	17,3	-8,4	-8,9	11,167	5,3031	2,1057	11,17
2	8	74,6	4,8	5,4	-10,2	153,4	9,3	-4,6	-4,7	6,5	3,0875	2,1053	6,50
3	16	66	8,2	-11,8	3,6	133	11,5	-6,3	-5,2	7,7667	3,7346	2,0796	7,77
4	23	55,6	-7,8	3,6	4,2	112,8	-7,2	3,4	3,8	5	2,3754	2,1049	5,00
5	29	50,8	-7,2	3,2	4	102,4	-9,5	4,2	5,3	5,5667	2,6712	2,084	5,57
6	35	46,6	-5,4	-1,2	6,6	92,8	2,5	-1,6	-0,9	3,0333	1,6711	1,8151	3,03
7	41	43	-2,2	4,4	-2,2	87,1	1,7	2,7	-4,4	2,9333	1,3974	2,0992	2,93
8	47	41	-1,8	3,8	-2	82,6	3,1	6,3	3,2	3,3667	1,6454	2,0461	3,37
9	53	38,6	3,2	-2,4	-0,8	75,4	0,8	-1,5	0,7	1,5667	0,8169	1,9178	1,57
10	59	35,4	0,8	1,4	-2,2	70,6	2,1	-4,3	2,2	2,1667	1,0829	2,0008	2,17
11	65	34,4	-0,6	-1,2	1,8	69,6	-2,8	5,5	-2,7	2,4333	1,2964	1,877	2,43
12	71	32,8	-1,4	0,8	0,6	65,4	0,6	0,3	-0,9	0,7667	0,3751	2,0441	0,77

Tabela 10a. Ciasto DM70,  $w = (12,99 + 5) \text{ cm}^3$ ,  $M = 250 \text{ G}\cdot\text{cm}^{-2} = \text{const}$ 

1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13	14
1	0	103	-15,2	3,1	12,1	221	10,4	-21,3	10,9	12,167	5,9658	2,0394	12,17
2	9	86	-8,2	14,4	-6,2	174	12,6	0,8	-13,4	9,2667	4,6619	1,9877	9,27
3	17	73,6	9,4	-5,2	-4,2	149	-7,3	-2,3	9,6	6,3333	3,0756	2,0592	6,33
4	24	64,4	6,6	-4,2	-2,4	130	11,1	-6,5	-4,6	5,9	2,9073	2,0293	5,90
5	31	54,4	-3,6	-6,2	9,8	113,4	-5,7	-2,2	7,9	5,9	2,8704	2,0554	5,90
6	38	49,6	-3,4	4,6	-1,2	98,8	10,3	1,4	-11,7	5,4333	3,0501	1,7813	5,43
7	45	46	0,8	-6,2	5,4	97,2	3,6	-8,3	4,7	4,8333	2,3957	2,0175	4,83
8	52	40	3,2	2,6	-5,8	84,6	-0,8	3,3	-2,5	3,0333	1,5102	2,0086	3,03
9	59	39,2	1,4	0,8	-2,2	78,8	4,7	3,2	-8,9	3,5333	1,9915	1,7742	3,53
10	65	36,8	3,2	-2,8	-0,4	75,1	2,1	-0,6	-1,5	1,7667	0,9176	1,9253	1,77
11	71	36,4	-0,8	-1,6	2,4	72,2	-5,9	4,6	1,3	2,7667	1,4902	1,8566	2,77
12	77	35,8	-1,4	0,6	0,8	71,2	1,3	0,9	-2,2	1,2	0,5859	2,048	1,20

Tabela 11a. Ciasto OM70,  $w = 17,99 \text{ cm}^3$ ,  $M = 250\text{-}360 \text{ G}\cdot\text{cm}^{-2}$ 

1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13	14
1	0	102	-16,2	14,2	2,6	211	-32,6	7,4	25,2	16,367	8,6089	1,9011	16,37
2	8	78,8	13,8	-0,8	-13	157	7,2	-15,1	7,9	9,6333	4,8385	1,991	9,63
3	15	57	5,4	4,4	-9,8	118	-5,2	2,8	2,4	5	2,4846	2,0124	5,00
4	22	46	-5,8	2,6	3,2	93,6	-8,7	3,1	5,6	4,8333	2,3615	2,0467	4,83
5	28	57,2	-1,6	-3,6	5,2	75,2	-4,3	2,1	1,3	3,0167	1,4961	2,0163	3,02
6	34	33,4	2,8	3,4	-6,2	67,2	5,8	1,3	-7,1	4,4333	2,1877	2,0265	4,43
7	40	29	0,4	4,4	-4,8	57,6	-2,6	-3,3	5,7	3,5333	1,7578	2,01	3,53
8	46	25,4	2,2	-1,6	-0,6	51	0,1	3,5	-3,6	1,9333	1,0485	1,8439	1,93
9	52	22	-3,8	3,2	0,6	43	-2,6	-1,7	4,3	2,7	1,3314	2,0279	2,70
10	58	20	0,6	0,2	-0,8	40	-1,3	-1,1	2,4	1,0667	0,5686	1,8759	1,07
11	64	17,6	-1,4	0,6	0,8	34,2	0,7	0,9	-1,6	1	0,4768	2,0973	1,00
12	70	14,4	0,8	0,4	-1,2	27,8	-1,6	-1,3	2,9	1,3667	0,7047	1,9392	1,37

Tabela 12a. Ciasto DM70,  $w = (12,99 + 5) \text{ cm}^3$ ,  $M = 250\text{-}360 \text{ G}\cdot\text{cm}^{-2}$ 

1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13	14
1	0	103	21,4	-15,2	-6,2	212	21,8	-22,4	0,6	14,6	7,5383	1,9368	14,60
2	9	90,6	12,4	-7,6	-4,8	177	13,6	-10,7	-2,9	8,6667	4,2521	2,0382	8,67
3	17	70,4	11,2	-6	-5,2	142	14,6	-6,1	-8,5	8,6	4,1275	2,0836	8,60
4	25	58	-5,6	9,8	-4,2	113	4,3	3,8	-8,1	5,9667	2,8494	2,094	5,97
5	32	45,4	3,6	-7,4	3,8	89,4	-5,2	-2,7	7,9	5,1	2,442	2,0885	5,10
6	39	33,6	0,8	2,8	-3,6	69,6	4,2	-6,3	2,1	3,3	1,6651	1,9818	3,30
7	45	30,5	1,6	-3,6	2	59,4	1,61	1,7	-3,3	2,3017	1,0938	2,1043	2,30
8	51	26,4	4,8	-1,2	-3,6	54	-2,6	-0,5	3,1	2,6333	1,3424	1,9617	2,63
9	57	23,1	-4,4	3,2	1,2	45	1,4	2,3	-3,7	2,7	1,3163	2,0512	2,70
10	63	20,5	0,8	3,4	-4,2	41	0,3	-2,6	2,3	2,2667	1,1829	1,9161	2,27
11	69	17,4	-0,8	-1,6	2,4	36,3	0,7	0,9	-1,6	1,3333	0,6537	2,0396	1,33
12	75	16,1	-1,4	-1,8	3,2	31,4	-2,2	0,9	1,3	1,8	0,8714	2,0656	1,80

Tabela 13a. Ciasto OM50,  $w = 17,74 \text{ cm}^3$ ,  $M = 250 \text{ G}\cdot\text{cm}^{-2} = \text{const}$ 

1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13	14
1	0	108	26,4	-12,6	-13,8	218	22,3	-7,5	-14,8	16,233	7,7862	2,0849	16,23
2	9	88	-8,8	14,4	-5,6	183	-7,3	18,4	-11,1	10,933	5,2638	2,0771	10,93
3	17	84,6	-9,4	-6,4	15,8	173	-6,3	-6	12,3	9,3667	4,4942	2,0842	9,37
4	25	72,5	2,4	-6,2	3,8	146,5	-0,8	4,6	-3,8	3,6	1,7784	2,0243	3,60
5	32	61,5	2,2	3,4	-5,6	128,2	5,6	3,7	-9,3	4,9667	2,4447	2,0316	4,97
6	39	56	-8,4	5,8	2,6	113,6	-9,7	0,9	8,9	6,05	3,0826	1,9626	6,05
7	46	53	6,6	4,6	-11,2	107,4	3,4	5,9	-9,3	6,8333	3,2814	2,0825	6,83
8	52	50	-4,6	-3,2	7,8	101,1	-5,1	-2,1	7,2	5	2,4118	2,0732	5,00
9	58	46,8	-7,8	3,6	4,2	97,4	-3,9	4,8	-0,9	4,2	2,0857	2,0137	4,20
10	64	44,2	3,6	-2,8	-0,8	95,6	4,4	-1,5	-2,9	2,6667	1,3097	2,0361	2,67
11	70	41,6	2,6	-8,2	5,6	89,2	3,3	-9,7	6,4	5,9667	2,8942	2,0616	5,97
12	76	39,6	-3,8	1,4	2,4	88,4	-2,6	-0,7	3,3	2,3667	1,159	2,042	2,37

Tabela 14a. Ciasto DM50,  $w = (12,74 + 5) \text{ cm}^3$ ,  $M = 250 \text{ G} \cdot \text{cm}^{-2} = \text{const}$ 

1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13	14
1	0	107,4	4,8	-18,2	13,4	211,4	2,6	-16,3	13,7	11,5	5,7561	1,9979	11,50
2	9	92,8	-15,6	8,8	6,8	183,6	-8,3	3,1	5,2	7,9667	3,969	2,0072	7,97
3	17	79,1	-3,8	-10,4	14,2	154,2	-11,6	-5,1	16,7	10,3	5,0455	2,0414	10,30
4	25	74	6,4	3,4	-9,8	146	7,3	5,1	-12,4	7,4	3,5666	2,0748	7,40
5	32	58,6	-3,8	8,2	-4,4	123,6	-5,9	7,8	-1,9	5,3333	2,5839	2,064	5,33
6	39	56,1	-7,4	3,8	3,6	113,2	-2,1	-5,2	7,3	4,9	2,3587	2,0774	4,90
7	46	51,7	-3,4	9,6	-6,2	101	4,8	3,3	-8,1	5,9	2,8384	2,0786	5,90
8	53	47,4	12,6	-7,8	-4,8	93,8	7,3	-3,8	-3,5	6,6333	3,2793	2,0228	6,63
9	59	44,7	2,2	-8,6	6,4	89	6,2	-9,1	8,9	6,9	3,2671	2,112	6,90
10	65	44,1	-0,6	7,8	-7,2	89,2	-1,9	8,8	-6,9	5,5333	2,8384	1,9494	5,53
11	71	41,8	-2,8	-2,6	5,4	82,8	1,3	0,8	-2,1	2,5	1,2974	1,9269	2,50
12	77	38,8	1,8	-3,4	1,6	78,4	3,9	1,6	2,3	2,4333	1,1607	2,0964	2,43

Tabela 15a. Ciasto OM50,  $w = 17,74 \text{ cm}^3$ ,  $M = 250\text{-}360 \text{ G}\cdot\text{cm}^{-2}$ 

1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13	14
1	0	104	8,6	-14,2	5,6	210	8,7	-19,6	10,9	11,267	5,4333	2,0736	11,27
2	9	81,4	13,8	-8	-5,8	165,4	15,3	-7,6	-7,7	9,7	4,616	2,1014	9,70
3	16	60,8	-3,6	9,4	-5,8	123,6	-5,3	12,4	-7,1	7,2667	3,4987	2,077	7,27
4	23	50	-8,2	4,6	3,6	102,6	-9,1	3,2	5,9	5,7667	2,7642	2,0862	5,77
5	29	43,4	3,6	-6,4	2,8	88	-7,3	4,1	3,2	4,5667	2,1764	2,0983	4,57
6	35	36	0,6	5,8	-6,4	74,2	5,4	-6,7	1,3	4,3667	2,2413	1,9483	4,37
7	41	32,8	1,4	-4,6	3,2	66,8	5,1	-2,6	-2,5	3,2333	1,5533	2,0816	3,23
8	47	29,4	-3,8	2,6	1,2	60,6	-2,1	4,7	-2,6	2,8333	1,365	2,0756	2,83
9	53	25,7	-3,2	0,8	2,4	50,2	0,9	-2,8	1,9	2	0,9815	2,0377	2,00
10	59	23,4	2,4	1,6	-4	44,4	0,7	-3,9	3,2	2,6333	1,2943	2,0345	2,63
11	65	18,7	0,2	-0,8	0,6	39	-0,6	1,4	-0,8	0,7333	0,3651	2,0083	0,73
12	71	17,8	1,4	-0,6	-0,8	36,4	1,3	-2,7	1,4	1,3667	0,6807	2,0078	1,37

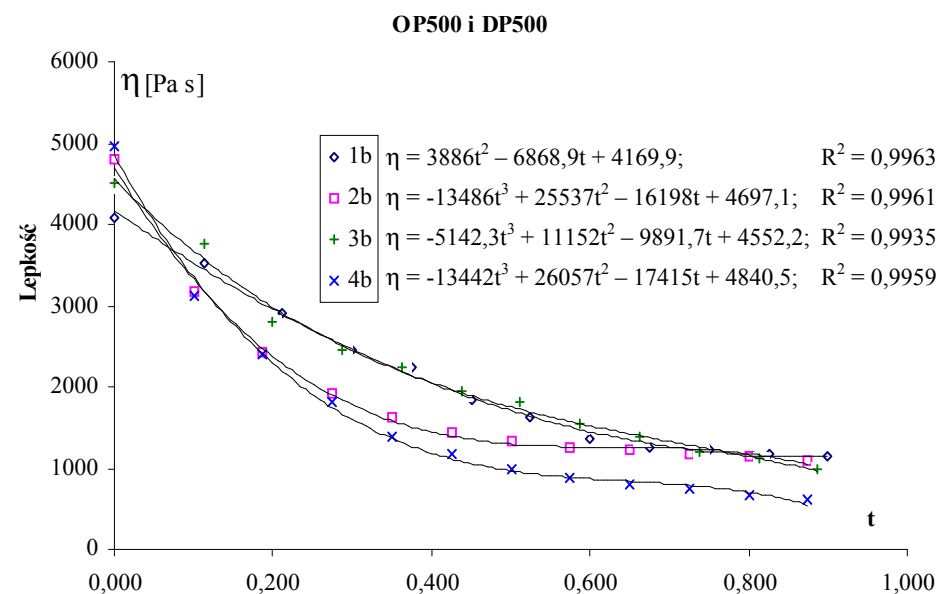


Tabela 16a. Ciasto DM50,  $w = (12,74 + 5) \text{ cm}^3$ ,  $M = 250\text{-}360 \text{ G}\cdot\text{cm}^{-2}$ 

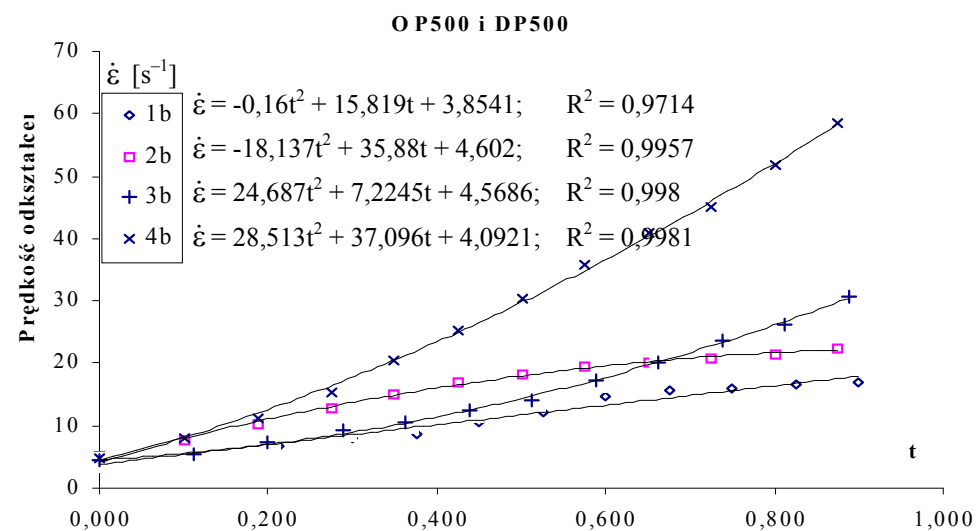
1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13	14
1	0	106,4	12,6	6,8	-19,4	211,4	5,8	-14,6	8,8	11,333	5,4942	2,0628	11,33
2	9	86,6	-11,2	-4,2	15,4	170	-15,3	7,2	8,1	10,233	4,9389	2,072	10,23
3	17	64,4	-9,4	3,6	5,8	126	-8,7	3,7	5	6,0333	2,8829	2,0928	6,03
4	24	58,6	5,6	5,8	-11,4	111	2,2	7,6	-9,8	7,0667	3,4332	2,0583	7,07
5	31	42,4	-6,8	-0,6	7,4	86	-5,2	-2,1	7,3	4,9	2,4906	1,9674	4,90
6	37	36	6,6	-3,2	-3,4	72,4	-0,9	4,2	-3,3	3,6	1,7767	2,0262	3,60
7	43	32,8	-3,6	7,4	-3,8	66,2	-1,3	2,9	-1,6	3,4333	1,7778	1,9312	3,43
8	49	27,6	1,2	4,6	-5,8	58	-1,6	-1,7	3,3	3,0333	1,5554	1,9502	3,03
9	55	24	-0,4	-4,2	4,6	49	-1,9	-0,8	2,7	2,4333	1,2974	1,8755	2,43
10	61	20,2	2,6	-1,2	-1,4	42,2	1,7	-1,2	-0,5	1,4333	0,701	2,0448	1,43
11	67	18,6	0,6	0,8	-1,4	38,8	-0,7	-1,6	2,3	1,2333	0,6137	2,0096	1,23
12	73	16,2	1,6	-1,2	-0,4	33,2	0,9	0,5	-1,4	1	0,4892	2,0441	1,00

## ANEKS 3 (do rozdziału)

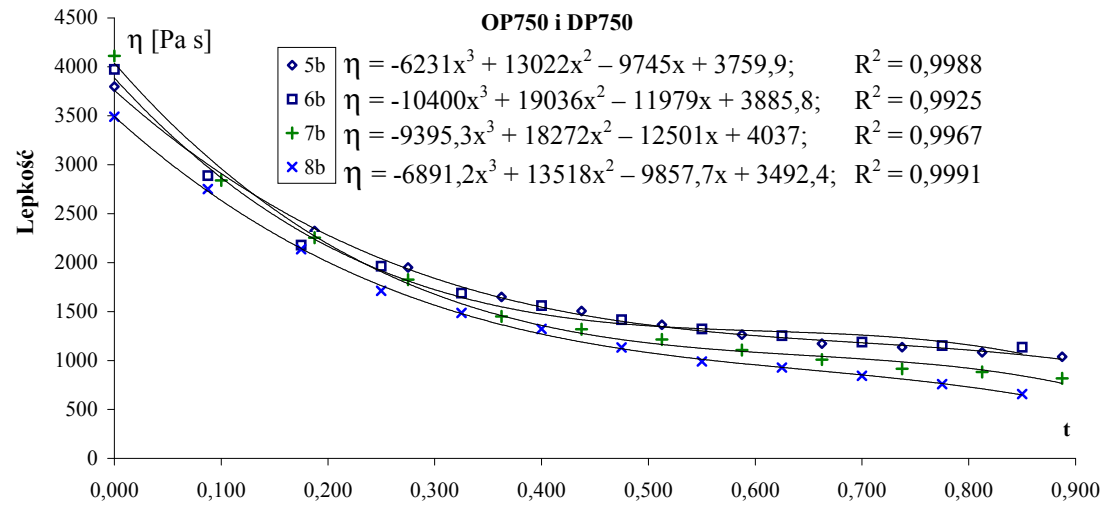
## Wykresy zależności reologicznych w pełnym przedziale czasu pomiarów



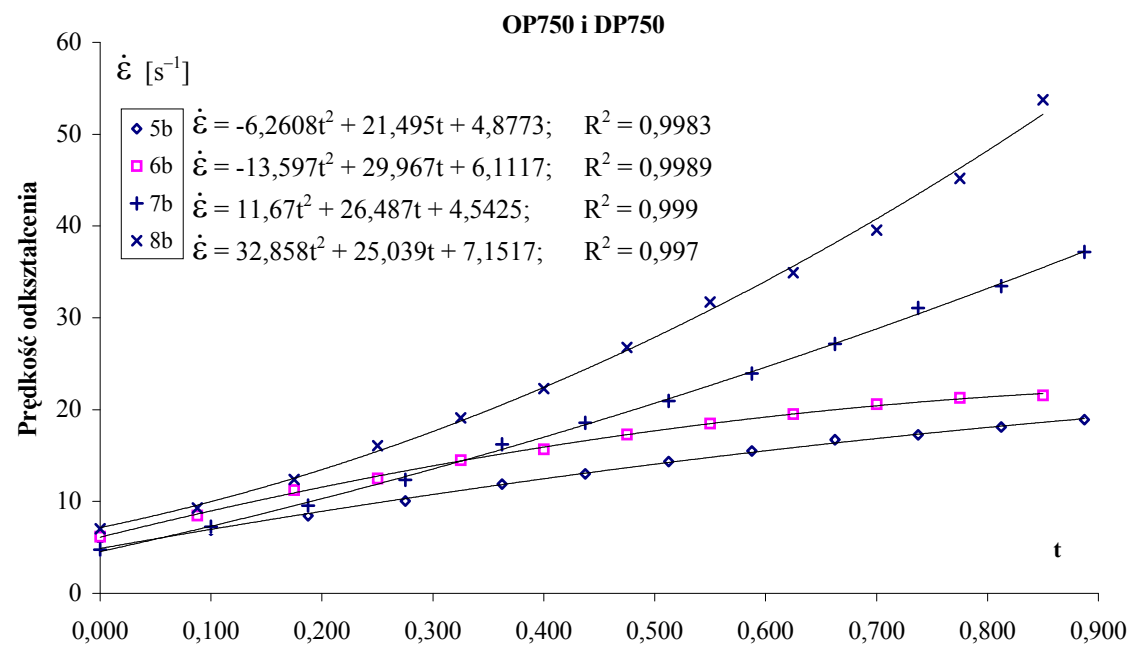
Rys. 4.14. Zależność lepkości  $\eta$  od bezwymiarowego współczynnika  $t$  w pełnym przedziale czasu pomiaru oraz równania przebiegu tych zależności dla przypadków:  
 tabela 1b, OP500,  $M = \text{const}$ ; tabela 2b, DP500,  $M = \text{const}$ ,  
 tabela 3b, OP500,  $M \neq \text{const}$ ; tabela 4b, DP500,  $M \neq \text{const}$



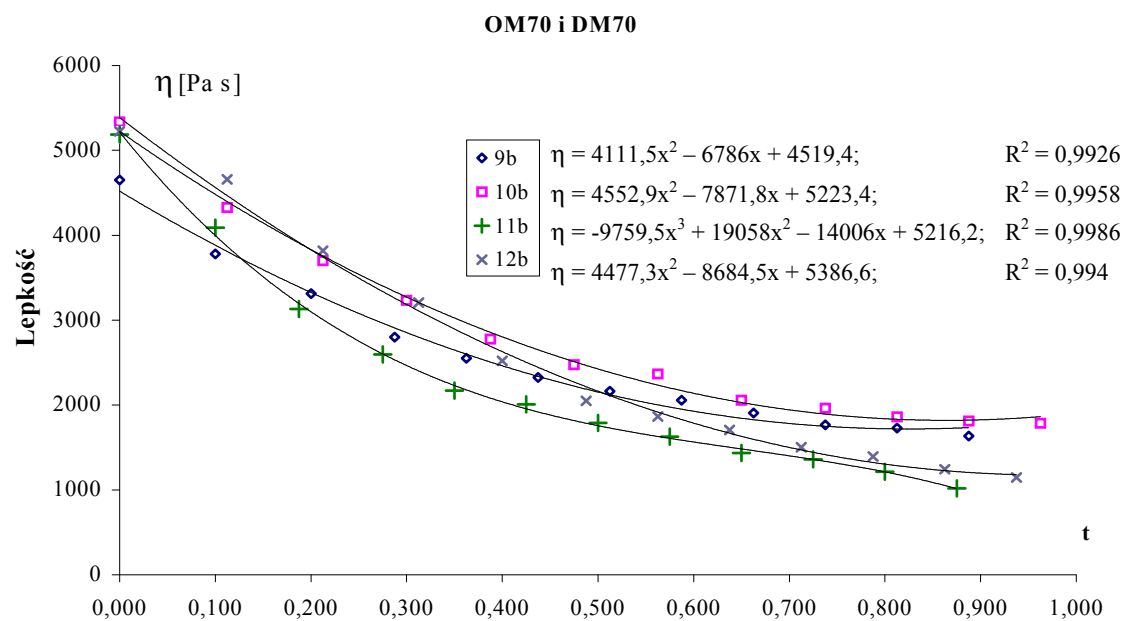
Rys. 4.15. Zależność prędkości odkształceń  $\dot{\epsilon}$  od bezwymiarowego współczynnika  $t$  w pełnym przedziale czasu pomiaru oraz równania przebiegu tych zależności dla przypadków: tabela 1b, OP500,  $M = \text{const}$ ; tabela 2b, DP500,  $M = \text{const}$ , tabela 3b, OP500,  $M \neq \text{const}$ ; tabela 4b, DP500,  $M \neq \text{const}$



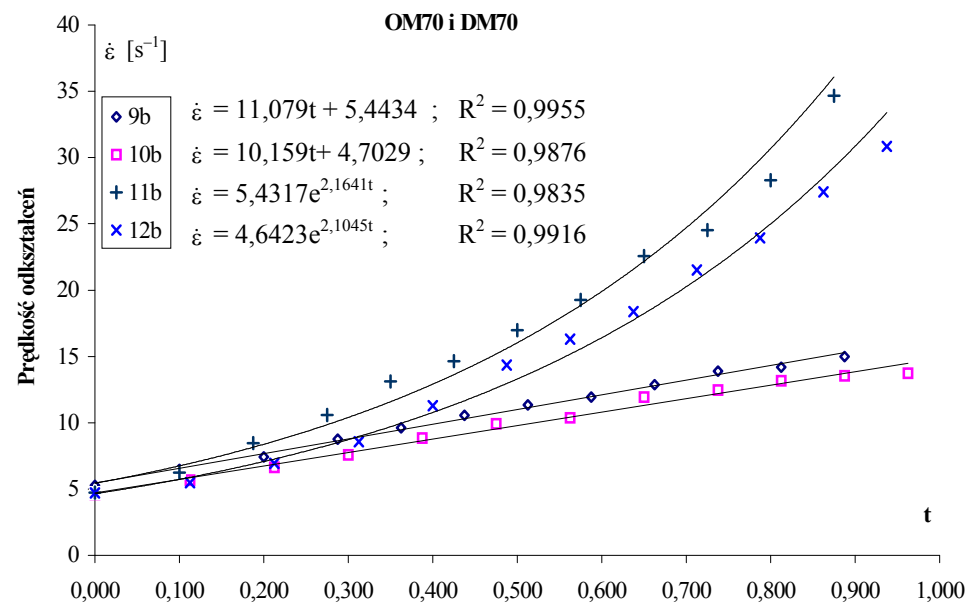
Rys. 4.16. Zależność lepkości  $\eta$  od bezwymiarowego współczynnika  $t$  w pełnym przedziale czasu pomiaru oraz równania przebiegu tych zależności dla przypadków:  
 tabela 5b, OP750,  $M = \text{const}$ ; tabela 6b, DP750,  $M = \text{const}$ ,  
 tabela 7b, OP750,  $M \neq \text{const}$ ; tabela 8b, DP750,  $M \neq \text{const}$



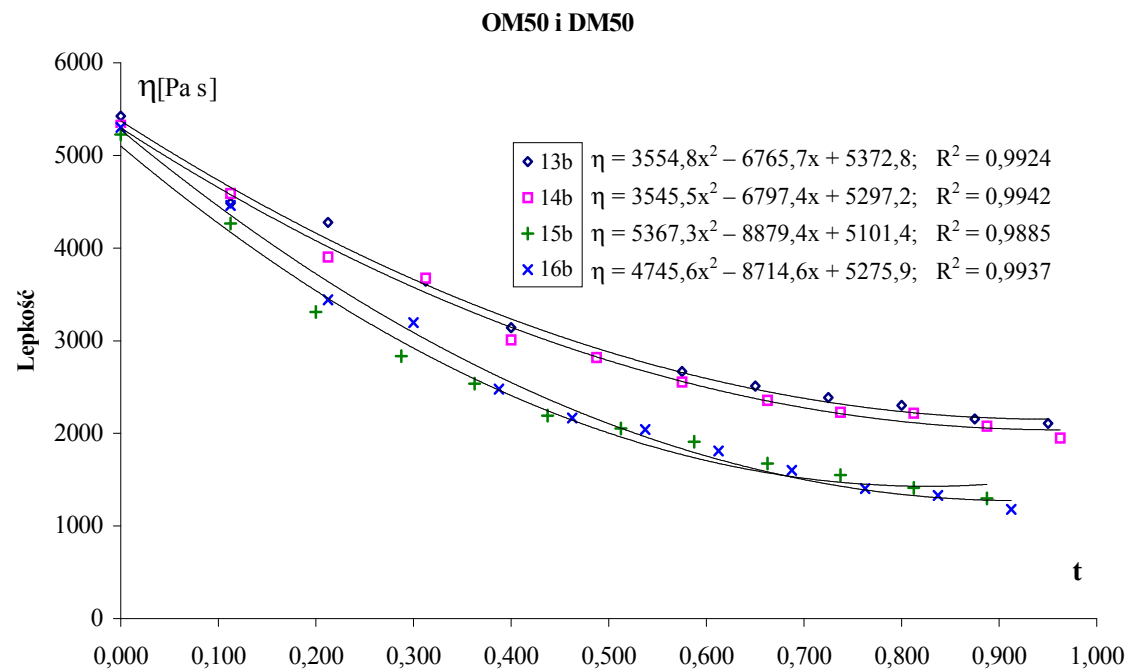
Rys. 4.17. Zależność prędkości odkształceń  $\dot{\epsilon}$  od bezwymiarowego współczynnika  $t$  w pełnym przedziale czasu pomiaru oraz równania przebiegu tych zależności dla przypadków: tabela 5b, OP750,  $M = \text{const}$ ; tabela 6b, DP750,  $M = \text{const}$ , tabela 7b, OP750,  $M \neq \text{const}$ ; tabela.8b, DP750,  $M \neq \text{const}$



Rys. 4.18. Zależność lepkości  $\eta$  od bezwymiarowego współczynnika  $t$  w pełnym przedziale czasu pomiaru oraz równania przebiegu tych zależności dla przypadków:  
 tabela 9b, OM70,  $M = \text{const}$ ; tabela 10b, DM70,  $M = \text{const}$ ,  
 tabela 11b, OM70,  $M \neq \text{const}$ ; tabela 12b, DM70,  $M \neq \text{const}$

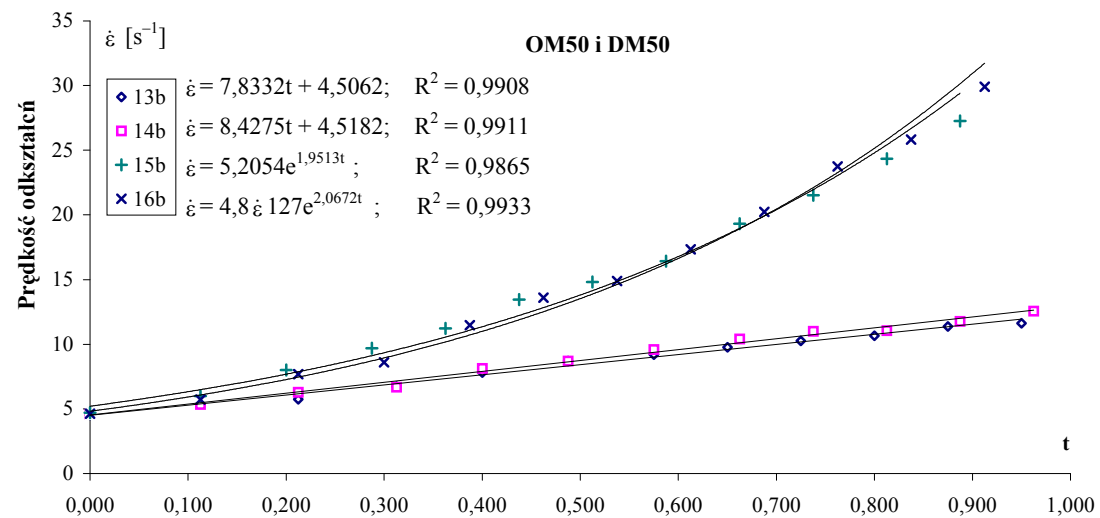


Rys. 4. 19. Zależność prędkości odkształceń  $\dot{\epsilon}$  od bezwymiarowego współczynnika  $t$  w pełnym przedziale czasu pomiaru oraz równania przebiegu tych zależności dla przypadków: tabela 9b, OM70,  $M = \text{const}$ ; tabela 10b, DM70,  $M = \text{const}$ , tabela 11b, OM70,  $M \neq \text{const}$ ; tabela 12b, DM70,  $M \neq \text{const}$



Rys. 4.20. Zależność lepkości  $\eta$  od bezwymiarowego współczynnika  $t$  w pełnym przedziale czasu pomiaru oraz równania przebiegu tych zależności dla przypadków:  
 tabela 13b, OM50,  $M = \text{const}$ ; tabela 14b, DM50,  $M = \text{const}$ ,  
 tabela 15b, OM50,  $M \neq \text{const}$ ; tabela 16b, DM50,  $M \neq \text{const}$





Rys. 4.21. Zależność prędkości odkształceń  $\dot{\epsilon}$  od bezwymiarowego współczynnika  $t$  w pełnym przedziale czasu pomiaru oraz równania przebiegu tych zależności dla przypadków: tabela 13b, OM50,  $M = \text{const}$ ; tabela. 14b, DM50,  $M = \text{const}$ , tabela 15b, OM50,  $M \neq \text{const}$ ; tabela 16b. DM50,  $M \neq \text{const}$

## BIBLIOGRAFIA

- [1] Aksenowa L. M., Talejsnik M. A., Uriew N. B., 1977. Strukturo-reologiczieskije swojstwa biskwitnosbiwnogo sdoznego testa. Chlebo-piekarnaja i Konditierskaja Promyszliennost 4, Moskwa, 35-36.
- [2] Ambroziak Z., 1976. Próby optymalizacji właściwości reologicznych ciasta w oparciu o regulację procesów fizycznych i biochemicznych. Zagadnienia Piekarstwa 2, Zakład Badawczy Przemysłu Piekarskiego CZSS Społem, Warszawa.
- [3] Azarow B. M., Guskow K. P., Gokowa N. G., Semionow A. M., Teleżnikow B. K., 1968. Uczjot reologiczieskich charakteristik testa pri wybore režima formowanija. Chlebo-piekarnaja i Konditierskaja Promyszliennost 5, Moskwa, 10-12.
- [4] Bagley E. B., Dintzis F. R., Chakrabarti S., 1998. Experimental and conceptual problems in the rheological characterization of wheat flour doughs. *Rheologica Acta* 37(6), 556-565.
- [5] Bielski A., Ciuryło R., 2001. Podstawy metod opracowania pomiarów. Wyd. UMK, Toruń.
- [6] Bloksma A. H., 1972. Rheology of wheat flour doughs. *Journal of Texture Studies* 3, D.Reidel Publishing Comp. Dordrecht-Holland, 3-17.
- [7] Bloksma A. H. and Nieman W., 1975. The effect of temperature on some rheological properties of wheat flour doughs. *Journal of Textures Studies* 6, D. Reidel Publishing Company, Dordrecht-Holland, 343-361.
- [8] Bloksma A. H., 1990. Dough structure, dough rheology and baking quality. *Cereal Foods World* 35, 237-244.
- [9] Bushuk W., 1985. Rheology: theory and applications to wheat flour dough. In *rheology of wheat products*. American Associatin of Cereal Chemists, H.Faridi (ed.), St. Paul, MN. USA, 1-26.
- [10] Connelly R. K. and Kokini J. L., 2001. Analysis of mixing in a model dough mixer using numerical simulation with particle tracking. *Proceedings of the Seventh Conference of Food Engr. A Topical Conference of the AIChE Annual Meeting, Reno*, 579-585.
- [11] Chwarścianek F., 1972. Dzielarko-formierka bułek drobnych typ GDN-4000 oraz GDN-4004. Dokumentacja konstrukcyjna, OBR MiUPZP Bydgoszcz.
- [12] Chwarścianek F., 2000. Obliczanie przepływu płynu nienewtonowskiego w kanałach osiowo-symetrycznych. IX Konf. N-T BEMS 2000. *Zeszyty Naukowe Politechniki Opolskiej. Mechanika* 61(256), 55-56.
- [13] Chwarścianek F., 2002. Technika pomiaru wybranych właściwości reologicznych ciasta. X Konf. N-T BEMS 2002, Lublin, 33.

- [14] Chwarścianek F., 2002. Wyznaczenie całek równań ruchu płynu nienuwtonowskiego metodą przybliżeń całkowych. Zesz. Nauk. ATR w Bydgoszcz, Mechanika 53, 31-41.
- [15] Chwarścianek F., 2004. Analytic models of polymer flow in extrusion head channels. Archiwum Nauki o Materiałach, 2(25), PAN Warszawa, 133-160.
- [16] Chwarścianek F., 2004. Kinematic model for forming dough into spherical pieces. Archiwum Budowy Maszyn, 4(LI), PAN Warszawa, 533-563.
- [17] Chwarścianek F., 2005. Model mechaniczny formowania kształtek walcowych z ciasta. Postępy Techniki Przemysłu Spożywczego 2, Warszawa, 64-67.
- [18] Chwarścianek F., 2006. Modelowanie właściwości reologicznych wybranych rodzajów ciast. (Cz. I i Cz. II), XI Konferencja N-T „Żywnienie Człowieka-Inżynieria Maszyn, Bydgoszcz, Wyd. Inżynieria i Aparatura Chemiczna 1-2, Gliwice, 21-25.
- [19] Chwarścianek F., 2006. Rheological properties of dough. Archiwum Budowy Maszyn 2(LIII), PAN, Warszawa, 123-151.
- [20] Clark J. P., 1978. Dough rheology in extrusion cooking, Food Technology 7, 73-76.
- [21] Faridi H., Faubion J. M., 1989. Dough rheology and baked product texture. AVI, New York.
- [22] Fergusson J., Kembłowski Z., 1995. Reologia stosowana płynów. Wyd. Markus, Łódź.
- [23] Flizikowski J., 2002. Rozprawa o konstrukcji. Wyd. ITE Radom.
- [24] Fu, J, S. J. Mulvaney and C. Cohen., 1997. Effect of Added Fat on the Rheological Properties of Wheat Flour Doughs. Cereal Chemistry 74, 304-311.
- [25] Gąsiorowski H., 1967. Wpływ niektórych czynników fizycznych i chemicznych na reologiczne właściwości ciasta pszenne. Roczniki WSR Poznań – XXXV, 3-38.
- [26] Guter R. S., Owczyński B. W., 1967. Matematyczne opracowywanie wyników doświadczeń. PWN Warszawa.
- [27] Hejft R., 2002. Ciśnieniowa aglomeracja materiałów roślinnych. Politech. Białostocka, Wyd. ITE Radom.
- [28] Heldman D. R. and Lund-Eds D. B., 1992. Handbook of food engineering. New York, Marcel Dekker Inc.
- [29] Hibberd G. E., Parker N. S., 1975. Measurement of fundamental rheological properties of wheat flour doughs. Cereal Chemistry 52, 1.
- [30] Jakubczyk T. i Haber T., 1981. Analiza zbóż i przetworów zbożowych. Skrypt SGGW Akad. Rolnicza, Warszawa.
- [31] Kembłowski Z., Duda J., 1972. Matematyczne modele lepkości uogólnionych płynów nienuwtonowskich. Zesz. Nauk. Chemia 26, Politech. Łódzka, 35-51.

- [32] Kembłowski Z., Kaczmarczyk A., 1975. Matematyczne modele reologiczne nieliniowych płynów plastycznolepkich. *Inżynieria Chemiczna* 2, 283-299.
- [33] Kisiel I., 1987. *Reologia*. Wyd. Politech. Wrocławskiej.
- [34] Kłosowski T., 1970. *Zarys technologii przetwórstwa spożywczego*. WNT Warszawa.
- [35] Kołodziej J. A., 2001. Zastosowanie metody kollokacji brzegowej w zagadnieniach mechaniki. Wyd. Politech. Poznańskiej.
- [36] Kornilew I. B., Masłow A. M., 1975. Wlijanije wężności i skorosti deformacji na wężkost pszenicznego testa. *Piszczewaja Technologija* 6, 113-115.
- [37] Matsumoto H., 1973. Rheology of yeasted dough. *The Bakers Digest* 47(5), 40-42.
- [38] Matsumoto H., Ono H., Mita T., 1974. Relaxation of pressure in dough. *Cereal Chem.* 51, 758.
- [39] Ostrowska-Maciejewska J., 1994. *Mechanika ciał odkształcalnych*. PWN Warszawa.
- [40] Piesiewicz H., Jakubczyk T., 1977. Próby matematycznej interpretacji zjawiska relaksacji naprężenia w cieście i glutenie. *Przemysł Spożywczy* 1(XXXI), 6-10.
- [41] Praca zbiorowa, 1973. *Ćwiczenia z technologii zbóż i strączkowych jadalnych*. Wyd. Akademii Rolniczej w Poznaniu.
- [42] Praca zbiorowa, red. Ambroziak Z., 1988. *Piekarstwo i ciastkarstwo*. WNT Warszawa.
- [43] Praca zbiorowa, red. Szydłowski H., 1974. *Teoria pomiarów*. PWN Warszawa.
- [44] Prihoda J., Hampl J. and Aimova H., 1973. Rheological measurement of wheat dough with cone plate rotating viscometer and Hoeppler consistometer. *Sciens Papers Inst. Chem. Technology* E37, Prague, 35.
- [45] Prosnak W. J., 1970. *Mechanika płynów*. PWN Warszawa.
- [46] Rasper V. F., 1975. Dough rheology at large deformation in simple tensile mode. *Cereal Chemistry* 52, 24.
- [47] Reński A., 1963. *Technologia piekarstwa Cz. I i II*. Wyd. Przemysłu Lekkiego i Spożywczego, Warszawa.
- [48] Rutkowska J., Neryng A., 2002. Właściwości reologiczne półproduktów ciastkarskich i ich wpływ na jakość wyrobu finalnego. *Acta Scientiarum Polonorum, Technica Agraria* 1(2), 43 - 50.
- [49] Rutkowska J., 2000. Rheological and chemical properties raw materials, dough rheology its relationship to quality baked products. First European PhD Forum in Food Science, Ghent University, Belgium.
- [50] Sadkiewicz K., Sadkiewicz J., 1998. *Urządzenia pomiarowo-badawcze dla przetwórstwa zbożowo-mącznego*. Wyd. Uczeln. ATR Bydgoszcz.
- [51] Schofield R. K., Scott Blair G. W., The relationship between viscosity, elasticity and plastic strength of a soft material as illustrated by some me-

- chanical properties of flour dough. 1932. I, Proceedings of the Royal Society, London, A138, 707-719; 1933. II, Proceedings of the Royal Society, London, A139, 557-566; 1933. III, Proceedings of the Royal Society, London, A141, 72-85.
- [52] Scott Blair G. W., 1968. Rheology and structure of foodstuffs. S. C. I. Monograph 27, London.
- [53] Sokołow A. J., 1960. Osnovy razczjota i konstruirowanija maszin i apparatow pischczewych proizwodstw. Pischczepromizdat, Moskwa.
- [54] Stankiewicz A., 2003. Algorytm identyfikacji ciągłego spektrum czasów relaksacji biologicznych materiałów lepkosprężystych.. Acta Sci. Pol. Techn. Agr. 2(2), 77 - 91.
- [55] Stupnicki R., 2000. Biometria krótki zarys. Wyd. Margos, Warszawa.
- [56] Szulman Z. P., Bajkow W. I., 1979. Reodinamika i ciepłomassobmien w plienocznych teczienijach. Nauka i Tiechnika, Minsk.
- [57] Średniawa B., 1977. Hydrodynamika i teoria sprężystości. PWN Warszawa.
- [58] Tschoegl N. W., Rinde J. A., Smith T. L., 1970. Rheological properties of wheat flour doughs, I-Method for determining the large deformation and rupture properties in simple tension. J. Sci. Fd Agric.2(21), 65 - 70.
- [59] Walicka A., 2002. Reodynamika przepływu płynów nienewtonowskich w kanałach prostych i zakrzywionych. Uniwersytet Zielonogórski, Redakcja Wydawnictw N-T, Zielona Góra.
- [60] Walicki E., 1977. Ruch płynów lepkich w szczelinach wzdłużnych łożysk ślizgowych. Zesz. Nauk. ATR w Bydgoszczy, Mechanika 50.
- [61] Walicki E., Walicka A., 1998. Mathematical modelling of some biological bearings-Smart Materials and Structures. Proc. 4 th European and 2nd MiMR Conference, Harrogate, UK, 519-525.
- [62] Weiner W., Lipowiecka G., 1996. Związek stanu reologicznego ciasta z zasadami konstruowania maszyn piekarskich na przykładzie konstrukcji dzielarki do ciasta. VII Konf. N-T Budowa i Eksploatacja Maszyn w Przemysle Spozywczym, Bydgoszcz, 25-29.
- [63] Wierzbicka A., 2005. Modelowanie fizycznych cech nadziewanych produktów spożywczych w zmiennych warunkach wytłaczania. Inżynieria Rolnicza R. 9, nr 5, Seria Rozprawy Habilitacyjne 16, Wydawn. Polskie Towarzystwo Inżynierii Rolniczej, Kraków.
- [64] Zahorski S., 1978. Mechanika przepływów cieczy lepkosprężystych. PWN Warszawa.
- [65] Zajcew N. W., 1963. Tiechnologiczieskoje oborudowanije chliebozawodow. Pischczepromizdat, Moskwa.
- [66] Instrukcja obsługi Rheo-Viskometer nach Hoeppler.

## **PROJEKTOWANIE I PODSTAWY TEORII FORMOWANIA KSZTAŁTEK KULISTYCH Z CIASTA**

### Streszczenie

W procesie wytwarzania pieczywa jedną z ważniejszych operacji technologicznych jest nadawanie kształtu kęsom ciasta w wyniku formowania. Nadany kształt (po ewentualnych dodatkowych czynnościach) jest następnie utrwalany podczas procesu wypieku w piecu piekarskim. Formowanie kęsów ciasta, zwłaszcza ze względu na rozmiary ilościowe produkcji pieczywa, odbywa się zwykle maszynowo. Wydajność maszyn formujących powinna być taka, aby w czasie ok. 30 min. podzielić i uformować w odpowiednie kęsy całą wytworzoną masę ciasta, nawet kilkaset kilogramów. Na operację formowania mają wpływ właściwości fizyko-chemiczne ciasta oraz cechy konstrukcyjno--eksploatacyjne maszyny.

Dla określenia modelu właściwości (reologicznych) ciasta wykonano stosowne badania eksperymentalne, w wyniku których dla różnych rodzajów badanych ciast wyznaczono odpowiednie zależności matematyczne, modelujące właściwości reologiczne ciasta. Następnie dla czasu ograniczonego do czasu odpowiadającego przydatności technologicznej ciasta, określono zależność modelującą te właściwości. Otrzymane wyrażenie modelowe formalnie jest podobne do znanej zależności Herschela-Bulkleya, należącej do grupy modeli potęgowych. Modele te są bardzo przydatne i dogodne w opisie zachowania się materiałów charakteryzowanych tymi modelami.

Opierając się na analizie kinematyczno-dynamicznej procesu formowania kęsów ciasta w kształtki kuliste opracowano oryginalną konfigurację geometryczną pozwalającą na opis operacji kulistego formowania kęsów ciasta. W wyniku przeprowadzonej analizy formowania w ograniczonej przestrzeni formującej, w komorze roboczej, dokonano modelowego opisu kinematyki formowania w komorze roboczej oraz w tzw. układzie otwartym, pomiędzy dwiema płytami, dolną ruchomą a górną nieruchomą.

Wykorzystując modelową zależność właściwości ciasta oraz modelowy opis kinematyki formowania, sformułowano układ równań opisujących we współrzędnych sferycznych formowanie kęsów ciasta w kształtki kuliste.

Po wprowadzeniu do równań odpowiednich dwustopniowych uproszczeń podjęto próbę analitycznego rozwiązania równań i zaproponowano algorytm dla numerycznego rozwiązywania. Do poszukiwanych wielkości mających decydujący wpływ na przebieg formowania należą:

- składowe prędkości formowania,
- składowe występujących naprężeń.

W podsumowaniu omówiono otrzymane rezultaty, podkreślając uzyskanie potwierdzenia założonej tezy i przyjętych hipotez badawczych. Wskazano na możliwość aplikacji rezultatów w projektowaniu maszyn formujących w praktyce przemysłowej. Niniejsza praca w istotnym stopniu poszerza teorię formowania kęsów ciasta w kształtki kuliste, stwarzając ponadto możliwość przeniesienia zastosowanego ujęcia zagadnienia na opis formowania innych kształtek, np. płaskich i walcowych.

## **DESIGNING AND FUNDAMENTALS OF THE THEORY OF FORMING DOUGH PIECES INTO SPHERICAL FORMS**

### Summary

One of the most significant technological operations in the bread making process is giving shape to dough pieces through forming. The shape given (after additional activities, if any) is then preserved in the baking process in the baking oven. Mainly due to the scale of bread production, machines usually carry out the formation of dough pieces. The capacity of forming machinery should be sufficient enough to allow dividing and forming the required dough pieces within approx. 30 minutes out of the whole mass of a few hundred kilograms. The physicochemical properties of the dough as well as the constructional and operational features of the machine affect the forming operation. Applicable experimental studies were carried out in order to determine the model of rheological properties of dough. They allowed determining mathematical relationships of modeling rheological properties of dough for various dough types. Similarly a relationship modeling these properties was determined for the period of time corresponding to that of the technological dough usefulness. The model expression is formally similar to the well-known Herschel-Bulkley relationship, representing the group of power models. Such models are very useful and convenient while describing the behavior of materials they describe. Based on the kinematic and dynamic analysis of the process of forming dough pieces into spherical forms, an original geometrical configuration was determined allowing a description of the operation of forming dough pieces into spherical forms. Having analyzed the process of formation carried out within a limited forming space, the working chamber, a model description was produced for the kinematics of forming in the working chamber and the so-called open system between two plates – the bottom one moving and the upper one being fixed. With the model relationship for dough properties and the model description of the forming kinematics, a system of equations was developed which, with spherical coordinates, describes the formation of dough pieces into spherical forms.

After applying suitable two-step reductions to the equations, an attempt to solve the equations analytically was made and an algorithm for numerical solution was suggested. The required quantities determining the course of forming are:

- formation rate components,
- stress components.

The conclusions discuss the results, emphasizing the confirmation of the thesis and working hypotheses. It is possible to apply the results to industrial



practice of designing forming machinery. This paper develops the theory of formation of dough pieces into spherical forms considerably, also allowing for possible further applications of this study to the description of forming other pieces, e.g. flat or cylindrical.