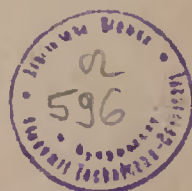


AKADEMIA TECHNICZNO-ROLNICZA  
IM. JANA I JĘDRZEJA ŚNIADECKICH  
W BYDGOSZCZY

ZESZYTY NAUKOWE NR 134

# BUDOWNICTWO 23



BYDGOSZCZ - 1987



AKADEMIA TECHNICZNO-ROLNICZA  
IM. JANA I JĘDRZEJA ŚNIADECKICH  
W BYDGOSZCZY

ZESZYTY NAUKOWE NR 134

# BUDOWNICTWO 23



BYDGOSZCZ - 1987

**PRZEWODNICZĄCY KOMITETU REDAKCYJNEGO**  
doc. dr hab. Juliusz Skonieczny

**REDAKTOR NAUKOWY**  
dr Jan Lorkowski

**OPRACOWANIE REDAKCYJNE I TECHNICZNE**  
mgr Halina Koziolkiewicz, Zbigniew Gackowski

Wydano za zgodą Rektora  
Akademii Techniczno-Rolniczej  
w Bydgoszczy

ISSN 0208-6379

**WYDAWNICTWO UCZELNIANE AKADEMII TECHNICZNO-ROLNICZEJ  
W BYDGOSZCZY**

---

Wyd. I. Nakład 100+50. Ark. wyd. 5,1, ark. druk. 5,5. Papier drukowy kl. V, 71 g. 70 × 100  
Oddano do druku 1987.05.28. Druk ukończono w lipcu 1987  
MNiSzW Cena 115 zł  
Uczelniany Zakład Małej Poligrafii ATR  
Zamówienie nr 212/87. P-8

*Nr inw P. 124.192*

## SPIS TREŚCI

str.

1. Andrzej Dylla - Zastosowanie metody elementów skończonych w zadaniach przewodzenia ciepła .....	5
2. Andrzej Dylla - Wyznaczenie rozkładu temperatur z użyciem izoparametrycznego prostokąta skończonego .....	17
3. Andrzej Dylla - Uniwersalny program komputerowy do badania pola temperatur w złączu ściany zewnętrznej z balkonem .....	27
4. Maciej Kordian Kumor - Ścisłość cyklicznie zamrażanego iżu plicieńskiego .....	37
5. Jan Klugiewicz - Charakterystyki hydrauliczne kanałów doprowadzających wodę do przepompowni polderowych .....	53
6. Jan Klugiewicz - Analiza hydrauliczna kanałów polderowych dla warunków nieustalonego ruchu wody .....	63
7. Jan Klugiewicz - Charakterystyki pomp wirowych przepompowni polderowych .....	71
8. Jan Klugiewicz - Współpraca kanałów z przepompowniami polderowymi .....	77



Andrzej Dylla

ZASTOSOWANIE METODY ELEMENTÓW SKOŃCZONYCH  
W ZADANIACH PRZEWODZENIA CIEPŁA

W artykule przedstawiono wyniki zastosowania ogólnej metody elementów skończonych w rozwiązaniach zadań przewodzenia ciepła w złączach przegród budowlanych.

1. WARIACYJNE PODSTAWY METODY ELEMENTÓW SKOŃCZONYCH

Metoda elementów skończonych zakłada w całym badanym obszarze ważność wariacyjnej zasady ekstremalnej. W zagadnieniach przewodzenia ciepła rozkład temperatury powinien spełniać postulat minimalnego natężenia produkcji entropii w stanie ustalonym.

Produkcję entropii w określonej objętości obszaru  $v$  wyraża całka:

$$P = \int_v \delta \, dv = \int_v X_q J_q \, dv = \int_v \frac{\lambda}{T^2} (\nabla T)^2 \, dv \quad (1)$$

gdzie źródło entropii  $\delta$  zastąpiono wyrażeniem  $\frac{\lambda}{T^2} (\nabla T)^2$  oznaczającym iloczyn bodźca termicznego  $X_q = \nabla \left(\frac{1}{T}\right)$  i skoniugowanego z nim przepływu  $J_q = q$ .

Warunek minimalizacji określony jest znikaniem pierwszej wariacji  $P$ . Dla stanów bliskich ustalonemu iloraz  $\lambda/T^2$  zależy tylko od współrzędnych i nie podlega wariowaniu. Wobec tego otrzymuje się równanie minimalizujące:

$$\delta P \approx \delta \int_v (\nabla T)^2 \, dv = 0 \quad (2)$$

w którym pod całką znajduje się iloczyn skalarny dwóch wektorów temperatury o składowych:

$$\nabla T = \left( \frac{\partial T}{\partial x'}, \frac{\partial T}{\partial y}, \frac{\partial T}{\partial z} \right) \quad (3)$$

a wariowaniu podlega wyrażenie:

$$\bar{P} = \int_V \left[ \left( \frac{\partial T}{\partial x} \right)^2 + \left( \frac{\partial T}{\partial y} \right)^2 + \left( \frac{\partial T}{\partial z} \right)^2 \right] dv \quad (4)$$

Wariacyjne sformułowanie zagadnienia przewodzenia ciepła wymaga znalezienia odpowiedniego kształtu funkcjonału  $J [T]$ , którego minimalizacja następuje dla określonej funkcji  $T(x, y, z)$ , zwanej ekstremalą funkcjonału. Warunkiem koniecznym istnienia ekstremum funkcjonału powinno być spełnienie odpowiedniego równania Eulera, równoważnego w tym przypadku klasycznemu równaniu Laplace'a z odpowiednimi warunkami brzegowymi.

Kształt funkcjonału, tożsamy z wyrażeniem (4), założono a priori w postaci [1], [2]:

$$J = \int_V F \left( \frac{\partial T}{\partial x}, \frac{\partial T}{\partial y}, \frac{\partial T}{\partial z} \right) dv + \int_C G(T) ds = \frac{1}{2} \iiint_V \left[ \lambda_x \left( \frac{\partial T}{\partial x} \right)^2 + \lambda_y \left( \frac{\partial T}{\partial y} \right)^2 + \lambda_z \left( \frac{\partial T}{\partial z} \right)^2 \right] dx dy dz + \frac{1}{2} \iint_C \alpha (T^2 - 2 T_p T) dx dy \quad (5)$$

Przyjmując uproszczenia w zapisach oraz zakładając izotropowość materiałów obszaru  $\lambda_x = \lambda_y = \lambda_z = \lambda$  otrzymuje się:

$$J = \int_V \frac{\lambda}{2} (T_x^2 + T_y^2 + T_z^2) dv + \int_C \frac{\alpha}{2} (T^2 - 2 T_p T) ds \quad (6)$$

gdzie:

$T_x = \partial T / \partial x$ ,  $T_y = \partial T / \partial y$ ,  $T_z = \partial T / \partial z$  - gradienty składowych strumienia ciepła wzdłuż osi  $x, y, z, K/m$ ,

$T_p$  - temperatura ośrodka graniczącego z przegrodą,  $^{\circ}C$ ,

$\lambda$  - współczynnik przewodności cieplnej materiału przegrody,  $W/(m^2 \cdot K)$

Funkcjonał  $J [T]$  określa się na zbiorze funkcji trzech zmiennych niezależnych  $T(x, y, z)$  spełniających następujące warunki brzegowe:

1/ pierwszego rodzaju, przez zadanie na części brzegu wartości:

$$T(w) = f(w) \text{ dla } w \in s_1,$$

gdzie  $s_1$  jest częścią powierzchni ograniczającej trójwymiarowy obszar  $v$ , a  $f$  jest z góry daną funkcją gładką na powierzchni  $s_1$ ,

2/ trzeciego rodzaju na tej części brzegu  $c$ , na której ważny jest warunek Fouriera:

$$-\lambda \left( \frac{\partial T}{\partial x} l_x + \frac{\partial T}{\partial y} l_y + \frac{\partial T}{\partial z} l_z \right) = \alpha (T - T_p) \quad (7)$$

gdzie:

$l_x, l_y, l_z$  są cosinusami kierunkowymi normalnej zewnętrznej do brzegu  $c$



Drugiej całki w wyrażeniu (6) używa się tylko dla tej części brzegu, na której sformułowano warunek (7), a więc na brzegu  $s_1$  druga całka w wyrażeniu (6) równa się zeru.

## 2. MINIMALIZACJA FUNKCJONAŁU

Korzystając z twierdzenia o wariacji funkcji  $F$  i  $G$  zależnych od jednej zmiennej  $T$  lub jej pochodnych, można ogólnie zapisać:

$$\delta J = \int_V \left( \frac{\partial F}{\partial T} \delta T + \frac{\partial F}{\partial T_x} \delta T_x + \frac{\partial F}{\partial T_y} \delta T_y + \frac{\partial F}{\partial T_z} \delta T_z \right) dv + \int_C \left( \frac{\partial G}{\partial T} \delta T \right) ds \quad (8)$$

Ponieważ wariacja pochodnej funkcji jest równa pochodnej wariacji:

$$\delta T_x = \delta \left( \frac{\partial T}{\partial x} \right) = \frac{\partial}{\partial x} (\delta T), \text{ itd}, \quad (9)$$

oraz wykorzystując twierdzenie Gaussa - Ostrogradskiego:

$$\int_V \frac{\partial F}{\partial T_x} \frac{\partial}{\partial x} (\delta T) dv = \int_S \frac{\partial F}{\partial T_x} \cdot \delta T \cdot l_x ds - \int_S \frac{\partial}{\partial x} \left( \frac{\partial F}{\partial T_x} \right) \delta T dv, \text{ itd} \quad (10)$$

można, wykonując podobne operacje dla pozostałych wyrazów otrzymać ostatecznie punkt stacjonarny wariacji:

$$\begin{aligned} \delta J = & \int_V \delta T \left[ \frac{\partial F}{\partial T} - \frac{\partial}{\partial x} \left( \frac{\partial F}{\partial T_x} \right) - \frac{\partial}{\partial y} \left( \frac{\partial F}{\partial T_y} \right) - \frac{\partial}{\partial z} \left( \frac{\partial F}{\partial T_z} \right) \right] dv + \\ & + \int_C \delta T \left( \frac{\partial G}{\partial T} + l_x \frac{\partial F}{\partial T_x} + l_y \frac{\partial F}{\partial T_y} + l_z \frac{\partial F}{\partial T_z} \right) ds = 0 \end{aligned} \quad (11)$$

Drugą całkę oblicza się po części brzegu  $c$ , dla której obowiązuje warunek brzegowy trzeciego rodzaju. Na pozostałej części brzegu przy zadanej wartości  $T$  - warunek brzegowy pierwszego rodzaju - wariacja  $\delta T = 0$  i druga całka znika.

Równanie minimalizujące funkcjonal  $J$  (11) obowiązuje dla każdej dowolnej wariacji  $\delta T$ , stąd otrzymuje się jednocześnie równanie Eulera:

$$\frac{\partial F}{\partial T} - \frac{\partial}{\partial x} \left( \frac{\partial F}{\partial T_x} \right) - \frac{\partial}{\partial y} \left( \frac{\partial F}{\partial T_y} \right) - \frac{\partial}{\partial z} \left( \frac{\partial F}{\partial T_z} \right) \quad (12)$$

oraz równanie:

$$l_x \frac{\partial F}{\partial T_x} + l_y \frac{\partial F}{\partial T_y} + l_z \frac{\partial F}{\partial T_z} + \frac{\partial G}{\partial T} = 0 \quad (13)$$

Spełnienie tych dwóch równań jest równoznaczne z minimalizacją funkcjonału J.

Podstawienie w równaniach (12) i (13) wartości funkcjonału przyjętej a priori formułą (6) prowadzi do następujących rezultatów:

$$F = \frac{\lambda}{2} (T_x^2 + T_y^2 + T_z^2), \quad G = \frac{\alpha}{2} (T^2 - 2 T_p T)$$

$$\frac{\partial F}{\partial T} = 0, \quad \frac{\partial F}{\partial T_x} = \lambda T_x, \quad \frac{\partial F}{\partial T_y} = \lambda T_y, \quad \frac{\partial F}{\partial T_z} = \lambda T_z$$

$$\frac{\partial G}{\partial T} = \alpha(T - T_p), \quad \frac{\partial}{\partial x} \left( \frac{\partial F}{\partial T_x} \right) = \lambda \frac{\partial^2 T}{\partial x^2} = \lambda T_x^2$$

$$\frac{\partial}{\partial y} \left( \frac{\partial F}{\partial T_y} \right) = \lambda T_y^2, \quad \frac{\partial}{\partial z} \left( \frac{\partial F}{\partial T_z} \right) = \lambda T_z^2$$

Ostatecznie równanie Eulera (12) przekształca się w równanie Laplace'a:

$$T_x^2 + T_y^2 + T_z^2 = \nabla^2 T = 0 \quad (14)$$

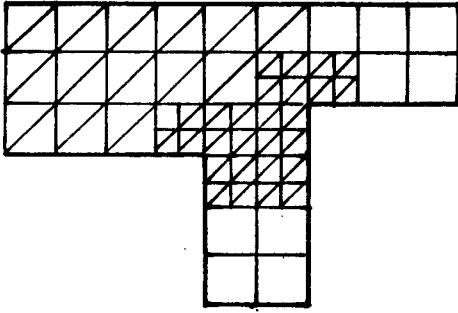
natomiast równanie (13) przyjmuje postać warunku brzegowego trzeciego rodzaju:

$$l_x \frac{\partial T}{\partial x} + l_y \frac{\partial T}{\partial y} + l_z \frac{\partial T}{\partial z} = - \frac{\alpha}{\lambda} (T - T_p)$$

Przeprowadzone postępowanie wykazało więc, że założona postać funkcjonału (6) spełnia warunki minimalizacji.

### 3. ALGORYTM WYZNACZANIA PÓL TEMPERATUROWYCH

Koncepcja metody realizuje się w wyniku następującego działania: Obszar przewodzenia ciepła zostaje podzielony na elementy skończone - najczęściej czworokątne lub prostopadłościowe w przestrzeni trójwymiarowej, trójkątne lub czworokątne w obszarach płaskich /rys.1/.



Rys.1. Obszar złącza podzielony na trójkątne i prostokątne elementy skończone

Temperatura, której poszukujemy, będzie w każdym elemencie  $e$  o węzłach  $i, j, \dots$  opisana równaniem:

$$T = [N]\{T\}^e = N_i T_i + N_j T_j + \dots \quad (15)$$

w którym:

$\{T\}^e$  jest wektorem kolumnowym temperatur  $T_i, T_j, \dots$  w węzłach elementu  $i, j, \dots$ ,

$[N]$  jest macierzą funkcji kształtu  $N_i, N_j, \dots$ , zależnych wyłącznie od współrzędnych węzłowych.

Minimalizacja funkcjonału  $J [T]$  określonego formułą (6), względem wszystkich parametrów całego obszaru  $\{T\}$ , wymaga napisania układu  $n$  równań :

$$\frac{\partial J}{\partial \{T\}} = \begin{pmatrix} \frac{\partial J}{\partial T_1} \\ \frac{\partial J}{\partial T_2} \\ \vdots \\ \frac{\partial J}{\partial T_n} \end{pmatrix} = 0 \quad (16)$$

gdzie  $n$  oznacza ilość węzłów badanego obszaru.

Każde z typowych równań (16) można przedstawić jako sumę rozciągniętą na wszystkie elementy  $e$  obszaru:

$$\frac{\partial J}{\partial T_n} = \sum_e \frac{\partial J^e}{\partial T_n} \quad (17)$$

Zapis (17) ilustruje regułę budowania całego minimalizującego układu równań, stanowiącą podstawową cechę wszystkich obliczeń w metodzie elementów

skończonych.

Minimalizacja funkcjonału dla określonego elementu  $e$ , względem parametrów tego elementu  $\{T\}^e$ , polega na zebraniu układu równań postaci:

$$\frac{\partial J^e}{\partial \{T\}^e} = [h]^e \{T\}^e + \{d\}^e \quad (18)$$

gdzie:

$[h]^e$  i  $\{d\}^e$  są macierzami pewnych stałych elementu  $e$ , wynikających z kształtu funkcjonału  $J$ .

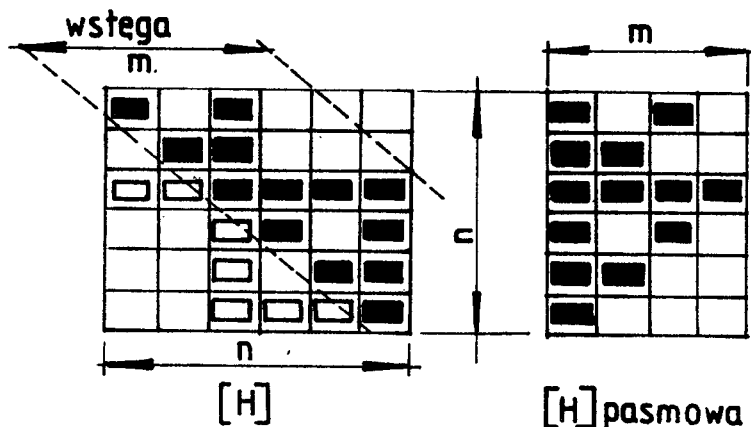
Przejście od równań typu (18), sformułowanych dla jednego elementu skończonego  $e$ , do  $n$  równań obejmujących cały badany obszar (16) wymaga zapisu:

$$\frac{\partial J}{\partial T} = [H]\{T\} + \{D\} = 0 \quad (19)$$

w którym macierze stałych obszaru  $[H]$  i  $\{D\}$  powstają w wyniku sumowania odpowiednich wyrazów macierzy  $[h]^e$  i  $\{d\}^e$  rozciągniętego na wszystkie elementy skończone obszaru:

$$\begin{aligned} [H_{ij}] &= \sum_e [h_{ij}]^e \\ \{D_i\} &= \sum_e \{d_i\}^e \end{aligned} \quad (20)$$

Macierz  $[H]$  jest wymetryczna i kwadratowa o liczbie wierszy i kolumn równej ilości węzłów badanego obszaru  $n$ . Korzystając z tych właściwości można ją przekształcić w macierz pasmową  $m \times n$ , odrzucając przy tym znaczną część wyrazów zerowych /rys.2/. Zabieg ten pozwala na zwarte upako-



Rys.2. Macierz symetryczna i pasmowa

wanie w pamięci maszyny wyrazów na głównej przekątnej i na półszerokości pasma niezerowego  $m$ . W szeregu zastosowaniach praktycznych uzyskuje się w ten sposób istotną redukcję arytmetyki w rozwiązywaniu układu równań /nawet do 3% w porównaniu z macierzą wyjściową symetryczną/ [3].

Układ równań (19) można rozwiązywać bezpośrednio przy pomocy procesu eliminacji Gaussa lub jedną z metod iteracyjnych, najlepiej Gaussa-Seidla, łatwą w programowaniu na maszyny cyfrowe.

#### 4. TRÓJKĄTNE ELEMENTY SKONCZONE W DWUWYMIAROWYM POLU TEMPERATUR

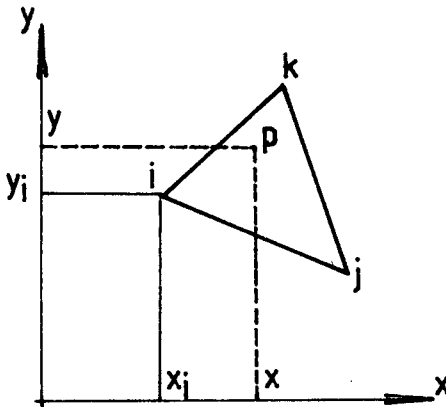
Aproksymacja funkcjonału powinna w miarę zagęszczania podziału obszaru elementami skończonymi prowadzić do zbieżnych wyników. Funkcje  $F$  i  $G$  wyrażone przy pomocy funkcji kształtu  $N$  muszą pozostawać ciągłe i jednoznaczne. Wymaga to spełnienia dwóch kryteriów zbieżności równocześnie :

Dobór funkcji kształtu  $[N]$  powinien zapewniać:

- 1/ uzyskanie każdej stałej wartości  $T$  lub jej pochodnych występujących w formule funkcjonału (5), (6), przy zmniejszaniu wymiaru elementu skończonego;
- 2/ ciągłość zarówno  $T(x,y,z)$ , jak i jej pochodnych o rząd niższych od występujących w (5), na powierzchniach styku elementów skończonych.

Słuszności tych ogólnych kryteriów dowodzi Zienkiewicz [3].

Rozpatrując dwuwymiarowy obszar przepływu ciepła, najprostszą postać funkcji kształtu  $N$  uzyskuje się przy podziale obszaru na trójkątne elementy skończone /rys.3/.



Rys.3. Trójkątny element skończony

Temperaturę dowolnego punktu  $p(x,y)$  w granicach elementu skończonego najlepiej wyraża wielomian liniowy:

$$T = \alpha_1 + \alpha_2 x + \alpha_3 y \quad (21)$$

którego stałe  $\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3$  można wyznaczyć z następujących równań

$$\begin{aligned} T_i &= \alpha_1 + \alpha_2 x_i + \alpha_3 y_i \\ T_j &= \alpha_1 + \alpha_2 x_j + \alpha_3 y_j \\ T_k &= \alpha_1 + \alpha_2 x_k + \alpha_3 y_k \end{aligned} \quad (22)$$

napisanych dla trzech węzłów trójkąta  $i, j, k$ .  
W rezultacie równanie (21) przyjmuje postać:

$$\begin{aligned} T = \frac{1}{2\Delta} & \left[ (a_i + b_i x + c_i y) T_i + (a_j + b_j x + c_j y) T_j + \right. \\ & \left. + (a_k + b_k x + c_k y) T_k \right] \end{aligned} \quad (23)$$

gdzie:

$$\begin{aligned} a_i &= x_j y_k - x_k y_j & a_j &= x_k y_i - x_i y_k \\ b_i &= y_{jk} = y_j - y_k & b_j &= y_{ki} = y_k - y_i \\ c_i &= x_{kj} = x_k - x_j & c_j &= x_{ik} = x_i - x_k \\ a_k &= x_i y_j - x_j y_i \\ b_k &= y_{ij} = y_i - y_j \\ c_k &= x_{ji} = x_j - x_i \end{aligned} \quad (24)$$

przy czym:

$$2\Delta = \det \begin{vmatrix} 1 & x_i & y_i \\ 1 & x_j & y_j \\ 1 & x_k & y_k \end{vmatrix} \quad (25)$$

a więc  $\Delta$  oznacza pole trójkąta  $ijk$ .

Uwzględniając zależność (15) uzyskuje się funkcje kształtu  $[N]$  zależne tylko od współrzędnych /punktu wewnętrznego oraz węzłów elementu/:

$$N_i = (a_i + b_i x + c_i y) / 2\Delta$$

$$N_j = (a_j + b_j x + c_j y) / 2\Delta$$

$$N_k = (a_k + b_k x + c_k y) / 2\Delta$$
(26)

Obliczone funkcje  $[N]$  spełniają automatycznie wymagane kryteria zbieżności, ponieważ zbudowana na nich funkcja  $T$  zachowuje ciągłość na granicach elementów, zmieniając się liniowo wzdłuż boków trójkąta  $ijk$ .

Szczegółowej minimalizacji funkcjonału  $J$  (6) w obszarze dwuwymiarowym, z dyskretnym podziałem trójkątnym, dokonuje się w oparciu o wzory (26)

Dla każdego węzła w elemencie trójkątnym  $e$  można napisać różniczkując (6):

$$\frac{\partial J^e}{\partial T_1} = \int_V \lambda \left\{ \frac{\partial T}{\partial x} \frac{\partial}{\partial T_1} \left( \frac{\partial T}{\partial x} \right) + \frac{\partial T}{\partial y} \frac{\partial}{\partial T_1} \left( \frac{\partial T}{\partial y} \right) \right\} dv + \int_c \left( T \frac{\partial T}{\partial T_1} - T_P \frac{\partial T}{\partial T_1} \right) ds$$
(27)

gdzie:

$v$  - oznacza badany obszar płaski,

$c$  - oznacza liniową długość brzegu lub części brzegu, na której panuje trzeci warunek brzegowy.

Ponieważ dla wektora wartości stałych w węzłach  $\{T\}^e$ :

$$\frac{\partial T}{\partial x} = \left[ \frac{\partial N_1}{\partial x}, \frac{\partial N_j}{\partial x}, \frac{\partial N_k}{\partial x} \right] \{T\}^e$$
(28)

a ponadto jest:

$$\frac{\partial}{\partial T_1} \left( \frac{\partial T}{\partial x} \right) = \frac{\partial N_1}{\partial x}, \quad \frac{\partial T}{\partial T_1} = N_1$$
(29)

oraz podobnie:

$$\frac{\partial T}{\partial y} = \left[ \frac{\partial N_1}{\partial y}, \frac{\partial N_j}{\partial y}, \frac{\partial N_k}{\partial y} \right] \{T\}^e$$

$$\frac{\partial}{\partial T_1} \left( \frac{\partial T}{\partial y} \right) = \frac{\partial N_1}{\partial y}$$

jest więc ostatecznie dla węzła  $i$  w elemencie  $e$ :

$$\frac{\partial J^e}{\partial T_i} = \lambda \int_V \left( \frac{\partial T}{\partial x} \frac{\partial N_i}{\partial x} + \frac{\partial T}{\partial y} \frac{\partial N_i}{\partial y} \right) dv +$$

$$+ \left( \alpha \int_C [N] N_i ds \right) \{T\}^e - \alpha \int_C T_P N_i ds \quad (30)$$

Korzystając z reguły sumowania charakterystycznej dla metody elementów skończonych, minimalizowany funkcjonał dla elementu  $e$  zapisuje się w postaci wzoru (18), gdzie:

$$[h]^e = \begin{bmatrix} h_{ii} & h_{ij} & h_{ik} \\ h_{ji} & h_{jj} & h_{jk} \\ h_{ki} & h_{kj} & h_{kk} \end{bmatrix} \quad (31)$$

$[h]^e$  oznacza macierz elementu  $e$ , której wyrazy otrzymuje się ze wzoru:

$$h_{ij} = \int_V \lambda \left( \frac{\partial N_i}{\partial x} \frac{\partial N_j}{\partial x} + \frac{\partial N_i}{\partial y} \frac{\partial N_j}{\partial y} \right) dx dy \quad (32)$$

Po wykorzystaniu (26) otrzymuje się:

$$[h]^e = \frac{\lambda}{4\Delta} \begin{bmatrix} b_i^2 + c_i^2 & b_i b_j + c_i c_j & b_i b_k + c_i c_k \\ & b_j^2 + c_j^2 & b_j b_k + c_j c_k \\ \text{symetria} & & b_k^2 + c_k^2 \end{bmatrix} \quad (33)$$

$\{d\}^e$  jest macierzą kolumnową występującą dla brzegu  $c$  z warunkiem trzeciego rodzaju (7), której wyrazy oblicza się ze wzoru :

$$d_i = \left( \int_C \alpha [N] N_i ds \right) \{T\}^e - \int_C \alpha T_P N_i ds \quad (34)$$

lub jego rozwinięcia:



$$d_i = \left( \int_C \alpha N_i, [N_i, N_j, N_k] ds \right) \begin{Bmatrix} T_i \\ T_j \\ T_k \end{Bmatrix} - \int_C \alpha T_i N_i ds =$$

$$= \alpha [T_i \int_C N_i^2 ds + T_j \int_C N_i^2 N_j ds + T_k \int_C N_i N_k ds - T_i \int_C N_i ds] \quad (35)$$

Dalszym etapem pracy jest zebranie układu równań minimalizujących dla całego rozpatrywanego obszaru płaskiego  $v$  według reguł podanych wzorami (19) i (20).

Rozwiązanie przedstawione wyżej, przy zagęszczaniu podziału, zmierzają do rozwiązania ścisłego, co praktycznie oznacza, że temperatury pola są obliczane z pewnym niedomiarem. Błąd może być znaleziony przez badanie zbieżności przy różnych krotnościach podziałowych.

Algorytm rozwiązywania zadań przewodnictwa ciepła zaprezentowany w niniejszym opracowaniu zilustrowano przykładami obliczeniowymi podanymi w [1].

Cenną zaletą metody elementów skończonych jest możliwość stosowania w poszczególnych miejscach rozważanego obszaru różnych gęstości podziałowych. Szczególnie przydatnym jest zagęszczenie podziału w miejscach większych gradientów temperatur /przepływów ciepła/ oraz przy powierzchni wewnętrznej przegrody w obszarach spodziewanych temperatur minimalnych /rys.1/.

#### LITERATURA

- [1] Dylla A.: Zarys metody elementów skończonych w fizyce budowli, XI Toruńska Krajowa Konferencja Naukowo-Techniczna PZITB. Toruń, czerwiec 1986
- [2] Wiśniewski S.: Wymiana ciepła. PWN, Warszawa 1979
- [3] Zienkiewicz O.C.: Metoda elementów skończonych. Arkady, Warszawa 1972

APPLICATION OF FINITE ELEMENTS METHOD IN SOLVING THERMAL CONDUCTION  
PROBLEMS

Summary

The paper presents the results of the application of the general method of finite elements for solving thermal conduction problems in joints of building screens.

ПРИМЕНЕНИЕ МЕТОДА КОНЕЧНЫХ ЭЛЕМЕНТОВ В ЗАДАНИЯХ ПРОВОДИМОСТИ ТЕПЛА

Резюме

В статье представлены результаты применения общего метода конечных элементов в решениях заданий проводимости тепла в соединениях строительных стен.

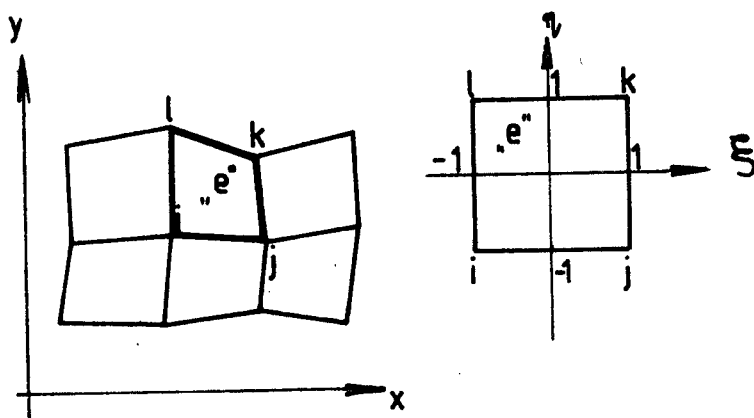
Andrzej Dylla

WYZNACZENIE ROZKŁADU TEMPERATUR Z UŻYCIEM  
IZOPARAMETRYCZNEGO PROSTOKĄTA SKOŃCZONEGO

Artykuł podaje wyniki własnych badań autora związanych z ustaleniem rozkładu temperatury w złączach przegród budowlanych z zastosowaniem charakterystycznego elementu skończonego - izoparametrycznego prostokąta. Jest kontynuacją treści zawartych w artykule autora [1].

1. ELEMENTY PROSTOKĄTNE RODZINY SERENDIPOWSKIEJ

Prostota prostokątnego kształtu elementu skończonego ułatwia przygotowanie danych i interpretację wyników. Elementy rzeczywiste wynikające z podziału realnie występujących obszarów obliczeniowych mogą preferować użycie prostokątów różnych wielkości, w granicznym przypadku krzywoliniowych /zbiorniki, powłoki, kopuły, elementy konstrukcyjne zakrzywione /. Te wszystkie elementy skończone należy przekształcić w znormalizowane kwadraty izoparametryczne o boku  $2 \times 2$  w układzie lokalnym  $\xi, \eta$  /rys.1/.



Rys.1. Przekształcenie dowolnego czworokąta "e" w znormalizowany kwadrat w układzie lokalnym  $\xi, \eta$

Wykonanie takiej transformacji umożliwia posłużenie się w dalszych obliczeniach gotowymi formułami funkcji kształtu, wyznaczonymi dla rodziny elemen-

tów prostokątnych. Znalazienie tych formuł nie było łatwe, wymagało przy-  
słowiowej pomysłowości księcia Serendipa /Horace Walpole, 1974 rok za  
[2]/, stąd ich nazwa "serendipowska" rodzina funkcji.

Kryteria zbieżności we współrzędnych znormalizowanych spełniają fun-  
kcje kształtu określone w węzłach narożnych elementu  $i, j, k, l$  formułą /rys.1/:

$$N_i = 0,25 (1 + \xi_1 \xi) (1 + \eta_1 \eta) \quad (1)$$

dla  $i = i, j, k, l$ .

Cztery funkcje kształtu  $[N]$  zdefiniowane dla węzłów elementu  $i, j, k, l$   
jednoznacznie określają zarówno geometrię elementu jak i zmienną  $T(\xi, \eta)$ .  
Funkcje te otrzymuje się z rozwinięcia wzoru (1):

$$\begin{aligned} N_i &= 0,25 (1 - \eta - \xi + \xi \eta) \\ N_j &= 0,25 (1 - \eta + \xi - \xi \eta) \\ N_k &= 0,25 (1 + \eta + \xi + \xi \eta) \\ N_l &= 0,25 (1 - \eta - \xi - \xi \eta) \end{aligned} \quad (2)$$

Łatwo uzyskać pochodne funkcji  $[N]$  względem współrzędnych układu  
znormalizowanego:

$$\frac{\partial N_i}{\partial \xi} = 0,25 (\eta - 1), \quad \frac{\partial N_j}{\partial \xi} = 0,25 (1 - \eta) \quad (3)$$

$$\frac{\partial N_i}{\partial \eta} = 0,25 (\xi - 1), \quad \frac{\partial N_j}{\partial \eta} = 0,25 (-1 - \xi), \text{ itd}$$

W obliczeniach maszynowych łatwiej posługiwać się potęgową postacią  
wielomianu [2]:

$$N_i(\xi, \eta) = q_{0i} + q_{1i}\xi + q_{2i}\eta + q_{3i}\xi\eta \quad (4)$$

którego współczynniki  $q_{ni}$  podano w tabeli 1.

Tabela 1

Współczynniki  $q_{ni}$ 

i	$q_{0i}$	$q_{1i}$	$q_{2i}$	$q_{3i}$
i	0,25	-0,25	-0,25	0,25
j	0,25	0,25	-0,25	-0,25
k	0,25	0,25	0,25	0,25
l	0,25	-0,25	0,25	-0,25

Pochodne funkcji  $[N]$  wyniosą:

$$\begin{aligned}\frac{\partial N_i}{\partial \xi} &= a_{1i} + a_{3i} \eta \\ \frac{\partial N_j}{\partial \eta} &= a_{2i} + a_{3i} \xi\end{aligned}\quad (5)$$

dla  $i = i, j, k, l$

### 3. TRANSFORMACJA UKŁADU WSPÓŁRZĘDNYCH

Każdy rzeczywisty czworokąt - element skończony  $i, j, k, l$ , o współrzędnych wyrażonych w układzie kartezjańskim i powierzchni  $v$ , przyjmuje postać kwadratu  $2 \times 2$  z początkiem lokalnego układu współrzędnych  $\xi, \eta$  w jego środku.

Odpowiednio dobrane funkcje kształtu  $[N]$  pozwalają na dokonanie w wygodny sposób transformacji współrzędnych między tymi układami. Można bowiem napisać:

$$x = N_i x_x + N_j x_j + N_k x_k + N_l x_l = [N] \begin{Bmatrix} x_i \\ x_j \\ x_k \\ x_l \end{Bmatrix} \quad (6)$$

$$y = N_i y_i + N_j y_j + N_k y_k + N_l y_l = [N] \begin{Bmatrix} y_i \\ y_j \\ y_k \\ y_l \end{Bmatrix}$$

gdzie  $[N]$  wyrażone są we współrzędnych lokalnych  $\xi, \eta$ . Pochodne funkcji złożonej wyniosą:

$$\frac{\partial x}{\partial \xi} = \frac{\partial x}{\partial N} \frac{\partial N}{\partial \xi} = \sum_{i,j,k,l} x_i \frac{\partial N_i}{\partial \xi} \quad (7)$$

$$\frac{\partial x}{\partial \eta} = \frac{\partial x}{\partial N} \frac{\partial N}{\partial \eta} = \sum_{i,j,k,l} x_i \frac{\partial N_i}{\partial \eta}$$

podobnie wyznacza się  $\frac{\partial y}{\partial \xi}$  i  $\frac{\partial y}{\partial \eta}$

Równocześnie, zgodnie z zasadami różniczkowania cząstkowego:

$$\frac{\partial N_i}{\partial \xi} = \frac{\partial N_i}{\partial x} \frac{\partial x}{\partial \xi} + \frac{\partial N_i}{\partial y} \frac{\partial y}{\partial \xi} \quad (8)$$

lub w postaci macierzowej:

$$\begin{pmatrix} \frac{\partial N_i}{\partial \xi} \\ \frac{\partial N_i}{\partial \eta} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{\partial x}{\partial \xi} & \frac{\partial y}{\partial \xi} \\ \frac{\partial x}{\partial \eta} & \frac{\partial y}{\partial \eta} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \frac{\partial N_i}{\partial x} \\ \frac{\partial N_i}{\partial y} \end{pmatrix} = [\bar{J}] \begin{pmatrix} \frac{\partial N_i}{\partial x} \\ \frac{\partial N_i}{\partial y} \end{pmatrix} \quad (9)$$

Odwroćenie macierzy Jakobiego  $[\bar{J}]$  pozwala na znalezienie pochodnych w układzie współrzędnych kartezjańskich  $x, y$ :

$$\begin{pmatrix} \frac{\partial N_i}{\partial x} \\ \frac{\partial N_i}{\partial y} \end{pmatrix} = [\bar{J}]^{-1} \begin{pmatrix} \frac{\partial N_i}{\partial \xi} \\ \frac{\partial N_i}{\partial \eta} \end{pmatrix} \quad (10)$$

Korzystając z zapisu (7), macierz Jakobiego można wyznaczyć następująco:

$$[\bar{J}] = \begin{bmatrix} \sum_{i,j,k,l} \frac{\partial N_i}{\partial \xi} x_i & \sum_{i,j,k,l} \frac{\partial N_i}{\partial \xi} y_i \\ \sum_{i,j,k,l} \frac{\partial N_i}{\partial \eta} x_i & \sum_{i,j,k,l} \frac{\partial N_i}{\partial \eta} y_i \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{\partial N_i}{\partial \xi} & \frac{\partial N_j}{\partial \xi} & \frac{\partial N_k}{\partial \xi} & \frac{\partial N_l}{\partial \xi} \\ \frac{\partial N_i}{\partial \eta} & \frac{\partial N_j}{\partial \eta} & \frac{\partial N_k}{\partial \eta} & \frac{\partial N_l}{\partial \eta} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_i & y_i \\ x_j & y_j \\ x_k & y_k \\ x_l & y_l \end{bmatrix} \quad (11)$$

Minimalizacja funkcjonału w dowolnym czworokącie skończonym e prowadzi do zapisu wyrażającego macierz kształtu elementu e:

$$[h]^e = \begin{bmatrix} h_{11} & h_{1j} & h_{1k} & h_{1l} \\ h_{j1} & h_{jj} & h_{jk} & h_{jl} \\ h_{k1} & h_{kj} & h_{kk} & h_{kl} \\ h_{l1} & h_{lj} & h_{lk} & h_{ll} \end{bmatrix} \quad (12)$$

wyrazy tej macierzy określa wzór:

$$h_{ij} = \iint_V \lambda \left( \frac{\partial N_i}{\partial x} \frac{\partial N_j}{\partial x} + \frac{\partial N_i}{\partial y} \frac{\partial N_j}{\partial y} \right) dx dy \quad (13)$$

Zastosowanie tych wzorów oraz formuły sumującej wyrazy macierzy globalnej badanego obszaru  $[H]$  wymaga przeprowadzenia dwóch transformacji [3].

Pierwszą z nich wyrażającą pochodne globalne /w układzie  $x, y$ / poprzez pochodne lokalne /w układzie  $\xi, \eta$ / definiują wzory (6)÷ (11). Drugą transformację zmiennych i obszaru, względem którego odbywa się całkowanie, wyraża standardowy proces określenia Jakobianu i zmiana granic całkowania. Jest więc:

$$dx dy = \det [\bar{J}] d\xi d\eta \quad (14)$$

gdzie  $\det [\bar{J}]$  jest wyznacznikiem macierzy Jakobiego.

Ogólnym rezultatem transformacji jest sprowadzenie wyrażenia (13) do całki o postaci:

$$h_{oj} = \int_{-1}^1 \int_{-1}^1 G(\xi, \eta) \det [\bar{J}] d\xi d\eta \quad (15)$$

Granice całkowania są proste ale postać wyrażenia  $G(\xi, \eta) \det [\bar{J}]$  jest zwykle skomplikowana i wymaga wtedy użycia metody całkowania numerycznego.

### 3. MINIMALIZACJA FUNKCJONAŁU

Praktyczne przeprowadzenie procesu minimalizacji obejmuje kroki:

- obliczenie wyrazów macierzy Jakobiego i jej wyznacznika (11):

$$\frac{\partial x}{\partial \xi} = \sum_1 x_1 \frac{\partial N_1}{\partial \xi} = x_1 \frac{\partial N_1}{\partial \xi} + x_j \frac{\partial N_j}{\partial \xi} + \dots = a_{11}$$

$$\frac{\partial y}{\partial \xi} = \sum_i y_i \frac{\partial N_i}{\partial \xi} = a_{12}, \quad \frac{\partial x}{\partial \eta} = \sum_i x_i \frac{\partial N_i}{\partial \eta} = a_{21}, \quad (16)$$

$$\frac{\partial y}{\partial \eta} = \sum_i y_i \frac{\partial N_i}{\partial \eta} = a_{22}$$

Macierz Jakobiego:

$$[\bar{J}] = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{vmatrix} \quad (17)$$

posiada wyznacznik:

$$\det [\bar{J}] = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{vmatrix} = a_{11}a_{22} - a_{21}a_{12} \quad (18)$$

- sformułowanie równań typu (8):

Dysponując wartościami wyrażeń  $\frac{\partial N_i}{\partial \xi} = b_{1i}$ ,  $\frac{\partial N_i}{\partial \eta} = b_{2i}$  można wyznaczyć niewiadome  $\frac{\partial N_i}{\partial x}$ ,  $\frac{\partial N_i}{\partial y}$  dla każdego węzła w prostokącie  $i, j, k, l$ , rozwiązując układ równań:

$$\begin{cases} a_{11} \frac{\partial N_i}{\partial x} + a_{12} \frac{\partial N_i}{\partial y} = b_{1i} \\ a_{21} \frac{\partial N_i}{\partial x} + a_{22} \frac{\partial N_i}{\partial y} = b_{2i} \end{cases} \quad (19)$$

Ństatecznie jest:

$$\frac{\partial N_i}{\partial x} = \frac{b_{1i} a_{22} - b_{2i} a_{12}}{\det [\bar{J}]} = \frac{b_{1i} a_{22} - b_{2i} a_{12}}{a_{11} a_{22} - a_{21} a_{12}} \quad (20)$$

$$\frac{\partial N_i}{\partial y} = \frac{b_{2i} a_{11} - b_{1i} a_{21}}{\det [\bar{J}]} = \frac{b_{2i} a_{11} - b_{1i} a_{21}}{a_{11} a_{22} - a_{21} a_{12}}$$

i podobnie:

$$\frac{\partial N_j}{\partial x} = \frac{b_{1j} a_{22} - b_{2j} a_{12}}{\det [\bar{J}]}, \quad \frac{\partial N_j}{\partial y} = \frac{b_{2j} a_{11} - b_{1j} a_{21}}{\det [\bar{J}]}, \quad \text{itd.}$$



Ostatecznie wyrazy macierzy kształtu elementu  $e$  przyjmą postać:

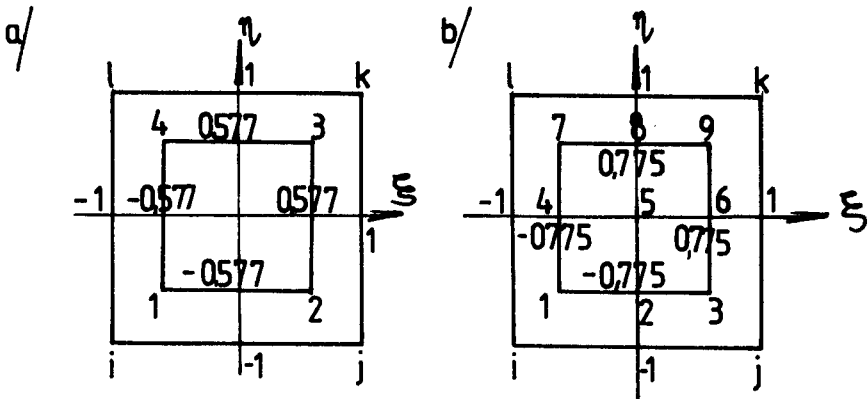
$$h_{ij} = \int_{-1}^1 \int_{-1}^1 \lambda \left( \frac{\partial N_i}{\partial x} \frac{\partial N_j}{\partial x} + \frac{\partial N_i}{\partial y} \frac{\partial N_j}{\partial y} \right) \det [\bar{J}] d\xi d\eta \quad (21)$$

Poszczególne funkcje podcałkowe można wyliczyć explicite ze wzorów typu (20)

#### 4. CAŁKOWANIE NUMERYCZNE

Do całkowania numerycznego stosuje się zazwyczaj kwadraturę Gaussa - Legendre'a, wymagającą najmniejszej ilości punktów całkowania, w których ustala się wartości funkcji podcałkowej, zapewniających najlepsze przybliżenie funkcji rzeczywistej  $h_{ij}$ .

Rozmieszczenie punktów całkowania Gaussa jest nierównomierne. Dla najczęściej stosowanych podziałów złożonych z  $n = 2$  lub  $n=3$  punktów odniesionych do poszczególnych osi układu  $\xi, \eta$  otrzymuje się siatkę  $2 \times 2 = 4$  lub  $3 \times 3 = 9$  punktów w obszarze prostokąta /rys.2/.



Rys.2. Punkty całkowania Gaussa dla  $n=2$  /a/ i  $n=3$  /b/ w obszarze elementu  $i, j, k, l$

W metodzie elementów skończonych rachunek polega na znalezieniu przybliżenia całkowanej funkcji  $G(\xi, \eta)$  za pomocą pewnej liczby wartości tej funkcji ustalonych dla przyjętych punktów całkowania. Rozwiązanie explicite uzyskuje się w postaci wielomianów Legendre'a, używając odpowiednich współczynników  $A$ , zmieniających się wraz ze zmianą ilości punktów całkowania. Ogólnie, szukana całka przekształca się w odpowiedni zbiór sum.

Oznaczając:

$$\lambda \left( \frac{\partial N_i}{\partial x} \frac{\partial N_j}{\partial x} + \frac{\partial N_i}{\partial y} \frac{\partial N_j}{\partial y} \right) \det [\bar{J}] = G(\xi, \eta)$$

otrzymujemy:

$$h_{ij} = \int_{-1}^1 \int_{-1}^1 G(\xi, \eta) d\xi d\eta \quad (22)$$

Obliczanie całki wewnętrznej, przy założeniu  $\eta = \text{const}$ , daje rezultat:

$$\int_{-1}^1 G(\xi, \eta) d\xi = \sum_{j=1}^n A_j G(\xi_j, \eta) = K(\eta) \quad (23)$$

Następnie oblicza się całkę zewnętrzną:

$$h_{ij} = \int_{-1}^1 K(\eta) d\eta = \sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^n A_i A_j G(\xi_j, \eta_i) \quad (24)$$

Wyrazy macierzy poszczególnych elementów  $h_{ij}$ , a następnie macierz globalną  $[H]$  obszaru otrzymuje się w ten sposób bezpośrednio.

Można udowodnić, że w dwuwymiarowym czworokącie, zastosowanie dwóch punktów Gaussa  $/n=2/$  wystarczy dla dokładnego scałkowania wyrażeń minimalizujących funkcjonal  $[3]$ .

Obliczenie całki (22) uprości się wtedy:

$$h_{ij} = \sum_{i=1}^2 \sum_{j=1}^2 G(\xi_j, \eta_i) = G(\xi_1, \eta_1) + G(\xi_2, \eta_1) + G(\xi_1, \eta_2) + G(\xi_2, \eta_2) \quad (25)$$

## 5. REPREZENTACJA WARUNKÓW BRZEGOWYCH TRZECIEGO RODZAJU

Zbliżony jest sposób znajdowania wyrazów macierzy kolumnowej  $\{d\}^e$  reprezentującej warunki brzegowe trzeciego rodzaju, występujące w badanym elemencie  $e$ .

Ogólny wzór obowiązujący w elemencie skończonym rozwija się dla czworokąta  $i, j, k, l$  następująco:

$$\begin{aligned}
 d_i &= (\alpha \int_C [N] N_i ds) \{T\}^e - \alpha \int_C T_p N_i ds = (\alpha \int_C [N_i, N_j, N_k, N_l] N_i ds) \begin{Bmatrix} T_i \\ T_j \\ T_k \\ T_l \end{Bmatrix} + \\
 &- \alpha T_p \int_C N_i ds = \alpha T_i \int_C N_i^2 ds + \alpha T_j \int_C N_i N_j ds + \alpha T_k \int_C N_i N_k ds + \\
 &+ \alpha T_l \int_C N_i N_l ds - \alpha T_p \int_C N_i ds \quad (26)
 \end{aligned}$$

Posługując się transponowanym czworokątem w układzie  $\xi, \eta$ , warunki trzeciego rodzaju mogą zostać określone na jednym z jego boków. Jeżeli jest to brzeg równoległy do osi  $\xi$  wtedy możliwe są dwa przypadki:

- warunki trzeciego rodzaju na brzegu i-j

$$\eta = -1, N_i = 0,5 (1 - \xi), N_j = 0,5 (1 + \xi), N_k = N_l = 0 \quad (27)$$

- warunki trzeciego rodzaju na brzegu k-l

$$\eta = 1, N_i = N_j = 0, N_k = 0,5 (1 + \xi), N_l = 0,5 (1 - \xi) \quad (28)$$

Podobnie na brzegu równoległym do osi  $\eta$ :

- warunki trzeciego rodzaju na brzegu i-1

$$\xi = -1, N_i = 0,5 (1 - \eta), N_l = 0,5 (1 + \eta), N_j = N_k = 0 \quad (29)$$

- warunki trzeciego rodzaju na brzegu j-k

$$\xi = 1, N_j = 0,5 (1 - \eta), N_k = 0,5 (1 + \eta), N_i = N_l = 0 \quad (30)$$

Każda z całek (26) ma postać ogólną:

$$\int_{c1} \bar{F}(\xi) dx \quad \text{lub} \quad \int_{c2} \bar{G}(\eta) dy \quad (31)$$

Całki powyższe transformuje się do obszaru  $2 \times 2$  we współrzędnych  $\xi, \eta$ . Transformacja polega na zmianie granic całkowania przy jednoczesnym pod - stawieniu zależności otrzymanych ze wzorów (7) i (16):

$$dx = \sum_i x_i \frac{\partial N_i}{\partial \xi} d\xi = a_{11} d\xi$$

$$dy = \sum_i y_i \frac{\partial N_i}{\partial \eta} d\eta = a_{22} d\eta$$
(32)

Ten rodzaj transformacji pozwala nadać całkom (31) postać dogodną do całkowania numerycznego:

$$\int_{-1}^1 F(\xi) d\xi \quad \text{oraz} \quad \int_{-1}^1 G(\eta) d\eta$$
(33)

gdzie:

$$F(\xi) = \bar{F}(\xi) a_{11}, \quad G(\eta) = \bar{G}(\eta) a_{22}$$

#### LITERATURA

- [1] Dylla A.: Zastosowanie metody elementów skończonych w zadaniach przewodzenia ciepła. Zeszyty Naukowe ATR, Bydgoszcz 1987
- [2] Szmelter J., Dacko M., Dobrociński S., Wleczorek M.: Programy metody elementów skończonych. Arkady, Warszawa 1973
- [3] Zienkiewicz O.C.: Metoda elementów skończonych. Arkady, Warszawa 1972

#### DETERMINATION OF TEMPERATURE DISTRIBUTION USING ISOPARAMETRIC FINITE RECTANGLE

##### Summary

The paper gives results of the author's research on establishing temperature distribution in joints of building screens using a characteristic finite element - isoparametric rectangle.

#### ОПРЕДЕЛЕНИЕ РАСПРЕДЕЛЕНИЯ ТЕМПЕРАТУР С ПРИМЕНЕНИЕМ ИЗОПАРАМЕТРИЧЕСКОГО ЗАКОНЧЕННОГО ПРЯМОУГОЛЬНИКА

##### Резюме

Статья представляет результаты собственных исследований автора связанных с определением распределения температур в соединениях строительных стен с применением характерного законченного элемента - изопараметрического треугольника.

Andrzej Dylla

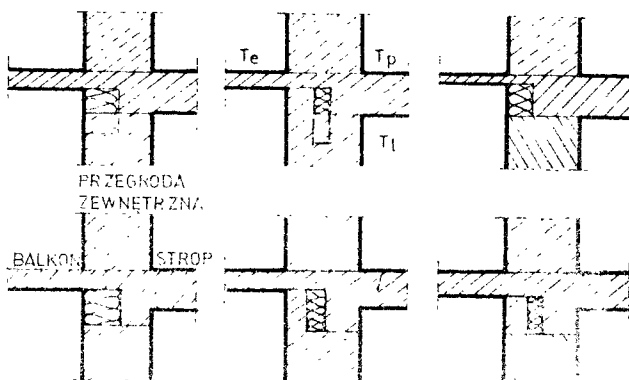
UNIWERSALNY PROGRAM KOMPUTEROWY DO BADANIA POŁA TEMPERATUR  
 W ZŁĄCZU ŚCIANY ZEWNĘTRZNEJ Z BALKONEM

Artykuł zawiera program komputerowy do badania pola temperatur w wybranym schemacie złącza budowlanego. Program napisano w języku ALGOL 1900 dla komputera ODRA 1300.

1. WSTĘP

Obowiązująca norma termiczna [2] wymaga sprawdzenia temperatur  $t_i^p$  w każdym miejscu pomieszczenia, na powierzchni przegrody zewnętrznej nieprzeźroczystej. Spełnienie warunku  $t_i^p > t_s$  /gdzie  $t_s$  jest temperaturą punktu rosy dla obliczonych wymagań normowych/ w każdym miejscu przegrody, jest dla tej przegrody swoistym progiem przydatności termicznej. Warunek staje się tym istotniejszy im bardziej skomplikowana jest konstrukcja przegrody i jej złącza. Stwierdzono bowiem w toku obserwacji wyraźne objawy destrukcji fizycznej ścian zewnętrznych i stropodachów, szczególnie liczne w budynkach uprzemysłowionych oraz w niewłaściwie skonstruowanych stykach i złączach obiektów tradycyjnych.

W budownictwie polskim ostatnich dziesięcioleci praktyką stało się prowadzenie płyt balkonowych żelbetonowych wspornikowo z wieńców, najczęściej łączących się bezpośrednio ze stropową płytą monolityczną /rys.1/. Taki



Rys.1. Niektóre możliwości prowa...

sposób konstruowania balkonów /również logii/, wygodny z punktu widzenia statyki, rodzi potrzebę bardzo starannej ochrony termicznej złącza. Zneutralizowanie oddziaływania mostka termicznego z zimnym rdzeniem w stro-pie, wieńcu i płycie balkonowej, okazuje się w praktyce niezmiernie kłopotliwe. Konieczne są zwykle obliczenia sprawdzające dla kilku wersji wkładek ocieplających. Obliczenia takie mogą zostać wykonane jedną z metod numerycznych przy zastosowaniu komputera.

Aktualnie w kraju brak publikacji zarówno programów tego typu, jak i szczegółowych wskazówek na temat ich sporządzania.

W artykule zaprezentowano własny uniwersalny program komputerowy służący do badania różnych wersji geometrycznych i materiałowych omawianego złącza. W trosce o zwiezłość programu zastosowano przy jego pisaniu szereg udoskonaleń. Osobno wskazano na możliwości programu.

Program podano w języku algorytmicznym ALGOL 60. Zamieszczono także przykład obliczenia konkretnego złącza.

## 2. DOKŁADNOŚĆ OBLICZEŃ W METODZIE RÓŻNIC SKOŃCZONYCH

Algorytm opisany programem opiera się na metodzie różnic skończonych [1]. Znalazienie rozkładu temperatur  $T[P(x,y)]$ , gdzie  $P(x,y)$  jest dowolnym węzłem siatki kwadratowej rozciągniętej nad obszarem badanego złącza, odbywa się zgodnie z formułą:

$$T(P) = \frac{T(E)k_{PE} + T(W)k_{PW} + T(N)k_{PN} + T(S)k_{PS}}{k_{PE} + k_{PW} + k_{PN} + k_{PS}}$$

w której:

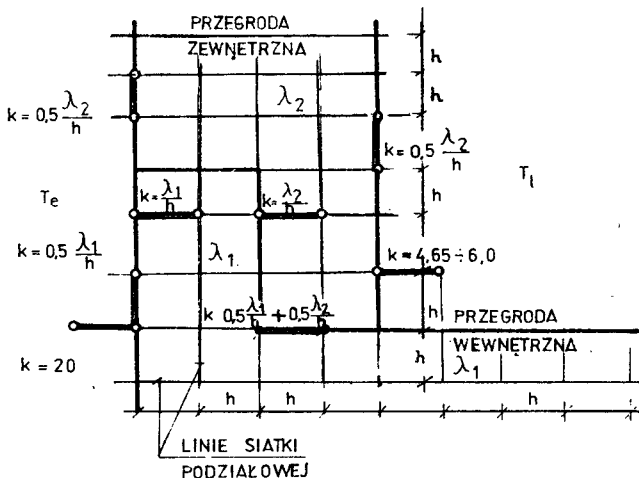
$T(E)$ ,  $T(W)$ , itd - temperatury węzłów siatki sąsiadujących z punktem  $P$  z czterech kierunków  $E, W, N, S$ , odległych o krok siatki  $h$ , °C,

$k_{PE}, k_{PW}$ , itd - współczynniki przenikania ciepła między węzłami  $P$  i  $E$ ,  $P$  i  $W$ , itd,  $W/(m^2 \cdot K)$ .

Określenie współczynników przenikania ciepła  $k_m$  między węzłami siatki odbywa się przy założeniu przepływu ciepła pasem o szerokości oczka siatki  $h$ , przy czym linia siatki leży w środku szerokości pasa /rys.2/.

Współczynniki wynoszą:

- we wnętrzach obszarów  $k = \lambda/h, W/(m^2 \cdot K)$ ,
- na powierzchniach przegród  $k = 0,5 \lambda/h, W/(m^2 \cdot K)$ ,
- w stykach materiałów  $k = 0,5 \lambda_1/h + 0,5 \lambda_2/h, W/(m^2 \cdot K)$ ,
- przy powierzchni zewnętrznej przegrody  $k = 20 W/(m^2 \cdot K)$ ,
- przy powierzchni wewnętrznej przegrody płaskiej  $k = 8,33 W/(m^2 \cdot K)$ ,
- przy powierzchni wewnętrznej narożników i styków prostopadłych przegród  $k = 4,65 + 6,40 W/(m^2 \cdot K)$



Rys. 2. Współczynniki przenikania ciepła między węzłami

Znalezienie rozkładu temperatur  $T(P)$  w stacjonarnym polu dwuwymiarowym, prowadzi w ogólnym przypadku, do badania układu  $n$  równań z  $n$  niewiadomymi, przy czym  $n$  oznacza ilość węzłów siatki w badanym obszarze złącząca:

$$\sum_{j=1}^n a_{ij} x_j = b_i \quad (i=1, 2, \dots, n)$$

lub w postaci macierzowej:

$$A x = b$$

gdzie:

$A = [a_{ij}]$  - jest macierzą kwadratową  $n$ -tego stopnia, składającą się ze współczynników układu równań.

$$x = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \cdot \\ \cdot \\ \cdot \\ n_n \end{pmatrix}, \quad b = \begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \\ \cdot \\ \cdot \\ \cdot \\ b_n \end{pmatrix}$$

W obliczeniach praktycznych układy równań liniowych z macierzami dużymi i rzadkimi rozwiązywane są metodą iteracyjną stacjonarną Gaussa-

-Seidla. Wyniki ostateczne są najczęściej efektem wykonania eksploatacji trzech równoległych w procesie iteracyjnym wartości funkcji przy użyciu tzw. metody  $\delta^2$ . Ważny jest wzór:

$$T_P = \frac{T_i \cdot T_{i+2n} - T_{i+n}^2}{T_{i+2n} - 2T_{i+n} + T_i}$$

we wzorze:

$T_i, T_{i+n}, T_{i+2n}$  - wartości funkcji  $T$  dla iteracji  $i, i+n, i+2n$ ,  
 $T_P$  - poprawiona wartość funkcji.

Tej postaci iteracja, zwana procesem Aitkena, może być stosowana tylko dla funkcji szybko zbieżnych.

Rozważając dokładność otrzymanych wyników należy wskazać na trzy źródła błędów obliczeń:

1. Pierwsze wiąże się z koniecznością zastąpienia problemu jego przybliżeniem matematycznym, możliwym do rozwiązania. Ustalenie tzw. błęd metody dotyczy więc zarówno formuły metody różnicowej, jak również błędu pojawiającego się przy rozwiązywaniu układu równań liniowych metodą iteracyjną Gaussa-Seidla. W pierwszym przypadku błąd metody jest trudny do określenia i zawsze proporcjonalny do kroku podziałowego siatki w  $n$ -tej potęgze  $/h^n/$ , gdzie  $n$  zależy od kształtu operatora różnicowego. W drugim przypadku metoda iteracyjna jest w granicy zbieżna do rozwiązania dokładnego, stąd błąd metody iteracyjnej jest małą częścią całkowitego błędu metody.
2. Drugim źródłem błędów są zaokrąglenia dokonywane w procesie obliczeń. W metodzie iteracyjnej, korzystając z pierwotnych współczynników macierzy, można brać pod uwagę błąd zaokrąglenia powstający w ostatniej iteracji.
3. Trzecie źródło błędów związane jest z dokładnością ustalenia warunków granicznych zadania. Chodzi tu w szczególności o błędy określania współczynników przejmowania oraz rozkładu temperatur na granicach obliczeniowych złączy.

Pomijając błędy zaokrąglenia należy określić praktyczne szacowania pozostałych.

Ustalenie błędu metody wymaga znajomości reguł przyjmowania siatek podziałowych i zakładania długości procesu iteracyjnego. W zadaniach dwuwymiarowych gęstość siatek pomiarowych powinna być rzędu  $h = B/24$ , gdzie  $B$  oznacza grubość przegrody zewnętrznej. Długość procesu iteracyjnego jest w tych warunkach znaczna /rzędu 2000 iteracji/ i można ją skrócić do połowy/, a nawet do 1/3/ stosując proces Aitkena dla trzech równo odległych iteracji / np. 700, 800, 900 - tnej /. Staje się to istotne ze względu na koszty /czas pracy maszyny ODRA 1305 przy 2000 iteracji dla przeciętnego złącza dwuwymiarowego wynosi ok. 9 godzin/. Błąd metody nie przekracza na ogół 0,2 deg.



Tabela 1

Błędy metody różnicowej dla siatek różnej gęstości

Krok siatki h	Błąd bezwzględny metody deg	Długość obliczeń ilość iteracji
B/24	0,2	2000
B/16	0,3	1100
B/12	0,5	700
B/8	0,9	400

B-grubość przegrody zewnętrznej w cm

W tabeli 1 podano orientacyjne dokładności obliczeń /błąd metody / dla różnych gęstości siatek i odpowiadające im parametry procesu iteracyjnego.

Błędy w przyjęciu warunków granicznych wiążą się głównie z nie dość precyzyjnym określeniem współczynnika przejmowania ciepła  $\alpha_1$  na powierzchniach wewnętrznych złącza. Na podstawie badań eksperymentalnych ustalono, że przejmowanie ciepła między powietrzem wewnętrznym a powierzchnią ściany, w sąsiedztwie wszelkiego rodzaju załamań przegrody, jest mniej intensywne. Zmniejszeniu ulega bowiem konwekcyjny strumień ciepła poddany dodatkowym hamowaniom. Zmniejsza się również strumień ciepła wymienianego przez ścianę w drodze promieniowania.

Fokin ustalił miarodajną wartość współczynnika napływu w załamaniu ścian w wysokości  $\alpha_1 = 5,8 \text{ W}/(\text{m}^2 \cdot \text{K})$ . Na podstawie badań Webera określa się dwie różne wartości:

- w narożnikach pionowych między ścianami  $\alpha_1 = 5,25 \text{ W}/(\text{m}^2 \cdot \text{K})$ ,
- w narożnikach poziomych między ścianami a sufitem  $\alpha_1 = 4,65 \text{ W}/(\text{m}^2 \cdot \text{K})$

Eichler i Arnadt podają wartość współczynnika  $\alpha_1 = 6,0 \text{ W}/(\text{m}^2 \cdot \text{K})$ . Różnice w przyjęciu wartości współczynnika  $\alpha_1$  w sposób istotny decydują o wartości obliczonej w narożu temperatury.

Dla jednego z wariantów złącza pokazanego na rysunku 1 otrzymano następujące szacowania temperatury w narożu wewnętrznym:

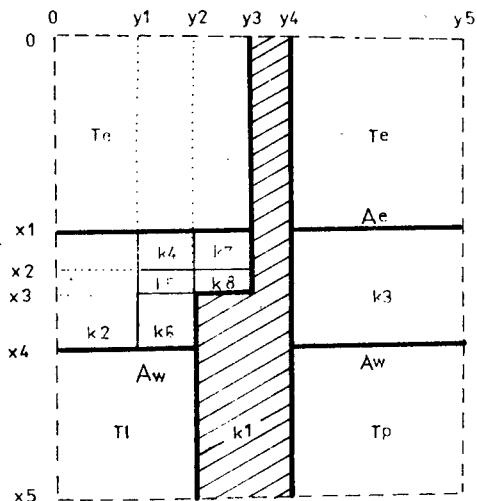
$$t_{\min}^p = 8,66 \text{ } ^\circ\text{C} \text{ przy } \alpha_1 = 5,25 \text{ W}/(\text{m}^2 \cdot \text{K})$$

$$t_{\min}^p = 9,17 \text{ } ^\circ\text{C} \text{ przy } \alpha_1 = 6,0 \text{ W}/(\text{m}^2 \cdot \text{K})$$

$$t_{\min}^p = 10,42 \text{ } ^\circ\text{C} \text{ przy } \alpha_1 = 8,33 \text{ W}/(\text{m}^2 \cdot \text{K})$$

Ponieważ destrukcja fizyczna rozpoczyna się praktycznie w złączach trójwymiarowych przegród, wydaje się wskazane w obliczeniach przyjmować wartości  $\alpha_1$  zbliżone do oszacowań minimalnych.

Dla określenia zewnętrznych warunków brzegowych, ważne okazuje się również zróżnicowanie rzeczywistych temperatur występujących w złączu. Na przykład w pomieszczeniu mieszkalnym nad posadzką temperatura  $T_p$  jest z reguły niższa od temperatury pod stropem  $T_l$  /rys.3/. Zmienność tempera -



Dane do przykładu:

$$\lambda_1 = \lambda_6 = 1,5 \text{ W/mK}$$

$$\lambda_2 = \lambda_3 = \lambda_4 = \lambda_7 = 0,2 \text{ W/mK}$$

$$\lambda_7 = \lambda_8 = 0,05 \text{ W/mK}$$

$$y_1 = 72 \text{ cm}, y_2 = 78,$$

$$y_3 = 83, y_4 = 96,$$

$$y_5 = 168, x_1 = 72,$$

$$x_2 = 78, x_3 = 86,$$

$$x_4 = 94, x_5 = 166$$

Rys.3. Złącze "balkon z wieńcem"

tur w pionie, wewnątrz pomieszczeń w budynkach mieszkalnych, rejestruje się w zależności od rodzaju ogrzewania i sposobu wentylacji. Różnice dla powszechnie stosowanego centralnego ogrzewania sięgają 7 - 8 deg i w sposób istotny wpływają na rozkład temperatur w złączu. Prezentowany program umożliwia różnicowanie temperatur  $T_l$  i  $T_p$ .

Ogólne możliwości zastosowania programu są dość szerokie. Obrazuje je rysunek 1.

### 3. STRUKTURA PROGRAMU

Program jest zasadniczo przygotowany dla komputerów o dużej pojemności pamięci operacyjnej, na przykład dla ODRY serii 1300 /wymaga wtedy przystosowania w języku algorytmicznym ALGOL 1900/. Może być także bezpośrednio wykorzystany w komputerach ODRA 1204 dla mniej skomplikowanych wewnętrznie złącz i z uwagi na ograniczenia pamięciowe daje wyniki o mniejszej dokładności /możliwe są siatki podziałowe o małej gęstości/. Program obejmuje następujące człony:

- ustalenie i wprowadzenie danych wejściowych,
- budowę tablicy współczynników przenikania ciepła  $k_m$  między węzłami przyjętej siatki podziałowej,
- budowę tablicy temperatur początkowych  $T$ ,
- drukowanie wyników w postaci temperatur  $T$  określonych fragmentów

złącza.

Dane wejściowe stanowią /rys.3/:

- parametry geometryczne złącza  $\{x_1, x_2, \dots, y_1, y_2, \dots\}$  wyrażone w jednostkach kroków podziałowych  $h$  dla siatki kwadratowej - razem 10 liczb całkowitych,
- parametry procesu iteracyjnego  $\{it_1, it_2, it_3\}$  określające numery, przy których następuje drukowanie wyników, ostatnia liczba  $\{it_3\}$  oznacza numer iteracji końcowej - razem 3 liczby całkowite,
- parametry termoizolacyjne materiałów złącza  $\{k_1, k_2, \dots\}$  w postaci współczynników  $k_m$  przenikania ciepła między węzłami obszaru jednorodnego,  $W/(m^2 \cdot K)$  - razem 8 liczb rzeczywistych,
- parametry fizyczne zewnętrzne  $\{T_e, T_1, T_p, A_e, A_w\}$ , w tym temperatura  $T_e, T_1, T_p$  wyrażona w  $^{\circ}C$ , współczynniki przejmowania ciepła  $A_e, A_w$  wyrażone w  $W/(m^2 \cdot K)$  - razem 5 liczb rzeczywistych.

Obszar złącza analizowany jest w kartezjańskim układzie współrzędnych  $x, y$  zorientowanym, jak na rysunku 3. Fragmenty przegród poza rdzeniem złącza - odcinki  $\langle 0, y_1 \rangle, \langle y_4, y_5 \rangle, \langle 0, x_1 \rangle, \langle x_4, x_5 \rangle$  proponuje się przyjmować w wymiarze co najmniej równym 2,5 grubości przegrody zewnętrznej  $B$ , odcinek  $\langle x_1, x_4 \rangle$ .

Drukowanie wyników odbywa się w trzech tablicach obejmujących pasy położone wzdłuż powierzchni przegrody:

- pierwszy, wzdłuż lewej powierzchni przegrody wewnętrznej, poczynając od styku z powietrzem atmosferycznym,
- drugi, wzdłuż prawej /górnjej/ powierzchni balkonu oraz przegrody wewnętrznej,
- trzeci, od wewnątrz wzdłuż powierzchni przegrody zewnętrznej na całej szerokości złącza.

Drukowane są również temperatury powietrza  $\{T_e, T_1, T_p\}$  w sąsiedztwie powierzchni przegród, co pozwala na łatwą orientację i przyporządkowanie wyników.

#### 4. PROGRAM KOMPUTEROWY "BALKON Z WIENCEM"

```

begin
comment balkon z wiencem;
integer i,j,x1,x2,x3,x4,x5,y1,y2,y3,y4,y5, it1,it2,it3,B;
real k1, k2,k3,k4,k5,k6,k7,k8,T_e,T_1,T_p,A_e, A_w, RR;
read (x1,x2,x3,x4,x5, y1,y2,y3,y4,y5, it1,it2,it3,k1,k2,k3,k4,k5,k6,k7,k8,
T_e,T_1,T_p,A_e,A_w);
begin array W [-1:x5,-1:2*y5],T[-1:x5,0:y5];
for i:=-1 step 1 until x5 do
for j:=-1 step 1 until 2*y5 do W[i,j]:=0;
for i:=x1+1 step 1 until x4 do
for j:=-1 step 1 until 2*y1-2 do W[i,j]:=k2;
for i:=x3+1 step 1 until x4 do

```

```

for j:=2*y1 step 1 until 2*y2-2 do W[i,j]:=k6;
for j:=2*y1 step 1 until 2*y2-2 do
for i:=x1+1 step 1 until x3 do
if i>x2 then W[i,j]:=k5 else W[i,j]:=k4;
for i:=0 step 1 until x5 do
for j:=2*y3 step 1 until 2*y4-2 do W[i,j]:=k1;
for j:=2*y2 step 1 until 2*y3-2 do
for i:=x1+1 step 1 until x5 do W[i,j]:=k1;
for j:=2*y2 step 1 until 2*y3-2 do
for i:=x1+1 step 1 until x3 do
if i>x2 then W[i,j]:=k8 else W[i,j]:=k7;
for i:=x1+1 step 1 until x4 do
for j:=2*y4 step 1 until 2*y5 do W[i,j]:=k3;
for j:=0 step 2 until 2*y5 do
for i:=x1,x2,x3,x4 do W[i,j]:=(w[i-1,j]+W[i+1,j])/2;
for i:=0 step 1 until x5 do for j:=y1,y2,y3,y4 do
W[i,2*j-1]:=(W[i,2*j-3]+W[i,2*j+1])/2;
for j:=-1 step 2 until 2*y5 do begin
if j<2*y-2-1 v j>2*y4 then W[x4+1,j]:=Aw;
if j<2*y3-1 v j>2*y4 then W[x1,j]:=Ae end;
for i:=x4+1 step 1 until x5 do W[i,2*y2-2]:=W[i,2*y4]:=Aw;
for i:=0 step 1 until x1-1 do W[i,2*y3-2]:=W[i,2*y4]:=Ae;
comment koniec tablicy współczynników;
RR:=(Tp-T1)/(2/Aw+(y4-y2)/k1); T[x5,0]:=T1;
for j:= step 1 until y5 do if W[x5,2*j-2]>0, then
T[x5,j]:=T[x5,j-1]+RR/W[x5,2*j-2] else T[x5,j]:=T[x5,j-1];
for j:=0 step 1 until y5 do
if j<y3 v j>y4 then begin RR:=0; T[x1-1,j]:=Te;
for i:=x1 step 1 until x5 do
if W[i,1*j-1]>0 then RR:=RR+1/W[i,2*j-1];
for i:=x1 step 1 until x5 do if W[i,2*j-1]>0 then
T[i,j]:=T[i-1,j]+(T[x5,j]-Te)/(RR*W[i,2*j-1])
else T[i,j]:=T[i-1,j] end;
for j:=y3 step 1 until y4 do begin RR:=0; T[-1,j]:=Te;
for i:=0 step 1 until x5 do RR:=RR+1/W[i,2*j-1];
for i:=0 step 1 until x5 do
T[i,j]:=T[i-1,j]+(T[x5,j]-Te)/(RR*W[i,2*j-1]) end;
for i:=-1 step 1 until x1-1 do T[i,y3-1]:=T[i,y4+1]:=Te;
comment koniec tablicy temperatur początkowych;
B:=0; if it1=0 then go to et 2;
et 1: B:=B+1;
for i:=x1 step 1 until x4 do for j:=1 step 1 until y5-1 do
T[i,j]:=(W[i,2*j-2]*T[i,j-1]+W[i,2*j-1]*T[i-1,j]+
W[i,2*j]*T[i,j+1]+W[i+1,2*j-1]*T[i+1,j])/W[i,2*j-2]+
W[i,2*j-1]+W[i,2*j]+W[i+1,2*j-1];
for i:=x1 step 1 until x5-1 do for j:=y2 step 1 until y4 do
T[i,j]:=(W[i,2*j-2]*T[i,j-1]+W[i,2*j-1]*T[i-1,j]+

```

```

W[i,2*j]*T[i,j+1] + W[i+1,2*j-1]*T[i+1,j]) / (W[i,2*j-2] +
W[i,2*j-1] + W[i,2*j] + W[i+1,2*j-1]);
for i:=0 step 1 until x5-1 do for j:=y3 step 1 until y4 do
T[i,j] := (W[i,2*j-2]*T[i,j-1] + W[i,2*j-1]*T[i-1,j] +
W[i,2*j]*T[i,j+1] + W[i+1,2*j-1]*T[i+1,j]) / (W[i,2*j-2] +
W[i,2*j-1] + W[i,2*j] + W[i+1,2*j-1]);
if B=it1 V B=it2 then go to et 2;
if B<it3 then go to et 1;
comment drukowanie wyników;
et 2: format(' ?B U = U 1234 '); print (B); line (2); format(' -12.123UU ');
for i:=x1-1 step 1 until x5 do begin
for j:=y2-1 step 1 until y2+3 do print (T [i,j]); line (2) end;
line (4); format(' -12.123UU ');
for i:=0 step 1 until x5 do begin
for j:=y4-2 step 1 until y4+1 do print (T [i,j]); line (2); end;
line (4); format(' -12.123UU ');
for j:=0 step 1 until y5 do begin
for i:=x4-3 step 1 until x4+1 do print (T [i,j]);
lin2 (2) end; line (10);
if B<it3 then go to et 1; end end;

```

## 5. PRZYKŁAD

Zadanie polega na wyznaczeniu rozkładu temperatur w złączu ściany zewnętrznej z betonu komórkowego przebitej balkonem wspornikowym, wypuszczone z wieńca stropu żelbetowego. Wieniec opuszczony poniżej światła stropu ocieplony jest wkładką termoizolacyjną ze styropianu. Dane geometryczne i fizyczne złącza podano na rysunku 3.

Przykład obliczono na komputerze ODRA 1305. Przyjęto krok siatki  $h=1$  cm. Proces iteracji ograniczono do 600 cykli, drukując wyniki trzech równo odległych iteracji /400, 500, 600/.

Dane do programu mają następującą postać:

72; 78; 83; 96; 168; 72; 78; 86; 94; 166; 400; 500; 600; 150; 20; 20;  
20; 5; 150; 20; 5; -20; 23; 15; 20; 5,25;

Otrzymano następujące wyniki:

- temperatura w narożniku lewym /dolnym/ wynosi:

10,88°C dla iteracji 400-tnej,

10,78°C dla iteracji 500-tnej,

10,75°C dla iteracji 600-tnej,

- temperatura w narożniku prawym /górnym/ wynosi:

10,25°C dla iteracji 400-tnej,

10,26°C iteracji 500,600-tnej.

Proces Aitkena daje wyniki:

$$\vartheta_1 = \frac{10,88 \cdot 10,75 - 10,78^2}{10,88 - 2 \cdot 10,78 + 10,75} = 10,74 \text{ } ^\circ\text{C}$$

$$\vartheta_2 = 10,26$$

Dokładność otrzymanych wyników ze względu na błędy metody jest rzędu 0,2 deg. Dyskusyjny jest natomiast problem dokładności uwzględniający warunki graniczne. Ponieważ posłużono się wartością współczynnika napływu ciepła  $\alpha_1 = 5,25 \text{ W/m}^2 \cdot \text{K}$ , podaną przez Webera dla krawędzi pionowych, możliwe jest dalsze obciążenie temperatur na krawędziach poziomych przy użyciu współczynnika  $\alpha_1 = 4,65 \text{ W/m}^2 \cdot \text{K}$ , przy czym błąd będzie rzędu 0,3 + 0,4 deg. Prawdopodobny sumaryczny błąd bezwzględny nie powinien więc przekraczać 0,2 + 0,3 = 0,5 deg.

#### LITERATURA

- [1] Dylla A.: Programowanie zadań przewodnictwa ciepła w metodzie różnicowej. XI Krajowa Konferencja Naukowo-Techniczna PZITB w Toruniu. Toruń 1986
- [2] PN-82/B-02220. Ochrona termiczna budynków

#### A UNIVERSAL PROGRAMME FOR TESTING TEMPERATURES FIELD OF OUTER WALL JOINT WITH BALCONY

##### Summary

The paper presents a computer programme for testing temperatures field in a chosen diagram of a building joint. The programme was written in ALGO 1900 for the computer Odra 1300.

#### УНИВЕРСАЛЬНАЯ КОМПЬЮТЕРНАЯ ПРОГРАММА ДЛЯ ИССЛЕДОВАНИЯ ТЕМПЕРАТУРНОГО ПОЛЯ В СОЕДИНЕНИЯХ ВНЕШНЕЙ СТЕНЫ С БАЛКОНОМ

##### Резюме

Статья содержит компьютерную программу для исследования поля температур в избранной схеме строительного соединения. Программа написана на языке ALGOL 1900 для компьютера ОДРА 1300.

Maciej Kordian Kumor

### ŚCISLIWOŚĆ CYKLICZNIE ZAMRAŻANEGO IŁU PLIOCENSKIEGO

W pracy przedstawiono zmiany ścisłości cyklicznie przemrażanych past iłu pliocenckiego o różnym składzie granulometrycznym. Badanie zmian ścisłości przeprowadzono dla f-cykli zamrażania  $f=0, 1, 2, 3, 4$ , w temperaturach zamrażania  $\Theta_z = -20^\circ\text{C}, -5,0^\circ\text{C}; -0,5^\circ\text{C}$ . Istotne zmiany ścisłości stwierdzono w cyklicznym mrożeniu w temperaturze  $\Theta_z = -20^\circ\text{C}$ . Obserwowany wzrost ścisłości wynosił ok. 35%. W temperaturach zamrażania bliskich  $0^\circ\text{C}$  do ok.  $-5^\circ\text{C}$  ścisłość praktycznie nie zmieniała się.

#### 1. WSTĘP

Jednym z czynników kształtujących właściwości gruntów spoistych jest klimat. Zewnętrzne warstwy podłoża budowlanego narażone są między innymi na bezpośrednie wahania temperatury, zachodzące w stosunkowo krótkim czasie i ze zmienną intensywnością. Obniżanie temperatury gruntów poniżej punktu zamrażania wody zawartej w porach będzie w istotny sposób wpływać na wewnętrzną równowagę termiczną między fazami gruntowymi [3], [5], [14], wywołując tym samym zmiany szeregu właściwości zamrażanych gruntów.

Ze względu na złożoność procesu przemrażania gruntów iłowych o różnych, pod względem termodynamicznych, fazach /fazy: stała-szkielet ciekła - woda nie zamrożona, gazowa oraz lód, nie jest możliwe w obecnej chwili jednoznaczne określenie wpływu mrożenia na zmianę właściwości inżynierskich gruntów spoistych [2], [13]. Dotychczasowe dane [7], [16] wskazują, że iły są najbardziej wrażliwymi gruntami na działanie mrozu.

Pożądanym staje się więc, poznawanie specyfiki procesu przemrażania iłów, drogą etapowego rozwiązywania problemów zmierzających w kierunku ustalenia pewnych uogólnień [12], [16], [17]. Literatura dotycząca wpływu zmiennych warunków zamrażania na właściwości iłów nie jest bogata, chociaż właściwości gruntów zamrożonych poznane są stosunkowo dobrze [5], [13]. Trudności w ustaleniu parametrów zamrażanych iłów wiążą się również z brakiem ogólnie przyjętej metody ich wyznaczania i ustalonej płaszczyzny porównania wyników badań. Powoduje to, że badacze każdorazowo zmuszeni są do opracowywania własnych oryginalnych metod.

W kraju tematyka ta podejmowana jest bardzo rzadko, eksperymentatorzy w większości zwracają uwagę na czynniki fizyko-mechaniczne gruntów średnio - i mało spoistych [16], [19]. Z konieczności więc, badanie właściwości zamrażanych iłów na obecnym poziomie rozpoznania problemu, przebie-

gać musi w laboratorium na modelowym ośrodku gruntowym.

W artykule przedstawiono przykładowo analizę jednej z cech mechanicznych gruntów-ściśliwości, w zależności od zmiennych warunków mrożenia.

Doświadczenia obejmowały określenie wpływu warunków mrożenia zdeterminowanych temperaturą i liczbą cykli zamrażania na ściśliwość  $i_k$ . Zmianę ściśliwości analizowano przy pomocy wskaźnika porowatości. Wynika to między innymi z analizy wymiarowej /z której uzyskuje się bezwymiarowy iloczyn  $\Delta\delta \cdot a^{-1}$ / oraz częstego stosowania tej zależności w mechanice gruntów. Funkcja cząstkowa opisująca doświadczenie przyjmuje więc postać :

$$e = \varnothing / \vartheta_z, f, \delta_n / \quad (1)$$

gdzie:

$e$  - wskaźnik porowatości,

$\vartheta_z$  - temperatura mrożenia,

$f$  - liczba cykli,

$\delta_n$  - naprężenie.

Postać funkcji (1), określono w oparciu o uzyskane wyniki badania laboratoryjnego ściśliwości gruntów modelowych, za jakie uznano odpowiednio przygotowane pasty  $i_k$  pliczeńskiego z Bydgoszczy.

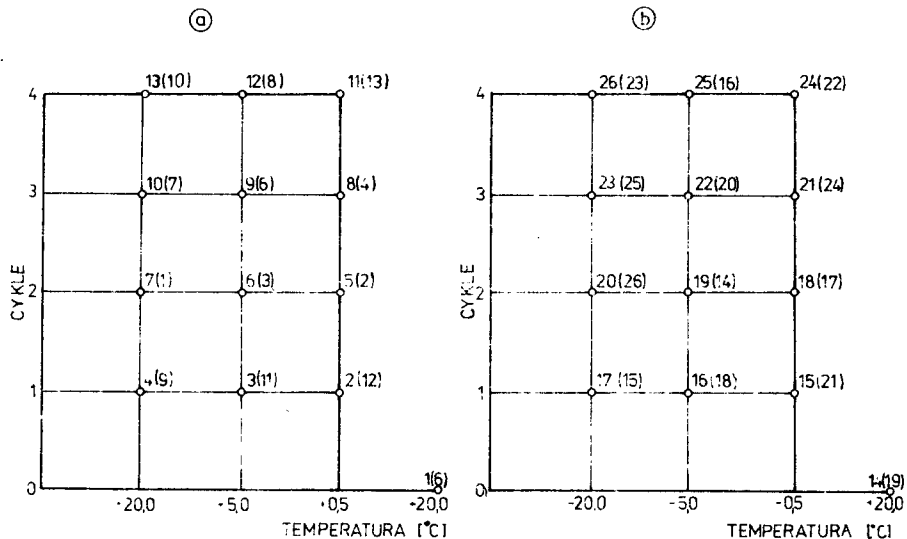
## 2. PRZYGOTOWANIE PRÓBEK DO BADAŃ

Szczegółowy sposób przygotowania próbek i metodę przemarzania przedstawiono w pracy [11].

Próbki do badań ściśliwości po różnych warunkach zamrażania, przygotowywano z past gruntowych o wilgotności początkowej zbliżonej do  $I_L \approx 0,5$ . Przygotowaną pastę  $i_k$  przechowywano w celu redystrybucji wilgoci i odbudowy wiązań między agregatami i cząstkami oraz wyeliminowania wody kapilarnej [20] przez około 12 miesięcy w odpowiednich szafach klimatycznych. Wilgotność względna powietrza bliska była 100 % przy temperaturze otoczenia  $+20^\circ\text{C}$ . Po okresie "dojrzewania" pasty, próbki formowano w specjalnych pierścieniach, średnicy 90 mm i wysokości 42 mm. Zamrażanie i odmarzanie przebiegało w wykonanej w tym celu specjalnej kasecie [10]. Kaseta stymulowała warunki naturalne, odpowiadające wysokiemu poziomowi wody gruntuwej i spotykane np. przy budowie dróg. Podczas zamrażania, próbki miały umożliwione swobodne podciąganie wody od spodu, przy zachowaniu jednokierunkowego zamrażania od góry próbek. Zamrażanie prowadzono w komorze klimatycznej typu KBK-250/40. Podczas zamrażania i odmarzania próbki były szczelnie przykryte folią aluminiową. Proces zamrażania próbek przebiegał w temperaturze  $\vartheta_z = -20^\circ\text{C}$ ,  $-5^\circ\text{C}$ ;  $-0,5^\circ\text{C}$ . W każdej z temperatur zadawano  $f$ -cykli zamrażania-odmarzania:  $f = 1, 2, 3, 4$ . Odmarzanie następowało w temperaturze  $+20^\circ\text{C}$ . Czas działania temperatur wynosił 48 godzin. Doświadczenia zaprojektowano jako badanie czynnikowe w oparciu o statystyczne me-



tody planowania eksperymentu [1]. Dało to możliwość uwzględnienia współdziałania czynników, w zależności od poziomu ich występowania i kombinacji pozostałych. Zestawienie czynników i ich poziomy występowania podano w tabeli 1. Dla ilustracji przedstawiono na przekrojach, w przestrzeni czynnikowej łącznie z numerami punktów pomiarowych i losowo, ustaloną kolejnością ich realizacji /w nawiasach, rys.1/.



Rys.1. Plany doświadczeń w przestrzeni czynnikowej dla przekroju gruntu

- a - IF
- b - IK

Tabela 1

Czynniki i ich poziomy występowania

Czynnik	Poziomy występowania			
	1	2	3	4
Temperatura /°C/	-20,0	-5,0	-0,5	+20,0
Cykle	1	2	3	4

Po odmarznięciu, próbki wycinano na specjalnym stoliku i zakładano do edometrów. Badanie ścisłości przeprowadzono w edometrach laboratoryjnych typu EL-2 produkcji ZAN UJ w Krakowie [11]. Obciążenie przykładano stopniowo, zgodnie z zaleceniem Normy [25] w zakresie naprężeń 0,0 kPa do 400 kPa. Naprężenia utrzymywano do czasu zakończenia konsolidacji filtracyjnej. Jednocześnie wykonano niezbędne oznaczenia, potrzebne do pełnego opisu procesu ścisłości i cech fizycznych badanego materiału.

## 3. WŁAŚCIWOŚCI BADANYCH GRUNTÓW

Próbki gruntu do badań pobrano ze ściany sztucznych odsłoneń wychodnych iłu płoceńskiego w obszarze miasta Bydgoszczy. Ił Fordon -/IF/, pobrano z glinianki Zakładów Ceramicznych w Fordonie. Wilgotność naturalna wynosiła  $W_n = 23,5\%$ , gęstość objętościowa  $\rho = 2050 \text{ /kg}\cdot\text{m}^{-3}\text{/}$ . Ił z ulicy Kijowskiej - /IK/, pobrano z dzielnicy Bartodzieje z wykopu fundamentowego pod wieżowiec Przedsiębiorstwa Budownictwa Wodnego. Oznaczona wilgotność naturalna  $W_n = 35,3\%$ , gęstość objętościowa  $\rho = 2040 \text{ /kg}\cdot\text{m}^{-3}\text{/}$ . Głębokość pobrania próbek wynosiła od 3,2 m do 4,5 m poniżej stropu iłu płoceńskiego.

Wyniki oznaczeń identyfikujące materiał badawczy przedstawiono w tabeli 2. Wskazują one, że badane grunty to iły, zróżnicowane pod względem zawartości frakcji iłowej. Różnice zaznaczają się również w pozostałych cechach fizycznych /granice konsystencji, powierzchnia właściwa/. Wartości oznaczonych cech są zbliżone do średnich, charakteryzujących najczęściej występujące iły płoceńskie podłoża budowlanego miasta Bydgoszczy [23].

Tabela 2

Wybrane cechy badanych próbek

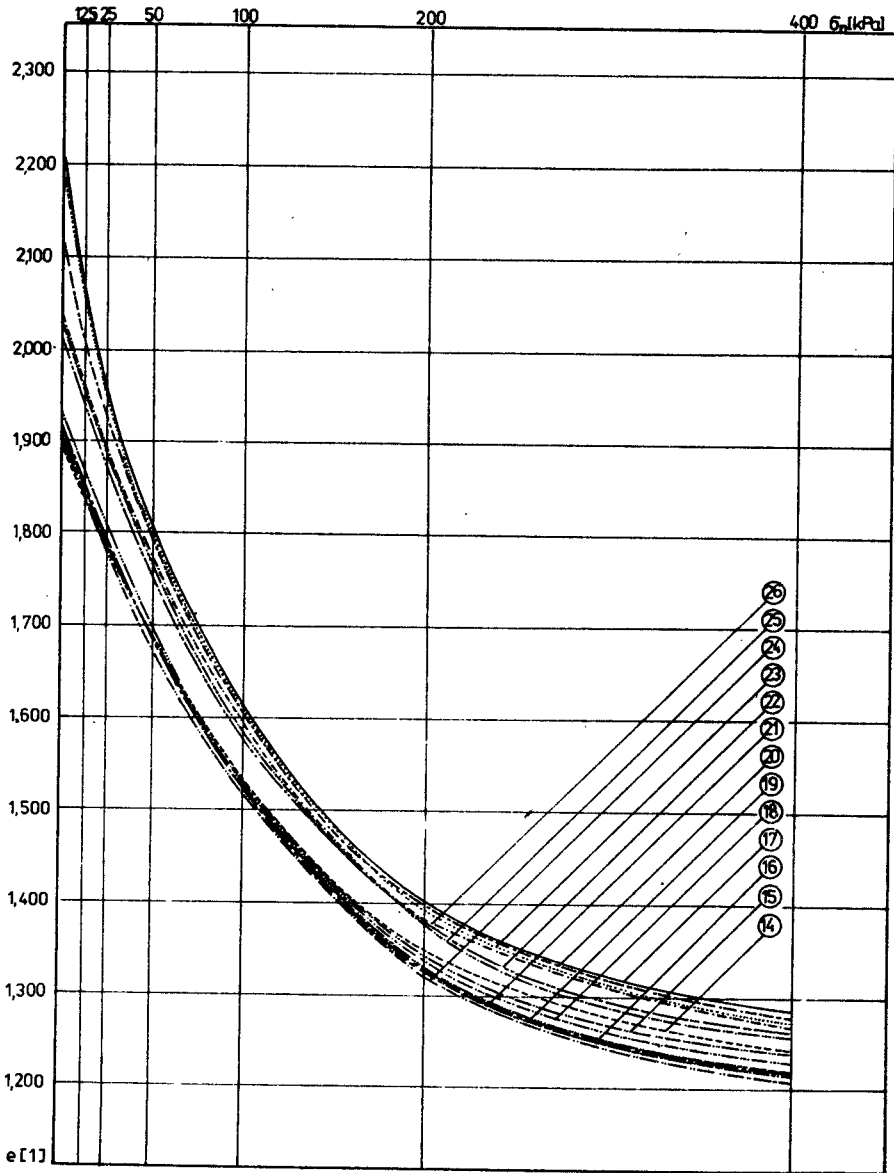
Materiał badawczy	Gęstość właściwa - $\rho_s$	Frakcje			Granice konsystencji			Powierzchnia właściwa [21]	Głębokość pobrania
		$f_p$	$f_{II}$	$f_i$	$W_L$	$W_P$	$W_S$		
	$\text{kg}\cdot\text{m}^{-3}$							$\text{m}^2\cdot\text{kg}^{-1}$	[m] p.p.t.
		%							
Ił z Fordonu /IF/	2720	12,0	40	48	70,5	15,7	13,25	321670	3,2-3,8
Ił z ul. Kijowskiej /IK/	2779	3,0	22	75	106,7	30,3	18,53	557770	3,2-4,5

Termogramy i rentgenogramy pozwalają wnioskować, że badane iły płoceńskie mają charakter montmorillonitowy z domieszkami kaolinitu, illitu oraz kwarcu. Szczegółową analizę składu mineralnego badanego materiału przedstawiono w pracy [9].

## 4. WYNIKI BADAŃ I ICH ANALIZA

Wyniki badania ścisłości iłu płoceńskiego IF oraz IK, po różnych warunkach mrożenia przedstawiono na rysunkach 2 i 3.

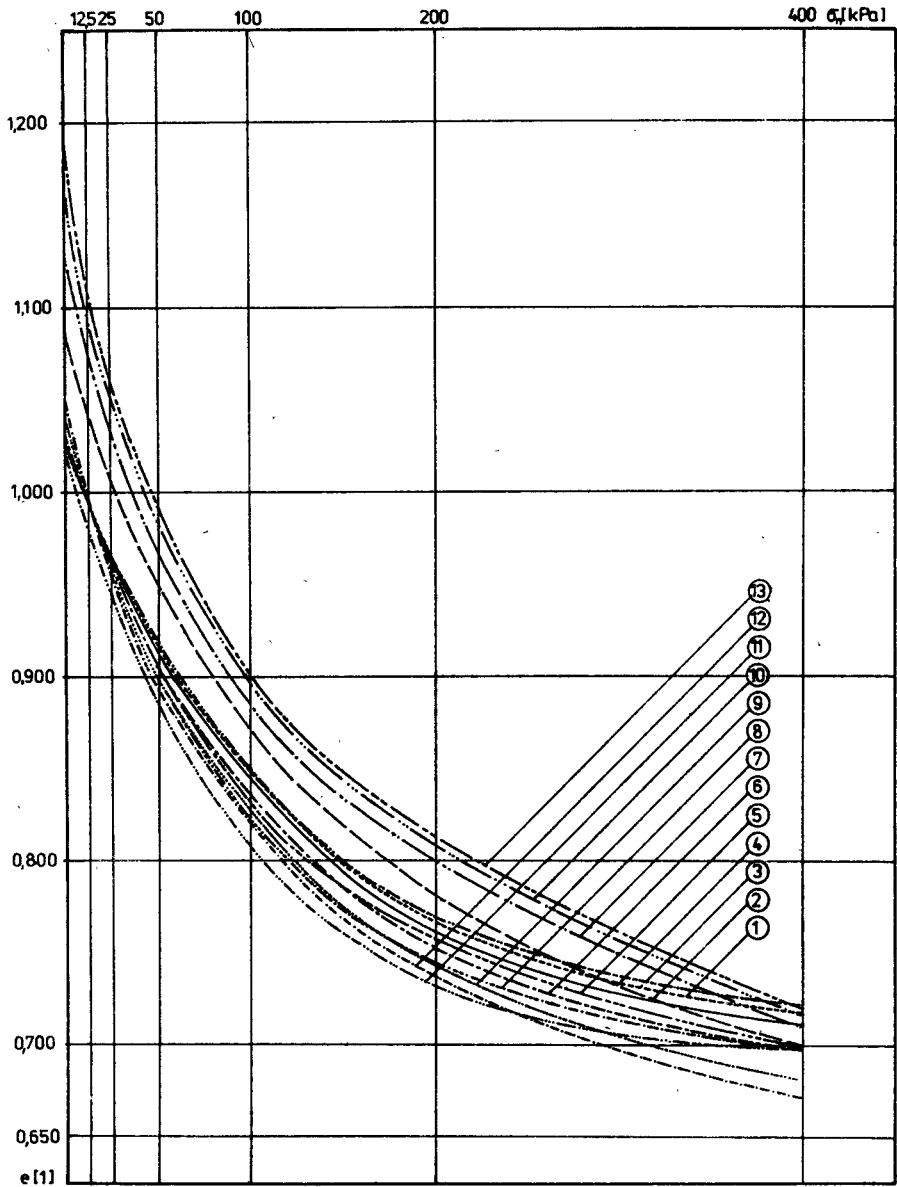
W analizowanym zakresie naprężeń  $\sigma_n = 0$  do 400 kPa, funkcja  $e = \phi / \sigma_n$  szacowana jakościowo, ma charakter krzywoliniowy dla wszystkich punktów



Rys.2. Krzywe ścisłości przemarzanego iłu  
 $IK e = f(\sigma_n)$

pomiarowych przestrzeni czynnikowej.

Ponieważ postać funkcji nie jest znana przyjęto ją na podstawie literatury [15]. Równania krzywych znaleziono metodą najmniejszych kwadratów i zestawiono w tabeli 3, łącznie ze współczynnikami korelacji i miejscami



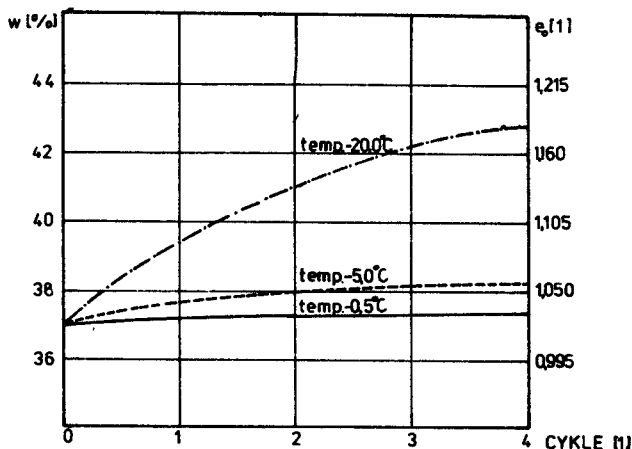
Rys.3. Krzywe ścisłości przemarzanego łu IF  $e=f(\sigma_n)$

zerowymi funkcji. Obliczenia przeprowadzono na EMC Odra 1204 według programu analizy regresji wielokrotnej i wariancji.

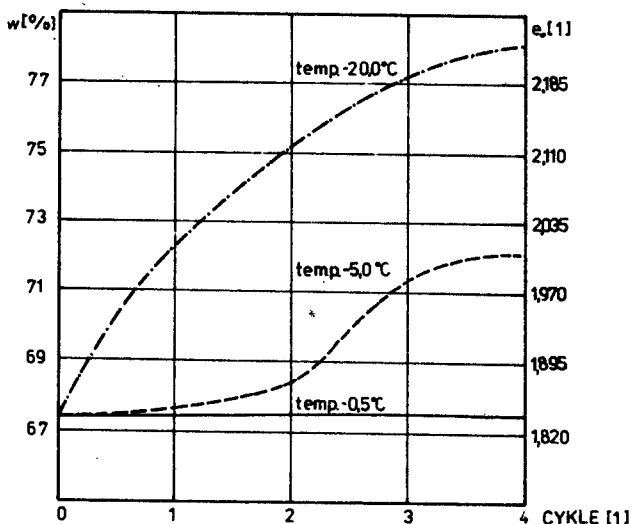
Wspólną cechą wszystkich związków, przedstawionych w tabeli 3, jest mała zmienność współczynników występujących przy naprężeniu. Wysokie wartości współczynników korelacji świadczą o adekwatności przyjętego modelu regresji i istnieniu silnej korelacji między naprężeniem i wskaźnikiem

porowatości.

Wskaźnik porowatości gruntu po procesie przemarzania a przed obciążeniem próbek, nazwano wskaźnikiem porowatości początkowej zamrażania -  $e_{oz}$ . Dla obydwu badanych gruntów zaobserwowano wzrost wskaźnika -  $e_{oz}$  w kolejnych cyklach zamrażania /rys.4 i 5/, szczególnie wyraźny w tempera -



Rys. 4. Wskaźnik porowatości początkowej i wilgotność w zależności od temperatury i liczby cykli zamrażania dla iłu IF



Rys. 5. Wskaźnik porowatości początkowej i wilgotność w zależności do temperatury i liczby cykli zamrażania dla iłu IK

turze  $\Theta_z = -20^{\circ}\text{C}$ . Zauważono także że wskaźnik ten jest wyższy dla gruntu IK, /iłu o większej zawartości frakcji iłowej/ niż IF. Również przy -

rosty, w kolejnych cyklach zamarzania wskaźnika porowatości początkowej, są wyższe dla ilu IK, szczególnie w temperaturze  $\varepsilon_z = -20^\circ\text{C}$  /wzrost od  $f = 1$  do  $f = 4$  wynosi  $\Delta e_{oz} = 0,298$ , podczas gdy dla ilu IF odpowiednio  $\Delta e_{oz} = 0,154$ /. Mała zmienność współczynników otrzymanych równań /tab.3/ może świadczyć, że wpływ temperatury i liczby cykli zamarzania w kształtowaniu wskaźnika porowatości jest nieistotny statystycznie. Istotność wpływu, sprawdzono przy pomocy analizy wariancji, badając równoległość regresji /tab.4/.

Tabela 3

Równania opisujące związek pomiędzy wskaźnikiem porowatości i naprężeniem  $e = \varphi(\sigma_n)$

Numer punktu pomiarowego	Równanie	Współczynnik korelacji	Wskaźnik porowatości początkowej $e_{oz}$
1	$e = \exp / -0,00040 \sigma_n + 0,69382 /$	0,9297	1,027
2	$e = \exp / -0,00040 \sigma_n + 0,69223 /$	0,9291	1,026
3	$e = \exp / -0,00042 \sigma_n + 0,69655 /$	0,9267	1,041
4	$e = \exp / -0,00048 \sigma_n + 0,71716 /$	0,9474	1,084
5	$e = \exp / -0,00042 \sigma_n + 0,69251 /$	0,9347	1,029
6	$e = \exp / -0,00043 \sigma_n + 0,69402 /$	0,9143	1,048
7	$e = \exp / -0,00051 \sigma_n + 0,73069 /$	0,9411	1,128
8	$e = \exp / -0,00042 \sigma_n + 0,68795 /$	0,9142	1,026
9	$e = \exp / -0,00046 \sigma_n + 0,69484 /$	0,9264	1,054
10	$e = \exp / -0,00052 \sigma_n + 0,74106 /$	0,9340	1,161
11	$e = \exp / -0,00042 \sigma_n + 0,68786 /$	0,9181	1,027
12	$e = \exp / -0,00047 \sigma_n + 0,69416 /$	0,9231	1,056
13	$e = \exp / -0,00054 \sigma_n + 0,74665 /$	0,9306	1,180
14	$e = \exp / -0,00047 \sigma_n + 1,30966 /$	0,9492	1,899
15	$e = \exp / -0,00048 \sigma_n + 1,31080 /$	0,9366	1,905
16	$e = \exp / -0,00050 \sigma_n + 1,31149 /$	0,9370	1,911
17	$e = \exp / -0,00052 \sigma_n + 1,33917 /$	0,9323	2,038
18	$e = \exp / -0,00049 \sigma_n + 1,31108 /$	0,9378	1,908
19	$e = \exp / -0,00052 \sigma_n + 1,31690 /$	0,9373	1,935
20	$e = \exp / -0,00056 \sigma_n + 1,35008 /$	0,9226	2,120
21	$e = \exp / -0,00050 \sigma_n + 1,31019 /$	0,9381	1,907
22	$e = \exp / -0,00053 \sigma_n + 1,33641 /$	0,9371	2,018
23	$e = \exp / -0,00059 \sigma_n + 1,35801 /$	0,9140	2,184
24	$e = \exp / -0,00051 \sigma_n + 1,31028 /$	0,9386	1,911
25	$e = \exp / -0,00054 \sigma_n + 1,33886 /$	0,9430	2,038
26	$e = \exp / -0,00061 \sigma_n + 1,36008 /$	0,9924	2,203

Tabela 4

Analiza wariancji dla regresji wskaźnika porowatości  
względem temperatury i liczby cykli zamrażania

Źródło zmienności	Stopnie swobody		Suma kwadratów		Sredni kwadrat	
	IF	IK	IF	IK	IF	IK
Regresja wspólna	1	1	0,332	0,448	0,333	0,448
Różnice między re- gresjami	12	12	0,003	0,002	0,0003	0,0002
Wspólne odchylenie	65	65	0,533	0,070	0,0008	0,001
Całkowita wewnątrz grup	78	78	0,389	0,521		
Poziom istotności różnic: Grunt IF: 0,389 Grunt IK: 0,998						

Poziom istotności różnic /tab.4/ wskazuje, że dla iłu IF i IK nie ma istotnych statystycznie różnic w kształtowaniu wskaźnika porowatości przez proces mrożenia cyklicznego w temperaturze do  $e_z = -20^{\circ}\text{C}$  i  $f = 4$  cykli.

Celem uzyskania pełniejszej informacji o funkcji odpowiedzi zapisa-  
nej równaniem (1), przeprowadzono analizę matematyczną. Obrazem geometry-  
cznym funkcji odpowiedzi jest powierzchnia odpowiedzi w trójwymiarowej  
przestrzeni czynnikowej. Ponieważ postać funkcji odpowiedzi nie jest zna-  
na, stąd dla jej aproksymacji przyjęto funkcję w postaci:

$$Y = \exp /AX_1 + BX_2 + CX_3 + D/-e_0 \quad (2)$$

gdzie:

- Y - wskaźnik porowatości /zmienna zależna/,
- $X_1$  - temperatura mrożenia gruntu
- $X_2$  - liczba cykli
- $X_3$  - naprężenie pionowe

} zmienna niezależna,

- A, B, C, D - współczynniki określone metodą najmniejszych kwadratów,
- $e_0$  - współczynnik empiryczny /wskaźnik porowatości gruntu niemrozo-  
nego, nie obciążonego/.

W tabeli 5 przedstawiono wyliczone współczynniki równania (2). Wartości  
współczynników korelacji wielokrotnej R, świadczą o istnieniu silnej ko-  
relacji między wskaźnikiem porowatości a zmiennymi z równania 2 oraz ade-  
kwatności przyjętego modelu regresji.

Tabela 5

Współczynniki równania (2) dla IF i IK

Rodzaj iłu	A	B	C	D	$e_0$	Współczynnik korelacji "R"
IF	0,00172	-0,00030	-0,00045	0,69258	1,027	0,9236
IK	0,00154	0,00269	-0,00053	1,30962	1,899	0,9277

Istotność /czyli nieprzypadkowość/ współczynnika korelacji wielokrotnie sprawdzono przy pomocy analizy wariancji /tab.6/.

Tabela 6

Analiza wariancji dla regresji wskaźnika porowatości względem temperatury, cykli zamrażania i naprężeń normalnych

Zmiennosc	Stopnie swobody	Suma kwadratów		Średni kwadrat		$F_{obl}$	
		IF	IK	IF	IK	IF	IK
Całkowita	90	0,412	0,541	0,005	0,006	168,26	178,66
Regresja	3	0,351	0,465	0,117	0,155		
Odchylenie	87	0,061	0,076	0,0007	0,0008		
Wartość statystyki-F:	IF:	$X_1 = 5,11$	$X_2 = 0,13$	$X_3 = 21,87$	$F_{0,05} = 2,72$		
	IK	$X_1 = 4,11$	$X_2 = 1,09$	$X_3 = 22,72$	$F_{0,05} = 4,01$		

W tabeli 7 przedstawiono macierz współczynnika korelacji, charakteryzującą wpływ zmiennych  $X_1$ ,  $X_2$ ,  $X_3$  na regresję wskaźnika porowatości - Y.

Z analizy macierzy współczynników korelacji widać, że współczynnik przy zmiennej  $X_3$  posiada znak ujemny. Oznacza to, że wzrost naprężeń normalnych powoduje zmniejszenie wskaźnika porowatości. Wniosek ten jest zgodny z fizyczną interpretacją procesu ściśliwości [8], [22]. Z tabeli 7 wynika, że zmienne  $X_1$ ,  $X_2$  są współzależne. Znaczyłoby to, że efekty działania różnych kombinacji liczby cykli i temperatury mrożenia na pewnych poziomach mogą być równoważne. Spostrzeżenie to sugerowane jest w fizycznej analizie ściśliwości iłu cyklicznie zamrażanego [11]. Najmniejszy udział w kształtowaniu wskaźnika porowatości, ma zmienna  $X_2$  /liczba cykli/. Pozwala to sądzić, że wpływ liczby cykli mrożenia do  $f = 4$  na zmianę wartości wskaźnika porowatości w przedziale naprężeń  $\sigma_n = 0,0$  do 400 kPa i zakresie temperatur mrożenia do  $\theta_z = -20^\circ\text{C}$  jest nieistotny statystycznie.

Istotność wpływu zmiennej  $X_2$  na regresję, zbadano przy pomocy testu F. Porównanie obliczonej wartości  $F_{obl} = 0,14$  dla iłu IF i  $F_{obl} = 1,09$  dla



Tabela 7

## Macierz korelacji

		$X_1$	$X_2$	$X_3$	Y
$X_1$	IF	1,0000	0,14342	0,0000	0,21164
	IK	1,0000	0,14342	-0,0000	0,17281
$X_2$	IF	0,14342	1,0000	-0,0000	0,02476
	IK	0,14342	1,0000	-0,0000	0,06796
$X_3$	IF	0,0000	-0,0000	1,0000	-0,89899
	IK	0,0000	-0,0000	1,0000	-0,91026
Y	IF	0,21164	0,02476	-0,89898	1,0000
	IK	0,17281	0,06796	-0,91026	1,0000

IK z  $F_{0,05} = 2,72$  wskazuje na brak regresji cząstkowej pomiędzy wskaźni -  
kiem porowatości a liczbą cykli zamrażania na przyjętym poziomie istotno -  
ści  $\alpha = 0,05$ . Wobec nieistotnego wpływu zmiennej  $X_2$ , policzono regre -  
sję, w której uwzględniono zmienne  $X_1$  i  $X_3$ .

Dla iżu IF i IK otrzymano następujące zależności

$$\text{IF} : Y = \exp /0,0017X_1 - 0,00054X_3 + 0,69193/-1,027 \quad (3)$$

$$\text{IK} : Y = \exp /0,0016X_1 - 0,00053X_3 + 1,31536/-1,899 \quad (4)$$

Współczynniki korelacji wynosiły odpowiednio:  $R_{IF} = 0,9236$  i  $R_{IK} = 0,9265$ . Wartość ich świadczy o silnej korelacji pomiędzy wskaźnikiem porowatości - Y i zespołem zmiennych:  $X_1$  - temperaturą mrożenia,  $X_3$  - naprężeniami oraz że czynniki niekontrolowane w eksperymencie stanowią około 15% zmienności analizowanego procesu. Przeprowadzona analiza sta -  
tystyczna nie wykluczała istnienia zależności od liczby cykli, a niewykazanie wpływu  $X_2$  powodowane może być przyjętym z konieczności, ograniczonym ob -  
szarem oznaczonej zmiennych niezależnych. Objął on tylko trzy temperatu -  
ry ujemne oraz początkowy zakres zmian liczby cykli. Z przyjętych, tempe -  
ratura  $\theta_z = -20^\circ\text{C}$  pozwalała w tym eksperymencie na pełny rozwój wyraźnych efektów towarzyszących cyklicznemu przemarzaniu [11].

Wartość wskaźnika porowatości początkowej zamrażania -  $e_{oz}$ , jak wynika z tabeli 3 i rysunków 4 i 5, wzrasta w kolejnych cyklach mrożenia. Najwyraźniejsze przyrosty wskaźnika  $e_{oz}$  zaznaczają się w temperaturze  $\theta_z = -20^\circ\text{C}$ . Ogólnie najwyższą wartość wskaźnik ten osiągnął w 4 cyklu. Róż -  
nice wskaźnika porowatości iłów zamrażanych dla poszczególnych warunków mrożenia, zmniejszają się w miarę przyrostu obciążenia /rys.2 i 3/. Krzywe ścisłości próbek iżu: zamrażanych cyklicznie i niezamrażanej zbliżają się do siebie, stając się prawie równoległe. Następuje to od pewnej war -  
tości naprężenia normalnego  $\sigma_n$ . Statystyczną istotność różnic wartości

średnich wskaźnika porowatości próbek: niezamarzniętej i po kolejnych cyklach mrożenia w temperaturze  $\theta_z = -20^\circ\text{C}$ , zweryfikowano przy pomocy testu Studenta [4]. Obliczenia wykonano dla kolejnych stopni obciążeń. Wcześniej sprawdzono równość odchyleń standardowych testem F-Snedecora. Wyniki obliczeń przedstawiono w tabeli 8.

Przedstawione w tabeli 8 wartości krytyczne i obliczeniowe statystyki - t wskazują, że dla ilu IF mrożonego cyklicznie w temperaturze  $\theta_z = -20^\circ\text{C}$  wpływ procesu przemarzania na kształtowanie ściśliwości jest istotny statystycznie dla pierwszego zamarzania, do naprężeń bliskich wartości  $\sigma_n = 100$  do 200 kPa. W czwartym cyklu zamarzania, wpływ ten zanika /w sensie statystycznym na przyjętym poziomie istotności  $\alpha = 0,01\%$  w granicach naprężeń  $\sigma_n \approx 200$  kPa.

Tabela 8

Wartość statystyki  $t_{obl}$  dla ilu IF w temperaturze mrożenia  $\theta_z = -20^\circ\text{C}$  względem próbek niezamarzanych przy kolejnych naprężeniach

Rodzaj ilu	Naprężenie - $\sigma_n$ /kPa/	100	200	400
	Liczba cykli - f			
IF	1	4,14	1,66	0,19
	4	4,22	2,76	0,15
$t_{0,95;13} = 1,77$		$t_{0,99;13} = 3,01$		

Przeprowadzone obliczenia dla ilu IK wykazały w temperaturze  $\theta_z = -20^\circ\text{C}$ , istotność statystyczną wpływu procesu mrożenia na ściśliwość dla wszystkich cykli  $f=4$  w zakresie naprężeń  $\sigma_n = 400$  kPa i przyjętym poziomie istotności  $\alpha = 0,01$ .

Z przedstawionych danych wynika, że szczególne znaczenie w kształtowaniu ściśliwości mrożonych próbek ilów ma temperatura. W temperaturach zamarzania bliskich  $\theta_z = 0^\circ\text{C}$  ściśliwość ilów praktycznie nie zmienia się. Dopiero spadek temperatury w gruncie poniżej punktu krystalizacji wody przechłodzonej /ok.  $\theta_z \leq -5^\circ\text{C}$ /, inicjujący proces krystalizacji będzie prowadził do istotnych zmian ściśliwości. Jest to widoczne szczególnie w początkowym zakresie obciążeń pionowych, po którym różnice ściśliwości powoli zanikają. Od pewnej wartości naprężenia  $\sigma_n$ , ściśliwość ilu mrożonego i niezamarzanego jest prawie taka sama. Wartość tego naprężenia  $\sigma_n$ , odpowiadać może tzw. naciskowi krytycznemu [16], [18]. Jednakże dopiero dalsze badania mogą uściślić ten problem.

## 5. PODSUMOWANIE

Przeprowadzone badania oraz analiza wyników pozwalają na podanie następujących uogólnień:

1. Ścisłość mrożonych past iłu pliczeńskiego w przyjętych warunkach badania zależy w sensie statystycznym /kolejność mocy/ od: naprężenia, temperatury mrożenia, liczby cykli.
2. Temperatura mrożenia bliska  $\Theta_z = -20^\circ\text{C}$  ma istotny wpływ na kształtowanie ścisłości zamarzających próbek iłu pliczeńskiego, szczególnie w początkowym zakresie przykładanych naprężeń /np. dla iłu IF  $\sigma_n = 200 \text{ kPa}$ /. Wyliczony przykładowo moduł edometryczny dla iłu IK w zakresie naprężeń  $\Delta\sigma_n = 0$  do  $50 \text{ kPa}$  wykazuje wzrost ścisłości próbki mrożonej jednokrotnie w porównaniu do niezamrznietej o około 35%.
3. Efekty działania liczby cykli mrożenia wskazują na udział tych efektów w zmianach ścisłości, szczególnie w temperaturze  $\Theta_z = -20^\circ\text{C}$ . Wpływ cykli mrożenia jest jednak nieistotny statystycznie w temperaturach zamarzania bliskich  $\Theta_z = 0^\circ\text{C}$ .
4. Zróżnicowany wpływ na ścisłość iłów temperatur ujemnych i liczby cykli dowodzi, że w temperaturach mrożenia bliskich  $\Theta_z = 0^\circ\text{C}$  można praktycznie pominąć liczbę cykli zamarzania /do  $f=4$ / przy analizowaniu ścisłości iłu IF i IK. /Dla temperatury  $\Theta_z = -0,5^\circ\text{C}$  w zakresie naprężeń  $\sigma_n = 0$  do  $50 \text{ kPa}$  różnica między współczynnikiem ścisłości badanych iłów niezamrznietego i po pierwszym, oraz po czwartym cyklu mrożenia wynosi nie więcej niż 8 do 9% /.
5. Różnice ścisłości próbek mrożonych cyklicznie iłów IF i IK, w porównaniu do niemrożonego są istotne do pewnej wartości naprężenia  $\sigma_n$  mogącego odpowiadać tzw. naciskowi krytycznemu /np. dla IF,  $\sigma_{nkr} \approx 200 \text{ kPa}$ /.  
 $\sigma_n$
6. Postać  $kr$  przyjętego do opisu ścisłości modelu regresyjnego w postaci funkcji wykładniczej /równanie (2)/, dobrze przybliża dane doświadczalne. Uzyskane współczynniki korelacji  $R = 0,9236$  i  $R_{IK} = 0,9277$  /świadczą, że ok. 85% zmian ścisłości iłu IF i IK zostało spowodowane czynnikami: temperaturą zamarzania, liczbą cykli i naprężeniem.
7. Współczynniki równań (3) i (4) wykazują jedynie istotne różnice w wyrazie wolnym, można więc przypuszczać, że zmiana rodzaju gruntu będzie powodowała głównie przesunięcie wyznaczonej powierzchni w układzie współrzędnych  $\sigma_n, \Theta_z, f$ .

## LITERATURA

- [1] Ackoff R.L.: Decyzje optymalne w badaniach stosowanych. PWN, Warszawa 1969
- [2] Alkire B.D.: A Mechanism for Predicting the Effect of Cyclic Freeze - Thaw on Soil Behavior p. 285-296 w [17]
- [3] Andersland O.B., Anderson D.M.: Geotechnical Engineering For Cold Region. Mc Graw-Hill Book Company, New York 1978
- [4] Bobrowski D.: Probabilistyka z zastosowaniami technicznymi. Wyd.Nauko - wo-Techniczne, Warszawa 1980
- [5] Cytowicz N.A.: The Mechanics of Frozen Ground, Mc Graw-Hill Book Company, New York 1975.

- [6] Jesseberger H.L.: State of the Art Report: Ground Freezing Mechanical Properties, Processes and Design p. 1-33 w [17]
- [7] Jesseberger H.L.: Die Tragfähigkeit von frostempfindlichem Böden nach dem Auftauen als Parameter für die Bemessung von Straßen sowie als Maßstab für die Bewertung von Frostkriterien, Straße und Autobahn 12/1973 s. 511-519
- [8] Kezdi A.: Handbook of Soil Mechanics, Akademia Kiado, Budapest 1974
- [9] Kumor M.K.: Chemiczno-mineralogiczne właściwości wybranych próbek iłu plicieńskiego z Bydgoszczy. ZN ATR nr 103 Budownictwo nr 19 s.44 -54, Bydgoszcz 1983
- [10] Kumor M.K.: Przemarzanie iłu plicieńskiego z Bydgoszczy w warunkach laboratoryjnych. ZN ATR nr 103 Budownictwo nr 19 s.55-66 Bydgoszcz 1983
- [11] Kumor M.K.: Ścisłość iłu plicieńskiego w zmiennych warunkach zamrażania. Praca doktorska. Politechnika Poznańska 1981
- [12] Kumor M.K.: Granice konsystencji wybranych próbek iłu plicieńskiego w cyklicznym procesie zamrażania. Archiwum Hydrotechniki T. XXX, z 3, 1983 s. 211-220
- [13] Mazurov G.P.: Fyzyko-mechaniczieskije svojstva mierzlych gruntov. Strojizdat, Leningrad 1975
- [14] Mielnikov P.I., Tolstichin N.I.: Obszczije mierzlotoviedienije. Izd. Nauka, Novosybirsk 1974
- [15] Młynarek Z.: Czynniki wpływające na opór stożka podczas statycznego sondowania gruntów spoistych. ZN AR Rozprawy Zeszyt nr 83, Poznań 1978
- [16] Pietrzyk K.: Analiza wpływu niektórych czynników na pęcznienie zamrażającego podłoża na podstawie badań laboratoryjnych. ZN PK Nr 1 Budownictwo Wodne nr 15, Kraków 1968
- [17] Preprints The 2-nd International Symposium on Ground Freezing. Trondheim, June 24-26 1980, Norwegian Institute of Technology
- [18] Rückli R.: Der Frost im Baugrund. Vien Springer Verlag 1950
- [19] Skarżyńska K.: Wpływ procesu zamrażania na niektóre właściwości fizyko-mechaniczne gruntów spoistych. ZN WSR Rozprawy 18, Kraków 1969
- [20] Stępkowska E.T.: Sorption properties of consolidated and compressed clays. Proc. International Clay Conference, Oxford 1978 p.457-464
- [21] Stępkowska E.T.: Test sorpcyjny i możliwości jego zastosowania w różnych badaniach. Archiwum Hydrotechniki T.XXIV z. 3 1977
- [22] Wiłun Z.: Zarys geotechniki. Wyd. Komunikacji i Łączności, Warszawa 1976
- [23] Wojciechowski E.: Inżynierska ocena iłu plicieńskiego w Bydgoszczy jako podłoża budowlanego /praca magisterska/. ZMGiF IBL ATR, Bydgoszcz 1983
- [24] Polska Norma PN-75/B-04481. Grunty budowlane. Badania laboratoryjne

## COMPRESSIBILITY OF PLIOCENE CLAY AFTER FREEZING-THAWING CYCLES

## Summary

The paper presents results of experiments on compressibility of two different pliocene clay pastes. Their compressibility changes were studied after various number of freezing-thawing cycles,  $f=0,1,2,3,4$  at a temperature  $\Theta_z = -20^\circ\text{C}, -5^\circ\text{C}, -0,5^\circ\text{C}$ .

The results of investigations indicate that the cyclic freezing process of pliocene clay increases the clay compressibility. A significant increase was observed with cyclic freezing at a temperature  $\Theta = -20^\circ\text{C}$

## СЖИМАЕМОСТЬ ЦИКЛИЧЕСКИ ЗАМОРАЖИВАЕМОЙ ПЛИОЦЕНСКОЙ ГЛИНЫ

## Резюме

В работе представлены изменения сжимаемости циклически замораживаемых паст плиоценовой глины с различным гранулометрическим составом. Исследования изменений сжимаемости проведены для  $f$  - циклов замораживания  $f = 0, 1, 2, 3, 4$ , при температуре замораживания  $\Theta_z = -20^\circ\text{C}; -5,0^\circ\text{C}; -0,5^\circ\text{C}$ . Существенные изменения сжимаемости обнаружены при циклическом замораживании при темп.  $\Theta = -20^\circ\text{C}$ . Наблюдаемое повышение сжимаемости составляло около 35%. При температуре замораживания около  $0^\circ\text{C}$  до около  $-5^\circ\text{C}$  сжимаемость практически не изменялась.



Jan Klugiewicz

## CHARAKTERYSTYKI HYDRAULICZNE KANAŁÓW DOPROWADZAJĄCYCH WODĘ DO PRZEPOMPOWNI POLDEROWYCH

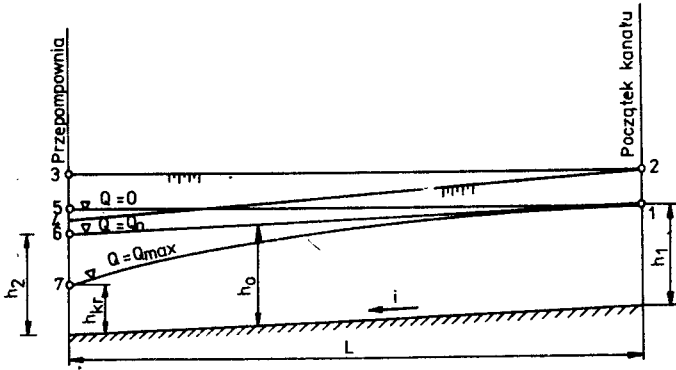
W artykule omówiono podstawowe charakterystyki hydrauliczne kanałów dla przepływów odpowiadających różnym rodzajom ruchu wody. Następnie przedstawiono graficznie analizę Florińskiego, uwzględniając współzależności między długościami, spadkami i szorstkościami kanału doprowadzającego wodę z polderu do przepompowni.

### 1. WSTĘP

Polderem nazywany jest obszar łądu położony w depresji bezwzględnej lub względnej chroniony przed zalaniem oraz podtopieniem zewnętrznym obwałowaniem i wewnętrzną siecią odwadniającą z głównym kanałem, z którego przepompownia podnosi nadmiar wody do odbiornika.

W pracy [5] szczegółowo omówiono różne typy polderów, ich elementy składowe oraz podano metody ustalania wydajności przepompowni. Wskazano tam na celowość podjęcia analizy współpracy sieci wodnej z przepompownią na polderach. Taka analiza może być również przydatna w inżynierii sanitarnej, zwłaszcza przy projektowaniu przepompowni z kanałem kanalizacyjnym. Zagadnienia hydraulicznej współpracy przepompowni z głównym kanałem odprowadzającym wodę z polderu są niezwykle istotne na etapie projektowania i eksploatacji. Temu zagadnieniu w naszej literaturze poświęcono jednak mało uwagi. Z tego względu celowe jest zaprezentowanie naszym specjalistom analizy tej współpracy zastosowanej przez Florińskiego [1]. Zagadnienia te przedstawiono w niniejszym i następujących artykułach [2, 3, 4]

W ramach niniejszego artykułu najpierw rozpatrzono będzie ruch cieczy w otwartym kanale o długości  $L$  oraz spadku dna  $i = \text{const}$ . Takie kanały można zaprojektować jako tzw. samoregulujące i niesamoregulujące. W kanałach samoregulujących podczas przepływu  $Q = 0$  zwierciadło wody ułoży się wzdłuż poziomej prostej 1-5 /rys.1/, natomiast przy  $Q = Q_0$  zwierciadło wody ułoży się na linii 1-6 równoległej do dna  $h_2 = h_0 = h_1$  i wówczas panuje ruch jednostajny, a pojemność kanału zawarta jest między liniami 1-6-5. Podczas maksymalnego przepływu  $Q = Q_{\text{max}}$  panuje ruch krytyczny, któremu towarzyszy położenie zwierciadła wody według krzywej depresji 1-7. Gdy wydajność pomp jest mniejsza od  $Q_0$ , tj. przepływu o ruchu jednostajnym, to zwierciadło wody ułoży się według krzywej piętrze - nia, natomiast w przeciwnym wypadku powstaje krzywa depresji.



Rys.1. Przekrój podłużny kanału polderowego przed przepompownią

W tym ostatnim przypadku głębokość  $h_2$  powinna zapewnić odpowiednie zagłębienie wlotów rur ssących pomp, aby nie dopuścić do zassania powietrza. Zmniejszenie  $h_2$  powoduje wzrost wysokości ssania, zmniejszenie wydajności pomp i może powodować zasysanie powietrza w postaci emulsji powietrzno-wodnej.

Kanały samoregulujące w porównaniu z niesamoregulującymi /rys.1/ wymagają zwiększonej /o zarys 2-3-4/ objętości robót ziemnych. Przy krótkich kanałach /do 1 km/ i małych spadkach zaleca się stosowanie kanałów samoregulujących, chociaż są kosztowniejsze w budowie. Należy wspomnieć, że w każdym przypadku wymagany jest pewien zapas głębokości, gdyż przy nagłym zatrzymaniu i włączeniu pomp powstaje nieustalony, raptownie zmienny ruch wody, któremu towarzyszą fale o wysokości 0,5+1,0 m, a nawet wyższe, w zależności od prędkości wody w ruchu ustalonym panującym w takim kanale.

## 2. PODSTAWOWE CHARAKTERYSTYKI HYDRAULICZNE KANAŁU

Kanał główny doprowadzający wodę do przepompowni w swej dolnej części posiada zasadniczą pojemność wyrównawczą, natomiast wyższą jego część stanowi odbiornik wody z sieci odwadniającej niższego rzędu. W praktyce projektowej kanał ten obliczany jest na maksymalny przepływ wody dla warunków ruchu jednostajnego. W rzeczywistości panuje tam ruch nieustalony powodowany zmiennym dopływem wody z polderu oraz włączaniem i wyłączeniem pomp, co omówiono w artykule [2].

W ruchu ustalonym wolnozmiennym można wyznaczyć charakterystyki hydrauliczne kanału przydatne w różnych rozważaniach. Zależność między przepływami i głębokościami wody w kanale podczas ruchu jednostajnego wyrażono krzywą  $h_0 = f/Q$ . Do wyznaczenia jej posłużono się znanym wzorem Chezy na średnią prędkość przepływu w cząstkowych powierzchniach przekroju poprzecznego. Zatem dla analizowanych głębokości wyznacza się odpowiadające im przepływy.



$$Q = F \cdot c \sqrt{R_h \cdot i} \quad (1)$$

Ponadto do analizy warunków pracy kanału wyznacza się zależność między głębokościami krytycznymi i przepływami  $h_{kr} = f/Q$ . W tym celu można wykorzystać znany warunek ruchu krytycznego

$$\frac{F^3}{B} = \frac{\alpha \cdot Q^2}{g} \quad (2)$$

Po odpowiednim przekształceniu wzoru (2), na przykład dla parabolicznego kształtu przekroju, otrzymano zależność

$$h_{kr} = \sqrt[5]{\frac{27}{8} \frac{\alpha Q^2}{g \cdot a^2}} \quad (3)$$

We wzorach 1 ÷ 3 oznaczono przez:

$Q$  - przepływ wody w kanale,

$c$  - współczynnik określany wzorami, np. Manninga lub Pawłowskiego,

$R_h = \frac{F}{U}$  - promień hydrauliczny,

$U$  - obwód zwilżony,

$i$  - spadek,

$\alpha$  - współczynnik Saint - Venanta,

$g$  - przyspieszenie ziemskie,

$a = \frac{B}{h}$ ,

$B$  - szerokość kanału na wysokości  $h$  nad dnem,

$h$  - głębokość wody w kanale,

$h_{kr}$  - głębokość krytyczna.

Przyjmując różne wielkości  $Q$  można obliczyć odpowiadające im głębokości krytyczne  $h_{kr}$ , które naniesione w układ współrzędnych umożliwiają wyznaczenie krzywej  $h_{kr} = f/Q$ .

Ustalony, wolnozmienny ruch wody był analizowany przez różnych uczonych /np. Pawłowskiego/ w wielu publikacjach. Przedstawia się tu jeden ze sposobów konstruowania krzywych zależności między głębokością wody w trapezowym kanale o długości  $L$ . W tym celu oznaczono:

$h_0$  - głębokość wody w kanale podczas ruchu jednostajnego,

$h_{kr}$  - głębokość krytyczna w kanale,

$h_1$  - głębokość wody w końcu kanału podczas ruchu wolnozmiennego,

$h_2$  - głębokość wody przed przepompownią podczas ruchu wolnozmiennego,

$i$  - spadek dna kanału.

Przyjmując głębokość wody  $h_1 = a$ , dla wyznaczenia  $h_2$  posłużyć się można równaniem niejednostajnego, wolnozmiennego ruchu wyprowadzonym w oparciu o metodę Bachmietiewa.

$$\frac{iL}{h_0} = \eta_2 - \eta_1 / 1-j / \left[ \varphi / \eta_2 / - \varphi / \eta_1 / \right] \quad (4)$$

gdzie

$$\eta_1 = \frac{h_1}{h_0}, \quad \eta_2 = \frac{h_2}{h_0}, \quad j = \frac{i \cdot \alpha \cdot C_s^2 \cdot B_s}{g \cdot U_s}$$

$$\varphi / \eta_1 / = - \int \frac{d\eta_1}{\eta_1^{x-1}}, \quad \varphi / \eta_2 / = - \int \frac{d\eta_2}{\eta_2^{x-1}}$$

$$x = 2 \frac{\log K_s - \log K_{h_0}}{\log h_s - \log h_0}$$

$$K_s = F_s \cdot C_s \cdot \sqrt{R_{hs}}$$

$$K_{h_0} = F_{h_0} \cdot C_{h_0} \sqrt{R_{h,h_0}}$$

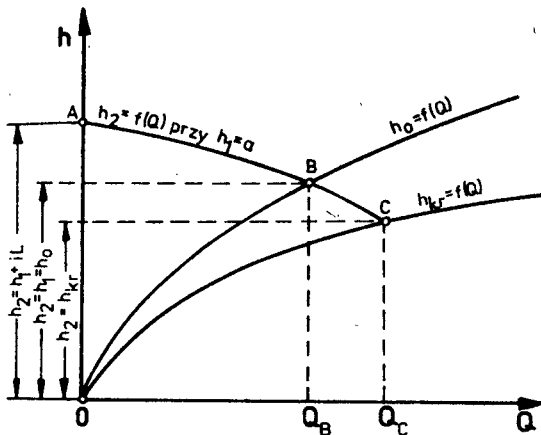
Parametry  $F, C, R_h$  - jak we wzorze 1/ z indeksem "h<sub>0</sub>" odnoszą się do głębokości wody w korycie podczas ruchu jednostajnego, natomiast z indeksem "s" należy obliczać dla głębokości  $h_s = 0,5 (h_1 + h_2)$ . Wielkości liczbowe funkcji  $\varphi(\eta_1)$ ,  $\varphi(\eta_2)$  odczytuje się najczęściej z tablic.

W dalszej analizie, kiedy z dwóch głębokości  $h_1, h_2$  jest znana tylko  $h_1$  więc według niej wyznacza się wielkość  $j$ . Dla wygody obliczeń przekształcono wzór (4) do postaci:

$$\frac{iL}{h_0} + \eta_1 - (1-j) \varphi(\eta_1) = \eta_2 - (1-j) \varphi(\eta_2) = A \quad (5)$$

Lewą stronę równania (5) jako wielkość stałą oznaczono przez  $A$ . W tym przypadku znając wielkości  $i, L$  oraz przyjmując głębokość  $h_1 = a$  wyznacza się  $h_0, j$  dla różnych głębokości "h<sub>0</sub>" i przepływów "Q" oraz znajduje odpowiadające głębokości  $h_2$ . Wykorzystując otrzymane wielkości  $h_2$  dla różnych przepływów  $Q$  wyznacza się  $h_2 = f/Q$  przy  $h_1 = a$  /rys.2/. Dla głębokości  $h_2 = h_1 = h_0$ , przy których w kanale panuje ruch jednostajny, przepływ wynosi  $Q_B$ . Jeżeli zmieni się głębokość  $h_2$ , jednostajny ruch wody będzie naruszony. Przy głębokościach  $h_2 > h_1$  zwierciadło wody ułoży się według krzywej spiętrzenia, natomiast przy  $h_2 < h_1$  według krzywej depresji. W pierwszym przypadku  $Q < Q_B$ , zaś w drugim  $Q > Q_B$ . W przypadku równości rzędnych na początku i na końcu kanału, czyli przy poziomym zwierciadle wody i przepływie  $Q = 0$ , zachodzi prosta zależność

$$h_2 = h_1 + i \cdot L \quad (6)$$



Rys.2. Charakterystyki  $h_0 = f(Q)$ ,  $h_{kr} = f(Q)$  i  $h_2 = f(Q)$  przy  $h_1 = a$ ,  $l = \text{const}$ ,  $i = \text{const}$ ,  $n = \text{const}$

Minimalna głębokość wody w kanale, równa głębokości krytycznej  $h_2 = h_{kr}$  / zapewnia maksymalny przepływ  $Q_{\text{max}}$ . Powyższe krzywe naniesiono na wspólny układ współrzędnych /rys.2/. Krzywa  $h_2 = f(Q)$  przy  $h_1 = a$  przecina w punkcie B krzywą  $h_0 = f(Q)$  oraz w punkcie C krzywą  $h_{kr} = f(Q)$ . Dla następujących przepływów:

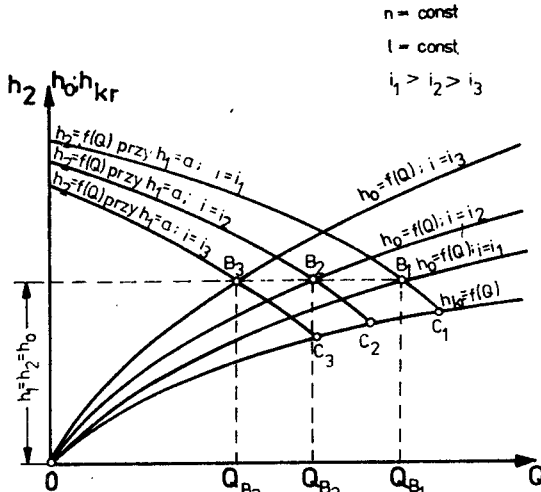
- $Q = Q_B$  - w kanale panuje ruch jednostajny,
- $Q < Q_B$  - w kanale panuje ruch opóźniony /piętrzenie/,
- $Q > Q_B$  - w kanale panuje ruch przyspieszony /depresja/,
- $Q = Q_C = Q_{\text{max}}$  przy  $h_2 = h_{kr}$ .

### 3. ANALIZA CHARAKTERYSTYK KANAŁÓW O ZMIENNYCH PARAMETRACH

Kolejno analizowana będzie zależność  $h_2 = f(Q)$  przy  $h_1 = a$  dla różnych spadków dna i długości kanału.

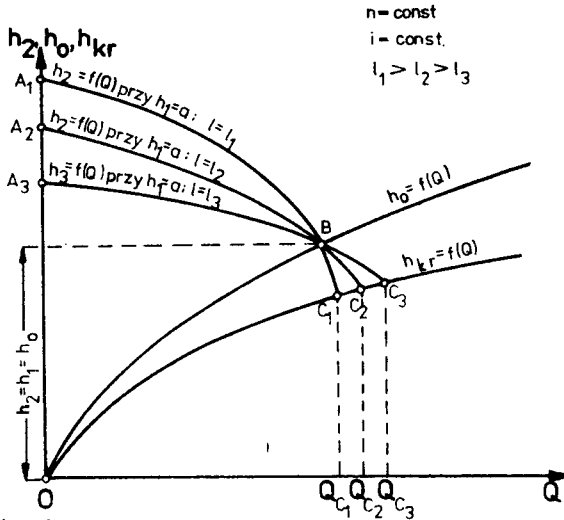
Na rysunku 3 podano charakterystyki hydrauliczne kanałów o różnym spadku dna, lecz o identycznych długościach i szorstkościach. Wraz z zwiększeniem spadku dna, przy jednakowych głębokościach  $h_2$  przed przepompownią wzrasta przepustowość kanału  $Q_{B_1} > Q_{B_2} > Q_{B_3}$ . Jeżeli  $Q = 0$ , wzrost spadku dna kanału powoduje zwiększenie głębokości wody przed przepompownią przy jednakowych wielkościach  $h_1 = a$ . Na polderach kanały główne wykonuje się czasem z poziomym dnem  $i=0$ . W takich kanałach podczas pracy pomp panuje ruch zmienny. Posiada on przy przepompowni zwiększone głębokości wody, żeby uzyskać taką przepustowość jak kanału z pochyłym dnem /ze spadkiem/. Zwiększenie głębokości początku kanału nie zawsze jest możliwe ze względu na ukształtowanie powierzchni.

W drugim wariantcie analizy założono stały spadek dna i współczynnik szorstkości, natomiast zmieniano długości kanału -  $l_1 > l_2 > l_3$ .



Rys.3. Charakterystyki  $h_0 = f(Q)$  i  $h_2 = f(Q)$  przy  $h_1 = a$ ,  
 $l_1 > l_2 > l_3$ ,  $l = \text{const}$ ,  $n = \text{const}$

Charakterystyki hydrauliczne dla tego wariantu przedstawiono na rysunku 4, z którego wynika, że wraz ze wzrostem długości kanału dla jednako -

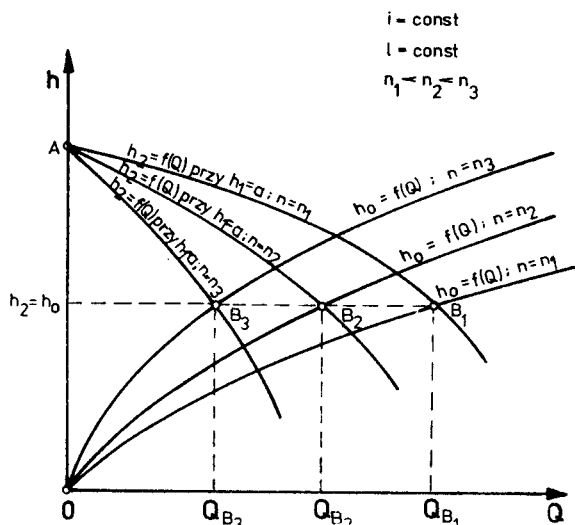


Rys.4. Charakterystyki  $h_0 = f(Q)$ ,  $h_{kr} = f(Q)$  i  $h_2 = f(Q)$   
przy  $h_1 = a$ ,  $l_1 > l_2 > l_3$ ,  $i = \text{const}$ ,  $n = \text{const}$

wej głębokości  $h_2$  przed przepompownią podczas położenia zwierciadła według krzywej piętrzenia przepustowość się zwiększa, natomiast według krzywej depresji maleje. Jeżeli  $Q = 0$  to  $h_2$  będzie się powiększać wraz ze wzrostem długości kanału. Przy ruchu jednostajnym przepustowość kanału będzie jednakowa dla różnych jego długości.

W trzecim wariantcie analizy założono identyczne długości i spadki, a zmieniono współczynniki szorstkości  $n_1 < n_2 < n_3$ . Charakterystyki hydra -

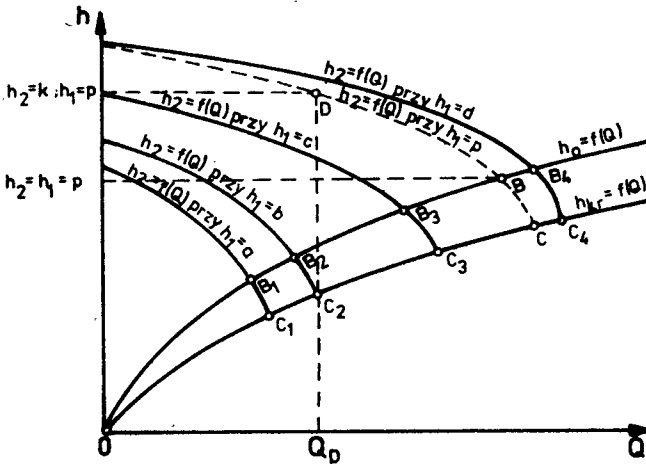
uliczne zilustrowano na rysunku 5. Dla identycznych głębokości  $h_2$  prze-



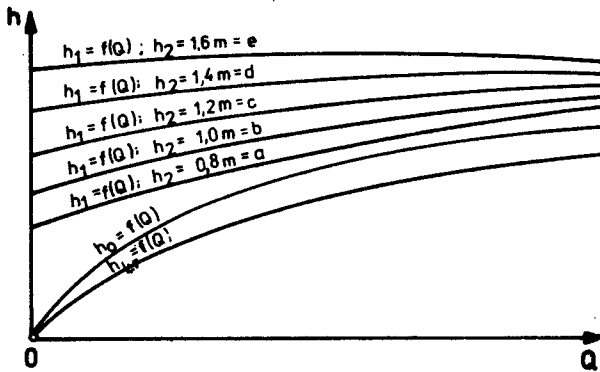
Rys.5. Charakterystyki  $h_0 = f(Q)$  i  $h_2 = f(Q)$  przy  $h_1 = a$ ,  
 $n_1 < n_2 < n_3$ ,  $l = \text{const}$ ,  $i = \text{const}$

puścawość kanału powiększa się przy coraz mniejszych wartościach  $n$ . Jeżeli  $Q = 0$ , to głębokość wody przed przepompownią będzie jednakowa niezależnie od wartości  $n$ .

W dalszych rozważaniach nie ograniczono się do skonstruowania tylko jednej krzywej  $h_2 = f(Q)$  przy  $h_1 = a$ , ponieważ stany wody na początku kanału ulegać będą zmianie podczas wezbrań wody dopływającej z polderu. W danym przypadku należy wyznaczyć kilka krzywych  $h_2 = f(Q)$  przy  $h_1 = a, h_1 = b, h_1 = c, h_1 = d, h_1 = e$  itp. Dla obliczeń inżynierskich przy wyznaczaniu krzywej  $h_2 = f(Q)$  zaleca się uwzględniać  $h_1 = \text{const}$  w przedziałach nie większych od 10 do 20 cm, aby uchronić się przed zbyt dużymi błędami. Na rysunku 6 przedstawiono charakterystyki dla  $h_1 = \text{const}$ . Jeżeli w kanale ustali się jakaś głębokość  $h_1 = p$ , to dla analizy reżimu pracy kanału wykonujemy następującą konstrukcję. Na osi rzędnych naniesiono wielkość  $p = h_2 = h_1$ , przez którą wykreślono poziomą linię do przecięcia się z krzywą  $h_0 = f(Q)$  w punkcie "B" odpowiadającym ruchowi jednostajnemu w kanale, a potem znanym sposobem wyznaczono nową krzywą  $h_2 = f(Q)$  przy głębokości  $h_1 = p$  na rys.6 krzywa przerywana/. Według tej krzywej dla dowolnego przepływu  $Q_D$  można znaleźć wielkość  $h_2 = j$ , i odwrotnie, przyjmując  $h_2$  można określić przepływ wody w kanale. Oprócz powyższych krzywych można wyznaczyć krzywe  $h_1 = f(Q)$  dla  $h_2 = \text{const}$  /a, b, e .../. Takie krzywe /rys.7/ łącznie z krzywymi  $h_2 = f(Q)$  dają pełniejszy obraz pracy kanału. Jednak krzywe  $h_1 = f(Q)$  przy  $h_1 = \text{const}$  można wykorzystać tylko



Rys. 6. Charakterystyki  $h_0 = f(Q)$ ,  $h_{kr} = f(Q)$  i  $h_2 = f(Q)$  przy  $h_1 = a, b, c, \dots$



Rys. 7. Charakterystyki  $h_0 = f(Q)$ ,  $h_{kr} = f(Q)$  i  $h_1 = f(Q)$  przy  $h_2 = a, b, c, \dots$

w tym przypadku, kiedy istnieją możliwości regulowania stanów wody na początku kanału, tj. zmiany wielkości  $h_1$ . Zazwyczaj nie buduje się w górnej części kanału głównego na polderach budowli regulujących przepływy, tak jak to ma miejsce w kanałach powyżej siłowni wodnych.

#### LITERATURA

- [1] Floriński M.M.: Sowmiestnyje rieżimy raboty osuszycielnych nasosnych stacyj i podwodiaszczich kanałow. Maszynopis dysertacji s.139, 1953
- [2] Klugiewicz J.: Analiza hydrauliczna kanałow polderowych dla warunków nieustalonego ruchu wody. ZN Budownictwo 23, ATR Bydgoszcz 1987

- [3] Klugiewicz J.: Charakterystyki pomp wirowych dla przepompowni polderowych. ZN Budownictwo 23, ATR Bydgoszcz 1987,
- [4] Klugiewicz J.: Współpraca kanałów z przepompowniami polderowymi. ZN Budownictwo 23, ATR Bydgoszcz 1987,
- [5] Klugiewicz J.: Odwadnianie terenów depresyjnych. Rozprawy nr 12 s. 179 ATR Bydgoszcz 1983

HYDRAULIC CHARACTERISTICS OF CHANALS DRAINING WATER TO  
POLDER INTERMEDIATE PUMPING STATION

Summary

In the paper basic hydraulic characteristics of chanals for flows equivalent to different kinds of water movement have been discussed. Next, Floryński's graphic analysis is introduced taking into consideration interdependences among lehghts, drops and roughness of canal draining water from a polder to a pump station.

ГИДРАВЛИЧЕСКИЕ ХАРАКТЕРИСТИКИ КАНАЛОВ ПОДВОДЯЩИХ ВОДУ С ПОЛЬДЕРОВ К НАСОСНЫМ СТАНЦИЯМ

Резюме

В статье рассмотрены основные гидравлические характеристики каналов для расходов соответствующих различным видам движения воды. Затем представлен графически гидравлический анализ Флоринского, принимающий во внимание взаимозависимость между длиной, стоком и шероховатостью канала отводящего воду из пolderов на станцию перекачки.





Jan Klugiewicz

ANALIZA HYDRAULICZNA KANAŁÓW POLDEROWYCH DLA WARUNKÓW  
NIEUSTALONEGO RUCHU WODY

W artykule podano adaptowany przez Florińskiego sposób analizy hydraulicznej głównego kanału polderowego dla nieustalonego ruchu wody, który jest następstwem nagłego wyłączenia i włączenia do pracy pomp.

1. WSTĘP

Charakterystyki hydrauliczne kanałów doprowadzających wodę do przepompowni polderowych przedstawione w artykule [2] nie obejmowały analizy nieustalonego ruchu wody wywołanego nagłym włączeniem i wyłączeniem z pracy zespołów pompowych. Według Florińskiego [1] powyższe zagadnienia były pomijane przy projektowaniu kanałów i dlatego podjął on próbę adaptacji metod stosowanych podczas projektowania kanałów doprowadzających wodę do elektrociepłowni lub hydroelektrowni. Konstrukcja i warunki pracy powyższych kanałów są zbliżone do kanałów głównych przed przepompownią na polderach, a różni je to, że te ostatnie nie posiadają na początku kanału budowli umożliwiających regulację stanów i przepływów.

2. WYŁĄCZENIE Z PRACY POMP

Po wyłączeniu z pracy części zespołów pompowych  $/Q'_p/$  następuje zmniejszenie maksymalnej wydajności przepompowni  $/Q_p/$  do wielkości

$$\Delta Q_p = Q_p - Q'_p \quad (1)$$

Jeżeli jednocześnie wyłączono wszystkie pracujące zespoły pompowe  $/Q''_p = Q_p/$ , to

$$\Delta Q_p = Q_p - Q''_p = 0 \quad (2)$$

Pojawiają się wówczas najbardziej niekorzystne warunki pracy kanału, które są przedmiotem niniejszej analizy, przy następujących założeniach:

1. Czoło fali jest pionowe podczas całego ruchu wody.
2. Zwierciadło wody w czasie przesuwania się fali stanowi linię poziomą.

3. Siły spójności /lepkości/ cieczy zostały pominięte w czasie ruchu fali.

Rozpatrywany jest ruch fali na odcinku kanału ograniczonym przekrojami n-1 i n /rys.1/. Dla przekroju n wydatek fali wynosi

$$\Delta Q_n = C_n \cdot B'_n \cdot Z_n \quad (3)$$

gdzie:

$C_n$  - prędkość ruchu fali

$Z_n$  - wysokość fali.

$B'_n$  - szerokość przekroju w połowie wysokości fali, czyli przy  $0,5 \cdot Z_n$

Dla kanału o prostokątnym przekroju poprzecznym

$$B'_n = B_{no} \quad (4)$$

gdzie:

$B_{no}$  - początkowa szerokość przekroju poprzecznego /tj. zwierciadła wody w ruchu ustalonym/

Przy trapezowym przekroju

$$B'_n = B_{no} + m Z_n \quad (5)$$

w którym:

$m$  - współczynnik nachylenia skarp kanału

Dla koryta o parabolicznym przekroju przy  $\frac{B}{h} = a$  w przybliżeniu

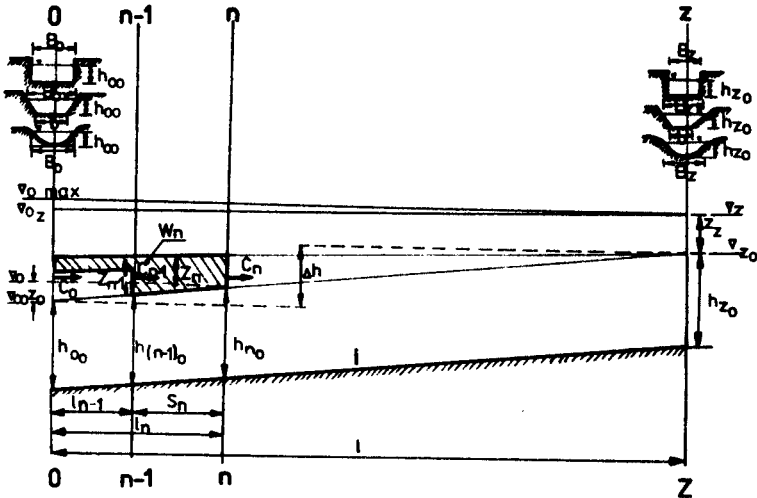
$$B'_n = B_{no} + \frac{a}{2} \cdot Z_n \quad (6)$$

Prędkość ruchu fali określono ze wzoru

$$C_o = \sqrt{g \frac{F_{no}}{B'_n} \left(1 + \frac{3}{2} \cdot \frac{B'_n}{F_n} \cdot Z_n\right)} - V_n \quad (7)$$

w którym oznaczono indeksem "n" wielkości przy przemieszczaniu się fali przez przekrój n-n, natomiast indeksem "o" wielkości początkowe /przed pojawieniem się fali spiętrzenia/ w danym przekroju,  $V_n$  - prędkość średnia w przekroju "n" pod falą / w ruchu ustalonym/. W celu rozwiązania postawionego problemu należy określić wysokość fali  $Z_o$  i prędkość ruchu  $C_o$  w przekroju przepompowni w momencie wyłączenia pomp. Te wielkości wyznacza się z równań

$$\Delta Q_o = C_o \cdot B'_o \cdot Z_o \quad (8)$$



Rys.1. Schemat do obliczeń fali spiętrzenia

$$C_o = \sqrt{g \frac{F_{oo}}{B'_o} \left(1 + \frac{3}{2} \cdot \frac{B'_o}{F_o} \cdot z_o\right)} - v_{oo} \quad (9)$$

Rozwiązanie tych równań przeprowadza się metodą kolejnych przybliżeń. W tym celu podstawia się wielkości  $z_o$  i z jednego z równań wyznacza się  $C_o$ . Następnie otrzymaną wielkość  $C_o$  wyznacza się z drugiego równania. Te czynności przeprowadza się dotąd, dopóki wielkości  $C_o$  obliczone z dwóch równań nie będą dostatecznie bliskie. Zatem znajduje się także rzędną zwierciadła wody w przekroju przepompowni w momencie wyłączenia z pracy pomp. Ta rzędna wynosi

$$V_o = V_{oo} + z_o \quad (10)$$

gdzie:

$V_{oo}$  - początkowa rzędna zwierciadła wody w przekroju przy przepompowni.

Podobnie można wyznaczyć "c" i "z" w dolnym przekroju kanału. Rzędną zwierciadła wody przy przepompowni, kiedy fala przesunie się do początku kanału /przekrój Z-Z kanału rys.1/, określa zależność

$$V_{oz} = V_z = V_{zo} + z_z \quad (11)$$

Najwyższa rzędna zwierciadła wody przy przepompowni pojawi się w momencie, gdy odbita fala po dopłynięciu do przekroju Z-Z powróci do przekroju 0-0 /przepompowni/. Zanim określi się wielkości charakteryzujące odbitą falę, należy znaleźć czas przemieszczenia frontu i objętość fali. Czas przemieszczenia się frontu fali między przekrojami n-1 i n

$$\Delta t_n = \frac{S_n}{\bar{c}_n} \quad (12)$$

gdzie:

$S_n$  - długość rozpatrywanego odcinka kanału

$\bar{c}_n$  - średnia prędkość fali na odcinku  $S_n$ , którą z przybliżeniem można określić ze średniej arytmetycznej

$$\bar{c}_n = 0,5 (c_{n-1} + c_n) \quad (13)$$

Wykorzystując warunek ciągłości przepływu

$$W_n = \Delta Q_o \cdot \Delta t_n = \frac{\Delta Q_o \cdot S_n}{0,5(c_{n-1} + c_n)} \quad (14)$$

w którym:

$W_n$  - objętość wody zgromadzonej w czasie  $\Delta t_n$  między przekrojami 0-0 i n-n /na rys.1 obrys zakreskowany/

Wielkość  $W_n$  równa się różnicy objętości fali dla odnośnych przekrojów

$$W_n = W'_n - W'_{n-1} \quad (15)$$

Przy czym  $W'_n$  i  $W'_{n-1}$  wyznacza się z ogólnego wzoru na ostrosłup ścięty

$$W = \frac{1}{3} L(F_1 + F_2 + \sqrt{F_1 \cdot F_2}) \quad (16)$$

w którym:

$W$  - objętość kanału na długości  $L$  między przekrojami  $F_1, F_2$

$F_1, F_2$  - pole przekroju poprzecznego na początku i końcu kanału

W rozpatrywanym przypadku /rys.1/

$$W'_{n-1} = \frac{1}{3} l_{n-1} (F'_{n-1} + F'_o + \sqrt{F'_{n-1} \cdot F'_o}) \quad (17)$$

gdzie:

$l_{n-1}$  - odległość między przekrojami 0-0 i n-1

$F'_{n-1}, F'_o$  - pole przekroju poprzecznego fali dla /n-1/-/n-1/ i 0-0

$$W'_n = \frac{1}{3} l_n (F'_n + F''_o + \sqrt{F'_n \cdot F''_o}) \quad (18)$$

gdzie:

$l_n$  - odległość między przekrojami 0-0 -(n-n)

$F'_n, F''_o$  - pole przekroju poprzecznego fali dla n-n, 0-0

Dla trapezowego przekroju poprzecznego kanału

$$F'_0 = [B_{00} + m (Z_{n-1} + i \cdot l_{n-1})] (Z_{n-1} + i \cdot l_{n-1}) \quad (19)$$

$$F'_{n-1} = (B_{(n-1)0} + m Z_{n-1}) Z_{n-1} \quad (20)$$

$$F''_0 = [B_{00} + m (Z_n + i \cdot l_n)] (Z_n + i \cdot l_n) \quad (21)$$

$$F'_n = (B_{n0} + m \cdot Z_n) \cdot Z_n \quad (22)$$

W powyższych wzorach:

- $B_{00}, B_{/n-1/0}, B_{n0}$  - początkowa szerokość zwierciadła wody /w ruchu ustalonym/ w przekrojach kanału 0-0, /n-1/-/n-1/, n-n,  
 $m$  - współczynnik nachylenia skarp kanału,  
 $Z_{n-1}$  - wysokość fali w przekroju /n-1/-/n-1/,  
 $Z_n$  - wysokość fali w przekroju n-n,  
 $i$  - spadek dna kanału,  
 $l_{n-1}, l_n$  - długość odcinków kanału od przekroju 0-0 do rozpatrywanych przekrojów, czyli /n-1/-/n-1/ ; n-n.

Dla parabolicznego kształtu przekroju poprzecznego kanału:

$$F'_0 = \frac{2a}{3} [(h_{/n-1/0} + Z_{n-1})^2 - h_{00}^2] \quad (23)$$

$$F'_{n-1} = \frac{2a}{3} [(h_{/n-1/0} + Z_{n-1})^2 - h_{/n-1/0}^2] \quad (24)$$

$$F''_0 = \frac{2a}{3} [(h_{n0} + Z_n)^2 - h_{00}^2] \quad (25)$$

$$F'_n = \frac{2a}{3} [(h_{n0} + Z_n)^2 - h_{n0}^2] \quad (26)$$

gdzie:

$$a = \frac{B}{h}$$

$B$  - szerokość przekroju poprzecznego u góry

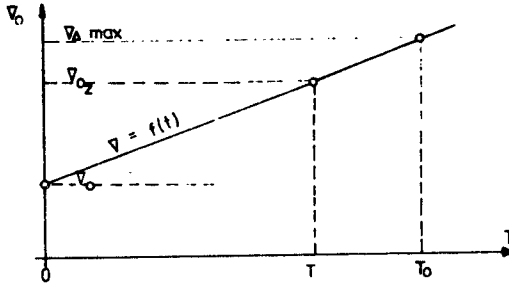
$h$  - głębokość kanału

$h_{00}, h_{/n-1/0}, h_n$  - początkowe głębokości w kanale

$Z_{n-1}, Z_n$  - wysokość fali w przekrojach n-1, n

Według wyznaczonych rzędnych zwierciadła wody w kanale przy ruchu odbitej fali konstruuje się zależność  $\nabla = f/t$ , przyjmując jej liniowy charakter w ciągu całego ruchu fali /rys.2/.

Można więc przystąpić teraz do obliczeń parametrów ruchu odbitej fali i przemieszczającej się od początku kanału do przekroju przy przepompowni. W tym przypadku położenie zwierciadła wody w kanale, po którym przesuwa się odbita fala będzie znane. To doprowadza do modyfikacji profilu fali w czasie ruchu w kanale i zmiany wielkości wydatku fali i



Rys.2. Zmiany rzędnych zwierciadła wody

poniżej niej /pod falą/. W celu uproszczenia obliczeń przyjęto następujące założenia:

1. Odbita fala przesuwa się w strumieniu ograniczonym poziomą płaszczyzną na rzędnej  $V_z$ .
2. Wydatek wody pod falą pozostaje niezmienny w czasie przesuwania się odbitej fali i przyjmuje równy przepływowi w przekroju z-z w momencie dopływu do niego fali spiętrzenia. Wtedy

$$Q_z = Q_0 - C_z \cdot Z_z \cdot B'_z \quad (27)$$

Prędkość odbitej fali, przy uwzględnieniu powyższych założeń, można wyznaczyć z przybliżonej zależności

$$C_n = \sqrt{g \frac{F_{nz}}{B_{nz}} + \frac{Q_z}{F_{nz}}} \quad (28)$$

w której:

$F_{nz}$  - powierzchnia przekroju poprzecznego,

$B_{nz}$  - szerokość u góry przekroju poprzecznego dla n-n po uwzględnieniu, że poziom zwierciadła wody w kanale położony jest na rzędnej  $V_z$ .

Po wyznaczeniu prędkości w dowolnych przekrojach n-n, /n-1/-/n-1/, należy obliczyć średnią prędkość na odcinku kanału między tymi przekrojami.

$$\bar{c} = 0,5 /C_n + C_{n-1}/ \quad (29)$$

oraz czas potrzebny do przebycia tego odcinka

$$\Delta t' = \frac{S_n}{\bar{c}} \quad (30)$$

gdzie:

$S_n$  - długość odcinka kanału między przekrojami n, n-1

$\Delta t'$  - czas przesuwania się fali na długości  $S_n$ .

Sumując odstępy czasu przesuwania się fali ujemnej/depresji/ od przekroju z-z przez poszczególne odcinki do przekroju 0-0, otrzymuje się czas  $T'$  przepływu fali od początku kanału do przepompowni. Najwyższa rzędna zwierciadła wody przed przepompownią powstaje w momencie

$$T_0 = T + T'$$

gdzie:

$T$  - czas przepływu fali spiętrzenia /dodatniej/

Dla kanału z niezmiennym przekrojem poprzecznym na rozpatrywanym odcinku można ograniczyć obliczenia ruchu fali do 2-3 przekrojów, a to znacznie zmniejsza pracochłonność.

### 3. WŁĄCZENIE DO PRACY ZESPOŁÓW POMPOWYCH

Nagłe włączenie do pracy zespołów pompowych powoduje zmniejszenie głębokości wody w kanale przed przepompownią i przesuwanie się fali opróżniania w górę. Nadmierne zmniejszenie głębokości wody przy przepompowni jest niekorzystne, bowiem nie tylko obniża się współczynnik sprawności pomp ale może doprowadzić do zasysania powietrza i przerw w pompowaniu. Dlatego takie obliczenia należy wykonywać korzystając z powyżej podanej procedury.

Na zakończenie można stwierdzić, że analizowany nieustalony ruch wody trwa dość krótko w porównaniu z czasem trwania ustalonego ruchu wody. Mimo to, przy projektowaniu powinien być uwzględniany, bowiem może być pomocny w ustalaniu rzędnych komór ssawnych, umocnienia skarp kanałów i wzniesienia korony wałów.

### LITERATURA

- [1] Florinskij M.M.: Sowmestnyje rieżimy raboty osuszycielnych nasosnych stancij i podwodiaszczich kanałów. Maszynopis dysertacji s.139,1953
- [2] Klugiewicz J.: Charakterystyki hydrauliczne kanałów doprowadzających wodę do przepompowni polderowych. ZN Budownictwo 23, ATR Bydgoszcz 1987

### HYDRAULIC ANALYSIS OF A POLDER CANAL FOR CONDITIONS OF TRANSIENT MOVEMENT OF WATER

#### Summary

The paper presents adapted by Floryński way of hydraulic analysis of main polder canal for transient movement of water resulting in sudden switch off or switch on of pumps work.

ГИДРАВЛИЧЕСКИЙ АНАЛИЗ ПОЛЬДЕРНОГО КАНАЛА ДЛЯ НЕУСТАНОВИВШИХСЯ УСЛОВИЙ  
ДВИЖЕНИЯ ВОДЫ

Резюме

В статье приведен адаптированный Флеринским способ гидравлического анализа главного польдерного канала для неустановившегося движения воды, которое является следствием внезапного выключения или включения насосной станции.



Jan Klugiewicz

## CHARAKTERYSTYKI POMP WIROWYCH PRZEPOMPOWNI POLDEROWYCH

W artykule omówiono stosowane, na polderach w ZSRR pompy oraz ich charakterystyki hydrauliczne, których znajomość jest potrzebna do analizy współpracy kanałów z przepompowniami polderowymi.

### 1. WSTĘP

Kontynuując analizę Florińskiego [1], którą dotychczas zaprezentowano w artykułach [4, 5] i zmierzającą do określenia współpracy kanałów z przepompowniami [6], przedstawimy obecnie charakterystyki pomp wirowych.

W przepompowniach radzieckich i polskich odwadniających tereny depresyjne zazwyczaj są stosowane pompy wirowe /wirnikowe, śmigłowe/, charakteryzujące się małymi ciśnieniami i dużymi wydajnościami.

Przyjmując do dalszej analizy następujące oznaczenia:

$h_{gs}$  - geodezyjna wysokość ssania,

$h_{gt}$  - geodezyjna wysokość tłoczenia,

$h_r$  - geodezyjna wysokość podnoszenia,

$h_{ss}$  - straty ciśnienia powstałe z oporów hydraulicznych na ssaniu,

$h_{st}$  - straty ciśnienia powstałe z oporów hydraulicznych na tłoczeniu,

$h_c$  - straty ciśnienia całkowite na ssaniu i tłoczeniu,

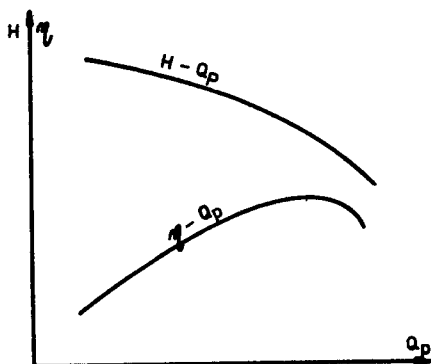
Całkowita wysokość podnoszenia stanowi sumę

$$H = h_{gs} + h_{gt} + h_{ss} + h_{st} = h_r + h_c.$$

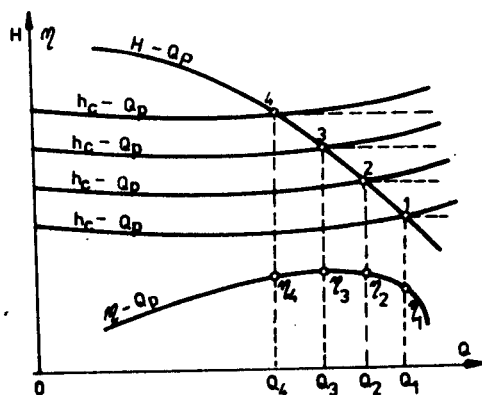
Zazwyczaj przepompownie odwadniające posiadają krótkie rurociągi sawne i tłoczne lub w ogóle ich nie mają /przepompownie zblokowane/, dlatego straty hydrauliczne na długości /liniowe/ są pomijane. W całkowitej wysokości podnoszenia dominuje więc geodezyjna wysokość podnoszenia.

### 2. CHARAKTERYSTYKI POMP

Na rysunku 1 przedstawiono krzywe zależności ciśnienia  $H$  od wydajności  $Q_p$ , tj.  $H - Q_p$  oraz współczynnika sprawności  $\eta$  od wydajności, czyli  $\eta - Q_p$ . Powyższe zależności oznaczone są także odpowiednio  $H=f/Q_p$ ,  $\eta=f/Q_p$

Rys.1. Charakterystyki  $H-Q_p$  i  $\eta-Q_p$ 

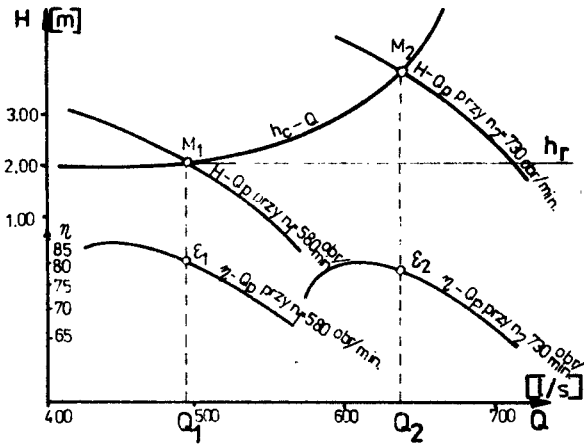
Przy zmiennej geodezyjnej wysokości podnoszenia  $h_x$  wyznacza się sposobem graficznym punkty przecięcia krzywej  $H-Q_p$  z odpowiednimi krzywymi oporów przewodów  $h_c-Q_p$  przy różnych wielkościach  $h_x$  /rys.2/. Powstałe

Rys.2. Charakterystyki  $\eta-Q_p$  oraz  $H-Q_p$  i  $h_c-Q_p$  z roboczymi punktami /1 ÷ 4/ pracy

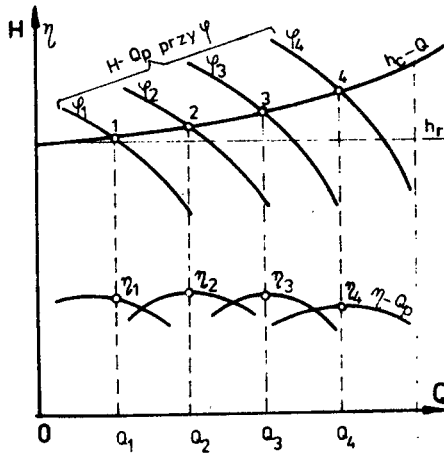
punkty 1, 2, 3 i 4 nazywają się roboczymi punktami pracy. Każdemu punktowi pracy odpowiada wielkość wydajność  $Q_1, Q_2, Q_3, Q_4$  i współczynnika sprawności  $\eta_1, \eta_2, \eta_3, \eta_4$  zastosowanych pomp. Należy nadmienić, że powyższa analiza dotyczy warunku zmiany wydajności pomp przy otwartej zasuwie na rurociągu tłocznym i przy stałej liczbie obrotów wirnika  $n = \text{const}$ . Jeżeli bowiem ulegnie zmianie liczba obrotów, wówczas powstają nowe charakterystyki, które schematycznie przedstawiono na rysunku 3.

W przepompowniach odwadniających tereny depresyjne zaleca się stosowanie pomp ze zmienną kątą nachylenia łopatek wirnika, co wpływa na zmianę wydajności od  $Q_1$  do  $Q_4$  oraz niewielkie wahania wielkości współczynnika sprawności /rys.4/. Jest to pozytywna cecha podczas eksploatacji przepompowni polderowych.

Nadmienia się, że istnieje możliwość regulacji wydajności pomp między in-

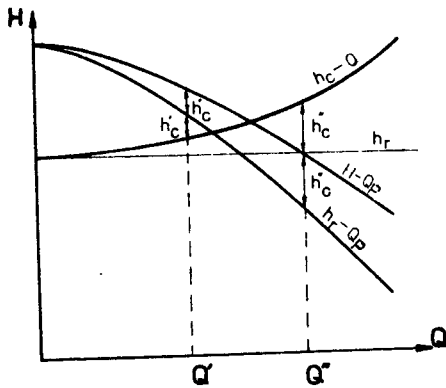


Rys.3. Charakterystyki  $h_c - Q$  oraz  $H - Q_p$  i  $\eta - Q_p$  przy różnych liczbach obrotów wirnika



Rys.4. Charakterystyki  $h_c - Q$  oraz  $H - Q_p$  i  $\eta - Q_p$  przy różnym kącie  $\varphi$  nachylenia łopatek wirnika

nymi za pomocą zasuw instalowanych na rurociągu tłocznym. Powstają przez to dodatkowe straty energii i maleje współczynnik sprawności. Zasady takiej regulacji pomp wirnikowych dogodnie jest wyjaśnić wykorzystując krzywą  $h_r - Q_p$  /zamiast  $H - Q_p$ /, którą konstruuje się przez odjęcie od rzędnych charakterystyki  $H - Q_p$  wielkości strat ciśnienia z krzywej  $h_c - Q$  dla identycznych odciętych, czyli wydajności /rys.5/.



Rys.5. Charakterystyki  $h_c - Q$  oraz  $H - Q_p$  i  $h_r - Q_p$  przy regulacji zasuwa

Na zakończenie można wspomnieć, że charakterystyki pomp wg Florińskiego [1] stanowią wprowadzenie dla dalszych rozważań [6]. Pełniejsze omówienie tych zagadnień znajduje się w publikacjach [2,3,7,8].

#### LITERATURA

- [1] Floriński M.M.: Sowmiestnyje rieżymy raboty osuszycielnych nasosnych stancij i podwodiaszczych kanałow. Maszynopis dysertacji, 1953 s.139
- [2] Jankowski F.: Pompownie i urządzenia hydroforowe. Arkady, 1966 s.510
- [3] Jankowski F.: Pompy i wentylatory w inżynierii sanitarnej. Arkady, 1975 s.399
- [4] Klugiewicz J.: Charakterystyki hydrauliczne kanałow doprowadzających wodę do przepompowni polderowych. ZN Budownictwo 23, ATR Bydgoszcz 1987
- [5] Klugiewicz J.: Analiza hydrauliczna kanałow polderowych dla warunków nieustalonego ruchu wody. ZN Budownictwo 23, ATR Bydgoszcz 1987
- [6] Klugiewicz J.: Współpraca kanałow z przepompowniami polderowymi. ZN Budownictwo 23. ATR Bydgoszcz 1987
- [7] Łazarkiewicz Sz., Troskoleński A.T.: Pompy wirowe. PWT, 1959, s.553
- [8] Łomakin A.A.: Centrobieżnyje i osjewyje nasosy. Wyd. Maszynostrojenie, 1966, s.362

#### CHARACTERISTICS OF ROTODYNAMIC PUMPS IN POLDER INTERMEDIATE PUMPING STATIONS

##### Summary

The paper discusses pumps applied on polders in the USSR and their hydraulic characteristics, knowledge of which is necessary for analysis of collaboration of canals with polder intermediate pumping stations.

ХАРАКТЕРИСТИКА РОТОРНЫХ НАСОСОВ ПОЛЬДЕРНЫХ СТАНЦИЙ ПЕРЕКАЧКИ

Резюме

В статье описаны применяемые в СССР насосы и их гидравлическая характеристика. Знакомство с этими устройствами необходимо для анализа совместной работы каналов и польдерных станций перекачки.



Jan Klugiewicz

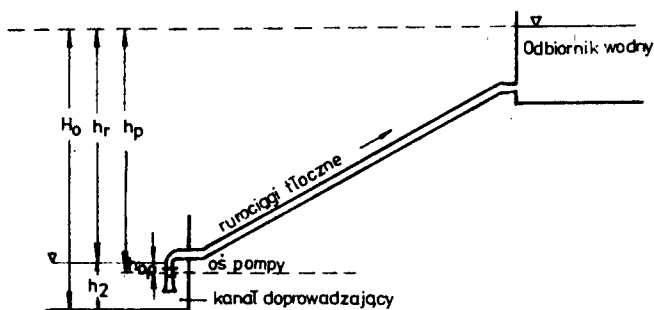
### WSPÓŁPRACA KANAŁÓW Z PRZEPOMPOWNIAMI POLDEROWYMI

Zaprezentowano sposób Florińskiego w zakresie analizy współpracy kanału z przepompowniami polderowymi. Rozpatrzono przypadki, w których stały jest kąt pochylenia łopatek wirnika pomp a zmienne są stany wody w kanale i w odbiorniku oraz zmienne obroty wirnika. Podano sposób wykorzystania całkowych krzywych dopływu i pompowania podczas projektowania i eksploatacji pomp.

#### 1. WSTĘP

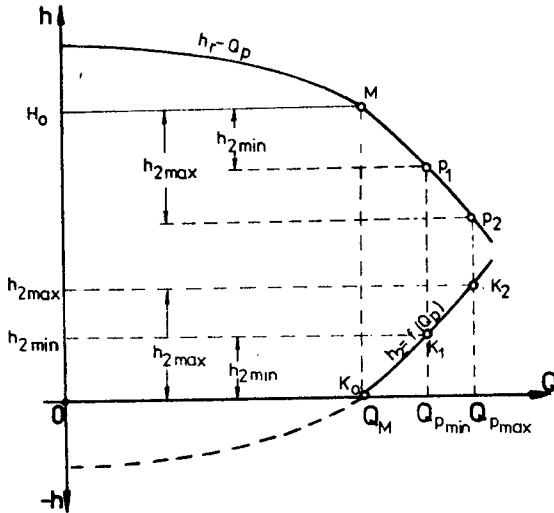
Analiza współpracy kanału doprowadzającego z przepompownią polderową według Florińskiego [1], z uwzględnieniem informacji przedstawionych w artykułach [2,3,4], poprzedzona zostanie wyznaczeniem charakterystyki  $h_2 - Q_p$ . Stanowi ona zależność między głębokością  $h_2$  wody w doprowadzającym kanale i wydajnością pomp  $Q_p$ .

Dysponując krzywymi  $h_r - Q_p$  można graficznie wyznaczyć krzywe  $h_2 - Q_p$  uwzględniając  $H_0$ , czyli różnicę rzędnych zwierciadła wody w odbiorniku i dna kanału doprowadzającego wodę do pomp osiowych /śmigłowych/ pracujących w układzie przedstawionym na rysunku 1. Jednym z warunków właściwej pracy



Rys.1. Schemat układu pompowego

pomp jest zapewnienie co najmniej głębokości minimalnej  $h_{2min}$ , przy której istnieje dostateczne zagłębienie wlotu rury ssącej pod zwierciadłem wody zapobiegające zassaniu powietrza. Z rysunku 2 wynika, że praca pomp będzie przebiegać na odcinku  $K_1K_2$  krzywej  $h_2 - Q_p$  z wydajnością od  $Q_{pmin}$  do  $Q_{pmax}$ .

Rys.2. Schemat konstrukcji charakterystyki  $h_2-Q_p$ 

2. WSPÓLPRACA KANAŁU Z PRZEPOMPOWNIĄ PRZY  $h_{odb} \neq \text{const}$ ,  $h_2 \neq \text{const}$  i  $\varphi = \text{const}$

Z kanału o charakterystykach  $h_0 = f/Q$ ,  $h_{kr} = f/Q$ ,  $h_r-Q_p$  oraz  $h_2 = f/Q$  przy stanach na jego początku  $h_1 = a + e$  podnoszona jest wodą do odbiornika przez dwie pompy o różnych charakterystykach /rys.3/.

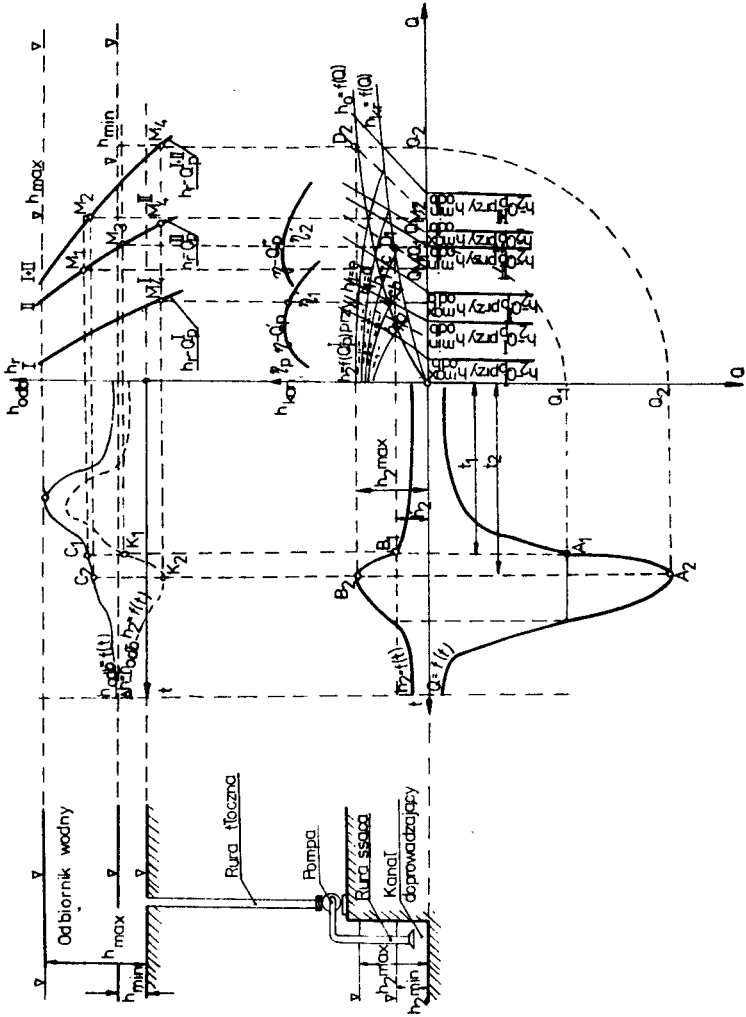
Obszar polderu może być zasilany wodą opadową /z góry/, naporową /z dołu/ oraz wodą filtrującą przez korpus i podłoże wałów /z boków/. Ponadto zdarzają się inne możliwości zasilania wodą polderów. Przykładem może być napływ wód obcych od strony wysoczyzny, gdy nie ma wałów i rowów opaskowych. Na polder woda /ścieki/ doprowadzana może być siecią wodociągowo-kanalizacyjną i melioracyjną /nawodnienia/.

Ogólnie można stwierdzić, że w przychodowej stronie bilansu wodnego polderu największą pozycję stanowią opady atmosferyczne. Spływy z tych opadów powodują najwyższe kulminacje wezbrań. Nadmiar wody na polderze musi być odpompowany stosownie do miejscowych potrzeb. Istnieje wiele metod określania tego nadmiaru wody i ustalania miarodajnej wydajności przepompowni. W ramach niniejszej pracy nie można tych zagadnień szczególnie omówić, dlatego zainteresowanych odsyłamy do rozprawy [5].

Rozpatrywany jest tu tylko dopływ z wezbrań, gdyż woda dopływająca z polderu o niezmiennym natężeniu będzie pompowana oddzielnymi agregatami pompowymi. Przy założeniu zmienności stanów wody w kanale doprowadzającym i odbiorniku wodnym ich dynamikę oznaczono odpowiednio  $h_2 = f/t$  i  $h_{odb} = f/t$ , natomiast przepływ wody w kanale  $Q = f/t$ .

Podczas pracy II pompy, kanał może mieć przepustowość przy głębokościach  $h_2$  zawartych między krzywymi  $h_2 - Q_p$ , które oznaczono /rys.3/





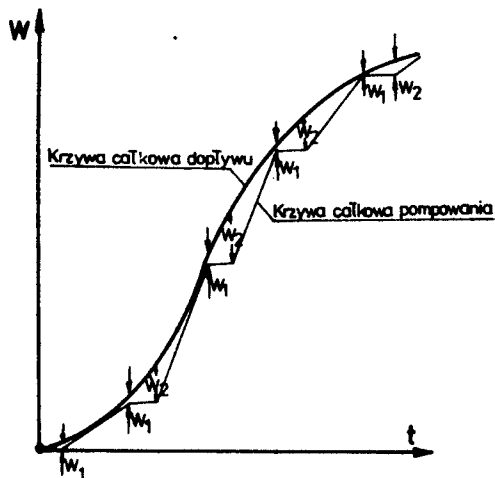
Rys. 3. Schemat współpracy kanału z pompami o nachyleniu łopatek  $\psi = \text{const}$

$h_2 - Q_p^{II}$  przy  $h_{\text{odp min}}$  i  $h_2 - Q_p^{II}$  przy  $h_{\text{odp max}}$ . W podobny sposób można określić zakres przepustowości kanału przy pracy I pompy lub jednocześnie przy obydwu pomp. Dla każdego takiego przypadku między odpowiednimi krzywymi  $h_2 - Q_p$  tworzą się strefy wspólnych reżimów pracy kanału i pomp. Założono, że w danym momencie w kanale ustali się głębokość  $h_2$  przy przepływie  $Q_1$ . W celu określenia potrzebnych charakterystyk współpracy kanału i pomp wykonano na wykresie /rys.3/ czynności polegające w pierwszej kolejności na poprowadzeniu linii  $A_1 B_1 C_1$  równoległej do osi rzędnych, a z punktu  $C_1$  linii równoległej do osi odciętych, która przetnie w punkcie  $M_1$  charakterystykę  $h_r - Q_p^{II}$  II pompy. Z kolei od  $M_1$  poprowadzono równoległe do osi rzędnych linię, która na przecięciu z osią odciętych wyznacza punkt o wydatku  $Q_{M1}$ , od którego skonstruowano nową krzywą  $h_2 - Q_p^{II}$  /na rys.3 linia przerywana/. Dla  $Q_1$  w kanale otrzymano roboczy punkt  $D_1$  na tej krzywej i wówczas pompa będzie pracować ze współczynnikiem sprawności  $\eta_2''$ , a punkt jej pracy stanowi  $M_3$ . Nadmienić należy, że punkt  $M_3$  otrzymać można także drugim sposobem, gdy sporządzona zostanie dodatkowa krzywa  $\Delta h = h_{\text{odp}} - h_2 = f / t /$  i ona zostanie przecięta pionową  $B_1 C_1$  w punkcie  $K_1$ , a następnie od niego prowadzi się prostą równoległą do osi odciętych aż do przecięcia z charakterystyką  $h_r - Q_p^{II}$ .

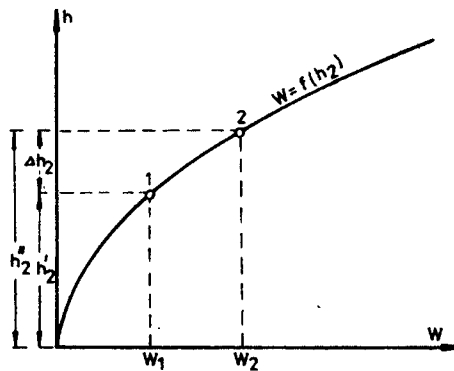
Z analizy pracy dwóch pomp przy maksymalnym przepływie  $/Q_2/$  wody w kanale otrzymano współrzędne punktów  $D_2$ ,  $M_4^I$  i  $M_4^{II}$  wyznaczających niezbędne parametry do określenia warunków współpracy pomp z kanałem. Pompy będą wtedy pracować z wydajnościami odpowiadającymi współczynnikom sprawności  $\eta_1'$ ,  $\eta_2''$ . W celu uproszczenia obliczeń w danym przypadku można amplitudę wahań zwierciadła wody w odbiorniku podzielić na dostateczną liczbę warstw o miąższości 10-20 cm i dla każdej rzędnej położenia zwierciadła określić  $h_r$  oraz sporządzić krzywe  $h_2 - Q_p$ . Wielkości  $h_r$  zaleca się zaokrąglić do najbliższych, dla których istnieją krzywe  $h_2 - Q_p$ . Dalszy tok postępowania jest podobny do przedstawionego w artykule [2].

### 3. ANALIZA PRACY KANAŁU W FAZIE DOBORU POMP

Na rysunku 4 skonstruowano krzywą całkową /sumową/ dopływu i pompowania wody. Analizie poddaje się przedział wahań głębokości wody w kanale doprowadzającym  $\Delta h_2 = h_2'' - h_2'$  na krzywej związku między głębokością, a objętością wody w kanale /rys.5/ wyznacza się objętości  $W_1$ ,  $W_2$  dla odpowiadających im głębokości  $h_2'$ ,  $h_2''$ . Z posiadanych standardowych pomp dobiera się takie, które zapewniają przez odpompowanie objętości  $W$  zmianę głębokości  $h_2$  w założonym czasie. Przy braku takich pomp można zmienić wydajność posiadanych np. przez obtoczenie wirników. Zakładając, że istniała możliwość doboru pomp standardowych i mnożąc ich wydajność przez czas pompowania - otrzymuje się objętość wody odpompowanej. Przy czym wskazana jest praca agregatów pompowych w strefie maksymalnych wartości współczynnika sprawności. Na rysunku 4 pracę tę obrazuje krzywa całkową, którą wpisuje się względem całkowitej krzywej dopływu w taki sposób, aby waha -



Rys. 4. Całkowe krzywe dopływu i pompowania



Rys. 5. Krzywa zależności między głębokością a objętością wody w kanale

nia stanów wody w kanale doprowadzającym były możliwie małe oraz żeby istniały przedziały postoju nie rzadziej niż co 16 godzin w celu dokonania przeglądu agregatów i smarowania wirujących elementów. Według Florińskiego [1] korzystne jest dla eksploatacji, gdy w przepompowni zainstalowane są pompy o jednakowych wydajnościach. Jeżeli jednak krzywa całkowita dopływu wskazuje celowość zainstalowania dwóch pomp o różnych wydajnościach to ich proporcje powinny wynosić 1 : 2. Ciśnienia wytwarzane przez pompy można przyjmować jako średnio-ważone różnice rzędnych zwierciadeł wody w odbiorniku i kanale za rozpatrywany okres. Żeby pompy pracowały w stre-

nie maksymalnych wartości współczynników sprawności wskazane jest, aby wydajność pomp przy obliczeniowych średnich głębokościach wody w kanale odpowiadała  $\eta_{\max}$ . Dalszy tok postępowania jest analogiczny dla kanału i pomp o zadanych charakterystykach. Przy projektowaniu systemu polderowego zachodzi ponadto konieczność doboru pompy i zaprojektowania kanału z uwzględnieniem zasad podanych w artykułach [3,4] oraz dążąc do minimalizacji robót ziemnych. Dobór pomp przeprowadza się korzystając z krzywej całkowitej dopływu, którą omówiono wyżej. Podczas eksploatacji przepompowni korzystna jest mniejsza liczba włączeń i wyłączeń pomp, szczególnie jeżeli te czynności nie są zautomatyzowane. W przeciwnym przypadku ta liczba może dochodzić do 6 w ciągu godziny i wtedy całkowita krzywa pompowania lepiej wpasowuje się względem całkowitej krzywej dopływu wody z polderu, a ponadto uzyskuje się mniejsze wahania stanów wody, a tym samym większą stateczność skarp kanału. Zbyt częste włączenia agregatów pompowych nie są jednak korzystne ze względu na nadmierne zużycia urządzeń i energii elektrycznej.

#### 4. WSPÓŁPRACA KANAŁU Z POMPAMI ŚMIGŁOWYMI O NASTAWNYCH ŁOPATKACH

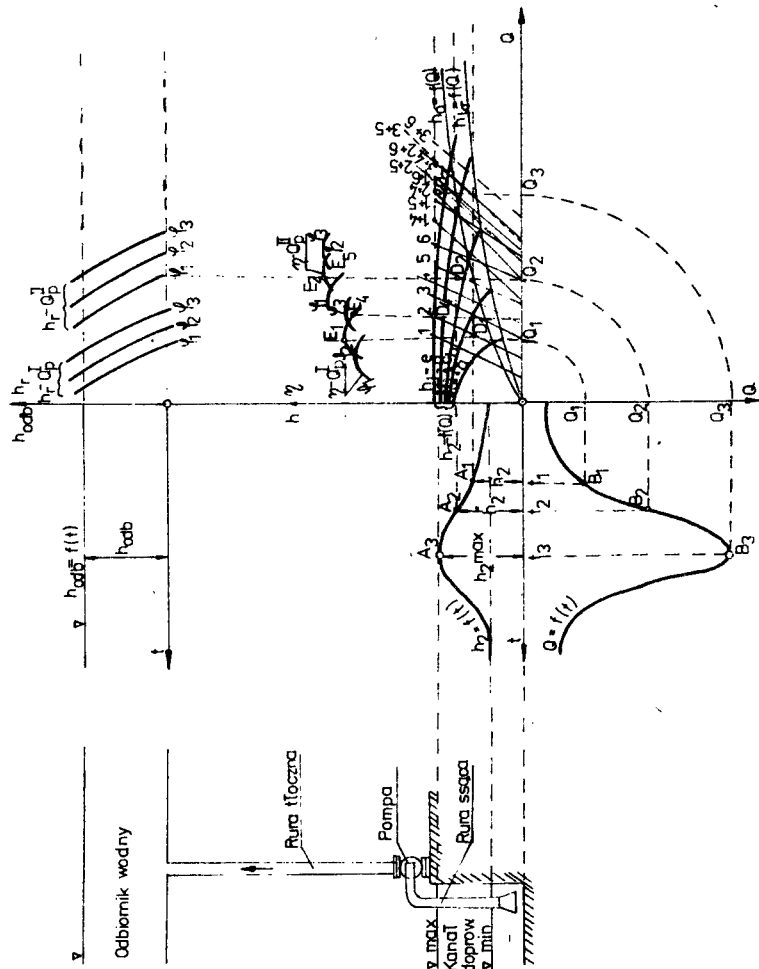
Założono, że kanał ma określone krzywe  $h_o = f/Q$ ,  $h_{kr} = f/Q$ ,  $h_2 = f/Q$  przy  $h_1 = a, b, \dots$  e oraz  $Q = f/t$  i  $h_2 = f/t$ , natomiast w odbiorniku stany wody nie ulegają zmianom w czasie, tj.  $h_{odb} = \text{const}$ . W przepompowni zostały zainstalowane dwie pompy o różnych wydajnościach.

W analizie /rys.6/ rozpatrzono trzy różne kąty pochylecia łopatek wirnika  $\varphi_1, \varphi_2, \varphi_3$ , którym odpowiadają po trzy pary charakterystyk  $h_r - Q_p$  i  $\eta - Q_p$ . Wszystkie krzywe  $h_r - Q_p$  przekształcono odpowiednio [1,2] w krzywe  $h_2 - Q_p$ . Jeżeli pracuje jedna z pomp wtedy korzysta się z krzywych  $h_2 - Q_p$ , które schematycznie oznaczono 1 ÷ 6, natomiast przy równoległej pracy dwu pomp korzysta się z sumarycznych krzywych oznaczonych schematycznie od 1 ÷ 4 do 3 ÷ 6 /rys.6/. Krzywe te wyznacza się graficznie dodając ich wydajność /odcięte/ dla odpowiadających im rzędnych  $/h_r/$ . Warunki współpracy pomp i kanału można ustalić biorąc dla dowolnego czasu  $t_1$  przepływ  $Q_1$  wody w kanale przy głębokości  $h_2$ , który spompuje pierwsza pompa, gdy  $\varphi = \varphi_2$  i krzywa  $h_2 - Q_p$  ma numer 2 oraz będzie maksymalna sprawność pomp /punkt  $E'_1/$ . Jeżeli w czasie  $t_2$  ulegną zmianie warunki dopływu wody w kanale to powinna pracować druga pompa przy  $\varphi = \varphi_2$ , aby jej sprawność była największa /punkt  $E_2/$ . Tym ostatnim warunkiem należy się również kierować przy równoległej pracy dwóch pomp wybierając odpowiednią krzywą  $h_2 - Q_p$ . Wskaźnikiem ekonomicznej pracy całej przepompowni wg Florińskiego [1] jest maksymalna wartość współczynników sprawności wszystkich elementów układu

$$\eta_{\text{prz}} = a \cdot \eta_p \cdot \eta_s \cdot \eta_t$$

gdzie:

$\eta_p$  - współczynnik sprawności pomp,



Rys.6. Współpraca kanału z pompami o nastawnych łopatkach

$\eta_s$  - współczynnik sprawności silników,

$\eta_t$  - współczynnik sprawności przekazu,

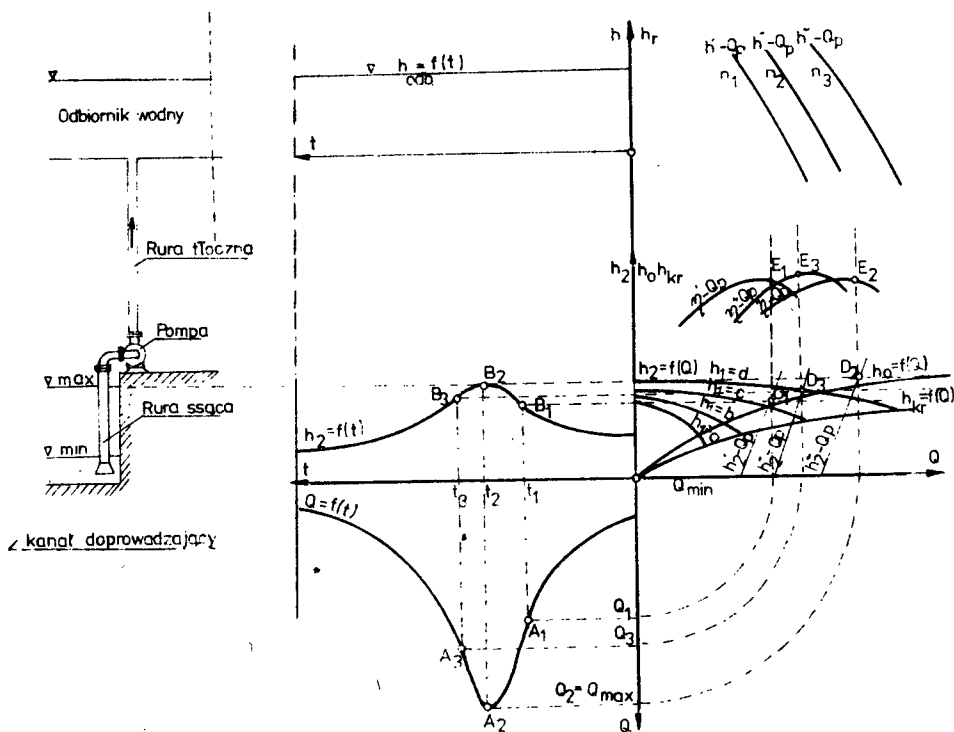
$a$  - współczynnik uwzględniający miejscowe warunki, na przykład dla:

- 1/ silników elektrycznych  $a = \eta_e$ , tj. równy współczynnikowi sprawności przyrządów elektrycznych, przy krótkich przewodach można przyjąć  $\eta_e = 1$ ,
- 2/ silników parowych /lokomobila z ciepłociągami/  $a = \eta_l \cdot \eta_c$ ,
- 3/ silników spalinowych  $a = 1$ .

W niniejszych rozważaniach ograniczono się do zastosowania pomp sprzężonych bezpośrednio z silnikami elektrycznymi oraz do krótkiej linii elektrycznej, aby współczynnik "a" posiadał dość ustabilizowaną wartość podczas pracy przepompowni.

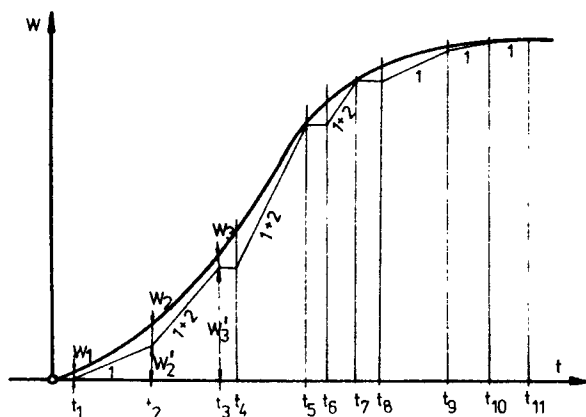
## 5. WSPÓŁPRACA KANAŁU Z POMPAMI O ZMIENNYCH OBROTACH WIRNIKA

Schemat współpracy pomp z kanałem doprowadzającym przedstawiono na rysunku 7. Założono, że istnieją dla pompy charakterystyki  $h_r' - Q_p, h_r'' - Q_p$ ,



Rys.7. Współpraca kanału z pompami o zmiennych obrotach wirnika

$h_r''' - Q_p$  odpowiednio przy  $n_1, n_2, n_3$  obr/min, oraz w odbiorniku panuje niezmienny poziom zwierciadła wody, a także dla kanału znane są charakterystyki  $h_2 = f / Q$  przy  $h_1 = \text{const}$  w przedziałach  $a \pm d$ ,  $h_o = f / Q$ ,  $h_{kr} = f / Q$ ,  $Q = f / t$ ,  $h_2 = f / t$ . Skonstruowano więc krzywe  $h_2'' - Q_p$ ,  $h_2''' - Q_p$ ,  $h_2'''' - Q_p$ . Jeżeli kanał dla czasu  $t_1$  ma przepustowość  $Q_1$  to pompy powinny pracować przy  $n_1$  obr/min. Punktem pracy będzie  $D_1$ , a rzędna punktu  $E_1$  określa wartość współczynnika sprawności. Dla czasu  $t_2$  panuje  $Q_{\max}$ , wówczas stosuje się  $n_3$  obr/min uzyskując sprawność na rzędnej  $E_2$  oraz głębokość wody w kanale odpowiadającą rzędnej punktu  $D_2$ . Dla pośredniej przepustowości  $Q_3$  kanału przy  $t_3$ , praca pomp powinna przebiegać według krzywej  $h_2'' - Q_p$  z charakterystykami kanału odpowiadającymi współrzędnym punktu  $D_3$  przy  $n_2$  obr/min wirnika pompy. Wielkość współczynnika sprawności odpowiada wówczas rzędnej punktu  $E_3$ . Jeśli którykolwiek z punktów  $D$  nie tafia na jedną z krzywych  $h_2 - Q_p$ , wtedy należy przyjąć pośrednią liczbę obrotów  $n$  wirnika pompy i dla niej wyznaczyć nową krzywą  $h_r - Q_p$ , a następnie przekształcić ją w krzywą  $h_2 - Q_p$  i na niej wyznaczyć punkt  $D$  współpracy pompy z kanałem. Dla pomp ze zmienną liczbą obrotów wirnika istnieje możliwość znacznej zmiany ich wydajności bez istotnego obniżenia wartości współczynnika sprawności pomp  $\eta_p$ . Przy ocenie ekonomiczności pracy przepompowni, znając jej sprawność, wskazane jest wyznaczenie jeszcze wskaźników, którymi mogą być ilości energii elektrycznej lub paliwa zużywane na podniesienie  $1 \text{ m}^3$  cieczy lub podniesienia 1 tony cieczy na wysokość 1 m. Obliczenie tych wskaźników jest możliwe, gdy jest sporządzony wykres eksploatacji przepompowni. Sposób jego konstrukcji polega na opracowaniu hydrogramu dopływu wody z polderu do przepompowni i przekształceniu go w krzywą całkową. Zgodnie z poprzednimi rozważaniami, wydajność pomp ustala się według tej krzywej tak, aby objętości wody w kanale zmieniały się w przedziałach uzależnionych od ustalonych, ekstremalnych wahań zwierciadła wody przed przepompownią. Wydajności pracujących pomp przekształcone w krzywą całkową pompowania wpisuje się w krzywą całkową dopływu /rys.8/. Przepompownia powinna rozpocząć pracę, kiedy głębokość



Rys.8. Całkowe krzywe dopływu i pompowania wraz z ilustracją parametrów eksploatacyjnych

$h_2$  osiągnie wielkość odpowiadającą objętości  $W_1$  i dopóki głębokość  $h_2$  nie osiągnie  $h_{2 \max}$  pracuje pierwsza grupa pomp, w której może być jedna lub kilka pomp w zależności od wielkości przepompowni. W przedziale czasu  $t_2 - t_1$  przepompuje ona objętość  $W_2'$ , natomiast w kanale po czasie  $t_2$  pozostanie objętość  $W_2$ . Następnie włączają się wszystkie pompy grup 1 + 2 i po czasie  $t_3$  w kanale znajduje się woda o objętości  $W_3$  i głębokości  $h_{2 \min}$ . Dla zwiększenia głębokości  $h_2 = h_{2 \max}$  wyłącza się część lub wszystkie pompy, wtedy powstaje poziomy odcinek na krzywej całkowej pompowania i w tym czasie istnieje możliwość dokonania przeglądu i smarowania agregatów. Tak więc na podstawie powyższej konstrukcji określić można sumaryczną objętość wody odpompowanej. Znając moc na wałach pomp jednocześnie pracujących i czas pompowania, określa się zużycie energii elektrycznej lub paliwa. Dzielnik wielkość zużytej energii elektrycznej przez objętość wody podnoszonej otrzymuje się wskaźnik ilości potrzebnej energii na  $1 \text{ m}^3$  wody pompowanej z kanału do odbiornika. Ponadto wyznaczyć można wskaźniki zużycia energii dla podniesienia 1 tony wody na wysokość 1 metra. W tym celu należy określić wysokości podnoszenia w każdym przedziale pracy i pomnożyć je przez odpowiadające im objętości wody, a otrzymane iloczyny zsumować. Dzielnik zużycie energii przez tonometry podniesionej wody otrzymuje się jednostkowy wskaźnik obrazujący ilość energii potrzebnej dla podniesienia 1 tony wody na wysokość 1 metra. Po uwzględnieniu kilku wariantów pracy pomp, należy wybrać ten, przy którym otrzymuje się najmniejszą wartość wskaźników i minimalne zużycie energii za cały okres pracy przepompowni.

## LITERATURA

- [1] Florinskij M.M.: Sowmiestnyje rieżymy raboty osuszycielnych nasosnych stancji i podwodiaszczych kanałow. Maszynopis dysertacji, 1953, s.139
- [2] Klugiewicz J.: Charakterystyka pomp wirowych przepompowni polderowych. ZN Budownictwo 23, ATR Bydgoszcz 1986
- [3] Klugiewicz J.: Charakterystyki hydrauliczne kanałów doprowadzających wodę do przepompowni polderowych. ZN Budownictwo 23, ATR Bydgoszcz 1986
- [4] Klugiewicz J.: Analiza hydrauliczna kanałów polderowych dla warunków nieustalonego ruchu wody. ZN Budownictwo 23, ATR Bydgoszcz 1986
- [5] Klugiewicz J.: Odwadnianie terenów depresyjnych. Rozprawy nr 12 ATR Bydgoszcz, 1983, s.179



## COLLABORATION OF CANALS WITH POLDER INTERMEDIATE PUMPING STATIONS

## Summary

Floryński's way concerning analysis of canal collaboration with polder intermediate pumping stations has been presented. Cases, where angle of inclination of rotor blades in pumps is constant and water levels in a canal are variable, and rotor rotations are variable have been considered. The way of usage of integral curves of inflow and pumping during design and exploitation of pumps has been given.

## СОВМЕСТНАЯ РАБОТА КАНАЛОВ С ПОЛЬДЕРНЫМИ СТАНЦИЯМИ ПЕРЕКАЧКИ

## Резюме

В статье представлен способ Флёринского касающийся анализа совместной работы канала с польдерными станциями перекачки. Рассмотрены случаи, в которых угол наклона лопастей ротора насосов является постоянным, а состояние воды в канале и в водохранилище переменным. Изменяются также обороты ротора. Приведен способ использования интегральных кривых прилива и накачивания во время проектирования и эксплуатации насосов..





**Cena zł 115,-**

**ISSN 0208-6379**