

Jerzy Dobrzycki

## TEORIA PRECESJI W ASTRONOMII ŚREDNIOWIECZNEJ

Przedmiotem niniejszej rozprawy jest ewolucja poglądów na zjawiska precesyjne, od modeli hellenistycznej astronomii aż do skomplikowanych schematów, jakie przyjmowano w XVI w. Zakres taki przekracza oczywiście ramy „astronomii średniowiecznej” — podane dla zwięzłości w tytule — i obejmuje całkowicie ten okres, w którym prosty zasadniczo opis zjawisk precesyjnych komplikowany był przez wprowadzenie funkcji okresowej, znanej w astronomii łacińskiej średniowiecza pod mianem „trepidacji”.

Trepidacja była pojęciem fikcyjnym; dlatego zapewne nie znajdowała uznania u historyków nauki. Dreyer, Duhem i Sarton w swych fundamentalnych opracowaniach wspominają o niej jakby z lekceważeniem, jakby czyniąc wyrzuty dawnym wyznawcom trepidacji. Wbrew takim poglądom należało zwrócić uwagę na dzieje pojęcia, które ciążyło na astronomii matematycznej przez szereg stuleci, nawet jeśli w końcu zostało odrzucone: przecież „studiując historię astronomii nie wzbogacamy wiedzy o gwiazdach, ale poznajemy bliżej astronomów”<sup>1</sup>.

Ponadto jest to zagadnienie istotne dla dziejów nauki polskiej: trepidację odnajdujemy jako składnik teorii precesji w *De revolutionibus*. Znaczenie zagadnień precesyjnych dla studiów kopernikowskich podkreślił L. A. Birkenmajer, poświęcając im obszerny szkic w rozprawie z 1901 r.<sup>2</sup> Późniejsi badacze często zajmowali ahistoryczne stanowisko, bądź też wykorzystując trepidację dla modnej ostatnio neopozytywistycznej krytyki całego dzieła Kopernika, bądź też starając się bagatelizować „błąd” wielkiego astronoma. Odmienny punkt widzenia reprezentuje wysunięta ostatnio hipoteza, według której właśnie studia nad problemami precesji odegrały zasadniczą rolę w genezie kopernikowskiej rewolucji<sup>3</sup>.

Przedstawienie dziejów pojęcia trepidacji w średniowieczu może ułatwić zrozumienie roli, jaką spełnia ona w systemie świata Kopernika, wykazać, o ile schemat precesji z *De revolutionibus* różni się w swej istocie od poprzednich spekulacji i wyróżnić te jego elementy, które dały przesłanki dla ostatecznego odrzucenia teorii trepidacji przez astronomię.

<sup>1</sup> A. Pannekoek w *Vistas in Astronomy*, t. 1, 1955, s. 65.

<sup>2</sup> L. A. Birkenmajer, *Marco Beneventano, Kopernik, Wapowski, a najstarsza karta geograficzna Polski*, „Rozprawy Wydz. Mat.-Przyr. AU”, s. III, t. 1, dział A, Kraków 1901, s. 134.

<sup>3</sup> J. R. Ravetz, *Astronomia i kosmologia w dziele M. Kopernika*, „Monografie z dziejów nauki i techniki” (w druku).

Wokół trepidacji i jej geometrycznych modeli nagromadziło się w literaturze historyczno-naukowej wiele nieporozumień i nieścisłości. Starąłem się je prostować, rezygnując jednak z podania ich pełnego rejestru, który obciążałby tekst nadmiarem krytycznych przypisów.

## 1. RUCH ÓSMEJ SFERY — TEORIE STAROŻYTNE

Rozważania nad teorią zjawisk precesyjnych w astronomii średniowiecznej rozpocząć można od przyjęcia dwóch upraszczających założeń. Przede wszystkim pominąć można całkowicie dynamiczną stronę zjawiska — aż do czasów Newtona historia precesji jest historią czysto kinematycznych modeli.

Dalsze uproszczenie wynika z poziomu techniki obserwacyjnej w astronomii starożytnej i średniowiecznej. Błędy mierzonych pozycji ciał niebieskich były dostatecznie duże, by usprawiedliwić przyjęcie przybliżonego opisu precesji. Precesja jest to więc powolny, jednostajny obrót osi Ziemi wokół osi ekliptyki. Kąt przez nie utworzony, nachylenie ekliptyki do równika, maleje z biegiem czasu, również jednostajnie. W geostatycznym, przedkopernikowskim obrazie świata oś ziemską (a ściślej „oś świata”) i równik niebieski są nieruchome, a precesyjny ruch Ziemi zastąpiony jest przez obrót sfery gwiazd („ósmej sfery”) wokół biegunów ekliptyki w kierunku przeciwnym niż rzeczywisty ruch precesyjny Ziemi. Precesja uwidacznia się w jednostajnej zmianie długości ekliptycznych gwiazd, w różnicy długości roku gwiazdowego i zwrotnikowego — odkrytych przez Hipparcha — oraz w zmianie kąta nachylenia ekliptyki, jaką stwierdzili astronomowie Islamu w IX w.

Przypomnijmy, że według obecnych danych roczna prędkość ruchu precesyjnego (ogólna precesja w długości) lub, w geostatycznym ujęciu, prędkość obrotu sfery gwiazd, wynosi  $50''26 + 0''0022 T$  ( $T$  w stuleciach od roku 1900). Wynika stąd, że w roku  $-150$  (epoka Hipparcha) roczny ruch wynosił  $50''21$ , a w roku  $+1500$   $50''25$ . Przy tak powolnej zmianie można przyjąć dla całego okresu między tymi dwiema datami wartość średnią  $50''2$ , co odpowiada zmianie długości ekliptycznych o  $1^\circ$  na 72 lata. Różnica długości roku zwrotnikowego i gwiazdowego jest więc stała i wynosi ponad 20 minut; jest to czas, w jakim Słońce przebywa łuk  $50''$ , o który przesuwają się punkty równonocne (przecięcia ekliptyki z równikiem) w ciągu roku.

Również zmiana nachylenia ekliptyki do równika przebiega liniowo. Według danych S. Newcomba nachylenie wynosi:

$$\varepsilon = 23^\circ 27' 19'' - 0'78 T$$

Wzór ten daje dla roku:

$-150$	$\varepsilon = 23^\circ 43'$
$+138$	$23\ 41$
$+800$	$23\ 36$
$+1\ 500$	$23\ 30$

Wobec związku z teorią ruchu rocznego Słońca, zmianę nachylenia ekliptyki określano również jako zmianę maksymalnej deklinacji Słońca.

Powyższy obraz precesji pozostawia szerokości ekliptyczne ciał niebieskich niezmiennie mimo ruchu „ósmej sfery”. Odbywa się on przecież

równoległe do ekliptyki. Niezmiennosc szerokości ekliptycznych mogła być jednym z czynników powodujących, że astronomia teoretyczna od czasów Hipparcha przyjęła ekliptyczny układ współrzędnych nie tylko jako podstawę teoretyczną, ale i jako roboczy układ odniesienia, mimo oczywistych niedogodności, związanych z odtwarzaniem zmiennego położenia podstawowych kół na sferze niebieskiej podczas obserwacji. Zmuszało to do skomplikowania konstrukcji instrumentów obserwacyjnych: przykładem może być tu sfera armilarna Ptolemeusza. Uproszczona została za to ewidencja położenia gwiazd w katalogach.

Najstarszym zachowanym katalogiem jest spis gwiazd w VII i VIII księdze *Almagestu*<sup>4</sup> Ptolemeusza, oparty częściowo na starszym o prawie 300 lat katalogu Hipparcha. Jest to kompletny w zasadzie, liczący 1025 pozycji spis gwiazd widocznych gołym okiem w niewielkiej północnej szerokości geograficznej. Katalog zawiera opisowe określenie położenia gwiazdy względem figury gwiazdozbioru, długość i szerokość ekliptyczną oraz jasność. Wobec zmiany długości ekliptycznych, powodowanej przez precesję, niezbędnym elementem każdego katalogu jest jego epoka, tj. data, w której dokonano pomiaru długości ekliptycznych lub dla której te długości obliczono. Poza nielicznymi wyjątkami, późniejsze, aż do wieku XVI, katalogi gwiazd oparte były na katalogu Ptolemeusza (epoka + 138), z przeliczeniem współrzędnych na nową epokę.

Pełny, obejmujący ponad 1000 gwiazd, katalog miał znaczenie przy konstrukcji globusów nieba, stanowił też element ogólnego wykładu astronomii, wpływając niejako na estetyczną zupełność danego dzieła. Tylko niewielka liczba zawartych w nim gwiazd mogła mieć zastosowanie w praktyce astronomicznej, przy różnicowych pomiarach położenia innych ciał niebieskich. Ten właśnie praktyczny cel mają późniejsze, mniejsze spisy, zawierające kilkanaście do kilkudziesięciu jaśniejszych gwiazd. Wywodzą się one z astronomii arabskiej. Konstruktorom ulubionego narzędzia astronomii orientalnej, astrolabium płaskiego, potrzebne były współrzędne gwiazd dla naniesienia na *rete astrolabium*.

Długości ekliptyczne w katalogach pochodziły bądź to z pomiarów, bądź też z redukcji, przeliczenia jakiegoś dawniejszego katalogu. Oba przypadki mają znaczenie dla dziejów teorii precesyjnych. Jeśli współrzędne gwiazd ustalone zostały drogą pomiaru, to autor katalogu musiał, porównując je z wartościami dawniejszych katalogów, zająć określone stanowisko co do teorii zmian długości. Gdy zaś współrzędne zostały obliczone, to można — przy znajomości epoki katalogu — określić teorię, jaką przy redukcji stosowano.

Dlatego też w dalszym ciągu będziemy powoływać się na różne katalogi, charakteryzując je krótko za pomocą „redukcji”, czyli różnicy długości danego katalogu z długościami katalogu Ptolemeusza, stanowiącego najczęstszy punkt wyjściowy dla obliczania położenia gwiazd w astronomii średniowiecznej.

Teoria precesji zawarta w *Almageście* i jej liczbowe parametry zaciążyły w zasadniczy sposób na średniowiecznej astronomii i stały się pośrednio przyczyną komplikacji opisu ruchów „ósmej sfery”.

Ptolemeusz powołuje się w *Almageście* na Hipparcha, według którego zmiana długości gwiazd wynosi „co najmniej  $1^\circ$  na sto lat” ( $36''$  rocz-

<sup>4</sup> Używanie tej skażonej, ale wygodnie krótkiej nazwy, pod jaką dzieło Ptolemeusza weszło do nauki europejskiej, usprawiedliwia wielowiekowa tradycja.



nie)<sup>5</sup> i przyjmuje tę właśnie wartość jako rzeczywistą. Przytaczane w *Almageście* dane obserwacyjne przynajmniej częściowo potwierdzają taką szybkość. W rezultacie przyrost długości ekliptycznych w okresie od Hipparcha do Ptolemeusza ustalony został w *Almageście* na  $2^{\circ}40'$ , a szybkość zmiany długości ekliptycznych na  $1^{\circ}$  w stu latach egipskich (po 365 dni), co odpowiada  $1^{\circ} 2.5$  na sto lat juliańskich (po 365.25 dnia), czyli  $36''025$  na rok.

Błędy obserwacyjne obciążąły w analogiczny sposób ptolemeuszowską teorię ruchu Słońca. Na skutek tego położenie punktów równonocnych określone zostało błędnie, ale zgodnie z zaniżoną wartością szybkości ruchu precesyjnego. Potwierdzenie swych parametrów liczbowych Ptolemeusz znalazł w obserwacjach deklinacji gwiazd; zmiana deklinacji wybranych gwiazd odpowiadała przyjętej stałej  $1''/100$  lat.

Poza błędną „stałą precesji” dało to w rezultacie błąd wszystkich długości gwiazd, określanych właśnie względem fałszywie ustalonego punktu równonocy wiosennej. Długości ekliptyczne gwiazd w *Almageście* są za małe o  $1^{\circ}2'$  i odnoszą się w rzeczywistości nie do nominalnej epoki katalogu (rok + 138), lecz do wcześniejszej o 74 lata (rok + 64).

Oryginalność katalogu Ptolemeusza była podawana w wątpliwość zarówno w epoce rozwoju astronomii orientalnej (o czym niżej), jak i w czasach nowożytnych. Podejrzewano (np. Delambre), że katalog Ptolemeusza powstał, wbrew oświadczeniu autora, przez czysto rachunkowe zredukowanie katalogu Hipparcha z użyciem wartości zmiany współrzędnych równej  $36''$  na rok, a przytaczane jako materiał dowodowy obserwacje gwiazd zostały tendencyjnie dobrane. Pierwszy zarzut okazał się niesłuszny<sup>6</sup>. Katalog Ptolemeusza jest, przynajmniej w części, rezultatem samodzielnych obserwacji. Kwestię tendencyjnego doboru obserwacji poddał interesującej analizie Pannekoek<sup>7</sup>, wykazując anachronizm postulatu, domagającego się stosowania w II stuleciu nowożytnych kryteriów teorii obserwacji.

Również wartość kąta nachylenia ekliptyki, przekazana w *Almageście*, obarczona była błędem, i to błędem poważnym, wielokrotnie przekraczającym różnicę wynikającą z zaniedbania nieznanego jeszcze zjawiska refrakcji. Według Ptolemeusza kąt między ekliptyką i równikiem wynosi  $11/83$  pełnego kręgu (lub, według innego określenia,  $23^{\circ}51'20''$ )<sup>8</sup> — zgodnie z wyznaczeniami Eratostenesa i Hipparcha, co wskazuje na jego niezmienność.

Hellenistyczna astronomia pozostawiła astronomom następnych stuleci nie tylko aparat matematyczny, przedstawiający zjawiska precesyjne, ale i fizyczny model, mający wyjaśniać ich powstawanie. Aksjomat sferycznej budowy świata narzucał wprost przyjęcie konstrukcji współśrodkowych sfer. Zewnętrzna, obracająca się raz na dobę wokół biegunów świata wyjaśniała zjawiska wynikające z ruchu obrotowego Ziemi. W punktach odpowiadających biegunom ekliptyki mieściły się bieguny wewnętrznej sfery, sfery gwiazd stałych (w średniowieczu określanej jako „ósmą sferą”, wobec 7 sfer Księżyca i planet, mieszczących się bliżej Ziemi). Powolny obrót sfery gwiazd wokół biegunów ekliptyki w kie-

<sup>5</sup> *Almagest*, księga III, rozdział 1.

<sup>6</sup> L. J. E. Dreyer, *On the origin of Ptolemy's Catalogue of Stars*, *Monthly Notices of the R. A. S.*, vol. 77, 1917, s. 528; H. Vogt, *Versuch einer Wiederherstellung von Hipparchs Fixsternverzeichnis*, „*Astronomische Nachrichten*”, t. 224, 1925, s. 17.

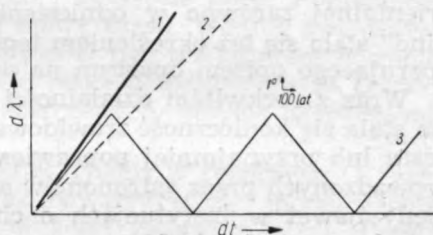
<sup>7</sup> A. Pannekoek, *Ptolemy's Precession*, w: *Vistas in Astronomy* t. 1, 1955, s. 60.

<sup>8</sup> *Almagest*, księga I, rozdział 12.



runku przeciwnym niż obrót dobowy, a więc z zachodu na wschód<sup>9</sup>, wystarczał dla spowodowania zjawisk precesyjnych.

Późniejsza nauka hellenistyczna nie wniosła już nic nowego do zagadnienia teorii procesji. Neoplatonczyk Proklos (V w. n.e.), jeden z ostatnich uczonych antyku i kierownik Akademii ateńskiej, zaprzecza nawet teorii Hipparcha—Ptolemeusza jako sprzecznej z oczywistym świadectwem nieba: gwiazdozbiory obu Niedźwiedzi od najdawniejszych czasów nie znikają pod horyzontem, jak musiałyby się stać przy ruchu sfery gwiazd<sup>10</sup>. Wcześniejsza (IV w. n.e.) relacja na temat procesji Theona z Aleksandrii, autora komentarza do *Almagestu*, jest za to interesująca jako najstarszy dowód istnienia innej teorii, według której zmiany długości gwiazd mają charakter okresowy, osiągając  $\pm 4^\circ$  od położenia średniego przy szybkości ruchu równej  $1^\circ$  na 80 lat. Teorię tę wyznawali „dawni astronomowie”<sup>11</sup>. Ptolemeusz pominął zupełnie w *Almageście* tę prymitywną konstrukcję, wymagającą przecież skokowej zmiany kierun-



Rys. 1. Przyrost długości ekliptycznych  
1— $1^\circ$  w 72 latach; 2— $1^\circ$  w 100 latach;  
3—oscylacje

ku ruchu gwiazd co 640 lat (rys. 1). Hipoteza „dawnych astronomów” wywodziła się zapewne z owego „drugiego nurtu” w nauce greckiej, operującego w astronomii matematycznej nie tyle modelami geometrycznymi, co schematami arytmetycznymi, i mającego swe początki w przyjętych jeszcze z nauki babilońskiej metodach rachunkowych<sup>12</sup>.

Mimo braku rozwinięcia matematycznego teorii, o której wspominał Theon, odegrała dużą rolę w dalszych dziejach teorii procesji i wspomniana była przez wielu autorów arabskich i łacińskich, aż do *Epitome Regiomontana*<sup>13</sup> i *De revolutionibus* Kopernika<sup>14</sup>.

## 2. THĀBIT

Przedstawienie procesji jako jednostajnej zmiany długości ekliptycznych o ograniczonej amplitudzie odnajdujemy w połowie pierwszego tysiąclecia n. e. w astronomii hinduskiej. Jak wiadomo, astronomia hinduska rozwinęła się w ścisłej zależności od nauki wschodnich krajów śródziemnomorskich i szereg elementów matematycznej teorii zaczerpnęła ze

<sup>9</sup> *Almagest*, księga VII, rozdział 2: „Dowód, że sfera gwiazd porusza się w kierunku znaków zodiaku”.

<sup>10</sup> *Procli Diadochi Hypotyposis*, (wyd.) C. Manitius, Leipzig 1909, s. 45—47.

<sup>11</sup> Zdaniem L. A. Birkenmajera (*M. Kopernik*, Cz. I, Kraków 1900, s. 137) właśnie do tego zjawiska odnosi się pewne, dość niejasne zresztą sformułowanie Eudoksosa, cyt. przez Hipparcha w komentarzu do Aratosa (wyd. przez Manitiusa, Leipzig 1894, s. 88—89).

<sup>12</sup> O. Neugebauer, *The Exact Sciences in Antiquity*, New York 1962, s. 156—158.

<sup>13</sup> Księga VII, *propositio*. VI.

<sup>14</sup> Księga III, rozdział 1.

starożytnej nauki greckiej okresu przedptolemejskiego<sup>15</sup>. W porównaniu z omawianą przez Theona teorią precesji nowe są tu tylko parametry: traktat astronomiczny z IV—V w., *Surya-Siddhānta*, powiększa zakres zmian precesyjnych do  $27^\circ$  (według Theona wynosił on  $8^\circ$ ) z bliską rzeczywistej szybkością  $1^\circ 5$  na 100 lat ( $54''$  rocznie). Według Aryabhaty (VI w.) oscylacje obejmują łuk  $24^\circ$  przy szybkości  $46''$  na rok.

Dzieła hinduskie były pierwszym źródłem zaawansowanej matematycznie astronomii dla nauki arabskiej<sup>16</sup> VIII wieku w kalifacie bagdadzkim. *Surya-Siddhānta* dotarła do Bagdadu w drugiej połowie VIII wieku i stała się podstawą pierwszych arabskich tablic astronomicznych, *Az-Zij as-Sindhind* (ok. 770 roku). W ten sposób szczególne cechy astronomii hinduskiej (a wśród nich i teoria postępowego i wstecznego ruchu precesyjnego) mogły oddziaływać na astronomię arabską, zanim poznano bardziej zaawansowaną teorię Ptolemeusza. *Almagest* przetłumaczony został na język arabski po raz pierwszy w roku 829, za rządów słynnego kalifa—mecenasa nauki — Al-Mamuna. Wpływ hinduski trwał jednak w nauce orientalnej zarówno w odniesieniu do matematycznej metody („Sindhind” stało się też określeniem tego podejścia), jak i w sposobie wykładu, operującego opisem opartym na definicjach<sup>17</sup>.

Wraz z rozkwitem działalności obserwacyjnej w IX stuleciu oczywista stała się konieczność zrewidowania teorii ruchów precesyjnych *Almagestu* lub przynajmniej poprawienia jej parametrów. Wśród obserwacji, prowadzonych przez astronomów arabskich w sposób systematyczny, niekiedy nawet w instytucjach o charakterze stałego obserwatorium (jak np. obserwatoria Al-Mamuna w Bagdadzie i Damaszku<sup>18</sup>, pomiar nachylenia ekliptyki należał do podstawowych i najczęstszych. Otrzymywane wartości kąta  $\epsilon$  były wyraźnie niższe od stałej według Ptolemeusza wielkości  $23^\circ 51'$ :

Astronomowie Al-Mamuna (Yahya ibn Abii Mansur i in.)	$23^\circ 33'$
Muhammad i Ahmad i Banu Musā	$23^\circ 35'$
Al-Bāttāni	$23^\circ 35'$
Thābit ibn Qurra	$23^\circ 33'$

Również szybkość ruchu precesyjnego (66 lat 8 miesięcy według astronomów Al-Mamuna, 66 lat według Al-Battāniego) była sprzeczna z danymi *Almagestu*.

Zadanie stworzenia teorii, uwzględniającej nowe fakty obserwacyjne, podjął Thābit ibn Qurra, jeden z najwybitniejszych — obok Al-Battāniego — astronomów Islamu w końcu IX stulecia.

Thābit (właściwie Thābit ibn Qurra b. Mirwān al-Harrāni Abu'l-Hasan) urodził się około roku 836 w Harran nad Eufratem. Należał do sekty Sabijczyków, której wyznawcą był również sławny rodak Thābita, Al-Battāni (Albategnius w łacinie średniowiecznej). Działał w Bagdadzie, pod koniec życia był astronomem kalifa Mu'tadida. Zmarł w roku 901.

<sup>15</sup> J. L. E. Dreyer, *A History of Astronomy*, New York 1953, s. 244—245; P. Duhamel, *Le système du monde*, t. 2, Paris 1954, s. 225.

<sup>16</sup> „Arabskiej” w potocznym znaczeniu. Astronomia krajów Islamu obejmuje na przestrzeni od wieku VII do XV cały wachlarz szkół i uczonych orientalnych, nie zawsze Arabów i nie koniecznie Mahometan.

<sup>17</sup> Por. F. Carmody w: *Leopold of Austria, Compilatio de astrorum scientia*, Berkeley 1947, s. 41.

<sup>18</sup> A. Sayili, *The Observatory in Islam*, Ankara 1960, rozdział II.

Spis syryjskich i arabskich prac Thābita obejmuje kilkadziesiąt pozycji (zachowanych tylko częściowo) z dziedziny teologii, medycyny, magii i nauk przyrodniczych. Thābit odegrał zasadniczą rolę w dziele przyswajania przez naukę Islamu osiągnięć starożytności. Przetłumaczył lub poprawiał wykonane przez współpracowników tłumaczenia całego kanonu matematyczno-astronomicznej literatury greckiej, obejmującego dzieła Autolykosa, Euklidesa, Archimedesza, Nikomachosa i Ptolemeusza. Przypisuje mu się także rewizję arabskiego (drugiego z kolei) tłumaczenia *Almagestu*, dokonanego przez Ishāq'a ben Hunayn, jednego z współtwórców wspomnianego kanonu literatury starożytnej. W matematyce imię Thābita łączy się z rozwinięciem teorii liczb zaprzyjaźnionych.

Thābit był autorem szeregu traktatów astronomicznych, zarówno o charakterze propedeutycznym, jak i zaawansowanych. Wśród tych ostatnich wymienić należy przede wszystkim *De anno solis — O roku słonecznym*. W tej rozprawie Thābit poddał krytyce stanowisko Ptolemeusza w kwestii definicji roku słonecznego i przyjęcie przez Ptolemeusza roku zwrotnikowego jako podstawowej miary czasu. Według świadectwa Majmonidesa i Alberta Wielkiego Thābit miał być też autorem kosmologicznej teorii, wyjaśniającej konstrukcję orbit planetarnych za pomocą ekscentrycznie względem Ziemi rozmieszczonych powłok sferycznych, wypełnionych ściśliwą materią<sup>19</sup>.

Zagadnienie ruchu precyzyjnego podjął Thābit w rozprawie *O ruchu ósmej sfery (De motu octavae sphaerae)*. Zawarty w niej model geometryczny zastępuje jednostajną zmianę długości gwiazd z teorii Hipparcha—Ptolemeusza funkcją okresową. Jest to początek dziejów pojęcia trepidacji, jako okresowej zmiany ruchu precesyjnego, generowanej przez specjalną konstrukcję geometryczną. Teoria Thābita jest pierwszą próbą podania fizycznego modelu trepidacji, w przeciwieństwie do przejętych z Indii czysto rachunkowych przepisów.

*O ruchu ósmej sfery* jest krótkim traktatem, znanym tylko w tłumaczeniach łacińskich<sup>20</sup>. Brak recepcji traktatu Thābita w astronomii wschodniego Islamu (do czego jeszcze powrócimy) i podjęcie teorii trepidacji w XI wieku w Hiszpanii (Az-Zarqāli), gdzie też *O ruchu ósmej sfery* przetłumaczono na łacinę (Gerard z Kremony), wzbudzały podejrzenia co do poprawności atrybucji. Duhem przypisał też<sup>21</sup> autorstwo *O ruchu* Az-Zarqālemu, opierając się przede wszystkim na relacji Al-Bitruji (Alpetragius)<sup>22</sup>. Dalszym argumentem Duhema jest sprzeczność między datą śmierci Thābita i datą powstania *De scientia stellarum* Al-Battāniego, do którego rozprawa *O ruchu ósmej sfery* się odwołuje. Ale ten ostatni argument odpada wobec poprawnego datowania dzieła Al-Battāniego (882) i autor najnowszej edycji dzieł Thābita, F. J. Car-

<sup>19</sup> Duhem, *Système...*, t. II, s. 119; por. także W. Hartner, *The Mercury Horoscope* w: *Vistas in Astronomy*, t. I, zwłaszcza s. 122 i nast.

<sup>20</sup> Istnieją dwie wersje łacińskiego tłumaczenia *De motu*. Carmody (w: *Arabic Astronomical and Astrological Sciences in Latin Translation*, Berkeley 1956, s. 119—121) wymienia 52 rękopisy — przeważnie w wersji pełniejszej, będącej dziełem Gerarda z Kremony. W tej liczbie mieszczą się 4 rękopisy ze zbiorów Biblioteki Jagiellońskiej (Sygn. 551, 601, 1924 i 1970). Są to niekompletne odpisy tłumaczenia Gerarda, pochodzące z wieku XIII—XV, wykazujące liczne drobne warianty tekstu. Rkp. 1970 oprócz samej rozprawy zawiera na kartach następnych (72—73) pełne tablice liczbowe.

<sup>21</sup> *Système...*, t. II, s. 246.

<sup>22</sup> Przytacza ją Delambre w *Historie de l'astronomie du moyen-âge*. Paris 1819, s. 173—174.



mody<sup>23</sup>, uważa atrybucję za pewną. Zauważmy też, że relację Al-Bitruji, nieściśłą i pełną sprzeczności, trudno przyjąć jako autorytatywną. O zaangażowaniu Thābita w kwestię nieliniowych zmian długości świadczy jego list do Ishāqā b. Hunayn (cytowany niżej, s. 23).

Teorię Thābita omówimy na podstawie wspomnianego już wydania Carmodyego. Podane niżej fragmenty traktatu oparte są na obszerniejszej wersji, tłumaczonej przez Gerarda z Kremony. (Numery w nawiasach oznaczają paragrafy tekstu w wydaniu Carmodyego).

Thābit rozpoczyna swą rozprawę od określenia na sferze zewnętrznej (*spera equatoris diei*) kół podstawowych: równika i ekliptyki (*orbis declivis*) tworzących ze sobą stały kąt  $23^{\circ}33'$ .

„(4) Następnie wyobraźmy sobie sferę zodiaku (*speram orbis signorum*), która jest sferą gwiazd stałych, wewnątrz tamtej. Na niej, jak na zewnętrznej, określone są koła główne, jednak ekliptyka sfery zodiaku nie pokrywa się z ekliptyką sfery równika, lecz odchyła się od niej na północ i południe. (5) Ruch ten odbywa się wokół przecięć równika i ekliptyki [stałej], czyli punktów Barana i Wagi [równonocy wiosennej i jesiennej]. (6) Ruch [...] jest zmienny, niekiedy bowiem płaszczyzna ekliptyki sfery zodiaku pokrywa się z płaszczyzną ekliptyki sfery równika, niekiedy zaś połówka ekliptyki odchyła się na północ lub na południe. (7) Odchylenie ekliptyki od południa ku północy i z północy na południe nie następuje po linii prostej, lecz po kole<sup>24</sup>, którego środek leży w przecięciu ekliptyki [nieruchomej] i równika. Średnica tego koła równa się  $8^{\circ}37'26''$ . Taki właśnie ruch nazywamy ruchem postępowania i cofania się *accessionis et recessionis*<sup>25</sup>. (9) [...] gdy punkt Barana znajdzie się na północ od ekliptyki, wówczas punkt Wagi będzie na południe od niej [...], bowiem odległość między nimi wynosi połowę pełnego kręgu.

(10) Z opisu ruchu wynika więc, że punkty Barana i Wagi znajdują się niekiedy na równiku, niekiedy zaś punkt Barana na północ a punkt Wagi na południe od niego, niekiedy wreszcie punkt Wagi na północy, Barana na południu. (11) Ekliptyka [ruchoma] sfery zodiaku przecina się z równikiem bądź to w znakach Wagi i Barana, bądź też w znakach Ryb i Panny. Największe oddalenie przecięcia z równikiem od punktów Barana i Wagi wynosi  $10^{\circ}$  i  $3/4$  na północnej stronie i tyleż samo na południowej. (12) A ruch ten jest wspólny wszystkim sferom planetarnym, leżącym wewnątrz sfery zodiaku. Sfera gwiazd, która jest sferą gwiazdozbiorów i zodiaku, nie ma innego ruchu poza tym właśnie. Z nią razem porusza się wszystko, co leży poniżej, zgodnie z jej postępowaniem i cofaniem.

(13) Z ruchem tym związana jest zmiana nachylenia sfery zodiaku do równika [...]. (15) Ustaliliśmy nachylenie ekliptyki stałej (*orbis declivis fixi*) do równika na  $23^{\circ}33'$  [...] (16) Nachylenie [ekliptyki ruchomej] jest większe od nachylenia ekliptyki stałej, i wynosiło według Hindusów  $24^{\circ}$ <sup>26</sup>. Ptolemeusz określił je na  $23^{\circ}51'$ , a obserwatorzy z czasów Al Mamuna na  $23^{\circ}33'$ .

(17) Zmiana ruchu jest szybka lub powolna, gdy bowiem punkt Barana oddalony jest [na kole trepidacyjnym] o  $90^{\circ}$  od równika — czy to na północ, czy też na południe — ruch (*accessio*) zmienia się niewiele; gdy zaś znajdzie się blisko przecięcia małego koła z równikiem, postępowanie jest szybkie, i potwierdzają to obserwacje. (18) Oto bowiem Ptolemeusz stwierdził, że gwiazdy stałe przemieszczają się o  $1^{\circ}$  w stu latach [...] (19) Później stwierdzono, że ruch gwiazd wynosi  $1^{\circ}$  w 66 la-

<sup>23</sup> F.J. Carmody, *The Astronomical Works of Thabit b. Qurra* Berkely 1960.

<sup>24</sup> W dalszym ciągu pracy używać będziemy dla tej konstrukcji określenia „koło trepidacyjne”.

<sup>25</sup> Termin ten oznacza również przyływ i odpływ morza.

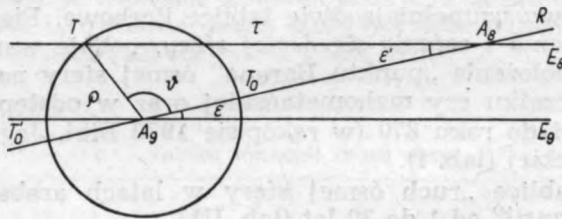
<sup>26</sup> Jest to pochodzące jeszcze od Euklidesa wyznaczenie nachylenia ekliptyki jako  $1/15$  obwodu koła.

tach [...] w czasach Ptolemeusza i Hipparcha [punkt Barana] znajdował się na południowej stronie i ruch był powolny. (20) Następnie, po Ptolemeuszu, punkt Barana zbliżył się do równika i przeciął go, przechodząc na stronę północną, a ruch stał się szybszy; konieczne więc było poprawienie Ptolemeusza [...] (21) Powątpiewał w to Albategnius, mówiąc: «widzę, że taka poprawka nie odpowiada szybkości i powolności, a skoro jest na niebie zjawisko którego nie znamy i nie potrafimy zrozumieć, to nasi następcy rozważą i zbadają je [...]» (22) Później jednak zmienił zdanie i uznał co jest właściwsze i prawdopodobne, aby dobre było jego dzieło.

[...] (37) [...] punkty Koziorożca i Raka przemieszczają się naprzód i wstecz zgodnie z ruchem punktów Barana i Wagi, lecz nie opuszczają przy tym ekliptyki nieruchomej. (38) Największa zaś odległość punktów równonocy od równika ma miejsce wtedy, gdy początki znaków Barana i Wagi znajdują się na  $90^\circ$  małych kół, licząc od przecięcia z równikiem. (39) Ich odległość od przecięcia ekliptyki z równikiem wynosi wtedy  $10 \frac{3}{4}$  stopnia [...] (40) Jeśli chcesz znać odległość punktów równonocnych od równika, mierzoną po ekliptyce, dla dowolnego momentu [następuje sposób użycia tablic] [...] (42) [...] jeśli ruch ósmej sfery wynosi mniej niż  $180^\circ$ , wtedy punkt Barana leży po północnej stronie równika, a Wagi po południowej, jeśli zaś ponad  $180^\circ$ , wtedy punkt Barana jest na południu, a Wagi na północy. (43) Gdy więc punkt Barana jest na północy, dodaj wartość z tablicy do Słońca i pozostałych gwiazd oraz planet, a co otrzymasz rachunkiem, potwierdzą spostrzeżenia; gdy punkt Barana znajduje się na południu, odejmij równanie od położenia Słońca i gwiazd. (44) Widać, że pożyteczne i konieczne jest przyjęcie owego ruchu, inaczej bowiem nie da się przedstawić wysokości Słońca w południku, długości łuku dziennego, wzrastania i malenia dnia i nocy, wysokości gwiazd [...] (46) Widoczne jest, że gwiazdy stałe nie mają żadnego ruchu, ani też nie zmieniają wzajemnie położenia, poza ruchem postępowania i cofania się, wspólnym dla gwiazd i wszystkich planet [...]"

Rys. 2 przedstawia jedno z kół trepidacyjnych mechanizmu Thābita, wokół punktu (Barana) równonocy wiosennej dziewiątej sfery.

Podaliśmy obszernie wyjątki z traktatu Thābita, aby uchylić wszelkie wątpliwości co do interpretacji podanej w rys. 2. Wokół konstrukcji Thābita narosło już wiele nieporozumień w literaturze historycznej, począ-



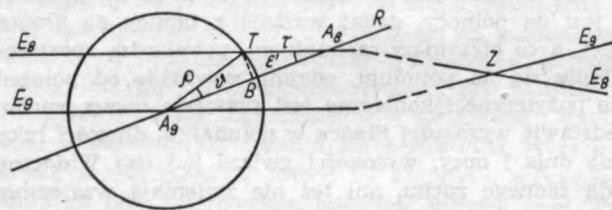
Rys. 2. Teoria Thābita

R — równik;  $E_9$  — ekliptyka sfery dziewiątej (zewnętrznej);  $\varepsilon$  — nachylenie ekliptyki dziewiątej sfery do równika;  $\varepsilon = 23^\circ 33'$  (§ 15);  $E_8$  — ekliptyka sfery ósmej (sfery zodiaku; § 4);  $A_9$  — punkt równonocy sfery dziewiątej (§ 5);  $A_9T = q$  — promień koła trepidacyjnego.  $q = 4^\circ 18' 42''$  (§ 7); T — „punkt Barana sfery ósmej”, czyli punkt wodzący tej sfery, obiegający koło trepidacyjne  $T_0T T'_0$  (§ 9, 10);  $\vartheta$  — argument ruchu trepidacyjnego (§ 7, 9, 10, 19);  $A_8$  — rzeczywisty punkt równonocy ósmej sfery;  $\varepsilon'$  — nachylenie (zmienne) ekliptyki ósmej sfery (§ 13, 16);  $A_8T = \tau$  — zmiana długości ekliptycznych wynikająca z równoczesnego przemieszczenia sfery ósmej o kąt  $\vartheta$  i przesunięcia punktu równonocy z  $A_9$  do  $A_8$

wszy od Delambre'a *Histoire de l'astronomie du moyen-âge* aż do najnowszej edycji Carmodyego<sup>27</sup>.

Pierwsze nieporozumienie tkwi już w terminologii użytej w traktacie. Określenie punktów wiodących T jako punktów równonocnych ósmej sfery związane jest z genezą modelu trepidacyjnego: są to jakby rzeczywiste punkty równonocne, przesunięte o łuk  $\varrho$  od położenia, zajmowanego na dziewiątej sferze. Jednakże w gotowym schemacie określenie takie jest niepoprawne i mylące — punkt równonocy ósmej sfery  $A_8$  to punkt faktycznego przecięcia ekliptyki  $E_8$  z równikiem, dający się wyznaczyć obserwacyjnie w oparciu o tę definicję.

W konstrukcji Thābita pozostał jeszcze nieokreślony jeden element. Same punkty wiodące T nie wystarczą do określenia płaszczyzny ekliptyki  $E_8$ . Dodatkowy warunek znajdujemy w § 37: „punkty Raka i Koziorożca” sfery ósmej, a ściślej mówiąc oddalone o  $90^\circ$  od T punkty ekliptyki  $E_8$ , nie opuszczają płaszczyzny ekliptyki nieruchomej, wykonując w niej oscylacje o amplitudzie  $4^\circ 18' 43''$  wokół „punktów” przesilen (punkt



Rys. 3

Z na rys. 3;  $ZT = 90^\circ$ ). Takie założenie nie jest związane w sposób konieczny z podstawową konstrukcją kół trepidacyjnych. Możliwe są (i były rzeczywiście proponowane przez późniejszych komentatorów) inne rozwiązania, jak np. stały punkt przecięcia obu ekliptyk ( $ZA_9 = 90^\circ$ ). Warianty takie nie mają zasadniczego wpływu na wartości trepidacji  $\tau$  (różnice nie przekraczają 1—2 minut łuku), zmieniają natomiast w istotny sposób przebieg zmian nachylenia ekliptyki  $\epsilon$ .

Tekst rozprawy uzupełniają dwie tablice liczbowe. Pierwsza, *Tablica ruchu postępowania i cofania się ósmej sfery*, podaje wartości kąta fazowego  $\vartheta$ , tzn. położenia „punktu Barana” ósmej sfery na kole trepidacyjnym, dla początku ery mahometańskiej oraz w odstępach 30-letnich (*anni collecti*) aż do roku 870 (w rękopisie 1970 Bibl. Jag. do roku 930 ery mahometańskiej (tab. I).

Uzupełnia tablicę „ruch ósmej sfery w latach arabskich pojedynczych (*anni expansi*)” od 1 do 30 lat (tab. II).

Początek ery mahometańskiej (początek 1 roku Hedżry) przypada na 16 lipca 622 roku. Długość roku (księżycowego) wynosi 354 dni, przy czym w cyklu 30-letnim jest 11 lat przestępnych po 355 dni. Średnia długość roku wynosi więc  $354^{11/30} = 354.367$  dnia.

<sup>27</sup> Nie ma chyba potrzeby zestawiania katalogu błędów i wypaczeń, jakie popełniano przy omawianiu teorii Thābita. Przykładowo wspomnę tylko, że Carmody błędnie określa wpływ trepidacji na wzajemne położenie sfer planetarnych i ósmej sfery (*Astronomical Works...*, s. 88), a przede wszystkim mylnie interpretuje zasadniczą konstrukcję geometryczną Thābita (s. 91 n.). Komentarz Carmodyego spotkał się z druzgocącą wprost krytyką O. Neugebauera (recenzja w „Speculum” t. 37, 1962, s. 99).



Tablica I

Lata arabskie	Ruch ósmej sfery
Epoka (pocz. ery)	0 <sup>s</sup> 1° 34' 2"
30	0 4 9 0
60	0 6 43 58
...	...
870	2 16 28 6
900	2 19 3 4
930	2 21 38 2

Tablica II

Lata arabskie	Ruch ósmej sfery
1	0 5 9
2	0 10 20
3	0 15 29
...	...
30	2 34 58

Szybkość kątowna „ruchu ósmej sfery”, jak wynika z przytoczonej tablicy, wynosi 309'936 na rok arabski, a więc 319'454 = 008874 na rok juliański. Łatwo dalej obliczyć, że punkt wiodący T znajdował się na równiku ( $\vartheta = 0$ ) w epoce + 604.88. Wartości  $\vartheta$  dla innych wybranych epok podaje zestawienie:

Data	$\vartheta$	Data	$\vartheta$
0	306.3	+ 604.9	0°
+138	318.6	+ 880	24.4
+500	350.7	+1000	35.1

Druga tablica w traktacie Thābita podaje, z argumentem  $\vartheta$ , wartość zmiany długości („równanie ósmej sfery”)  $\tau$  oraz odległość punktu wiodącego T od równika (TB na rys. 3 i tab. III).

Tablica III

Tablica równania ósmej sfery

$\vartheta$	$\tau$	TB	$\vartheta$	$\tau$	TB
5°	0° 55' 52''	0° 22' 40''	50°	8° 14' 0''	3° 17' 45''
10	1 50 36	0 44 31	55	8 47 48	3 31 40
15	2 45 16	1 6 45	60	9 17 44	3 44 46
20	3 39 23	1 27 20	65	9 43 53	3 54 19
25	4 31 12	1 48 4	70	10 5 30	4 2 48
30	5 22 30	2 9 21	75	10 22 47	4 9 8
35	6 9 6	2 28 6	80	10 35 1	4 14 28
40	6 53 12	2 45 55	85	10 42 13	4 17 30
45	7 36 35	3 2 38	90	10 45 0	4 18 43

O ruchu ósmej sfery podaje dwa sposoby obliczenia trepidacji  $\tau$ . Pierwszy polega na bezpośrednim odczytaniu  $\tau$  z tablicy „równania ósmej sfery”. Drugi sposób wykorzystuje zależność astronomii sferycznej:  $\sin \delta_{\odot} = \sin \lambda_{\odot} \sin \varepsilon$ . Odpowiada ona, w przeniesieniu do trójkąta  $TA_{\delta}B$  (rys. 3), wzorowi:  $\sin TB = \sin \tau \sin \varepsilon'$ . Należy więc w tablicy deklinacji Słońca (np. w *Almageście*, rozdz. 16 księgi I) odnaleźć długość ekliptyczną, której odpowiada deklinacja równa  $TB$ . Długość ta równa jest szukanej wartości trepidacji  $TA_{\delta} = \tau$ <sup>28</sup>. Oczywiście użyta tablica deklinacji Słońca winna być oparta na aktualnym znaczeniu  $\varepsilon$ ; rozprawa Thābita nie daje informacji co do zmian nachylenia ekliptyki wynikających z teorii, jakkolwiek autor zdaje sobie sprawę z istnienia tych zmian i przytacza odpowiednie dane obserwacyjne (§ 15, 16).

Można jednak obliczyć zarówno zmiany nachylenia ekliptyki jak i samą trepidacyjną zmianę długości za pomocą trygonometrii sferycznej, bez odwoływania się do tablic. Rozwiązanie trójkąta  $A_{\delta}A_{\theta}T$ , przy znanych  $\varepsilon = 23^{\circ}33'$  oraz  $\vartheta = 4^{\circ}18'43''$ , daje  $\tau$  i  $\varepsilon'$  jako funkcję argumentu  $\vartheta$ : (tab. IV).

Tablica IV

$\vartheta$	$\tau$	$\varepsilon'$	$\vartheta$	$\tau$	$\varepsilon'$
0°	0° 0' 0''	23° 29'	95°	10° 37' 28''	23° 58'
5	0 56 30	30	100	10 30 28	57
10	1 52 31	31	105	10 18 47	56
15	2 47 35	32	110	10 2 28	54
20	3 41 17	34	115	9 41 37	52
25	4 33 10	36	120	9 16 22	50
30	5 22 49	38	125	8 46 51	48
35	6 9 54	41	130	8 13 17	45
40	6 54 3	43	135	7 35 52	43
45	7 34 56	46	140	6 54 53	40
50	8 12 17	48	145	6 10 35	38
55	8 45 50	51	150	5 23 21	36
60	9 15 22	53	155	4 33 35	34
65	9 40 43	55	160	3 41 34	32
70	10 1 41	56	165	2 47 46	31
75	10 18 10	57	170	1 52 36	30
80	10 30 2	58	175	0 56 31	29
85	10 37 14	59	180	0 0 0	29
90	10 39 43	59			

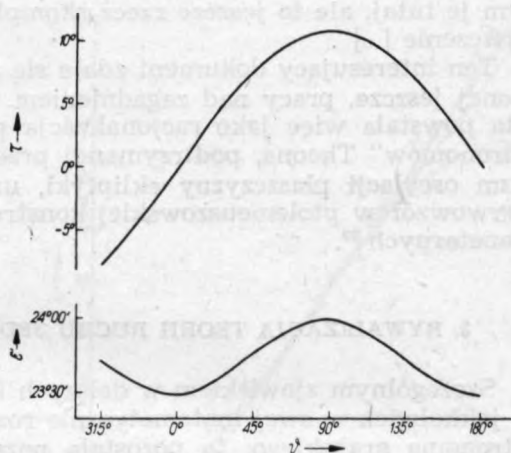
Wyniki powyższe przedstawia również wykres rys. 4. Jak widać, przebieg obu funkcji nie jest symetryczny względem  $\vartheta = 90^{\circ}$  (w trepidacji  $\tau$  różnice są zresztą niewielkie i osiągają 62'' dla  $\vartheta = 55^{\circ}$  i  $\vartheta = 125^{\circ}$ ). Zwraca uwagę rozbieżność między danymi tablicy Thābita i obliczonymi (rys. 5). Poza błędnymi wartościami, które mogą pochodzić zresztą od kopistów arabskich lub łacińskich (wyraźnie błędne są wartości dla  $\vartheta = 30^{\circ}$  i  $\vartheta = 45^{\circ}$ ), rys. 5 ujawnia systematyczny przebieg różnicy, wy-

<sup>28</sup> Ów drugi sposób nie ma więc nic wspólnego z „trepidacją punktów przesilen”, jak to sugeruje Carmody.

nikający z algorytmu stosowanego przez Thābita przy obliczeniach — algorytmu, który trudno byłoby już obecnie odtworzyć.

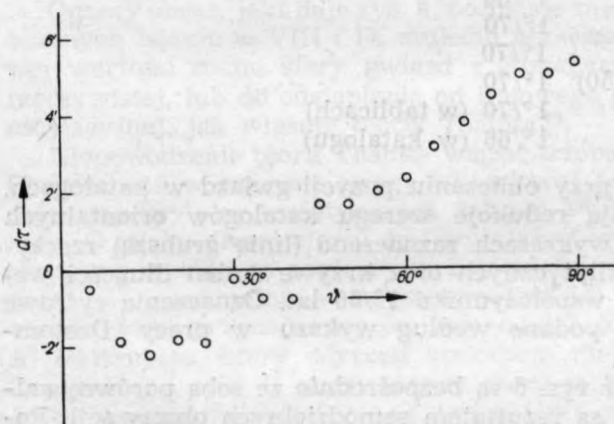
Przyrost długości gwiazd od czasów Ptolemeusza do Thābita i Al-Batāni,  $11^{\circ}5'$ , odpowiada rzeczywistej zmianie (krzywa Th na rys. 6). Od-

Rys. 4 Zmiany długości  $\tau$  i nachylenia ekliptyki  $\epsilon'$  w teorii Thabita



tworzona również została ogólna zmiana nachylenia ekliptyki, jakkolwiek niezadowolające jest przedstawienie ilościowe (od  $23^{\circ}41'$  w roku + 138 do  $23^{\circ}35'$  w połowie IX w.).

Na genezę teorii Thābita rzuca światło jego list do jednego ze współpracowników, Ishāq b. Hunayn<sup>29</sup>, omawiający teorię ruchu Słońca: [...]



Rys. 5

przyczyny [błędu] są złożone; niektórzy uważali (mówi o tym m. in. Theon, uważający ich za rozsądnych astrologów), że zodiak porusza się, posuwając się naprzód o  $8^{\circ}$  i podobnie cofając się. W ruchu tym  $1^{\circ}$  przebywa się w ciągu 80 lat [...] Gdyby tak było, to gwiazdy stałe byłyby czasem nieruchome, czasem zaś cofały się — i dotąd nie potrafimy wy-

<sup>29</sup> Cytowany u Duhema, *Système...*, t. 2, s. 239 i Carmodyego, *Astronomical Works...*, s. 45.



jaśnić, jakby to się dziać mogło. Można by to uczynić, gdyby znana była poprawna obserwacja Słońca, dokonana dostatecznie dawno, między epoką Ptolemeusza i naszymi czasami. Gdybyś w księgach greckich znalazł taką obserwację, przekaż mi ją, abym mógł rozstrzygnąć sprawę. Na zakończenie dodam, że gdybym miał gotowe rozwiązanie, to podałbym je tutaj, ale to jeszcze rzecz skomplikowana i po części tylko przypuszczenie [...]”.

Ten interesujący dokument zdaje się mówić o podjętej, ale nie ukończonej jeszcze, pracy nad zagadnieniem ruchu ósmej sfery. Teoria Thābita powstała więc jako racjonalizacja prymitywnej recepty „dawnych astronomów” Theona, podtrzymanej przez astronomię hinduską. Mechanizm oscylacji płaszczyzny ekliptyki, użyty przez Thābita, mógł mieć pierwowzór w ptolemeuszowskiej konstrukcji zmian nachylenia epicykli planetarnych<sup>30</sup>.

### 3. RYWALIZACJA TEORII RUCHU JEDNOSTAJNEGO I KOŁOWEGO

Szczególnym zjawiskiem w dalszych losach pojęcia trepidacji było to, że jakkolwiek w swej matematycznie rozbudowanej formie była dziełem astronoma arabskiego, to pozostała poza zasadniczym nurtem rozwoju astronomii orientalnej. Przeważająca większość astronomów Islamu odrzuca, a raczej pomija milczeniem teorię trepidacji, ograniczając rewizję modelu Ptolemeusza do poprawienia jego parametrów. W ciągu następnych 6 stuleci uprawiania astronomii w krajach Islamu przyjmowano prędkość ruchu ósmej sfery bliską rzeczywistej wartości  $1^\circ/72$  lata:

Habash al-Hāsib (ok. 850)	$1^\circ/66$ lat
Al-Battāni	$1^\circ/66$
Ibn al A‘lam (976)	$1^\circ/70$
Nasir ad-Din at-Tusi	$1^\circ/70$
Ibn ash-Shatir (ok. 1350)	$1^\circ/70$
Ulugh Bej	$1^\circ/70$ (w tablicach)
	$1^\circ/66$ (w katalogu)

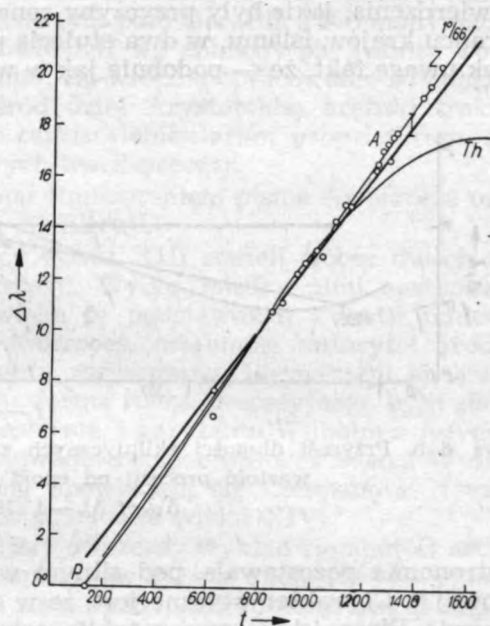
Wartości te stosowano przy obliczaniu pozycji gwiazd w katalogach. Rys. 6a i 6b przedstawiają redukcje szeregu katalogów orientalnych względem *Almagestu*. Na wykresach zaznaczono (linią grubszą) rzeczywisty przyrost długości ekliptycznych oraz krzywe zmian długości według teorii Thābita i przy współczynniku  $1^\circ/66$  lat. Oznaczenia cyfrowe poszczególnych katalogów podano według wykazu w pracy Destombes'a<sup>31</sup>.

Nie wszystkie katalogi z rys. 6 są bezpośrednio ze sobą porównywalne. Niektóre (nr 4, 18, 25) są rezultatem samodzielnych obserwacji. Ponadto w astronomii orientalnej utrzymywała się tradycja, według której katalog Ptolemeusza powstał przez przeliczenie pozycji katalogu, sporządzonego jakoby przez Menelaosa 41 lat wcześniej. Stąd też niektórzy autorzy począwszy od as-Sufi pomniejszali długości gwiazd z *Almagestu* o 25' (odpowiadające ruchowi ósmej sfery w ciągu 41 lat z szybkością

<sup>30</sup> *Almagest*, księga XIII, rozdział 2.

<sup>31</sup> M. Destombes, *Globes célestes et catalogues d'étoiles orientaux du moyen-âge*, „Actes du VIII<sup>e</sup> Congrès International d'Histoire des Sciences”, t. 1, Firenze-Paris (1958), s. 313.

1°/100 lat). Tak zredukowane pozycje powiększono ze współczynnikiem 1°/66 lat epoki od odtworzonego domniemanego katalogu Menelaosa (+ 97) do daty nowego katalogu<sup>32</sup>. Powstałe w ten sposób katalogi znajdują się na rys. 6 o 12' powyżej linii oznaczającej przyrost długości 1°/66 lat (nr 8, 13, Z).



Rys. 6 a. Przyrost długości ekliptycznych i średniowieczne katalogi gwiazd

Ogólny obraz, jaki daje rys. 6, pozostaje mimo to wyraźny: obserwacje uczonych Islamu w VIII i IX stuleciu upoważniały do zastąpienia wadliwej wartości ruchu sfery gwiazd z *Almagestu* nową, nieco wyższą od rzeczywistej, lub do odstąpienia od liniowego przebiegu na korzyść teorii oscylacyjnej, jak właśnie teoria Thābita<sup>33</sup>.

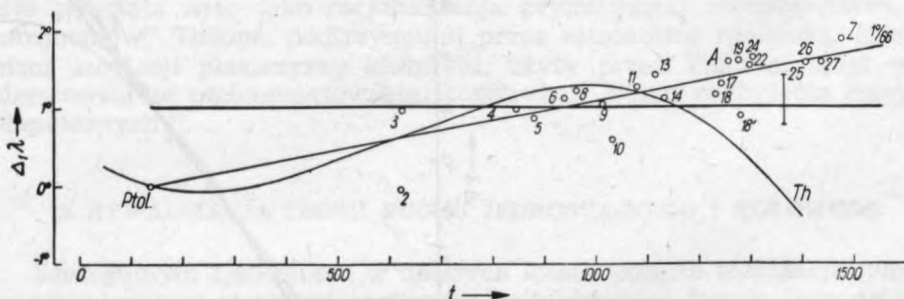
Niepowodzenie teorii Thābita wiązać trzeba z przeciwwagą autorytetu Ptolemeusza w zakresie samej jakościowej teorii zjawiska. Thābit, podejmując krytykę teoretycznych założeń Ptolemeusza (*O roku słonecznym, O ruchu ósmej sfery*), był wyjątkiem wśród uczonych IX w., skupiających wysiłki na pogłębieniu znajomości matematycznej teorii *Almagestu* i — ewentualnie — na poprawieniu jej wartości liczbowych. Przeważało więc, przynajmniej we wschodnich krajach Islamu, stanowisko Al Battāniego, który odrzucił koncepcję nieliniowych zmian długości (wspomina o tym *O ruchu ósmej sfery* w § 21, osłabiając wagę tezy Al-Battāniego twierdzeniem o późniejszej zmianie stanowiska) i swą *Tablicę ruchu wspólnego dla wszystkich gwiazd stałych* oparł na współczynniku 1°/66 lat<sup>34</sup>.

<sup>32</sup> Abdal Rahman, Alsoufi, *Description des étoiles fixes...* (wyd.) H. Schjellerup, St. Pétersbourg 1874.

<sup>33</sup> Wykres ilustruje też przyjmowanie zbyt dużego współczynnika szybkości ósmej sfery i w następnych stuleciach, mimo rozbieżności obliczanych w ten sposób miejsc gwiazd z rzeczywistością. To już jednak zjawisko odrębne, związane z rosnącą stagnacją astronomii Islamu.

<sup>34</sup> Al-Battāni *sive Albatēni Opus astronomicum*, wyd. C. A. Nallino, cz. II, Mediolani 1907, s. 107.

Znamiennym wyjątkiem stała się astronomia mahometańskiej Hiszpanii w XI w. Znany astronom toledański, Az-Zarqāli (lub grupa uczonych pod jego kierownictwem) opracował około roku 1080 tablice astronomiczne, *Tablice Toledańskie*<sup>35</sup>, w których ruch precesyjny ma postać thābitowskiej trepidacji. Nie ma w zachowanych tekstach przesłanek dla stwierdzenia, jakie były przyczyny renesansu teorii Thābita na zachodnim krańcu krajów Islamu, w dwa stulecia po jej sformułowaniu. Zwraca jednak uwagę fakt, że — podobnie jak w wieku IX w Bagdadzie — iberyjska



Rys 6 b. Przyrost długości ekliptycznych z rys. 6 a, pomniejszony o rzeczywistą wartość precesji od epoki Almagestu (rok 138):

$$\Delta_1\lambda = \Delta\lambda - 1^\circ/72 (t - 138)$$

astronomia pozostawała pod silnym wpływem hinduskiej tradycji naukowej<sup>36</sup>. Charakterystyczne jest, że w ciągu XI stulecia powstaje na Półwyspie Pirenejskim szereg tablic astronomicznych, będących pochodną tablic *Sindhind*<sup>37</sup> i reprezentujących odmienne od *Almagestu* podejście metodyczne: rozbudowana trygonometria sinusów i operowanie definicjami pojęć astronomicznych, bez rozbudowanego geometrycznego aparatu dowodowego<sup>38</sup>. Elementy te występują również w *Tablicach Toledańskich*.

Czas i miejsce powstania *Tablic* wyjaśniają łatwo ich uprzywilejowaną pozycję w nauce europejskiej. Przecież właśnie poprzez Hiszpanię następuje w XII i XIII w. szczególnie intensywna recepcja nauki arabskiej przez łacińską Europę. Stąd też pierwsze europejskie tablice astronomiczne, począwszy od *Tablic Marsyjskich* Rajmunda z Marsylii (ok. 1140 r.), są ściśle adaptacją *Tablic* Az-Zarqāli (Arzachela).

W okresie wzmożonego oddziaływania na naukę europejską zachodni Islam stał pod znakiem ostrej dyskusji filozoficznej wokół skrajnego arystotelizmu Awerroesa. W astronomii awerroizm wyraził się krytyką konstrukcji Ptolemeusza i próbą powrotu do koncepcji sfer homocentrycznych. W końcu XII w. Al-Bitruji (Alpetragius) daje zarys budowy świata, mający przywrócić czystą doktrynę Arystotelesa w opisie zjawisk astronomicznych. Teoria ruchów precesyjnych w dziele Al-Bitruji była matematycznie niezadowolająca (podobnie zresztą jak i modele orbit planetarnych) i nie rozwinięta w szczegółach. Jej szczegółowa analiza jest zby-

<sup>35</sup> E. Zinner, *Die Tafeln von Toledo*, „Osiris”, t. 1. 1936, s. 747.

<sup>36</sup> O. Neugebauer, *The Transmission of Planetary Theories in Ancient and Medieval Astronomy*, New York (1956), s. 3, 9.

<sup>37</sup> E. S. Kennedy, *A Survey of Islamic Astronomical Tables*, „Transactions of the American Philosophical Society” t. 46, cz. 2, 1956, s. 128—129.

<sup>38</sup> Por. przypis 17.



teczna; odnotujemy tylko istotny dla naszego tematu moment: sfera gwiazd obciążona jest u Al-Bitruji podwójnym ruchem: postępowym oraz swoistego rodzaju oscylacją trepidacyjną.

Tłumaczenia dzieł arabskich oraz greckich (za pośrednictwem języka arabskiego) na łacinę objęły wszystkie interesujące nas teksty. Wśród tłumaczeń szczególnie zasłużonego na tym polu Gerarda z Kremony (działającego w Toledo w drugiej połowie XII w.) znalazły się *Tablice Toledańskie*, *O ruchu ósmej sfery Thābita*, IX-wieczne opracowanie *Almagestu* al-Farghāni, *Almagest*, oraz wśród dzieł Arystotelesa arabski traktat przypisywany Arystotelesowi, *De causis elementorum proprietarum*, zawierający wykład obu podstawowych teorii precesji.

Nieco później Michał Szkot objął tłumaczeniem pisma Awerroesa oraz (w 1217 r.) traktat astronomiczny Al-Bitruji.

W ten sposób uczeni europejscy wieku XIII stanęli wobec dwóch zasadniczo różniących się teorii precesji. Wybór między nimi następował wprawdzie niezależnie od stanowiska w podstawowej kwestii budowy świata, ale konflikt Ptolemeusz-Awerroes, osłabiając autorytet źródła, powiększał swobodę w poszukiwaniu rozwiązania. Pierwszymi autorami opowiadającymi się za trepidacyjną formą ruchu precesyjnego byli: sławny nauczyciel Bacona, Robert Grosseteste, i paryżanin Wilhelm z Auvergne. Pod wpływem Grosseteste przyjmuje trepidację Roger Bacon. W drugiej połowie stulecia za trepidacją opowiadają się Campano z Novary (ok. 1262 r.) oraz Idzi z Rzymu (na przełomie wieku XIV).

Z drugiej strony najpopularniejszy ówczesny wykład elementów astronomii, *Sphaera* Jana Sacrobosco (napisany w Paryżu około 1240 r.), pomija milczeniem teorię Thābita i opiera się na schemacie Ptolemeusza w relacji Al-Farghāni. Pod koniec XIII w. Jan z Sycylii poddaje krytyce zasadę kół trepidacyjnych, jako niezgodną z aksjomatem ruchu kołowego (przy trepidacyjnym ruchu ósmej sfery gwiazdy, znajdujące się w pobliżu punktów przesilenia, poruszają się nie kołowo, lecz wykonują oscylacje po łuku wielkiego koła)<sup>39</sup>. W tym samym czasie Wilhelm z St. Cloud odrzuca teorię Thābita na podstawie własnych obserwacji, wykazujących, że zmiana długości przekroczyła wartość wynikającą z tablic trepidacji.

Ostatecznie jednak zwyciężyć miały kompromisowe próby łączenia obu rodzajów ruchu, liniowego i okresowego. Pierwszym uczonym, który podał taki opis zjawisk precesyjnych, był Albert Wielki. Jego poglądy formowały się pod wpływem pseudoarystotelesowskiego *De causis elementorum proprietarum*. Podobnie łączył trepidację z ruchem postępowym współczesny Albertowi Robert z Marsylii.

Taka kombinacja ruchów wymagała w aspekcie kosmologicznym odpowiedniego zwiększenia ilości sfer nadgwiezdnych i przypisania poszczególnym sferom ruchu dobowego, precesyjnego (jednostajnego) i trepidacji. Można tu było sięgnąć do arsenału filozofii scholastycznej, dyskutującej ilość sfer w oparciu o przesłanki metafizyczne. Filozofia uznawała przecież istnienie sfer nadgwiezdnych: kryształowej i „empireum”. Jeszcze u Grosseteste i Michała Szkota dziewiąta sfera, krystaliczna, stanowiła motoryczną przyczynę ruchu dobowego, a ponad nią mieściło się empireum. Campano przyjmuje zarówno istnienie dziewięciu sfer, stwierdzonych przez astronomię, jak i dwóch „filozoficznych”, bez określania

<sup>39</sup> Analogiczny zarzut w odniesieniu do teorii ruchu planet w szerokości wysuwał już uprzednio Bacon.

ich wzajemnego związku. Albert Wielki podaje już układ dziesięciu sfer „matematycznych”: dziewięta wykonuje precesyjny ruch jednostajny, a dziesiąta, *primum mobile*, obrót dobowy.

Daliśmy tu tylko szkicowy zarys tendencji astronomii europejskiej w XIII w.<sup>40</sup> Wystarczy to jednak dla zorientowania się co do drogi, na której nastąpiło rozwiązanie sprzeczności między obu teoriami precesji. Rola (i poziom) obserwacji była zbyt niska, by pozwolić na szukanie rozstrzygnięcia w drodze doświadczalnej, za pomocą obserwacji (Wilhelm z St. Cloud był tu bodaj absolutnym wyjątkiem). Równocześnie kosmologia dysponowała aparatem sfer koniecznym dla pogodzenia wzorów starożytnych i arabskich. W początkach wieku XIV kwestia została praktycznie rozstrzygnięta dzięki nadaniu hipotezie podwójnego ruchu precesyjnego (jak u Alberta Wielkiego) roboczej matematycznej formy w paryskiej wersji *Tablic astronomicznych króla Alfonsa*.

#### 4. TABLICE KRÓLA ALFONSA

Władca Kastylji Alfons X (1252—1282), uczony i mecenas nauki, stworzył w Toledo poważny ośrodek studiów i tłumaczeń arabskich dzieł astronomicznych i astrologicznych. Tutaj właśnie, około roku 1272, powstały tablice planetarne, *Tablice astronomiczne króla Alfonsa*. Ich autorami byli współpracownicy króla, hebrajscy astronomowie Juda ben Moses ha-Kohen i Izaak ben Sid. Pierwotna, kastylijska wersja *Tablic* nie zachowała się. Znamy jedynie wstęp, *El libro de las taulas Alfonsies*<sup>41</sup>. Wynika z niego, że celem opracowania nowych tablic było zastąpienie *Tablic Toledańskich*, niezadowolających już w 200 lat po ich powstaniu. Zawarte we wstępie objaśnienia („kanony”) przeczą twierdzeniu Dreyera<sup>42</sup>, jakoby już w pierwszej redakcji *Tablic* precesja miała postać złożoną (ruch jednostajny + trepidacja). Rozdział 49 wstępu daje opis ruchów ósmej sfery, oparty na układzie dwóch sfer: dziewięta wykonuje obrót dobowy, a sfera gwiazd (ósma) — trepidację. Brak niestety jakichkolwiek danych liczbowych — szybkość i amplituda ruchu trepidacyjnego są więc nieznane.

Początkowo *Tablice Alfonsa* miały tylko lokalne znaczenie. Dopiero opracowana w Paryżu około roku 1320 wersja łacińska Jana z Lignièeres i jego ucznia Jana z Saksonii stała się podstawowym narzędziem pracy astronomów europejskich aż do XVI w.<sup>43</sup>

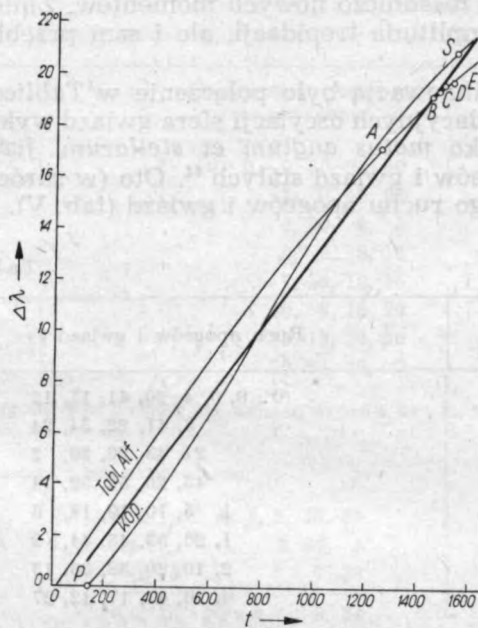
Redakcja paryska wniosła szereg zmian do układu *Tablic*, między innymi wprowadzając konsekwentnie miarę czasu i kąta w systemie sześćdziesiątkowym. Paryskie *Tablice Alfonsa* stanowią zbiór schematów rachunkowych i pozbawione są wykładu podstaw teoretycznych. Założe-

<sup>40</sup> Obszerne zestawienie i omówienie tekstów daje Duhem w *Système du monde*, t. II—IV.

<sup>41</sup> Opublikowany w IV tomie monumentalnego wydawnictwa M. Rico y Sinobras, *Libros del Saber*, Madrid 1863—1867.

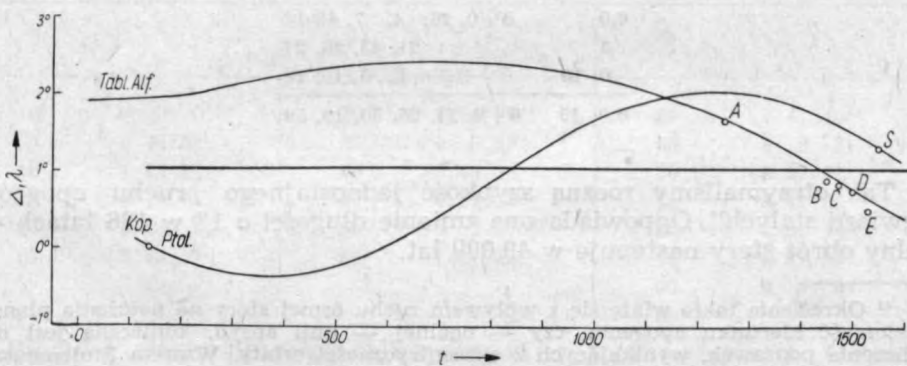
<sup>42</sup> *On the original form of the Alfonsine Tables*, „Monthly Notices of the R.A.S.”, t. 80, 1920, s. 243.

<sup>43</sup> O czym świadczy olbrzymia ilość, zachowanych w bibliotekach całej Europy, odpisów samych *Tablic*, jak i opartych na nich *tabulae resolutae*. *Tablice Alfonsa* wydawane były w druku kilkanaście razy od 1483 do 1553. Jeszcze w 1641 r. wydano je w Madrycie (A. Wegener, *Die Alfonsinischen Tafeln für den Gebrauch eines modernen Rechners*, Berlin 1905).



Rys. 7 a. Przyrost długości ekliptycznych i katalogi gwiazd. Teorie Tablic Alfonsa i Kopernika

P — Almagest, epoka 138; A — Tablice Alfonsa 1252 redukcja + 17° 8'; B — Tablice Alfonsa 1450 redakcja + 19° 10'; C — Tablice Alfonsa 1474 redukcja + 19° 24'; D — Tablice Alfonsa (wyd. Gaurico) 1500 redukcja + 19° 40'; E — Almagest (wyd. Gaurico) 1530 redukcja + 19° 50'; S — J. Schoner 1550 redukcja + 20° 55'



Rys. 7 b. Wykres rys. 7 a z przekształceniem  
 $\Delta_1\lambda = \Delta\lambda - 1''/72 (t - 138)$



nia autorów wynikają jednak z wartości liczbowych i z przebiegu funkcji, zawartych w *Tablicach*. W odniesieniu do zagadnień ruchu precesyjnego występuje tu kilka zasadniczo nowych momentów. Zmienione zostały nie tylko szybkość i amplituda trepidacji, ale i sam przebieg funkcji zmian długości.

Najistotniejszą innowacją było połączenie w *Tablicach* obu rodzajów ruchu: oprócz trepidacyjnych oscylacji sfera gwiazd wykonuje jednostajny ruch, określony jako *motus augium et stellarum fixarum communis*, wspólny ruch apogeów i gwiazd stałych<sup>44</sup>. Oto (w skróceniu) alfonsyńska tablica jednostajnego ruchu apogeów i gwiazd (tab. V).

Tablica V

Doby	Ruch apogeów i gwiazd
1	0°; 0, 0, 4, 20, 41, 17, 12
2	8, 41, 22, 34, 24
5	21, 43, 26, 26, 2
10	43, 26, 52, 52, 4
15	1, 5, 10, 19, 18, 6
20	1, 26, 53, 45, 44, 9
30	2, 10, 20, 38, 36, 13
60	4, 20, 41, 17, 12, 27

Pełna tablica zawiera 60 wartości dla argumentu od 1 do 60 dni. Obliczenie zmiany współrzędnych dla dowolnego okresu zaczyna się od wyrażenia tego okresu w dniach i ułamkach doby w sześćdziesiątkowym układzie pozycyjnym (odpowiednie tablice pomocnicze ułatwiają takie przeliczenie dla egipskiej, perskiej, mahometańskiej i juliańskiej rachuby lat). Rok juliański, równy  $365\frac{1}{4}$  doby, wyraża się w systemie sześćdziesiątkowym liczbą 6,5;15. Wartość funkcji dla poszczególnych miejsc pozycyjnych argumentów otrzymuje się przez odpowiednią zmianę rzędu wielkości tabularyzowanej:

6,0	0°; 0, 26, 4, 7, 43 14
5	21, 43, 26, 27
0; 15	1, 5, 10, 19
6,0; 15	0°; 0, 26, 26, 56, 19, 59

Tak otrzymaliśmy roczną szybkość jednostajnego „ruchu apogeów i gwiazd stałych”. Odpowiada ona zmianie długości o  $1^\circ$  w 136 latach — pełny obrót sfery następuje w 49 000 lat.

<sup>44</sup> Określenie takie wiąże się z wpływem ruchu ósmej sfery na położenia planet. Znajomość kierunku apogeum, czy — ogólnej — linii apsyd, konieczna jest dla obliczenia poprawek, wynikających z ekscentryczności orbity. Wzorem Ptolemeusza, w średniowieczu uważano apogea planet za nieruchome względem gwiazd, a więc obarczone, na równi ze sferą gwiazd, precesyjnymi zmianami położenia. Wyjątkiem u Ptolemeusza była linia apsyd Słońca, a nieruchoma względem punktów kardynalnych ekliptyki, a więc o niezmienniej długości ( $66^\circ 5'$ ). Astronomia arabska zmodyfikowała pogląd Ptolemeusza; od czasów Al-Farghāniego traktowano apogeum Słońca podobnie jak apogea planet, przypisując mu ruch wspólny ze sferą gwiazd.

Argument zmian trepidacyjnych, *medius motus accessus et recessus octavae sphaerae*, zmienia się siedmiokrotnie szybciej (tab. VI).

Tablica VI

Doby	Średni ruch postępowy i wsteczny ósmej sfery
1	0°; 0, 0, 30, 24, 49
2	1, 0, 49, 38
5	2, 32, 4, 5
10	5, 4, 8, 10
15	7, 36, 12, 15
20	10, 8, 16, 20
30	15, 12, 24, 30
60	30, 24, 49, 0

Kąt fazowy dla epoki 0 (*Radix incarnationis*) wynosi 5, 59°; 12, 34, 0

Szybkość roczna ruchu trepidacyjnego:

6,0	0; 3, 2, 28, 54
5	2, 32, 4
0; 15	7, 36
6,0; 15	0°: 3, 5, 8, 34

Okres zmian wynosi więc 7000 lat.

Powyższy ruch trepidacyjny powoduje zmianę długości ekliptycznych, ujętą w *Tablicy równań [poprawek] ruchu postępowego i wstecznego sfery gwiazd* dla 90 wartości kąta fazowego  $\vartheta$  obliczonego za pomocą poprzedniej tablicy (tab. VII).

Tablica VII

Tablica poprawek ruchu ósmej sfery

$\vartheta$	$\tau$	$\vartheta$	$\tau$	$\vartheta$	$\tau$
0°	0° 0' 0''	30	4° 29' 10''	60	7° 47' 10''
5	0 46 52	35	5 8 52	65	8 9 3
10	1 33 24	40	5 46 16	70	8 27 11
15	2 19 14	45	6 21 3	75	8 41 27
20	3 4 1	50	6 52 57	80	8 51 44
25	3 47 28	55	7 21 44	85	8 57 56
				90	9 0 0

Przebieg zmian długości ekliptycznych  $\tau$  można wyrazić wzorem  $\sin \tau = \sin 9^\circ \sin \vartheta$ <sup>45</sup>. Trepidacja była równa zero w epoce +15 i osiąga maksymalną (dodatnią) wartość +9° w roku 1765.

<sup>45</sup> Błędne, a spotykane w wielu opracowaniach określenie  $\tau = 9^\circ \sin \vartheta$  prowadzi do zignorowania istotnego problemu interpretacji geometrycznej teorii *Tablic*.

Pełna teoria precesji w *Tablicach Alfonsa* przedstawia się jako kombinacja jednostajnego, postępowego ruchu ósmej sfery o okresie 49 000 lat i oscylacji trepidacyjnej o amplitudzie  $9^\circ$  i okresie 7000 lat<sup>46</sup>. Wynikająca stąd krzywa zmian długości wykreślona została na rys. 7a i 7 b. Kwestię interpretacji geometrycznej zajmiemy się niżej, przy omawianiu komentarza Peurbacha.

Z rozpowszechnieniem *Tablic Alfonsa* rozstrzygnięta została dyskusja o budowie i ilości sfer nadgwiezdnych. W astronomii XV w. przyjmowany był schemat następujący: *primum mobile* przeniesione zostało do zewnętrznej, dziesiątej sfery. Wokół biegunów ekliptyki obraca się wewnątrz niej, w „kierunku kolejności znaków zodiaku” — z zachodu na wschód — sfera dziewiąta, dokonując pełnego obrotu w 49 000 lat. Z kolei sfera ósma wykonuje oscylacje trepidacyjne w granicach  $\pm 9^\circ$  z okresem 7000 lat.

Pomijając na razie trudności, związane z interpretacją kół trepidacyjnych w teorii astronomów króla Alfonsa, podkreślić trzeba zasadniczą sprzeczność, tkwiącą w naszkicowanej powyżej konstrukcji kosmologicznej. Otóż w teorii Thābita możliwe było zlokalizowanie środków kół trepidacyjnych w punktach zdefiniowanych przez przecięcie równika ze „średnią” ekliptyką dziesiątej sfery. Obecnie jednak, skoro dziewiąta sfera wykonuje powolny ruch postępowy, nie ma na ekliptyce tej sfery żadnych wyróżnionych punktów. Jeśli nawet przyjąć arbitralnie takie punkty jako środki kół trepidacyjnych, to wskutek „ruchu apogeów i gwiazd stałych” będą one zmieniać swe położenie względem równika. Konsekwencją tego byłaby nie obserwowana nigdy zmiana nachylenia ekliptyki sięgająca  $\pm 9^\circ$ .

Trudność tę można by usunąć przez uznanie *aequatio motus accessus et recessus* za ruch harmoniczny, odbywający się w płaszczyźnie ekliptyki dziesiątej (i dziesiątej) sfery<sup>47</sup>. Brak jednak potwierdzenia takiej interpretacji w przekazach historycznych. Co więcej, potrzebna byłaby odpowiednią konstrukcją geometryczną, generująca ruch harmoniczny za pomocą składania ruchów czysto kołowych — w europejskiej astronomii konstrukcję taką stosuje dopiero Kopernik.

Innym rozwiązaniem byłaby zamiana kolejności sfer i obarczenie sfery dziesiątej ruchem trepidacyjnym (wokół nieruchomych punktów przecięcia ekliptyki „średniej” z równikiem), ósmej zaś — ruchem postępowym. Taki układ występuje w pismach Marsyliusza van Inghen z Nijmegen, pierwszego rektora uniwersytetu w Heidelbergu (zm. 1396)<sup>48</sup>. Można jednak wątpić, czy zmieniony porządek sfer był tu wynikiem rozważań geometrycznych. Tak było dopiero w przypadku szesnastowiecznej teorii Jana Wernera, której niżej poświęcimy więcej miejsca.

Sprzeczności tkwiące w systemie *Tablic Alfonsa* nie przeszkodziły w jego powszechnym uznaniu. Dostatecznie wielki był już rozdzźwięk między kosmologią i astronomią matematyczną, między światem sfer ho-

<sup>46</sup> Okrągłe i współmierne okresy przyjęte zostały pod wpływem pojęć kabalistycznych (A. Riccius, *De motu octavae sphaerae*, 1513, cyt. przez Delambre'a w: *Histoire...*, s. 379) i pochodzą niewątpliwie z toledańskiej wersji *Tablic*. Pierwotnie 49 000 lat było okresem współmierności roku zwrotnikowego z *Tablic* i roku kalendarzowego. W Paryżu utożsamiano rok kalendarzowy (juliański) z rokiem gwiazdowym i nadano jednolity ruch apogeom planet.

<sup>47</sup> Tak np. Kepler w *Epitome astronomiae copernicanae, Opera omnia* (wyd. C. Frisch), t. 6, Frankfurt 1866, s. 519.

<sup>48</sup> Duhem, *Système...*, t. IV, s. 164.



mocentrycznych Arystotelesa i ptolemeuszowskim układem epicykli. Zaletą *Tablic* był dogodny schemat rachunkowy łączący kompromisowo obie podstawowe teorie precesji.

Szeregiem niekonsekwencji obarczone są również europejskie średniowieczne katalogi gwiazd. Juda ben Moses opracował w 1256 r. katalog gwiazd, będący częścią zbiorowego dzieła o instrumentach astronomicznych, *Libros del saber de astronomia y de los instrumentos*<sup>49</sup>. Katalog oparty był na pracy As-Sufiego (por. przypis 32), należał więc do grupy katalogów zredukowanych za pomocą współczynnika  $1^\circ/66$  lat od epoki Menelaosa (punkt A na rys. 6). W paryskiej wersji *Tablic* katalog został mechanicznie połączony z tablicami planetarnymi, bez żadnych informacji co do sposobu jego utworzenia. Nadając dziełom Alfonsa X cechy jednorodnej i zwartej konstrukcji, późniejsza tradycja astronomiczna przyjęła epokę *Tablic* (1252 r.) za epokę katalogu. Dla obliczenia współrzędnych gwiazd na dowolną późniejszą epokę dodawano do wartości katalogu *Tablic Alfonsa* poprawkę, obliczoną na podstawie tablic ruchu apogeów i trepidacji<sup>50</sup>. W tak skrajnie niejednorodny sposób<sup>51</sup> powstawały późnośredniowieczne katalogi gwiazd (rys. 7).

Dalszym elementem zaciemniającym obraz był zbiąg okoliczności, sprawiający, że redukcja katalogu *Tablic*,  $+17^\circ 8'$ , odpowiada przyrostowi współrzędnych według teorii alfonsyńskiej od roku  $+15$  (epoki zerowej trepidacji) do domniemanej epoki katalogu, czyli do roku 1252<sup>52</sup>. W taki też sposób tłumaczył powstanie katalogu gwiazd Alfonsa Regiomontanus: „[...] łatwiej zrozumiesz, jak bezwartościowe były dane Alfonsa. Przydał on do współrzędnych gwiazd Ptolemeusza za dużo o  $1^\circ 55'$ . Wykorzystał bowiem dane Ptolemeusza, jakby wyznaczone zostały w początkach ery Chrystusa. Stąd błędne są miejsca gwiazd u Alfonsa, o tyle, o ile sfera gwiazd przesunęła się w 140 latach, dzielących Chrystusa od Ptolemeusza”<sup>53</sup>.

##### 5. PRÓBY FIZYCZNEJ INTERPRETACJI (PEURBACH, WERNER)

Z Regiomontanem — Janem z Königsbergu — doszliśmy do drugiej połowy wieku XV. Dominującym akcentem tego okresu są wysiłki wiedeńskiej szkoły astronomicznej (Peurbach, Regiomontanus) nad odnową astronomii i podniesieniem jej technicznej kompetencji. Wśród innych zagadnień podjęta została próba kosmologicznej interpretacji schematu ruchów ósmej sfery z *Tablic Alfonsa*.

<sup>49</sup> A. Wegener, *Die astronomischen Werke Alfons X.*, „Bibliotheca Mathematica” t. 6, 1906, s. 129.

<sup>50</sup> Przykład takiego obliczenia zawiera Rkp. 556 Biblioteki Jagiellońskiej (s. 223) przy katalogu gwiazd Grzegorza z Krakowa dla epoki 1464 (redukcja  $+19^\circ 18'$ ).

<sup>51</sup> Aby przejść od katalogu Ptolemeusza, s'nowiącego ostateczny pierwowzór, do katalogu typu *Tablic Alfonsa*, trzeba długości gwiazd z *Almagestu* pomniejszyć o  $25'$  (szybkość ósmej sfery  $1^\circ/100$  lat); do otrzymanych w ten sposób współrzędnych, odpowiadających rzekomemu katalogowi Menelaosa (por. s. 16) dodać  $17^\circ 33'$  ( $1^\circ/66$  lat od roku 98). Epoką katalogu jest teraz rok 1256. Ostatnim krokiem w tej dziwnej płataninie pojęć jest zmiana epoki na rok 1252 i dodanie poprawek, wynikających z jednostajnego ruchu ( $1^\circ/136$  lat) oraz trepidacji ósmej sfery.

<sup>52</sup> Por. wykres na rys. 7, gdzie krzywą zmian według *Tablic Alfonsa* odniesiono właśnie do roku  $+15$ .

<sup>53</sup> *Scripta clarissimi mathematici M. Io. Regiomontani, Norymberga 1544*, fol. 43<sup>r</sup> cytowane według L. A. Birkenmajera, *Marcin Bylica z Olkusza*, Kraków 1892, s. 80 i 147.

Regiomontanus omija zresztą to zagadnienie w *Epitome in Almagestum*. Omówiono tu krótko (*propositio II* księgi III) teorię Thābita; jest też wzmianka (*propositio VI* księgi VII), zaczerpnięta z dzieła Al-Battāniego, o dawnej teorii ruchu oscylacyjnego: „Czy zaś niepewność instrumentów stworzyła tę nierówność, czy też przyroda nadała gwiazdom jakiś ruch dotychczas przed nami ukryty, trudno stwierdzić wobec jego powolności [...] obserwować trzeba pilnie gwiazdy. Następne pokolenia rzeź wyjaśnia”.

Teorię *Tablic Alfonsa* omawiają szerzej *Theoricae novae planetarum* Jerzego Peurbacha, stanowiące w następnych dziesięcioleciach jedyne — obok *Epitome* — źródło zaawansowanej wiedzy astronomicznej i przedmiot wykładów i komentarzy. Rozdział *O ruchu ósmej sfery* zawiera fizyczną interpretację czysto numerycznej teorii *Tablic* w oparciu o geometryczną konstrukcję kół trepidacyjnych. Końcowa część rozdziału poświęcona jest omówieniu teorii Thābita; krótko wspomniane są też inne teorie: Ptolemeusza Al-Farghāni'ego, Al-Battāniego, oscylacje liniowe.

Charakterystyczne w sposobie przedstawienia 2 różnych modeli (Thābit — *Tablice Alfonsa*) jest unikanie zdecydowanego stanowiska, odzwierciedlające niepewność co do prawdziwej kosmologii. Jeszcze wyraźniej widać to w komentarzu Wojciecha z Brudzewa<sup>54</sup>: „W pierwszej części Magister mówi o ruchu według zasad Alfonsa, w drugiej według Thābita [...] Sposób (Alfonsa), chociaż przez niektórych zwalczany i krytykowany, to jednak prawdopodobny jest nie mniej niż sposób Thābita, i ma swych zwolenników. [...] Pogląd Thābita o ruchu ósmej sfery niektórzy uważają za dostatecznie rozumny i odpowiadający widocznemu ruchowi gwiazd...” Brudzewski kończy swój komentarz zestawieniem 6 różnic między teorią Alfonsa (w ujęciu Peurbacha) i Thābita, unikając i tutaj zajęcia stanowiska czy wyrażenia własnej preferencji.

Powróćmy jednak do *Teoretyk nowych*. Peurbach po omówieniu „pierwszego” ruchu, dobowego, i „drugiego” — ruchu apogeów i gwiazd stałych (1°/136 lat), przedstawia geometryczną konstrukcję trepidacji w rozdziale: *O trzecim ruchu*.

„Trzeci zaś, właściwy ósmej sferze, nazywany jest ruchem trepidacji lub postępowania i cofania ósmej sfery. Odbywa się po dwóch małych kołach [...] dwa punkty ósmej sfery (nazywane punktami Barana i Wagi tejże sfery) obiegają po obwodzie takich kół na dziewiątej sferze, przy czym ekliptyka ósmej sfery przecina ekliptykę dziewiątej w jej punktach przesilen”. Czas obiegu po kole trepidacyjnym wynosi, zgodnie z *Tablicami Alfonsa*, 7000 lat.

Istotnym elementem wykładu Peurbacha jest wykres, przedstawiający mechanizm sfer. Na podstawie tego wykresu został wykonany rys. 8.

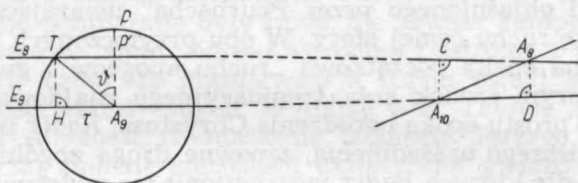
Nawiasowo zauważymy różnicę między schematem Peurbacha i Thābita co do położenia ekliptyki ruchomej  $E_8$ . U Thābita przecinała się ona z ekliptyką stałą w odległości 90° od punktu wiodącego T; według Peurbacha przecięcie znajduje się 90° od punktu P'.

Istotne momenty występują jednak przy porównaniu konstrukcji Peurbacha z liczbową teorią *Tablic Alfonsa*. W *Tablicach* „równanie ósmej sfery”  $\tau$  określone było wzorem  $\sin \tau = \sin 9^\circ \sin \vartheta$ . Na rysunku 8 odpowiada to łukowi TP' ekliptyki ruchomej  $E_8$ . Inaczej jest u Peurbacha.

<sup>54</sup> *Commentariolum super Theoricas novas* [...], wyd. L. A. Birkenmajer, Kraków 1900, s. 146 n.

„Równaniem” jest łuk ekliptyki dziewiątej  $A_9H$ , dający się przedstawić wzorem  $\text{tg } \tau = \text{tg } 9^\circ \sin \vartheta$ . Taka definicja, wraz z określeniem składowej jednostajnej, „ruchu apogeów i gwiazd”, równej  $A_{10}A_9$ , sprowadza łączną zmianę długości ekliptycznych do łuku  $A_{10}H$  ekliptyki sfery dziewiątej. Jednakże rzeczywisty punkt równonocy znajduje się na przecięciu rzeczywistej ekliptyki  $E_8$  z równikiem, w punkcie  $A_8$ ; wynikająca ze schematu Peurbacha zmiana długości równa jest (podobnie jak w schemacie Thābita) łukowi ekliptyki  $E_8$  od  $A_8$  do  $T$ .

To oczywiście najbardziej istotny błąd *Teoretyk*<sup>55</sup>. Nie zostały też wyświeltone kwestie, wynikające ze zmiennego położenia środków kół trepidacyjnych ( $A_9$  na rys. 8) na ekliptyce  $E_9$  i oddalania się tych punktów od równika na skutek „ruchu apogeów i gwiazd stałych” (por. s. 24). Wpraw-



Rys. 8. Teoria Peurbacha

R — równik;  $E_9$  i  $E_8$  — ekliptyki dziewiątej i ósmej sfery;  $\varrho$  — promień koła trepidacyjnego, równy  $9^\circ$ . Dalsze objaśnienia z tekstu Peurbacha:  $A_{10}$  — punkt równonocy [punkt Barana] *primi mobilis*;  $A_9$  — środek małego koła, punkt Barana dziewiątej sfery; T — punkt Barana sfery ruchomej [ósmiej]; P — punkt północny małego koła, od którego mierzy się ruch [punktu T];  $A_{10}A_9$  — łuk ruchu dziewiątej sfery, czyli apogeów i gwiazd;  $PT = \vartheta$  — średni ruch postępowania i cofania ósmej sfery;  $A_9H = \tau$  — równanie [poprawka trepidacyjna] ósmej sfery

dzie w dalszym ciągu swego komentarza Peurbach omawia konsekwencje potrójnego ruchu ósmej sfery, a więc zmienność maksymalnej deklinacji Słońca, niejednostajną zmianę długości gwiazd i długości roku, ale nie daje żadnego określenia pozycji punktu  $A_9$  dla jakiegokolwiek epoki, ani nie wyjaśnia olbrzymich zmian nachylenia ekliptyki — dochodzących do  $\pm 9^\circ$ , gdy łuk „ruchu apogeów i gwiazd”  $A_9A_{10}$  osiągnie wartość  $90^\circ$ .

Zadowala się tylko ogólnikowym stwierdzeniem, że Słońce, znajdując się w punkcie równonocnym *primi mobilis* (a ściślej w punkcie C ekliptyki  $E_8$ ), może mieć deklinację różną od zera oraz że porównanie dnia z nocą może nastąpić przed lub po tym momencie.

Problem fizycznej interpretacji zespołu sfer nadgwiezdnych stał się w końcu wieku XV problemem bezpośrednio praktycznego znaczenia wobec aktualnej potrzeby reformy kalendarza, niemożliwej do zrealizowania bez ustalenia teorii ruchu Słońca.

Podjęmowane są więc próby poprawienia, uzupełnienia teorii Peurbacha.

Jakób Essler w *Speculum Astrologorum* (1508 r.)<sup>56</sup> analizując kon-

<sup>55</sup> Na te błędy zwrócił uwagę Reinhold w swoim wydaniu *Teoretyk* Peurbacha (*Witebergae* 1542).

<sup>56</sup> Ioannis (sic) Essler [...] *Speculum Astrologorum* [...] Maguntiae 1508. Cytuję według wydania z roku 1573, przy *Theoricae novae planetarum Georgii Purbachii* [...], Basileae.



sekwencje podwójnego ruchu ósmej sfery zwraca uwagę na przemieszczenie rzeczywistego punktu równonocy  $A_8$  względem średniego  $A_{10}$ . „Początek ruchu gwiazd liczony jest w *Tablicach* nie od przecięcia równika z ekliptyką ósmej sfery, ale z ekliptyką nieruchomą, czyli *primum mobile*... To przecięcie rzesza astronomów uważa za punkt równonocy...”. Przyjmując wprawdzie łuk dziewiątej sfery  $A_{10}H$  za miarę ruchu precesyjnego, Essler wprowadza poprawkę równą rzutowi łuku  $A_8A_{10}$  na ekliptykę sfery dziewiątej ( $A_{10}D$  na rys. 8).

Podobne stanowisko zajmuje Marcin Biem z Olkusza w swym projekcie reformy kalendarza z 1516 r.<sup>57</sup> Przedstawienie tematu jest tu poprawniejsze niż u Esslera. Biem dodatkowe przesunięcie momentu równonocy mierzy łukiem rzeczywistej ekliptyki  $A_8C$  (rys. 8), choć i on nie ma zastrzeżeń co do „powszechnego wyobrażenia, wyłożonego w *Tablicach* przez Alfonsa i objaśnionego przez Peurbacha” uważającego łuk ekliptyki  $E_9$  za miarę ruchu ósmej sfery. W obu przytoczonych tu rozprawach jest już ustalona epoka początkowa „ruchu apogeów i gwiazd stałych”, moment, w którym środek koła trepidacyjnego znajdował się na równiku. Jest to po prostu epoka narodzenia Chrystusa, *Radix incarnationis* — przyjęta bez bliższego uzasadnienia, zapewne drogą uogólnienia praktyki *Tablic Alfonsa*, dla których *Radix incarnationis* ma podstawowe znaczenie.

W tym samym okresie rozwinęła się ostra polemika na temat ruchu ósmej sfery pomiędzy A. Pighiusem z uniwersytetu paryskiego i Markiem Beneventano<sup>58</sup>. Pighius zajmował stanowisko zbliżone do Esslera, Beneventano zaś próbował przywrócić czystość doktryny alfonsyńskiej, interpretując łączną zmianę długości ekliptycznych w *Tablicach* jako łuk ekliptyki sfery ósmej ( $A_8T$  na rys. 8), nie doceniał jednak konsekwencji takiego modelu (jak np. zmiany nachylenia ekliptyki).

Próby oparcia reformy kalendarza na modelu Alfonsa-Peurbacha skazane były na niepowodzenie. „Ruch apogeów i gwiazd” *Tablic Alfonsa* dawał wprawdzie bardzo dobre przybliżenie rzeczywistej długości roku zwrotnikowego (49 001 obiegów Słońca w ciągu 49 000 lat juliańskich odpowiada długości roku 365.2426 dni, w porównaniu z rzeczywistą 365.2422).

Przy tym rachunkowy schemat *Tablic* dla obliczania średnich miejsc planet i Słońca pomijał wpływ trepidacji. Uwalniało to obliczane pozycje Słońca od fikcyjnej nieliniowej składowej ruchu<sup>59</sup>. Ale długookresowa analiza biegu Słońca, oparta na fizycznym modelu świata, zmuszała do uwzględniania różnic wynikających z oscylacji ósmej sfery. W rezultacie np. Essler, wykorzystując swą analizę zjawisk precesyjnych, określił moment równonocy roku 1506 na 6 marca, wobec rzeczywistej daty 11 marca, bliskiej momentowi obliczonemu za pomocą (formalnie nieściśle-go!) schematu *Tablic*.

Jedną z dróg, na których w końcu XV w. szukano rozwiązania problemu ruchów ósmej sfery, było podjęcie orientalnego schematu ruchu jednostajnego z szybkością  $1^\circ/66$  lat. Żydowski astronom z Salamanki,

<sup>57</sup> *Martini Biem de Ilkusz Poloni Nova calendarii romani reformatio*, wyd. L. A. Birkenmajer, Kraków 1918.

<sup>58</sup> Szereg informacji o obu antagonistach i wyjątki z ich rozpraw z lat 1519—1522 daje L. A. Birkenmajer, *Marco Beneventano...*, s. 134.

<sup>59</sup> A. Wegener, *Die Alfonsinschen Tafeln*, s. 15—16.

Abraham Zacuto w swym dziele z roku 1478<sup>60</sup> odrzuca teorię Alfonsa i oblicza współrzędne gwiazd w (niedrukowanym dotąd) katalogu według znanej nam już metody As-Sufiego (punkt Z na rys. 6). Uczeń Zacuto, A. Ricius, rozwinął jego argumenty w książce, poświęconej krytyce *Tablic Alfonsa, De motu octavae sphaerae* (Trino 1513, II wydanie Paryż 1521). Wśród licznych argumentów astronomicznych, astrologicznych i filozoficznych odnajdujemy tu argument Bacona, dotyczący odstępstwa od czystego ruchu kołowego. W konkluzji Ricius stwierdza, że od czasów Hipparcha ruch ósmej sfery był nie szybszy niż  $1^{\circ}/66$ , nie wolniejszy niż  $1^{\circ}/70$  lat.

Przytoczone tu teksty pozostały poza zasadniczym nurtem astronomii na przełomie XV/XVI w. Powszechna praktyka astronomiczna opierała się na pojęciach i danych liczbowych *Tablic Alfonsa*. Tkwiące w nich niekonsekwencje pomnażane były przez nie zawsze kompetentnych autorów: Łukasz Gaurico, znany włoski astronom i astrolog z pierwszej połowy wieku XVI, uznał, że konsekwencją ruchu ósmej sfery musi być zmiana szerokości ekliptycznych. Wydając więc *Tablice Alfonsa* (Wenecja 1524) oraz *Almagest* (tłumaczenie łacińskie Jerzego z Trapezuntu, Wenecja 1527/28) zmienił szerokości ekliptyczne gwiazd w katalogach, zmniejszając je o 20' (Tablice, wyd. cyt., vol. 108) względnie 25' (*Almagest*, wyd. cyt., wszystkie gwiazdy w katalogu) — w jawnej sprzeczności z elementarną geometrią sferyczną.

Najdojrzalszą teorię, operującą elementami konstrukcji Alfonsa — Peurbacha, stworzył norymberski matematyk Jan Werner. Jego *De motu octavae sphaerae* z roku 1522<sup>61</sup> zawiera geocentryczny schemat ruchów precesyjnych, po raz pierwszy — od czasów Thābita — wolny od wewnętrznych sprzeczności. O ruchu ósmej sfery składa się z trzech rozpraw — pierwsza, *Tractatus primus*, daje podstawy obserwacyjne i wykład teorii Wernera. *Tractatus secundus* poświęcony jest krytyce teorii *Tablic Alfonsa*. Werner krytykuje tu m. in. zmianę, wprowadzoną przez Peurbacha w geometrycznej interpretacji „równania ósmej sfery”.

Poniżej przytaczamy końcową część, *Summaria enarratio*, streszczającą podstawowe tezy Wernera.

Sfera ósma ma cztery ruchy. Pierwszy pochodzi od owej najwyższej sfery, nazywanej *primum mobile*, i polega na obrocie wokół biegunów świata ze wschodu na zachód w ciągu doby, tj. 24 i 1/15 godziny [24h4<sup>m</sup>, oczywiście czasu gwiazdowego].

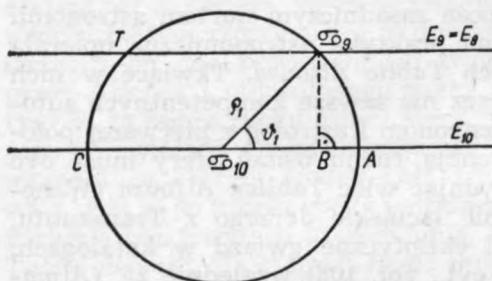
Drugi odbywa się wokół biegunów ekliptyki ósmej sfery — zgodnie z kolejnością znaków zodiaku — z zachodu na wschód, z jednostajną szybkością; w 100 latach egipskich, czyli 36 500 dniach sfera ósma przebywa  $1^{\circ}$ , a cały obrót dokonuje się w 36 000 lat egipskich. Ten ruch, nazywany jednostajnym ruchem gwiazd stałych i apogeów Słońca i planet, jak już wspomniałem, następuje wokół biegunów ekliptyki ósmej sfery, której płaszczyzna pokrywa się z płaszczyzną ekliptyki sfery dziewiątej.

[...] Trzeci ruch, za przykładem tych, którzy zajmowali się ruchem ósmej sfery,

<sup>60</sup> Fragmenty opublikował B. Cohn, *Der Almanach perpetuum des Abraham Zacuto*, „Schriften d. Wiss. Ges. in Strassburg,” zeszyt 32, 1913. Jako *Almanach perpetuum* wydawano kilkakrotnie, począwszy od roku 1496, wyciąg z dzieła Zacuto.

<sup>61</sup> *Libellus Ioannis Veneri [...] Eiusdem Ioannis de motu octavae sphaerae Tractatus duo; Eiusdem Summaria enarratio Theoricae motus octavae sphaerae*, Nurembergae 1522.

nazwaliśmy pierwszą trepidacją, czyli pierwszym postępowaniem i cofaniem sfery ósmej. Odbyna się on po małych kołach, wpisanych wewnątrz sfery dziesiątej — jedno wokół punktu Raka [ $\varpi_{10}$  na rys. 9], drugie zaś wokół punktu Koziorożca. Po tych to małych kołach poruszają się z jednostajną szybkością punkty Raka [ $\varpi_9$ ] i Koziorożca sfery dziewiątej. Promienie kół wynoszą  $3^\circ$  i około  $23'$ . Początki znaków Raka i Koziorożca dziesiątej sfery w swym ruchu po kołach poruszają się tak, że gdy punkt Raka znajduje się w zachodnim punkcie przecięcia małego koła z ekliptyką dziesiątej sfery [rys. 9 pkt. A], wówczas punkt Koziorożca również pokrywa się z zachodnim przecięciem swego koła z ekliptyką. Dalej punkt Raka dzie-



Rys. 9. Pierwsza trepidacja Wenera  
 $\rho_1 = 3^\circ 23'$ ;  $\theta_1 = 0^\circ.118$  t  
 t w latach od epoki  $t_0 = -20.3$

wiątej sfery przemieszcza się przez [północną] 'górną' część swego koła zgodnie z kierunkiem znaków zodiaku, punkt Koziorożca zaś przez dolną [południową] połówkę kręgu [...] aż do momentu, gdy oba punkty znajdują się we wschodnich przecięciach kół z ekliptyką dziesiątej sfery. Stąd poruszać się będą w kierunku przeciwnym kolejności znaków zodiaku, punkt Raka przez dolną, a punkt Koziorożca przez górną część swego kręgu. [...] Jeden pełny obieg trepidacji dziesiątej sfery po wspomnianych małych kołach odbywa się w ciągu 3058 lat rzymskich, 15 dni 2 godzin 38 minut i około 57 sekund.

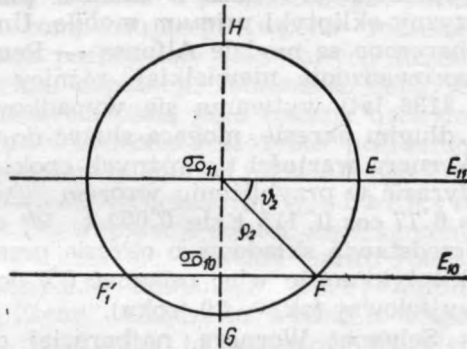
Ruch postępowy i wsteczny (*motus accessus et recessus*), czyli trepidacja pierwsza sfery ósmej, jest to łuk małego koła liczony od zachodniego przecięcia z ekliptyką dziesiątej sfery [punkt A] poprzez północną część koła [ATC] wokół punktu Raka. Równanie ósmej sfery, lub różnica między ruchem jednostajnym i zmiennym, jest to łuk ekliptyki dziesiątej sfery liczony od wspomnianego zachodniego przecięcia małego koła z ekliptyką do przecięcia z wielkim kołem przechodzącym przez bieguny ekliptyki dziesiątej i punkt Raka dziesiątej sfery [łuk AB na rys. 9]<sup>62</sup>. Rzeczywisty ruch ósmej sfery dla danego okresu między dwoma danymi momentami otrzymamy, jeśli do jednostajnego ruchu ósmej sfery dla tego okresu dodamy równanie ósmej sfery odpowiadające późniejszemu momentowi, a od sumy odejmiemy równanie dla wcześniejszego momentu.

[...] Czwarty ruch ósmej sfery to druga trepidacja, czyli ruch postępowania i cofania punktów Raka i Koziorożca dziesiątej sfery względem punktów Raka [rys. 10, punkt  $\varpi_{11}$ ] i Koziorożca *primi mobilis* odbywa się po małych kołach [EFG na rys. 10] opisanych wokół punktów Raka i Koziorożca *primi mobilis* [...] Ich promienie wynoszą  $3^\circ 23'$ . Jednakże punkty Raka i Koziorożca dziesiątej sfery nie obiegają tych kół, lecz poruszają się po łuku wielkiego koła, przechodzącego przez bieguny ekliptyki i punkty Raka i Koziorożca *primi mobilis* [GH na rys. 10] w taki oto sposób: wyobraźmy sobie najpierw płaszczyznę ekliptyki dziesiątej sfery pokrywa-

<sup>62</sup> „Równanie ósmej sfery” AB liczone jest nie od punktu zwrotnika dziesiątej sfery  $\varpi_{10}$ , lecz od skrajnego zachodniego położenia  $\varpi_9$  w punkcie B. Unika się w ten sposób ujemnych wartości „Równania”. Nie wpływa to na wynik, ponieważ w rachunku operujemy zawsze różnicą „równań” dla dwóch epok.



jąca się z płaszczyzną ekliptyki *primum mobile* [...] Następnie płaszczyzna ekliptyki dziesiątej zaczyna odchyłać się w kierunku południowym (przy punkcie Raka). Na skutek tego dwa przecięcia ekliptyki dziesiątej sfery z małym kołem północnym [F, F'] powoli przemieszczają się ku południowi [...] Wynika stąd, że każde z dwóch przecięć ekliptyki z małym kołem obiega po jego obwodzie. Obieg ten dokonuje się w ciągu 3185 lat rzymskich, 336 dni, 0 godzin, 22 minut i 32 sekund. Ruch drugiej trepidacji określony jest przez łuk małego koła północnego [tzn. wokół punktu Raka], mierzony od zachodniego przecięcia z ekliptyką *primum mobilis* poprzez południową część, przeciw kolejności znaków zodiaku [EF na rys. 10]. Ostatni obrót tej trepidacji zakończył się lat rzymskich przed narodzeniem Chrystusa 27, dni 133.



Rys. 10. Druga trepidacja Wernera  
 $e_2 = 3^{\circ}23'$ ;  $\varphi_2 = 0^{\circ}.113 t$ ;  $t_0 = -27,4$

Widoczne jest, że druga trepidacja ma przebieg przeciwny pierwszej [...] Konieczne jest obarczenie ósmej sfery drugą trepidacją. Jak bowiem wynika z pierwszej rozprawy o ruchu ósmej sfery, nie można inaczej przedstawić zmian maksymalnej deklinacji Słońca. Dokładne obserwacje wykazują wyraźnie, że największa deklinacja Słońca zmalała od obserwacji Ptolemeusza do naszych czasów, 1514 lat po narodzeniu Chrystusa<sup>63</sup>.

Teorię opisaną w powyższym *Streszczeniu* uzupełnić trzeba tylko przez ustalenie kąta fazowego „pierwszej trepidacji” dla dowolnej epoki. Odpowiednią wartość znaleźć można w *Rozprawie pierwszej, propositio XVI, colorarium 3*: początek ruchu pierwszej trepidacji przypadł 7407 dni, czyli 20 lat 102 dni przed narodzeniem Chrystusa.

Graficzne przedstawienie teorii Wernera dają rysunki 9 i 10.  $E_n$   $\sigma_n$  oznaczają ekliptykę i punkt przesilenia letniego (punkt Raka) n-tej sfery.

Nachylenie stałej ekliptyki sfery jedenastej (*primum mobile*) do równika równe jest ptolemeuszowskiej wartości  $23^{\circ}51'20''$ . Dla roku 149, będącego według Wernera epoką *Almagestu*, kąt fazowy obu trepidacji jest równy i ekliptyki  $E_9$ ,  $E_{10}$  i  $E_{11}$  pokrywają się (*propositio XXV*).

Najbardziej charakterystyczne w konstrukcji Wernera jest skomplikowanie aparatu geometrycznego przez powiększenie liczby sfer do jedenastu<sup>64</sup>. Za to przypisanie jednostajnej składowej ruchu gwiazd najbardziej wewnętrznej, ósmej sfery, pozwoliło na prawidłowe usytuowanie kół trepidacyjnych względem wyróżnionych, niezmiennych punktów ekliptyki, punktów przesilenia (Raka i Koziorożca). Przypomnijmy, że

<sup>63</sup> Werner przytacza, w *propositio XXV*, różne wyznaczenia nachylenia ekliptyki: Ptolemeusza  $23^{\circ}51'20''$ , Dominika Novary ( $23^{\circ}29'$ ) i Peurbacha ( $23^{\circ}28'$ ). Dla roku 1515 przyjmuje wartość  $23^{\circ}28'30''$ .

<sup>64</sup> „Już nawet o jedenastej sfery napomykano” — *De revolutionibus*, księga III, rozdział 1.

wszystkie dotychczasowe schematy budowały konstrukcje trepidacyjne wokół punktów równonocnych. Jest to istotny moment, znacznie upraszczający w porównaniu z modelem Thābita geometryczną interpretację trepidacji, mierzonej obecnie tylko przesunięciem punktu wiodącego względem położenia średniego na dziesiątej sferze<sup>65</sup>; punkty równonocne, przecięcia ekliptyk z równikiem pozostają nieruchome.

Druga trepidacja spełnia podwójne zadanie. Kompensuje ona zmianę nachylenia ekliptyki, powstającą przy trepidacji sfery dziewiątej, zmianę o dużej (3°4) amplitudzie i stosunkowo niedługim okresie 3058 lat. Przebiegająca z taką samą amplitudą, lecz w przeciwnym kierunku druga trepidacja sprowadza w zasadzie płaszczyznę ekliptyk  $E_8$  i  $E_9$  do płaszczyzny ekliptyki *primum mobile*. Uniknięto w ten sposób defektu, jakim obarczone są modele Alfonsa — Peurbacha. Równocześnie jednak, przez wprowadzenie niewielkiej różnicy w okresach obu trepidacji (3058 i 3186 lat) wytwarza się wypadkową oscylację płaszczyzny ekliptyki o długim okresie, mogącą służyć do przedstawienia cytowanych w pracy Wernera wartości  $\epsilon$  z różnych epok. Zmianę nachylenia ekliptyki można wyrazić w przybliżeniu wzorem  $\Delta\epsilon \approx 3^\circ.38 (\sin 0^\circ.118t - \sin 0^\circ.113t) = 6^\circ.77 \cos 0^\circ.115t \sin 0^\circ.002t$ . W ostatnim wzorze wyraz  $\sin 0^\circ.002t$  przedstawia składową o okresie przeszło 150 000 lat; zmiana nachylenia ekliptyki może więc osiągnąć 0.5 dopiero po upływie 2000 lat od epoki wyjściowej (ok. — 20. roku).

Schemat Wernera, najbardziej chyba geometrycznie zaawansowane przedstawienie zjawisk precesyjnych w astronomii geocentrycznej, nie wywarł jednak wpływu na naukę XVI w. Kopernik bardzo ostro skrytykował *O ruchu ósmej sfery* w liście do Bernarda Wapowskiego z roku 1524. Krytyka ta nie dotyczyła samej konstrukcji, lecz założeń chronologicznych, doboru materiału dowodowego i metody opisu ruchu zmiennego<sup>66</sup>. Teoria Wernera mogłaby, za pomocą odpowiedniego dobrania parametrów, zostać doprowadzona do postaci, w której zadowalająco zostałyby przedstawione poszczególne obserwacje. Zasadniczym brakiem było to, że pojawiła się po prostu za późno.

Opracowane zostały już nowe założenia kosmologiczne, pozbawiające racji bytu wszelkie konstrukcje sfer nadgwiezdnych. „Co wreszcie sam o ruchu sfery gwiazd sądzę, na to inne przeznaczam miejsce”.

## 6. MIKOŁAJ KOPERNIK

Najwcześniejsze, zachowane notatki Kopernika z czasów krakowskich reprezentują oczywiście szkolną doktrynę ruchu ósmej sfery. Wśród tablic, przepisanych przez Kopernika w tzw. raptularzyku upsalskim, znajduje się *Tabula augis solaris*<sup>67</sup>, dająca zmianę położenia sfery gwiazd w odstępach 5-letnich od roku 1450 do 2085. Jak stwierdził L. A. Birkenmajer<sup>68</sup>, jest to odpis z tablic astronomicznych Peurbacha. Analiza wartości liczbowych tablicy wykazuje, że ruch ósmej sfery obliczony zo-

<sup>65</sup> Jest to zresztą nieściśłość: poprawne obliczenie winno dotyczyć łuku dziewiątej sfery.

<sup>66</sup> Ostatnie tłumaczenie polskie fragmentu Listu dał L. A. Birkenmajer w *Mikołaj Kopernik, Wybór pism*, Kraków 1920 (II wyd. 1926). Tłumaczenie angielskie z komentarzem u E. Rosena, *Three Copernican Treatises*, wyd. 2, New York 1959, s. 93.

<sup>67</sup> Opublikowana przez L. A. Birkenmajera, *Mikołaj Kopernik*, Kraków 1900, s. 169.

<sup>68</sup> L. A. Birkenmajer, *Stromata Copernicana*, Kraków 1924, s. 66—67.

stał zgodnie z modelem Peurbacha i przedstawia się jako suma ruchu jednostajnego ( $1^\circ/136$  lat) oraz trepidacji typu  $\text{tg } \tau = \text{tg } 9^\circ \sin \vartheta$ .

Zasadniczy przełom w teorii precesji nastąpił wraz z opracowaniem przez Kopernika *Krótkiego Zarysu (Commentariolus)*<sup>69</sup>, pierwszego dokumentu naukowego heliocentryzmu.

Rozpoznając przyczynę zjawisk precesyjnych w ruchu osi ziemskiej Kopernik uwalnia astronomię od arbitralnej nadbudowy sfer ponadgwiazdnych. „Cokolwiek ruchomego dostrzegamy na firmamencie, nie pochodzi z jego własnego ruchu, lecz wywołane jest ruchem Ziemi”.

Precesję punktów równonocnych powoduje „trzeci ruch” Ziemi, „ruch deklinacji”, będący według Kopernika wypadkową właściwego ruchu precesyjnego osi ziemskiej i ruchu kompensującego wpływ rocznego obiegu Ziemi. Opis precesji w *Zarysie* pozbawiony jest danych liczbowych, brak też szczegółów mechanizmu trepidacji. Zmienność nachylenia ekliptyki, określana zgodnie z rzeczywistością jako zmiana nachylenia osi ziemskiej do osi ekliptyki, potwierdzona jest tylko pośrednio: „Oś bowiem codziennego obrotu nie jest równoległa do osi wielkiego kręgu, ale jest nachylona do niej pod kątem, wynoszącym w obecnym stuleciu 23 i prawie pół stopnia”. Do trepidacji odnosi się fragment: „[...] zdaniem wielu [...] firmament porusza się kilkoma naraz ruchami, według prawa jeszcze niedostatecznie zbadanego. Mniej osobliwe jest wyjaśnienie ich ruchomością Ziemi”. Chodzi tu właśnie o trepidację, nieliniowy ruch precesyjny; potwierdza to następny rozdział: „...Jednostajność ruchu należy odnosić nie do punktów równonocnych, ale do gwiazd stałych”. Wykazywana w nim zmienność roku zwrotnikowego jest oczywistą konsekwencją niejednostajnej precesji punktów równonocnych. Dlatego właśnie, odmiennie niż u Ptolemeusza, rok gwiazdowy jest podstawą teorii ruchu Słońca, a położenia ciał niebieskich odnosi Kopernik nie do punktów kardynalnych ekliptyki, lecz do nieruchomych gwiazd stałych.

*De revolutionibus* daje jakościowe i liczbowe rozwinięcie teorii precesji. Jej podstawy znajdujemy już w I księdze. W 10 rozdziale stwierdzona jest nieruchomość sfery gwiazd, jako „takiego miejsca całości, do którego można odnieść ruch i położenie wszystkich pozostałych ciał niebieskich”. Następny, 11 rozdział (*Uzasadnienie trojakiemu ruchowi Ziemi*) omawia najistotniejszy element nowej teorii Kopernika: wyjaśnienie precesji jako powolnego ruchu osi Ziemi, w którym jej bieguny opisują koła o promieniu  $\epsilon$  wokół biegunów ekliptyki. Przy opisie „trzeciego ruchu” zasadniczą rolę odgrywa kwestia stałości kierunku osi Ziemi w jej ruchu rocznym. W mechanice jednostajnego ruchu kołowego, będącej dla Kopernika „naczelną zasadą”<sup>70</sup>, nie było miejsca na dynamiczne pojęcie zachowania momentu obrotowego. Arystotelesowska mechanika nieba operowała pojęciem obrotu, a nie obiegu. Inaczej mówiąc, ruch ciała niebieskiego po orbicie kołowej odbywał się w taki sposób, jakby było ono sztywno związane z promieniem wiodącym. Przykładem tego jest Księżyc, zwrócony stale tą samą częścią powierzchni ku Ziemi<sup>71</sup>. Nadając Ziemi roczny ruch wokół Słońca musiał więc Kopernik

<sup>69</sup> M. Kopernik, *Wybór pism* (1920), s. 33; E. Rosen, jw., s. 57.

<sup>70</sup> M. Kopernik, *Wybór pism* (1920), s. 35.

<sup>71</sup> Dlatego krytykowano (Bacon) konstrukcję epicykla przy orbicie księżycowej. Wynikającą z ruchu po epicyklu zmianę położenia powierzchni Księżyca Wojciech z Brudzewa kompensował wprowadzając dodatkowy, drugi epicykl (*Commentariolum*, Kraków 1900, s. 68). Jest to interesująca analogia z III „ruchem” Kopernika.



uwzględnić fakt, że oś Ziemi zachowuje niezmiennie (abstrahując od precesji) położenie względem sfery gwiazd, a nie względem promienia Słońce—Ziemia, jak wymagała tego mechanika ruchu kołowego. „Z kolei zatem idzie ruch nachylenia jako trzeci ruch Ziemi, również o rocznym okresie, lecz przeciwny porządkowi znaków zodiaku, tj. idący w kierunku odwrotnym niż ruch środka Ziemi. W ten sposób, dzięki temu, że oba te ruchy są wzajemnie prawie równe a zarazem sobie przeciwne, oś Ziemi i największy na niej równoleżnik, czyli równik, zwrócone są prawie stale w jedną i tę samą stronę świata, zupełnie tak jakby pozostawały bez ruchu”<sup>72</sup>. Tak więc połączenie rocznego ruchu osi ziemskiej z ruchem precesyjnym, nie rozumiane w następnych stuleciach, jest matematycznie eleganckim rozwiązaniem uwarunkowanego historycznie problemu. „Mówiliśmy zaś, że roczne okresy ruchu środka Ziemi i ruchu nachylenia są sobie równe w przybliżeniu; bo gdyby to miało miejsce z całą dokładnością, musiałyby punkty równonocy i przesilenń oraz całe nachylenie zodiaku zupełnie się nie zmieniać w stosunku do sfery gwiazd stałych. Ponieważ jednak różnica jest nieznaczna, ujawniła się dopiero wówczas, gdy z biegiem czasu się skumulowała: mianowicie od czasów Ptolemeusza do naszych narosła prawie do 21 stopni, o którą to wartość dziś już owe punkty wyprzedzają swe położenie ówczesne”<sup>73</sup>.

Szczegółowa teoria precesji zajmuje w *De revolutionibus* pierwszą połowę III księgi. Kopernik zaczyna ją od krótkiej historii geostatycznych teorii, poczynawszy od odkrywcy zjawiska, Hipparcha. „[...] ruch gwiazd stałych okazał się niejednostajny, co w różny sposób starano się wytłumaczyć. Jedni przypisywali go pewnemu kołysaniu się świata wiszącego, co widzimy w ruchu planet pod względem ich szerokości, [...] odchylenia) miały nie przekraczać ośmiu stopni. [...] Inni znowu mniemali, jakoby cała sfera gwiazd postępowała w jedną stronę, lecz ruchem niejednostajnym [...] [ponadto] pochyłość ekliptyki okazała się mniejsza niż przed Ptolemeuszem. Dlatego to niektórzy wymyślili sferę dziewiątą, a inni nawet dziesiątą, za sprawą których spodziewali się wytłumaczyć te zmiany, a jednak nie osiągnęli tego, co sobie obiecywali. Już nawet o jedenastej sferze napomykano”<sup>74</sup>.

Swą własną teorię opiera Kopernik na wybranych obserwacjach gwiazd od czasów Timocharesa do Kopernika (rozdział 2). Obserwacje te wskazują na niejednostajność zarówno samej precesji, jak i zmian nachylenia ekliptyki. Składowa jednostajna precesji punktów równonocnych, omówiona w rozdziale 6, przebiega przy średnim nachyleniu ekliptyki (a właściwie równika!) równym  $23^{\circ}40'$ , z szybkością  $0^{\circ}; 0,50, 12, 5$  na rok egipski, czyli  $50''$  2355 na rok juliański. Czas pełnego obiegu punktów równonocnych po ekliptyce wynosi więc 25 816 lat<sup>75</sup>. Trepidacja przybrała w *De revolutionibus* postać niewielkiej liczbowo poprawki, harmonicznego odchylenia („libracji”) rzeczywistego bieguna od średniego położenia. Zmiany długości ekliptycznych („anomalii punktów równonocnych”) mają amplitudę  $70'$  i okres 1717 lat egipskich (1716.2 lat juliańskich). Z dwukrotnie większym okresem przebiegają zmiany nachylenia ekliptyki („deklinacja”), zmieniającego się od  $23^{\circ}52'$  do  $23^{\circ}28'$ .

<sup>72</sup> M. Kopernik, *O obrotach sfer niebieskich*, Księga pierwsza, Warszawa 1953, s. 72—73.

<sup>73</sup> Tamże, s. 75.

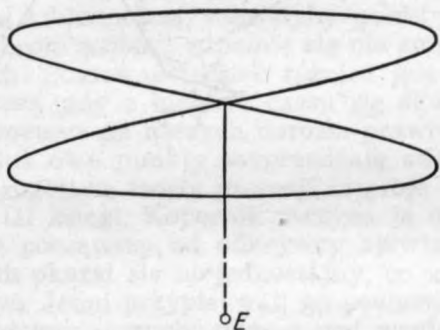
<sup>74</sup> M. Kopernik, *Wybór pism* (1920), s. 91—92.

<sup>75</sup> Zaznaczyć trzeba, że dane wyjściowe, cytowane w rozdziale 6 księgi III prowadzą do odmiennej wartości  $0^{\circ}, 0,50, 12,55$  na rok egipski i okresu 25809 lat.



(*Exact sciences in antiquity*, New York 1962, s. 203: „Copernicus had at his disposal a device of at-Tusi”). Sam Kopernik powołuje się (rozdział 25 księgi V) na *Komentarz* Proklosa do *Elementów* Euklidesa, skąd zaczerpnął „twierdzenie, że linię prostą można wykreślić przez złożenie większej ilości ruchów”. Wreszcie możliwym źródłem inspiracji jest *Komentarz* Brudzewskiego do *Teoretyk* Peurbacha, na co zwrócił uwagę L. A. Birkenmajer<sup>78</sup>.

Łączny efekt obu „libracji” w teorii Kopernika, tj. zmian długości ekliptycznych i nachylenia ekliptyki, powstaje przez nałożenie dwóch



Rys. 13



Rys. 14

prostopadłych ruchów harmonicznym o okresach w stosunku 1 : 2 (1717 i 3434 lata) oraz amplitudach  $70' \sin \varepsilon = 28'1$  (anomalii) i  $12'$  (deklinacja). Schemat wektorowy mechanizmu przedstawia rys. 12. Biegun rzeczywisty opisuje względem położenia średniego krzywą czwartego stopnia, „podobną do skręconego wieńca” (rys. 13). Mimo analizy tej krzywej, jaką dał L. A. Birkenmajer jeszcze w 1900 r.<sup>79</sup>, dotychczas w literaturze światowej pojawia się błędny wykres, pochodzący z toruńskiego wydania *De revolutionibus* z 1873 r. (rys. 14)<sup>80</sup>. Herz oparł nawet na nim — oczywiście również błędne — omówienie trepidacji Kopernika.

Opis teoretyczny uzupełniają w *De revolutionibus* tablice liczbowe. Wartość składowej jednostajnej, „jednostajnego ruchu precesji punktów równonocnych”, otrzymuje się z tablicy w rozdziale 6 (jak zwykle, tablicę VIII podajemy w skróceniu).

Wartość precesji dla daty narodzenia Chrystusa (długość ekliptyczna gwiazdy  $\gamma$  Arietis)  $5^{\circ}32'$ .

Dwuczęściowy układ tablicy jest modyfikacją wzoru tablic alfonsyńskich. Utrzymana w analogicznym układzie druga tablica podaje wartość argumentu ruchu trepidacyjnego (kąt  $\nu$  na rys. 12) tab. IX).

<sup>78</sup> L. A. Birkenmajer, *Stromata*, s. 95.

<sup>79</sup> L. A. Birkenmajer, *Mikotaj Kopernik*, s. 326 n.

<sup>80</sup> N. Herz, *Geschichte der Bahnbestimmung von Planeten und Kometen*, t. 2, Leipzig 1894, ryc. 4; L. Dreyer, *History of the Planetary Systems* (1905) — w drugim wydaniu *History of Astronomy*, 1953, s. 330, И. Н. Веселовский w Н. Коперник, *Оращениях небесных сфер*, Moskwa 1964, s. 164.



Tablica VIII

Lata egipskie	$\pi$	Dni	$\pi$
1	0°; 0, 50, 12	1	0°; 0, 0, 8
2	1, 40, 24	2	0, 16
5	4, 11, 0	5	0, 41
10	8, 22, 0	10	1, 22
15	12, 33, 1	15	2, 3
20	16, 44, 1	20	2, 45
30	25, 6, 2	30	4, 7
60	50, 12, 5	60	8, 15

Tablica IX

Ruch anomalii punktów równonocnych

Lata egipskie	$\nu$	Dni	$\nu$
1	0°; 6, 17, 24	1	0°; 0, 1, 2
2	12, 34, 48	2	2, 4
5	31, 27, 0	5	5, 10
10	1; 2, 54, 1	10	10, 20
15	1; 34, 21, 2	15	15, 30
20	2; 5, 48, 3	20	20, 40
30	3; 8, 42, 4	30	31, 1
60	6; 17, 24, 9	60	1, 2, 2

Wartość dla epoki narodzenia Chrystusa 6°45'

Tablica X

$\nu$	Prostafera $\tau$	Wartości proporcjonalne
0° 360°	0°	60
15 345	0° 18'	59
30 330	0 35	56
45 315	0 49	51
60 300	1 1	45
75 285	1 8	38
90 270	1 10	30
105 255	1 8	22
120 240	1 1	15
135 225	0 49	9
150 210	0 35	4
165 195	0 18	1
180 180	0 0	0

Otrzymany z tablicy IX kąt anomalii  $v$  jest argumentem w tablicy poprawek, „prostaferez równika i nachylenia ekliptyki” (rozdział 8) (tab. X).

W tablicy wykorzystano współmierność okresów obu libracji. Dla otrzymania dwukrotnie szybszej trepidacji w długości należy jako argumentu użyć podwojonej wartości „ruchu anomalii punktów równonocnych”. Otrzymana w ten sposób „prostafereza” jest ujemna dla wartości argumentu od  $0^\circ$  do  $180^\circ$ , dodatnia zaś od  $180^\circ$  do  $360^\circ$ . „Wartości proporcjonalne nachylenia ekliptyki” wyznacza się w tablicy bezpośrednio z argumentem  $v$ , a następnie oblicza samo nachylenie za pomocą wzoru  $\varepsilon = 23^\circ 28' + \frac{2}{5}$  „wartość proporcjonalna”. Jest to tylko pozornie zby-

teczna komplikacja — „wartości proporcjonalne” umożliwiają mianowicie obliczanie deklinacji Słońca dla dowolnej epoki przy użyciu odpowiednio zbudowanej tablicy w rozdziale 3 księgi II.

Łączny wpływ precesji i trepidacji wyrazić można analitycznie wzorem, określającym długość ekliptyczną gwiazdy  $\gamma$  Arietis:  $\lambda = 5^\circ 32' + 50'' 24 t - 4200'' \sin(755'' 3 t + 13^\circ 30')$  ( $t$  liczone w latach juliańskich od epoki 0). Na rysunku 7 wykreślono kopernikowską krzywą zmian długości, odniesioną do epoki *Almagestu*.

Określenie precesji jako ruchu Ziemi stanowi jeden z najważniejszych składników „rewolucji kopernikańskiej” w astronomii. Nadbudowa w postaci trepidacji jest tu oczywiście zbędnym balastem. Rozpracowany szczegółowo przez Kopernika pojęciowy aparat libracji dotyczy zjawisk pozornych, narzucony został jednak przez stojący do dyspozycji materiał dowodowy: obserwacje, przytaczane w rozdziale 2 i wykorzystane przy tworzeniu pełnej teorii, są przez nią przedstawiane z błędem nie przekraczającym 1 minuty łuku. Ponadto nowe ujęcie wprowadza istotne elementy dla ostatecznego rozstrzygnięcia problemu trepidacji: została ona w *De revolutionibus* ograniczona ilościowo do roli niewielkiej perturbacji, a przez przyczynowe utożsamienie z właściwą precesją (obie powstają przecież na skutek ruchu osi ziemskiej) utraciła dowolność dotychczasowych geometrycznych konstrukcji. Wreszcie zwraca uwagę metodologiczna wartość III księgi: precyzyjnie kontrolowany przebieg tworzenia nowej teorii odbiega daleko od nieskoordynowanych prób z ubiegłych stuleci, prowadzonych często bez pełnego zrozumienia, jaki jest fizyczny sens opisywanego modelu.

Ścisły związek z teorią precesji ma przyjęcie przez Kopernika roku gwiazdowego — o stałej długości — jako miary, do której odnosi się teorię ruchu Słońca (rok zwrotnikowy, mierzony powrotami Słońca do niejednostajnie przemieszczających się punktów równonocnych, nie spełnia tego zadania) oraz obranie nieruchomej sfery gwiazd za podstawowy układ odniesienia<sup>81</sup>. Znalazło to swój wyraz w strukturze katalogu gwiazd w II księdze *De revolutionibus*. W katalogu długości ekliptyczne

<sup>81</sup> Zasada ta istnieje obecnie w przeniesieniu na „sferę” mgławic pozagalaktycznych, jako inercyjny układ odniesienia. Natomiast podstawową jednostką czasu jest rok zwrotnikowy. Wartość roku gwiazdowego uzależniona jest bowiem od znajomości parametrów precesji. Przypomnijmy, że błąd Kopernika powtórzony został w ubiegłym dziesięcioleciu: przy wprowadzaniu nowej definicji sekundy czasu, określono ją jako odpowiedni ułamek roku gwiazdowego („Transactions of the Int. Astr. Union”, t. 8, 1952, s. 66). W poprawionej później definicji występuje już rok zwrotnikowy („Trans. IAU”, t. 9, 1956, s. 72).

gwiazd określone są różnicowo względem gwiazdy stałej ( $\gamma$  Arietis); długość ekliptyczną tej gwiazdy określają tablice z rozdziału 6.

W ciągu wieku XVI kilkakrotnie publikowano katalogi, oparte na powyższej zasadzie. Erazm Reinhold (w *Tabulae Prutenicae*, 1551) i Krzysztof Clavius (*In sphaeram Ioannis de Sacro Bosco commentarius*, 1570) przedrukowali, zasadniczo bez zmian, katalog Kopernika. Natomiast J. Schonerer przejął w swym katalogu (*Tabula stellarum fixarum verificata ad annum Christi MDL*, *Opera mathematica*, 1551, fol. CVIII) część opisową (nazwy gwiazd) katalogu Kopernika; same współrzędne oparte są na katalogu *Tablic Alfonsa*, ale w przeliczeniu na epokę 1550 za pomocą kopernikowskich tablic precesji (redukcja  $+20^{\circ}55'$ ). Wersja Schonera reprodukowana była wielokrotnie w *De principiis astronomiae* Gemmy Frisiusa (począwszy od wydania z 1553 r.) i w *Cosmographia* P. Apiana (od wydania z 1584 r.).

Liczbową teorię precesji z *De revolutionibus* stosowano oczywiście również w tablicach astronomicznych, opartych na dziele Kopernika: *Tablice Pruskie* Reinholda, *Nowe Efemerydy* Retyka. Najwcześniejsze zastosowanie tablic liczbowych z księgi III nastąpiło w *Efemerydach* na rok 1549 Hilarego z Wiślicy, podających *Aequinoctii precessio* i *Anomalia aequinoctij*, obliczone (zresztą nie bez błędów) na początek roku.

W końcu wieku XVI podjęto próbę adaptacji kopernikowskiej precesji do geocentrycznego i geostatycznego systemu świata. J. Magini w *Tabulae secundorum mobilium coelestium* (1585) opracował teorię zjawisk precesyjnych, wykorzystującą zarówno samą konstrukcję geometryczną, jak i parametry z *De revolutionibus*, w układzie sfer nadgwiazdnych: jedenaście sfera jako *primum mobile*, dziesiąta wytwarzająca harmoniczne oscylacje nachylenia ekliptyki, dziewiąta — obciążona „anomalią punktów równonocnych” i wreszcie ósma, sfera gwiazd, z właściwym sobie jednostajnym ruchem „precesyjnym”. Ta jawnie anachroniczna próba, mimo akceptacji Claviusa, nie wywarła już wpływu w nauce europejskiej. Podobnie stało się z ostatnią matematyczną teorią niejednostajnej precesji, jaką dał Kepler w *Epitome astronomiae copernicanae* (1618). Przyjął on, oprócz właściwej precesji (z szybkością  $50''$  na rok), zmienność położenia osi ekliptyki, a więc „trepidację” całego układu słonecznego. Biegun ekliptyki miał obiegać po małym kole o promieniu  $1^{\circ}48'$  wokół „średniego” bieguna ekliptyki, z okresem ponad 72 000 lat<sup>82</sup>.

Zagadka trepidacji została wyjaśniona już przez Tycho Brahego. Brahe stwierdził — w *Astronomiae instauratae progymnasmata* (1602) — że domniemane nierówności są wynikiem błędów obserwacyjnych — a precesyjna zmiana długości przebiega liniowo ( $51''$  rocznie)<sup>83</sup>. Dzięki rozwiązaniom Kopernika (co do istoty precesji) i Brahego (w odniesieniu do jej praktycznego opisu) zniknęła aktualna potrzeba dociekań nad kinematyczną stroną precesji. W następnych dziesięcioleciach czołowe miejsce zająć miała astronomia układu planetarnego.

<sup>82</sup> *Opera omnia*, wyd. C. Frisch, t. 6, 1866, s. 523. Odmienne parametry przyjmuje Kepler w *Tabulae Rudolphinae* (tamże, s. 712).

<sup>83</sup> *Tychonis Brahe Dani Opera omnia*, wyd. J. L. E. Dreyer, t. 2, København 1915, s. 253 i n.



## ТЕОРИЯ ПРЕЦЕССИИ В СРЕДНЕВЕКОВОЙ АСТРОНОМИИ

(Резюме)

Работа посвящена истории математической теории прецессионных явлений в тот период, в котором описание этих явлений осложнилось в связи с введением периодической функции, которая известна под названием трепидации.

Как кажущееся явление, не выступающее в действительности, трепидация лишь бегло упоминается в синтетических работах по истории астрономии. Однако с таким подходом нельзя вполне согласиться, если учесть, что теория трепидации в течение семи веков была важным элементом научного описания мира.

В излагаемом анализе, который по времени охватывает XVI в., использовано упрощенное описание истинной прецессии, ибо какие-либо динамические рассуждения неактуальны, а пределы ошибки в измерениях, относящихся к античному периоду и средневековью, позволяют определить прецессию как равномерное изменение положения земной оси. В связи с этим точки равноденствия перемещаются вдоль эклиптики со скоростью  $1^\circ$  за 72 года, а угол наклона эклиптики к экватору равномерно уменьшается (с  $23^\circ 43'$  в эпоху Гиппарха до  $23^\circ 30'$  в 1500 году). При наблюдениях прецессия проявляется в росте эклиптических долгот ( $1^\circ$  за 72 года) и в виде (постоянной) разности между звездным и тропическим годом.

В *Альмагесте* Птолемея изменение эклиптических долгот нашло физическую причину в движении сферы звезд, „восьмой сферы”, вращающейся в направлении с запада на восток. Правильная в формальном отношении схема Птолемея, однако, была обременена неправильными параметрами скорости движения ( $1^\circ$  за 100 лет) и слишком большим числовым значением наклона эклиптики ( $23^\circ 51' 20''$ ). Позднее это дало повод для оспаривания методологических основ сочинения Птолемея. Для обсуждаемой в статье темы существенным является тот факт, что числовые ошибки в *Альмагесте* косвенно способствовали возникновению теории, сформулированной восемьсот лет спустя, согласно которой прецессионные изменения имеют характер периодических колебаний с ограниченной амплитудой. Такая идея не была чужда греческой астрономии уже до Птолемея, переданные же Теоном из Александрии сведения о „ранних астрономах”, считавших, что сфера звезд совершает линейные колебания (вызывая зигзагообразные изменения эклиптических долгот, рис. 1) в пределах  $\pm 4^\circ$ , были известны и цитировались как в арабской, так и в европейской астрономической литературе.

Именно так, в виде скачкообразно изменяющегося увеличения и уменьшения эклиптических долгот, была представлена прецессия в теориях индийских ученых первого тысячелетия н. э.

Молодая арабская астрономия, начиная с VIII в., знакомилась с этой традицией как путем непосредственно передававшихся сведений, так и через индийскую науку. Развивавшиеся одновременно способы астрономических наблюдений делали необходимым пересмотр теории, содержащейся в *Альмагесте*, а во всяком случае исправление тех параметров, величины которых не совпадали с новыми вычислениями.

В такой обстановке Сабит ибн-Курра сделал попытку модифицировать теорию периодического процесса прецессионных явлений. Трактат Сабита *De motu octavae sphaerae* (известен лишь в латинском переводе) положил начало развитию теории трепидации как составного элемента математической астрономии. Главная сущность теории Табита заключается в том, что она исходит из

периодического движения восьмой сферы, в котором „точки Овена и Весов” перемещаются по небольшим кругам вокруг „точек Овена и Весов” верхней, девятой сферы. Это показано на рис. 2, где  $E_9$  и  $E_8$  обозначают эклиптику девятой и восьмой сфер,  $A_9$  — „точку Овена” девятой сферы,  $T$  — ведущую точку восьмой сферы, то есть „точку Овена” этой сферы, перемещающуюся по кругу  $TT_0$  с радиусом  $\varrho$ , причем аргумент  $\theta$  увеличивается линейно по времени.  $A_8$  обозначает действительное положение точки равноденствия. По данным Сабита,  $\varrho = 4^\circ 19'$ , а трепидационное изменение эклиптических долгот  $\tau = A_8T$  колеблется в пределах  $\pm 10^{3/4}^\circ$  (с периодом в 4000 с лишним лет). Изменения долгот  $\tau$  и наклона эклиптики  $\varepsilon'$ , вытекающие из теории Сабита, приведены на рис. 4.

Арабские астрономы в большинстве отклоняли концепцию трепидации, сводя (например Аль-Батани) пересмотр теории Птолемея к установлению более правильного параметра скорости  $1^\circ$  за 66—70 лет. Теория Сабита, равно как и исправленное вычисление скорости движения восьмой сферы дало возможность в IX столетии, в котором была сделана первая попытка модифицировать теорию Птолемея, получить удовлетворительное представление о приросте эклиптических долгот со времени *Альмагеста* (рис. 6а, на котором жирной линией обозначен действительный прирост  $\Delta\lambda$  с учетом ошибки в вычислении нулевой точки в звёздном каталоге Птолемея).

В дальнейшем развитии рассматриваемой теории знаменательным исключением была магометанская Испания X в., где теорию трепидации можно найти в толедских планетных таблицах аз-Заркали. Влияние, оказанное Заркали на развитие математической астрономии в Европе, а также расширившиеся научные арабско-европейские связи способствовали тому, что в период усилившегося восприятия научных идей европейская астрономия переняла обе соперничавшие теории движения восьмой сферы. Компромиссное решение этого вопроса, включившее в единую схему оба вида движения, впервые появилось в философских трудах (Альберт Великий). Математическую форму эта схема получила в альфонсинских *Астрономических таблицах*, в парижском издании, которое впоследствии широко распространилось во всей Европе. Можно полагать, что в толедском оригинале этих таблиц была использована — вопреки утверждениям Дрейера — только теория трепидации по Сабиту и Заркали (ср. главу 49 предисловия к *Таблицам* в IV томе монументального издания Рико-и-Синобрас). В парижском издании скорость слагающей равномерного движения восьмой сферы („движение апогеев и постоянных звёзд”) составляет  $1^\circ$  за 136 лет, т. е. полный оборот сферы за 49 тысяч лет. Звёздный год был сравнен с календарным (юлианским) годом. Накладывающаяся на равномерное движение трепидация, *motus accessus et recessus*, имеет в семь раз меньший период. Вызываемые трепидацией изменения эклиптических долгот  $\tau$  представлены в таблице „уравнений поступательного и попятного движений”, составленной по функции  $\sin \tau = \sin 9^\circ \sin \theta$ .

Теория движения восьмой сферы получила в *Альфонсинских таблицах* чисто аналитическое определение, в виде числовых таблиц. Физическая интерпретация, которую в последующие столетия приписывали этим таблицам, оперировала системой трех сфер. Верхняя, десятая сфера (*primum mobile*) совершала лишь суточное вращение. Вокруг полюсов этой сферы равномерно вращалась девятая сфера, что объясняло равномерную слагающую прецессионного движения. Восьмая сфера (со звёздами), кроме обращений, перенесенных из верхних сфер, совершала трепидационное поступательное и попятное движение (*motus accessus et recessus*). Однако в этом толковании содержатся основные противоречия. Альфонсинские таблицы не дают дефиниции каких-либо определенных точек на эклиптике девятой сферы, вокруг которых могла бы происходить трепидация сферы звёзд (согласно теории Сабита, такими точками явля-

ются постоянные точки равноденствия девятой сферы, тогда как по Альфонсинским таблицам эклиптика девятой сферы подвижна). Впрочем, всякая интерпретация положения таких точек ведет к новому осложнению: по мере того, как трепидационные круги отдаляются от экватора, неизбежно должен измениться наклон эклиптики с очень большой амплитудой, достигающей  $\pm 9^\circ$ . Другие противоречия вносило практическое применение теории движения восьмой сферы в редукции положения звезд из каталога таблиц.

Трудности физической интерпретации явления трепидации выступили также и тогда, когда начиная с середины XV в. были сделаны попытки возродить развившуюся традицию в математической астрономии. Пурбах в своем труде *Theoricae novae planetarum* модифицировал альфонсинскую теорию. Это показано на рис. 8, где  $E_9$  обозначает эклиптику девятой сферы, которая покрывается с эклипстикой десятой сферы. Точка  $A_9$ , перемещающаяся по эклиптике со скоростью  $1^\circ$  за 136 лет, является центром трепидационного круга  $PT$ , по которому за 7000 лет совершает оборот ведущая точка восьмой сферы  $T$ . Эта концепция в сущности напоминает сабитовское построение теории трепидации, небольшая разница касается угла, какой образуют с собой эклиптики восьмой и девятой сфер.  $A_{10}$  обозначает постоянную „точку равноденствия” десятой сферы,  $A_8$  — точку действительного пересечения эклиптики восьмой сферы с экватором. В противоположность альфонсинским таблицам, которые периодически слагающую определяют дугой  $PT$  (согласно зависимости  $\sin \tau = \sin 9^\circ \sin \theta$ ), Пурбах определяет трепидационное изменение долготы с помощью дуги  $A_9H$ , что отвечает формуле  $\operatorname{tg} \tau = \operatorname{tg} 9^\circ \sin \theta$ .

Таким образом в схеме Пурбаха не был устранен главный недостаток альфонсинской теории движения восьмой сферы, а именно изменчивое положение трепидационного круга. Пурбах дал по существу неправильное определение общего изменения эклиптических долгот в виде дуги постоянной эклиптики  $A_{10}H$ , вместо измеряемой на восьмой сфере дуги  $A_8T$ . В последующие десятилетия астрономическая практика не решила этих вопросов, хотя и делались попытки восполнить схему Пурбаха введением поправки, отвечающей дуге  $A_{10}D$  или  $A_8C$  (рис. 8).

В наиболее развернутой форме геостатическую теорию трепидации изложил И. Вернер в своем сочинении *De motu octavae sphaerae*, написанном в 1515 г. (вышло в свет в 1522 г.). Трепидационные круги получили в этой книге определенное положение благодаря изменению последовательности сфер. По этой теории, внутренняя, восьмая сфера совершает равномерное движение, трепидация же отнесена к девятой сфере. Механизм сфер Вернер расширил до одиннадцати (рис. 9 и 10). Кроме равномерного движения (с такой же скоростью, какую определил Птоломей, т. е.  $1^\circ$  за 100 лет), сфера звезд совершает две трепидации. „Первая трепидация” (рис. 9) это обращение девятой сферы вокруг точек солнцестояний (Рака и Козерога) десятой сферы, с периодом в 3058 лет. „Вторая трепидация” (рис. 10) имеет аналогичную амплитуду ( $3^\circ 23'$ ) и приблизительно такой же период (3186 лет), но обратную фазу. Это компенсирует чрезмерные изменения наклона эклиптики, вызываемые „первой трепидацией”.

Теория Вернера не была лишена, впрочем, формальных неточностей (определение изменения эклиптических долгот в виде дуги 10 сферы, вместо 8). Коперник в письме к Ваповскому подверг острой критике методологические предпосылки автора теории. Но прежде всего эта теория уже была исторически несвоевременной, ибо созданная к тому времени гелиоцентрическая система мира опровергла утверждения о существовании независимых надзвездных систем.

В годы учебы в Краковском университете Коперник еще пользовался традиционной альфонсинско-пурбаховской теорией. В сделанной им собственноручно копии *Tabula aegis solaris*, которая дошла до нашего времени, применены



пурбаховские величины равномерного движения ( $1^\circ$  за 136 лет) и трепидация типа  $\text{tg } \tau = \text{tg } 9^\circ \sin \theta$ .

В коперниковском сочинении *Commentariolus* впервые появляется понятие прецессии в современном смысле, т. е. как предварение равноденствий. Кинематические системы надзвёздных сфер заменены прецессионным движением земной оси. В этой книге Коперник еще не дает точного описания механизма трепидации, хотя предложение принять звёздный год в качестве основной единицы времяисчисления и изменчивость тропического года, свидетельствуют о том, что трепидация входила в систему мира, изложенную в этом трактате. В сочинении *De revolutionibus* (первая половина III книги) Коперник впервые подробно описывает теорию прецессии, при разработке которой он пользовался своими наблюдениями, сделанными в 1515—1525 гг.

Приняв нелинейные движение точек равноденствия, равно как и периодический характер изменений наклона эклиптики, Коперник представил движение земной оси как комбинацию равномерной слагающей ( $1^\circ$  за 71,7 лет) и двух трепидационных движений: *anomalía aequinoctii*, объясняющая периодические изменения в прецессии точек равноденствия (с амплитудой  $70'$ ) и *declinatio*, вызывающая периодическое изменение наклона эклиптики в пределах от  $23^\circ 52'$  до  $23^\circ 28'$ .

Эти оба периодические эффекты имеют вид гармонического движения земной оси, возникающего путем соединения двух круговых движений, что отвечало принципу, которого придерживался Коперник, строивший кинематику на равномерном круговом движении (рис. 11). Основа возникновения гармонического движения была известна Копернику из краковского *Комментария к новым теоремам* Войцеха из Брудзева, а также из *Комментария к Началам* Эвклида, составленного Протосом (о котором он упоминает в *De revolutionibus*, кн. V, 25).

Общим эффектом „аномалии” и „деклинации” является движение полюсов Земли по кривой четвертой степени (рис. 13), которая в историко-астрономических трудах часто представлена неверно.

Трепидация, конечно, была лишним обременением гелиоцентрической системы мира. Однако такое толкование, какое ей дал Коперник, явилось важным шагом в развитии методики исследований прецессионных явлений. Строго контролируемый процесс создания теории в III книге *De revolutionibus*, является яркой противоположностью произвольных и неточных формулировок, существовавших в прежней европейской астрономии.

Схема Коперника содержит предпосылки для окончательного решения вопроса трепидации. В числовом отношении трепидация сведена в ней к небольшому возмущению, а ее причинность как движения земной оси отождествлена с истинной прецессией.

Последнее препятствие, мешавшее астрономии окончательно освободиться от понятия трепидации, устранил в XVI в. Тихо Браге, доказавший, что причина кажущейся неравномерности прецессионных изменений кроется в ошибках наблюдений.

J. Dobrzycki

## THE THEORY OF PRECESSION IN MEDIEVAL ASTRONOMY

(Summary)

The paper deals with the history of the mathematical theory of precessional phenomena during the period when their description was complicated by the introduction of a periodical function known as trepidation.

Trepidation being an apparent phenomenon without real existence, has been but marginally mentioned in synthetic works on the history of astronomy. This attitude seems unjustified, as trepidation was for seven centuries an essential constituent of the scientific description of the universe.

In the considerations here summarized and dealing with the period up to the 16th century only a simplified description of the real precession may be adopted. Indeed, any dynamical considerations would be anachronistic, while the limits of error in ancient and medieval measurements allow us to define precession as a uniform variation of the direction of the terrestrial axis. As a result of this motion the equinotial points are displaced along the ecliptic at a rate of  $1^\circ$  per 72 years, while the obliquity of the ecliptic diminishes uniformly (from  $23^\circ 43'$  in the time of Hipparchus to  $23^\circ 30'$  in 1500 A. D.). In observation precession manifests itself through an increase of the ecliptic longitudes ( $1^\circ$  per 72 years) and a (constant) difference between the sidereal and the tropical year.

In Ptolemy's *Almagest* the variability of the ecliptic longitudes had its physical cause in the motion of the sidereal sphere, the „eighth sphere”, which revolved from West to East. Ptolemy's formally correct scheme was, however, encumbered with his faulty parameters of velocity ( $1^\circ$  per 100 years) and by the excessive value he adopted for the obliquity of the ecliptic ( $23^\circ 51' 20''$ ). In modern times this gave rise to a discussion on the methodological foundations of Ptolemy's work. Essential for our purpose is that the numerical errors of the *Almagest* have indirectly contributed to the formulation, eight centuries later, of the theory according to which the precessional variations have the form of periodic oscillations of limited amplitude. Such an idea had not been unfamiliar to Greek astronomy in the times before Ptolemy, and the reference made by Theon of Alexandria to the „ancient astronomers”, according to whom the sidereal sphere performed linear oscillations within the limits of  $\pm 4^\circ$  (causing zigzag variations of the ecliptic longitudes as in Fig. 1), was known to, and quoted in, both Arabic and European astronomical literature.

It was under this form, i. e. as a saltatorily varying increase and decrease of the ecliptic longitudes, that precession was presented in the Indian theories of the first millennium A. D.

The young Islamic astronomy got acquainted with this tradition since the 8th century through both direct transmission and the intermediary of Indian science. At the same time the development of the art of observation pointed to the urgent need of a revision of the *Almagest* theory, at least as regards the parameters whose values were incompatible with new determinations.

In this situation Thabit ibn Qurra made an attempt at rationalizing the theory of the periodical character of precessional variations. Thabit's treatise *De motu octavae sphaerae* (known at present only in Latin translation) inaugurated the history of trepidation as an element of mathematical astronomy. The point of Thabit's theory consists in admitting a periodical motion of the eighth sphere, whose „Aries” and „Libra” points rotate, along small circles, round the „Aries” and „Libra” points of the ninth or external sphere. This is illustrated by Fig. 2, (page) where  $E_9$  and  $E_8$  stand for the ecliptics of the 9th and the 8th sphere,  $A_9$  for the „Aries point” of the 9th sphere, T for the vector point of the 8th sphere or the „Aries point” of the same sphere rotating along the circle  $TT_0$  of the radius  $\varrho$ , the argument  $\theta$  increasing linearly with time.  $A_8$  denotes the real position of the equinoctial point. According to Thabit's data  $\varrho = 4^\circ 19'$ , while the trepidatory variation of the ecliptic longitudes  $\tau = A_8T$  oscillates within  $\pm 10 \frac{3}{4}^\circ$  during a period of over 4000 years. The course of the variations of the ecliptic longitude  $\tau$  and inclination  $\varepsilon'$  resulting from Thabit's theory are given in Fig. 4.

Generally speaking the astronomers of Islamic countries rejected the concept of trepidation, confining their revision of Ptolemy's theory (as Al-Battani did) to the adoption of the more correct velocity of  $1^\circ$  per 66 to  $1^\circ$  per 70 years. For the 9th century, in which the modification of Ptolemy's theory was undertaken, both the theory of Thabit and the slightly too large raise of the velocity of the eighth sphere resulted in a satisfactory presentation of the growth of the ecliptic longitudes since the days of the *Almagest* (Fig. 6a, where the thicker line represents the real growth  $\Delta\lambda$ , an allowance being made for the erroneous zero point in Ptolemy's catalogue of stars).

In the later evolution a significant exception was that of 10th century Mohammedan Spain, where we re-discover trepidation in Az-Zarqali's *Toledan tables*. Az-Zarqali's influence upon the beginnings of mathematical astronomy in Europe, together with the intensification of Arab-European contacts in the Iberian Peninsula, resulted in both rival theories of the motion of the eighth sphere being introduced in European astronomy. A conciliatory solution, which combined both kinds of motion into a single scheme first appeared in philosophical writings (Albert the Great). A mathematical realization of such a model was given in King Alphonso's *Astronomical Tables*, viz. in their Paris version, which later on spread all over Europe. Contrary to Dreyer's thesis it may be surmised that the original Toledan version of the *Tables* used but the trepidation of Thabit—Zarqali (cf. Chapter 49 of the introduction to the *Tables* in the IVth volume of the monumental edition by Rico y Sinobras). The Paris redaction adopts, for the uniform component of the motion of the eighth sphere („the motion of apogees and fixed stars”), a velocity of  $1^\circ$  per 136 years, i. e. a complete revolution of the sphere in 49000 years. The *motus accessus et recessus*, i. e. the trepidation superposed on this uniform motion, has a period seven times shorter. The variations of the ecliptic longitudes  $\tau$  caused by trepidation are shown in the table of the „equations of progressive and regressive motion” built upon the function  $\sin \tau = \sin 9^\circ \sin \theta$ .

In the *Alphonsine Tables* the theory of the motion of the eighth sphere is determined in a purely analytic way by means of numerical tables. The physical interpretation associated with the *Tables* during the following centuries used a system of three spheres. The external or tenth sphere (*primum mobile*) performed only a diurnal revolution. Round the poles of the ecliptic of this sphere the ninth sphere revolved in a uniform motion which explained the uniform component of the precessional motion. The eighth sphere (with the stars) performed a trepidatory *motus accessus et recessus* in addition to the revolutions transferred from the external spheres. There are however, fundamental contradictions inherent to such interpretation. Indeed, the *Alphonsine Tables* do not define, on the ecliptic of the ninth sphere, any precise points round which the trepidation of the sidereal sphere could be performed (in Thabit's theory these were the fixed equinoctial points of the ninth sphere; but in the *Alphonsine Tables* the ecliptic of the ninth sphere is mobile). Moreover, any convention concerning the position of such points leads to a new difficulty: as the trepidatory circles recede from the equator, variations of the ecliptic inclination must appear which show an enormous amplitude (up to  $\pm 9^\circ$ ). Further contradictions did arise from the practice of applying the theory of the motion of the eighth sphere to reduce the place of the stars of the *Alphonsine catalogue*.

The difficulties of physical interpretation became explicit when, from the middle of the 15th century onwards, attempts began at renewing the advanced tradition in mathematical astronomy. Peurbach modified the *Alphonsine* theory in his *Theoricae novae planetarum*. This is illustrated in Fig. 8. In this figure  $E_9$  stands for the ecliptic of the 9th sphere, coinciding with the ecliptic of the *primum mobile*. The



point  $A_9$ , which is displaced along the ecliptic at a rate of  $1^\circ$  per 136 years, is the centre of the trepidatory circle PT along which the vector point T of the eighth sphere rotates during a period of 7 000 years. This is, in principle, Thābit's construction of trepidation. A slight difference is found in the angle formed by the ecliptics of the eighth and the ninth sphere.  $A_{10}$  represents the fixed „equinoctial point” of the *primum mobile*;  $A_8$  — the real point of intersection of the ecliptic of the eighth sphere with the equator. Contrary to the *Alphonsine Tables* which use the arc P'T for the periodical component (conform to the dependence  $\sin \tau = \sin 9^\circ \sin \theta$ ). Peurbach determines the trepidatory variation of the longitudes by the arc  $A_9H$ , which corresponds to the formula  $\text{tg } \tau = 9^\circ \sin \theta$ .

Peurbach's scheme did not eliminate the fundamental defect of the Alphonsine theory: the variable position of the trepidatory circle. Peurbach committed the factual fault of defining the total variation of the ecliptic longitudes as the arc  $A_{10}H$  of the fixed ecliptic instead of the arc  $A_8T$  measured on the eighth sphere. The astronomical practice of the following decades did not solve these problems, though attempts were made at completing Peurbach's scheme by introducing a corrective corresponding to the arc  $A_{10}D$  resp.  $A_8C$  in Fig. 8.

The most advanced geostatical theory of trepidation was that presented by John Werner (*De motu octavae sphaerae* of 1515, published in 1522). Here the trepidatory circles were given a definite position thanks to a change in the sequence of the spheres. To the eighth or internal sphere a uniform motion was ascribed, and the trepidation was transferred to the ninth sphere. The whole mechanism of spheres was extended, and their number reached eleven (Fig. 9 and 10). In addition to uniform motion (with the Ptolemaic velocity of  $1^\circ$  per 100 years) the sidereal sphere was credited with two trepidations. The „first trepidation” (Fig. 9) consisted in a revolution of the ninth sphere round the solstitial points (Cancer and Capricorn) of the tenth sphere, in a period of 3 058 years. The „second trepidation” (Fig. 10) had an identical amplitude ( $3^\circ 23'$ ) and a similar period (3 186 years) but its phase was opposite. This compensated for the excessive variations in the inclination of the ecliptic caused by the „first trepidation”.

On the other hand, Werner's theory was not exempt from formal inexactitudes (such as his definition of the variation of the ecliptic longitudes as an arc of the 10th sphere instead of the 8th), and Copernicus in his letter to Wapowski sharply criticized the author's methodological premises. Above all, however, the theory was already historically overdue in view of the discovery of the heliocentric system which deprived the arbitrary structures of suprasidereal spheres of their *raison d'être*.

Copernicus, during his Cracow studies, used yet the traditional theory of Alphons—Peurbach. His extant hand — made copy of the *Tabula aegis solaris* admits Peurbach's value of  $1^\circ$  per 136 years for the uniform motion and a trepidation of the type  $\text{tg } \tau = \text{tg } 9^\circ \sin \theta$ .

Precession in the present sense of the term, that of a backwards movement of the equinoctial points, first appears in the *Commentariolus*. The kinematic systems of suprasidereal spheres are here replaced by a precessional motion of the Earth's axis. The *Commentariolus* formulates no detailed mechanism of precession, though the postulate of adopting the sidereal year as a fixed measure of time, as well as the variability of the tropical year, prove that trepidation was included in the system of the universe contained in that treaty. Only in *De revolutionibus* (first half of Book III) do we find a detailed theory of precession, for which Copernicus's own observations of 1515—1525 are put to use.

Admitting both a non-linear course of the equinoctial points and a periodical character of the variations in the inclination of the ecliptic, Copernicus presents

the motion of the Earth's axis as a combination of a uniform component ( $1^\circ$  per 71.7 years) and two trepidatory movements: the *anomalía aequinoctii*, explaining the periodical variations in the precession of the equinoctial points (with an amplitude of  $70'$ ), and the *declinatio*, causing a periodical variation in the inclination of the ecliptic from  $23^\circ 52'$  to  $23^\circ 28'$ .

Both periodic effects have the form a harmonic motion of the Earth's axis, composed of two circular movements, conform to the principle, observed by Copernicus, of basing kinematics on uniform circular motion (Fig. 11). The creative principle of harmonic motion was known to Copernicus from the Cracow commentary on the *Theorica nova* by Wojciech (Adalbertus) de Brudzewo, as well as from the commentary on Euclid's *Elements* by Proclus (which he mentions in *De revolutionibus* V, 25).

The cumulative effect of „anomaly” and „declination” is a motion of the Earth's poles along a curve of the fourth degree (Fig. 13), which is wrongly represented in most books on the history of astronomy.

Trepidation is obviously a superfluous burden to heliocentric theory. However, its conception by Copernicus constitutes a long step forward in the methodology of investigation, precessional phenomena. The closely controlled process of forming a theory in the IIIrd Book of *De revolutionibus* is a striking contrast to the arbitrary and unprecise constructions of former European astronomers. In Copernicus' scheme lie the premises for a definitive solution of the enigma of trepidation. The latter has been numerically reduced to the rank of a slight perturbation and causally identified, as a motion of the Earth's axis, with precession proper.

The last obstacle in completely delivering astronomy from the motion of trepidation was removed in the same 16th century when Tycho Brahe found the cause of the apparent non-uniformity of precessional variations in errors of observation.

Poniższe imiona arabskie zostały ze względów typograficznych wydrukowane w tekście w uproszczonej transkrypcji:

Al-Mamūn  
 Yaḥya ibn Abī Maṣṣūr  
 Muḥammad } Banū Mūsā  
 Aḥmad }  
 Al-Battānī  
 Thābit ibn Qurra b. Mirwān al-Ḥarrānī Abu'l-Ḥasan  
 Mu'ṭadīd  
 Ishāq ben Ḥunayn  
 Al-Bītrūjī  
 Ḥabash al-Ḥāsib  
 Naṣīr ad-Dīn aṭ-Ṭūsī  
 Ibn ash-Shāṭir  
 Aṣ-Ṣūfī