WYBRANE ZAGADNIENIA
Z MECHANIKI TECHNICZNEJ

Zbiór zadań ze statyki

Konrad Cichocki ▪ Mariusz Koprowski

WYBRANE ZAGADNIENIA Z MECHANIKI TECHNICZNEJ

Zbiór zadań ze statyki

Włocławek 2022

Wydawca
Państwowa Akademia Nauk Stosowanych we Włocławku

Recenzent
dr inż. Henryk Rode
Politechnika Warszawska

Redakcja
Krzysztof Czarnecki

Skład i łamanie
Krzysztof Czarnecki

Projekt okładki
Krzysztof Galus

Ilustracja na okładce
Brina Schenk
UBC / Douglas College

Publikacje Wydawnictwa PANS we Włocławku dostępne są w sprzedaży w Bibliotece PANS we Włocławku przy ul. Mechaników 3, pok. 8. Zamówienia można również przesyłać drogą e-mailową na adres: biblioteka@pans.wloclawek.pl

ISBN 978-83-963889-4-0

Wydawnictwo Państwowej Akademii Nauk Stosowanych we Włocławku
ul. Mechaników 3, 87-800 Włocławek
tel. 600-255-358
e-mail: wydawnictwo@pans.wloclawek.pl
https://wyd.edu.pl/

Druk i oprawa:
EXDRUK Spółka Cywilna Wojciech Żuchowski Adam Filipiak
ul. Rysia 6, 87-800 Włocławek
tel. 501-335-617, 507-832-458, e-mail: biuroexdruk@gmail.com

Spis treści

Od autorów

Niniejszy skrypt zawiera zbiór zadań ze statyki. W założeniu autorów ma on stanowić pomoc dydaktyczną dla studentów I roku kierunków: Automatyka i Robotyka, Inżynieria Zarządzania oraz Mechanika i Budowa Maszyn. Dobór zadań został podyktowany potrzebą uzyskania przez studentów założonych efektów uczenia się niezbędnych do realizacji późniejszych kursów z wytrzymałości materiałów oraz podstaw konstrukcji maszyn. Opracowanie dotyczy standardowych zagadnień ze statyki będących w programie kierunków technicznych. Zaprezentowane w skrypcie zadania zostały zaczerpnięte z powszechnie dostępnej literatury, m.in. z *Podstaw fizyki* Halliday'a, Resnicka, Walkera oraz *Zbioru zadań z mechaniki ogólnej* M. i T. Niezgodzińskich, jak i stanowią opracowania własne autorów. Autorzy proponują Studentom sposób rozwiązywania zadań według schematu obejmującego: wykonanie rysunku, w którym więzy rzeczywiste zastępuje się układem sił, właściwy dobór układu współrzędnych, sformułowanie i rozwiązanie równań równowagi. W skrypcie zawarto również niezbędny w opinii autorów wstęp teoretyczny obejmujący podstawowe zagadnienia dotyczące: praw rządzących statyką, wielkości mechanicznych, działań na wektorach oraz rodzajów podpór.

Rozdział 1

Wstęp teoretyczny

1. Podstawowe zasady statyki

Statyka to dział mechaniki fizycznej, który opiera się na sześciu aksjomatach:

1.1. Aksjomat pierwszy

Jeżeli na ciało X działają dwie siły P_1 i P_2 to działanie tych sił możemy zastąpić jedną siłą P_w, która jest wypadkową tych sił. W wyniku tego możemy zamiennie stosować wyżej wymieniony układ sił P_1 i P_2 lub siłę wypadkową P_w. W celu wyznaczenia siły wypadkowej P_w należy użyć metody analitycznej lub metod graficznych (równoległoboku lub wieloboku).

1.2. Aksjomat drugi

Jeżeli na jednej prostej znajdują się dwie siły P_A i P_B o tych samych wartościach lecz o przeciwnych zwrotach to siły te równoważą się. Równowaga tych siły nazywana jest układem zerowym sił.

1.3. Aksjomat trzeci

Jeżeli układ zerowy zostanie dodany lub odjęty od danego układu sił P_1 i P_2 to równowaga tego układu sił nie ulegnie zmianie.

1.4. Aksjomat czwarty

Zasada uwolnienia od więzów – jeżeli dane ciało w wyniku działania więzów znajduje się w równowadze, to uwalniając to ciało od więzów i dodając odpowiedni układ sił, ciało to nadal jest w równowadze.

1.5. Aksjomat piąty

Zasada akcji i reakcji – aby dane ciało było w równowadze, sile działającej na dane ciało w określonym kierunku, musi odpowiadać siła o tej samej wartości i kierunku, lecz przeciwnym zwrocie (siła ta nazywana jest reakcją).

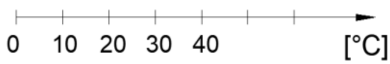
1.6. Aksjomat szósty

Równowaga sił działających na ciało odkształcalne nie zostanie naruszona przez zesztywnienie tego ciała. Jeżeli na ciało odkształcalne będące w równowadze działa układ sił, to warunki tego układu nie zmienią się, jeżeli w miejsce tego ciała wstawimy ciało sztywne (w mechanice przyjmujemy zasadę nieodkształcalności ciał – a więc przyjmujemy ciała sztywne)[1].

2. Wielkości mechaniczne

Występujące w mechanice wielkości takie jak siła, prędkość, czas, praca i inne można podzielić na dwie grupy:
- wielkości skalarne,
- wielkości wektorowe.

Wielkość mechaniczną, którą można jednoznacznie określić podając jej wartość liczbową nazywamy **skalarem**. Wyróżniamy wielkości skalarne takie jak m.in. temperatura, masa, czas, moc, praca, ładunek i inne[2].

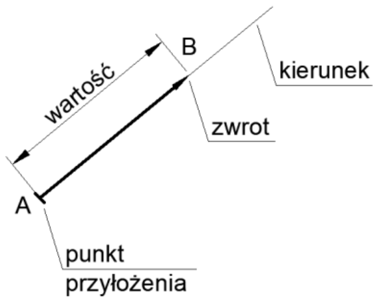


Wielkość mechaniczną, którą można określić poprzez odcinek znajdujący się na płaszczyźnie euklidesowej lub przestrzeni euklidesowej nazywamy **wektorem**. Aby jednoznacznie określić wektor należy podać:
- **kierunek wektora** – jest to linia na płaszczyźnie euklidesowej lub w przestrzeni euklidesowej na której znajduje się rozpatrywany wektor,

---

[1] T. Niezgodziński, *Mechanika ogólna*, Warszawa 2012, s. 12–14.
[2] W. Siuta, *Mechanika techniczna*, Warszawa 1999, s. 17.

- **zwrot wektora** – oznaczony jest za pomocą grotu,
- **wartość wektora** – oznaczona jest za pomocą odległości pomiędzy początkiem wektora (punkt A na rysunku) a końcem wektora (punkt B na rysunku).



3. Działania na wektorach

3.1. Dodawanie i odejmowanie wektorów

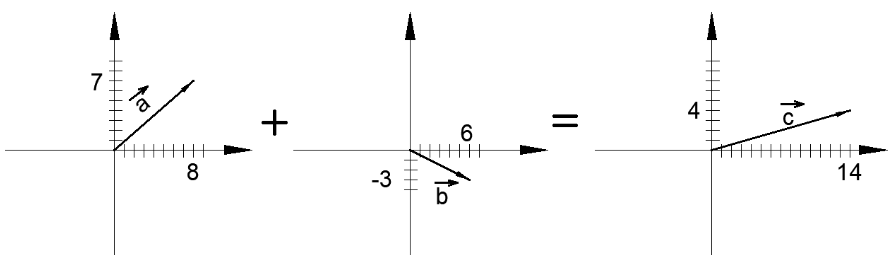
Aby dodać do siebie dwa wektory analitycznie należy:

$$\vec{a}=\begin{bmatrix}8\\7\end{bmatrix}, \vec{b}=\begin{bmatrix}6\\-3\end{bmatrix}$$

$$\vec{c}=\vec{a}+\vec{b}$$

$$\vec{c}=\vec{a}+\vec{b}=\begin{bmatrix}8+ & 6\\7+ & -3\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}14\\4\end{bmatrix}$$

Graficzne przedstawienie:



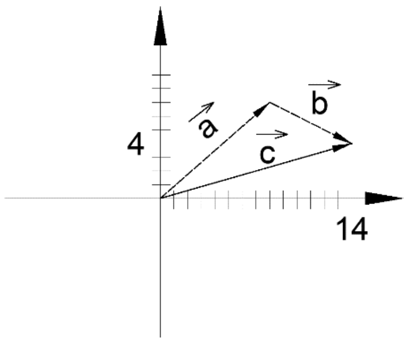
Aby odjąć od siebie dwa wektory analitycznie należy:

$$\vec{a}=\begin{bmatrix}8\\7\end{bmatrix}, \vec{b}=\begin{bmatrix}4\\-2\end{bmatrix}$$

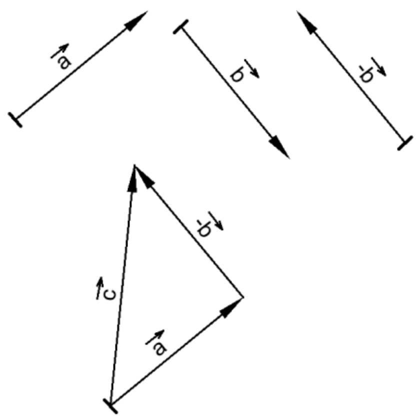
$$\vec{c}=\vec{a}-\vec{b}$$

$$\vec{c}=\vec{a}+\vec{b}=\begin{bmatrix}8- & 4\\7- & -2\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}4\\7\end{bmatrix}$$

Aby dodać do siebie dwa wektory graficznie należy do końca jednego z wektorów (np. wektora *a*) dodać (przesunąć) początek drugiego wektora (np. wektora *b*).



Aby odjąć od siebie dwa wektory graficznie należy do końca jednego z wektorów (np. wektora *a*) dodać drugi wektor (wektor –*b*) o tym samym kierunku, wartości lecz o przeciwnym zwrocie.

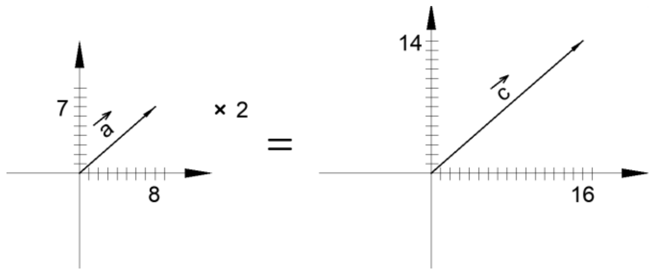


3.2. Mnożenie i dzielenie wektora przez skalar

Aby pomnożyć wektor *a* przez wartość skalarną należy:

$$\overrightarrow{a} = \begin{bmatrix}8\\7\end{bmatrix}, 2$$

$$\vec{a} \cdot 2 = 2 \cdot \begin{bmatrix}8\\7\end{bmatrix} = \begin{bmatrix}16\\14\end{bmatrix} = \vec{c}$$

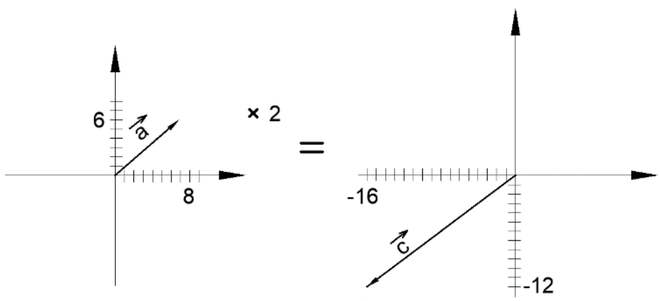


Można zatem uznać, że mnożenie wektora przez wartość skalarną polega na „skalowaniu” długości wektora.

Aby pomnożyć wektor *a* przez ujemną wartość skalarną należy:

$$\vec{a} = \begin{bmatrix}8\\6\end{bmatrix}, -2$$

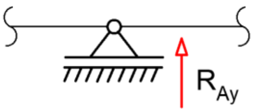
$$\vec{a} \cdot (-2) = -2 \cdot \begin{bmatrix}8\\6\end{bmatrix} = \begin{bmatrix}-16\\-12\end{bmatrix} = \vec{c}$$



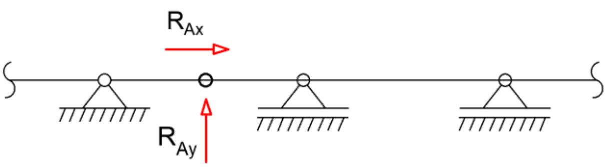
Można zatem uznać, że mnożenie wektora przez ujemną wartość skalarną polega na „skalowaniu” długości wektora oraz zmianie zwrotu jego działania.

4. Rodzaje podpór

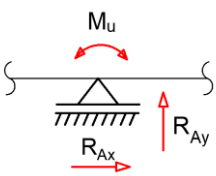
Podpora przegubowo-przesuwna – na podporze tej występuje jedna siła reakcji o znanym kierunku, prostopadłym do płaszczyzny przesunięcia. Podpora ta odbiera ciału jeden stopień swobody, gdyż eliminuje przesunięcie w jednym kierunku, a zezwala na przesunięcie w drugim kierunku i swobodny obrót. Na rysunku pokazano element konstrukcyjny podparty w sposób przegubowo-przesuwny i idealizację tego podparcia w układzie sił.



Podpora przegubowa – na podporze tej występuje jedna siła reakcji – *R* o nieznanym kierunku (którą można zastąpić dwoma składowymi położonymi w płaszczyźnie horyzontalnej i wertykalnej). Podpora ta odbiera ciału dwa stopnie swobody przez eliminację przesunięć w dwóch kierunkach. Zezwala tylko na obrót wokół punktu podparcia.

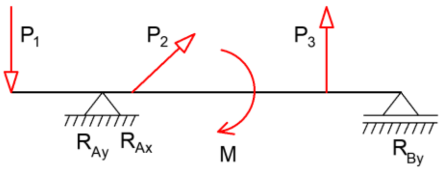


Sztywne utwierdzenie – na podporze tej występuje jedna siła reakcji o nieznanym kierunku (którą można zastąpić dwoma składowymi położonymi w płaszczyźnie horyzontalnej i wertykalnej) oraz moment utwierdzenia. Podpora ta odbiera ciału trzy stopnie swobody: przesunięcie w dwóch kierunkach i obrót.

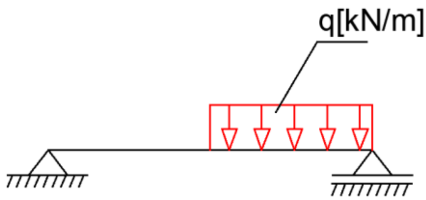


5. Rodzaje obciążeń

Obciążenie skupione – jest to obciążenie, które działa na element na niewielkiej jego powierzchni. Do obciążeń skupionych zaliczamy siłę skupioną (P_1, P_2, P_3) i moment skupiony (M). Jednostką momentu skupionego jest jednostka siły pomnożona przez jednostkę długości, np. kNm,



Obciążenie ciągłe – jest to obciążenie rozłożone na pewnej długości. Wymiarem obciążenia ciągłego (q) jest jednostka siły przez jednostkę długości, np. kN/m,



Rozdział 2

Płaski zbieżny układ sił

1. Redukcja płaskiego układu sił zbieżnych

Układ sił będących na płaszczyźnie w którym wszystkie siły (kierunki sił) przecinają się w jednym punkcie nazywamy **układem płaskim zbieżnym.**

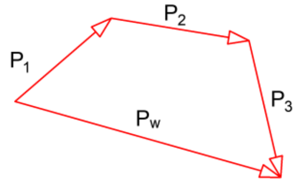
W celu wyznaczenia wypadkowej sił (na dany punkt może działać dowolna liczba sił) działających na dany punkt należy skorzystać z jednej z metod:

a) Metoda analityczna – korzystamy z dwóch warunków (rzutujemy rozpatrywane siły na oś układu współrzędnych x i y)

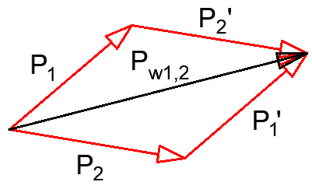
$$W_x = \sum P_{ix}, W_y = \sum P_{iy}$$

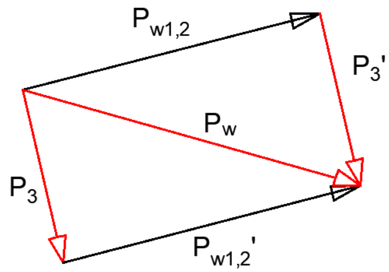
b) Metoda graficzna:

– wielobok sznurowy – polega na geometrycznym dodawaniu wektorów w celu wyznaczenia wektora wypadkowego P_w.



– równoległobok – polega na rysowaniu wieloboków z rozpatrywanych sił (P_1 i P_2) a następnie wyznaczeniu siły wypadkowej z danego wieloboku ($P_{w1,2}$).

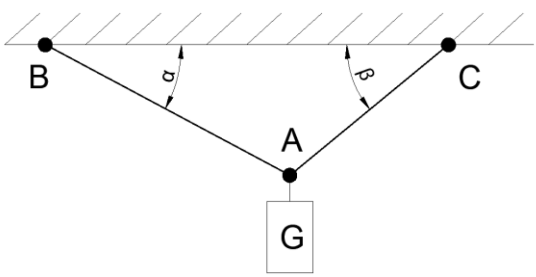




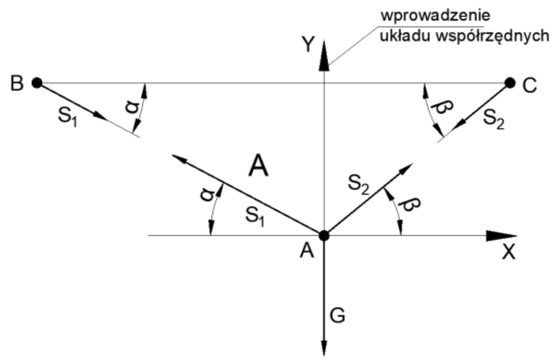
2. Zadania

Zadanie 1

Rysunek przedstawia ciało o ciężarze G zawieszone na dwóch niciach tworzących z poziomem kąty α i β. Wyznacz siły w niciach.



UKŁAD SIŁ:



RÓWNANIA RÓWNOWAGI DLA WĘZŁA:

1) $\sum Pix\colon - S_1 \cdot \cos\alpha + \; S_2 \cdot \cos\beta = 0,$

2) $\sum Piy\colon S_1 \cdot \sin\alpha + \; S_2 \cdot \sin\beta - G = 0$

Komentarz:

Z drugiej zasady dynamiki Newtona wiemy, że $\sum Pix = m_{ix} \cdot a$. Dla ciała pozostającego w spoczynku $a = 0$, stąd $\sum Pix = 0$.

Przekształcając równanie 1) otrzymujemy

$-S_1 \cdot \cos\alpha = -S_2 \cdot \cos\beta$, stąd wyliczamy

3) $S_1 = S_2 \cdot \frac{\cos\beta}{\cos\alpha}$

Podstawiając S_1 do równania 2) otrzymujemy

$$S_2 \cdot \frac{\cos\beta \cdot \sin\alpha}{\cos\alpha} + S_2 \cdot \sin\beta = G$$

Wyłączając S_2 przed nawias otrzymujemy:

$$S_2 \left(\frac{\cos\beta \cdot \sin\alpha}{\cos\alpha} + \sin\beta \right) = G$$

Mnożąc obie strony równania przez $\cos\alpha$ mamy

$S_2(\cos\beta \cdot \sin\alpha + \sin\beta \cdot \cos\alpha) = G \cdot \cos\alpha$, a następnie

4) $S_2 = \frac{G \cdot \cos\alpha}{\cos\beta \cdot \sin\alpha + \cos\alpha \cdot \sin\beta}$

Stosując wzór trygonometryczny

$\sin(\alpha + \beta) = \sin\alpha \cdot \cos\beta + \sin\beta \cdot \cos\alpha$ i wstawiając go do równania 4) ostatecznie mamy wartość siły S_2

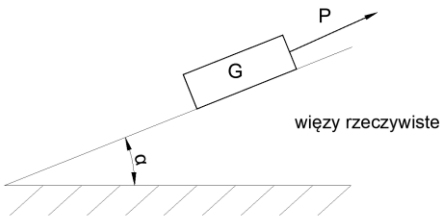
5) $S_2 = \frac{G \cdot \cos\alpha}{\sin(\alpha + \beta)}$

Wstawiając równanie 5) do równania 3) otrzymujemy wartość siły S_1.

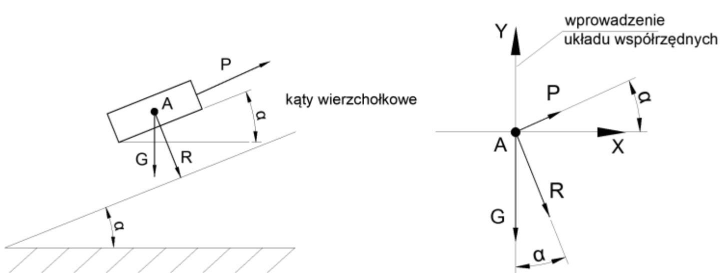
6) $S_1 = \frac{G \cdot \cos\beta}{\sin(\alpha + \beta)}$

Zadanie 2

Rozważmy sytuację, w której na pozbawionej tarcia równi pochyłej o kącie nachylenia α, spoczywa ciało o ciężarze G. Jaką siłą, skierowaną równolegle do powierzchni równi, należy działać na to ciało, by pozostało ono w spoczynku. Wyznacz ponadto reakcję R równi na to ciało.



UKŁAD SIŁ:



RÓWNANIA RÓWNOWAGI DLA CIAŁA:

1) $\sum Pix: P - G \cdot \cos(90° - \alpha) = 0$, po zastosowaniu wzoru trygonometrycznego

   $\cos(90° - \alpha) = \sin\alpha$, mamy

   $P - G \cdot \sin\alpha = 0$, stąd $P = G \cdot \sin\alpha$

2) $\sum Piy: R - G \cdot \sin(90° - \alpha) = 0$, po zastosowaniu wzoru trygonometrycznego

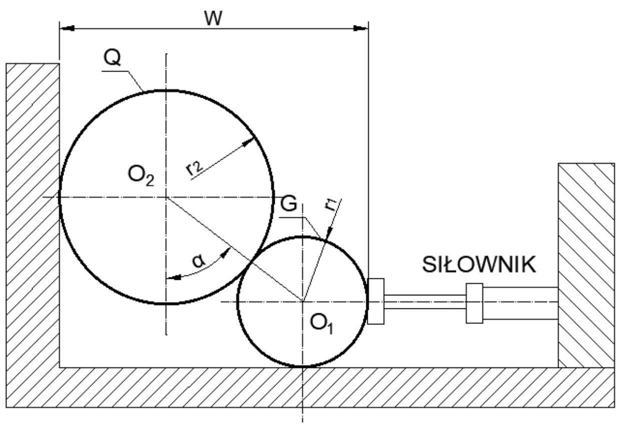
   $\sin(90° - \alpha) = \cos\alpha$, mamy

   $R - G \cdot \cos\alpha = 0$

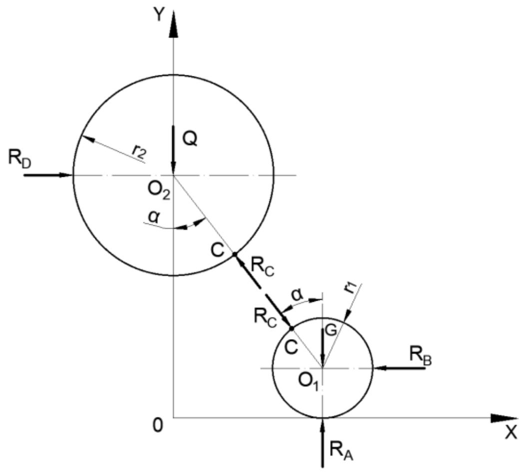
   $R = G \cdot \cos\alpha$

Zadanie 3

Dwie beczki, które mają odpowiednio: ciężary G i Q oraz promienie r_1 i r_2 zostały położone, jak na rysunku. Beczki w danej konfiguracji utrzymuje siłownik tak, że wymiar od ściany do czoła siłownika wynosi W. Wyznacz reakcje podporowe (siły bierne w ścianach), wartość siły pomiędzy beczkami oraz wartość siły w siłowniku.



UKŁAD SIŁ:



WYZNACZENIE KĄTA α:

$$\sin\alpha = \frac{d - r_1 - r_2}{r_1 + r_2}$$

RÓWNANIA RÓWNOWAGI DLA BECZKI GÓRNEJ:

1) $\sum Pix$: $R_D - R_C \cdot \sin\alpha = 0$

2) $\sum Piy$: $R_C \cdot \cos\alpha - Q = 0$

Z równania 2) wyznaczamy R_C i wstawiamy do równania 1) otrzymując wartości reakcji podporowych w punktach C i D.

$$R_C = \frac{Q}{\cos\alpha}$$

$$R_D = \frac{Q \cdot \sin\alpha}{\cos\alpha} = Q \cdot \tan\alpha$$

RÓWNANIA RÓWNOWAGI DLA BECZKI DOLNEJ:

$\sum Pix$: $R_C \cdot \sin\alpha - R_B = 0$, przekształcając równanie i podstawiając wartość R_C otrzymujemy wartość reakcji podporowej w punkcie B,

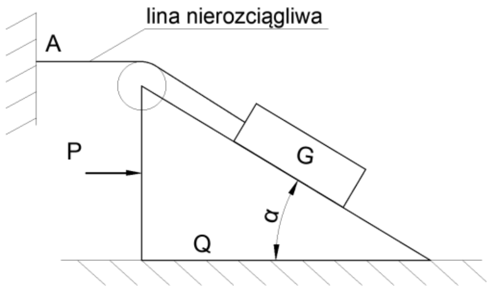
$$R_B = \frac{Q \cdot \sin\alpha}{\cos\alpha} = Q \cdot \tan\alpha$$

$\sum Piy$: $R_A - G - R_C \cdot \cos\alpha = 0$, przekształcając równanie i podstawiając wartość R_C otrzymujemy wartość reakcji podporowej w punkcie A,

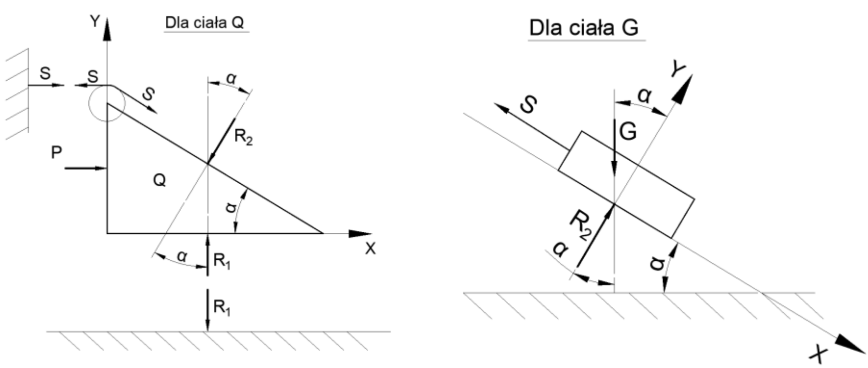
R_A=G + Q

Zadanie 4

Oblicz wartość poziomej siły P, jaką należy działać, aby układ podany na rysunku pozostał w spoczynku. Wyznacz również reakcje podłoża. Tarcia nie uwzględniać. Dane są ponadto ciężary równi pochyłej i ciała, odpowiednio Q i G, oraz kąt α.



UKŁAD SIŁ:



RÓWNANIA RÓWNOWAGI DLA CIAŁA G:

$\sum Pix: G \cdot \sin\alpha - S = 0$, po przekształceniu otrzymujemy

$S = G \cdot \sin\alpha$, gdzie S to napięcie w linie

$\sum Piy: R_2 - G \cdot \cos\alpha = 0$, po przekształceniu otrzymujemy

$R_2 = G \cdot \cos\alpha$, gdzie R_2 to siła oddziaływania pomiędzy równią pochyłą a ciałem

RÓWNANIA RÓWNOWAGI DLA CIAŁA Q:

1) $\sum Pix: P - S + S \cdot \cos\alpha - R_2 \cdot \sin\alpha = 0$, po przekształceniu równania oraz podstawieniu wartości dla S i R_2 otrzymujemy

   $P = G \cdot \sin\alpha - G \cdot \sin\alpha \cdot \cos\alpha + G \cdot \sin\alpha \cdot \cos\alpha = G \cdot \sin\alpha$

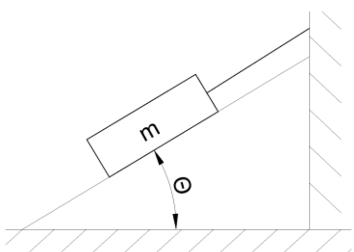
2) $\sum Piy: R_1 - Q - R_2 \cdot \cos\alpha - S \cdot \sin\alpha = 0$, po przekształceniu równania oraz podstawieniu wartości dla S i R_2 otrzymujemy

   $R_1 = Q + G \cdot \cos^2\alpha + G \cdot \sin^2\alpha$, uwzględniając jedynkę trygonometryczną otrzymujemy

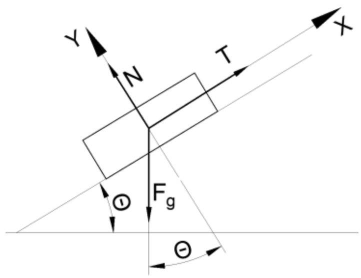
   $R_1 = Q + G$

Zadanie 5

Na rysunku lina utrzymuje w spoczynku, na pozbawionej tarcia równi pochyłej o kącie wzniosu θ = 30°, ciało o masie m = 15 kg. Jaka jest wartość siły T działającej na klocek ze strony liny oraz siły normalnej N działającej na klocek ze strony równi?



UKŁAD SIŁ:



RÓWNANIA RÓWNOWAGI:

$\sum Pix: T - m \cdot g \cdot \sin\theta = 0$, po przekształceniu i wstawieniu wartości liczbowych otrzymujemy kolejno

$$T = m \cdot g \cdot \sin\theta$$

$$T = 15\ \mathrm{kg} \cdot 9{,}8\frac{\mathrm{m}}{\mathrm{s}^2} \cdot \frac{1}{2} \approx 75\ \mathrm{N}$$

$\sum Piy: N - m \cdot g \cdot \cos\theta = 0$, po przekształceniu i wstawieniu wartości liczbowych otrzymujemy kolejno

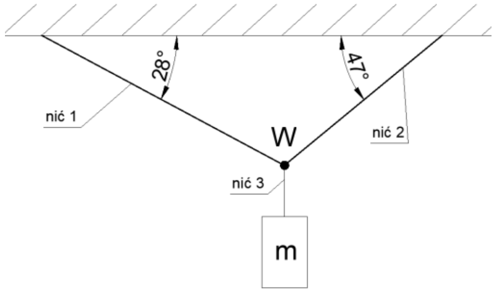
$$N = m \cdot g \cdot \cos\theta$$

$$N = 15\ \mathrm{kg} \cdot 9{,}8\frac{\mathrm{m}}{\mathrm{s}^2} \cdot \frac{\sqrt{3}}{2} \approx 130\ \mathrm{N}$$

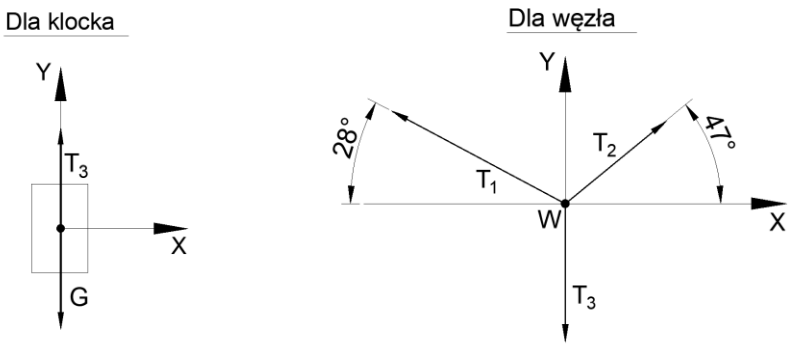
Zadanie 6

Na rysunku przedstawiono układ składający się z trzech nici, węzła i ciała o masie 10 kg. Oblicz naprężenia we wszystkich trzech niciach[3].

[3] D. Halliday, R. Resnick, J. Walker, *Podstawy fizyki*, Warszawa 2016.



UKŁAD SIŁ:



RÓWNANIA RÓWNOWAGI DLA KLOCKA:

1) $\sum Piy$: $T_3 - G = 0$, po przekształceniu otrzymujemy

2) $T_3 = m \cdot g \approx 147$ N

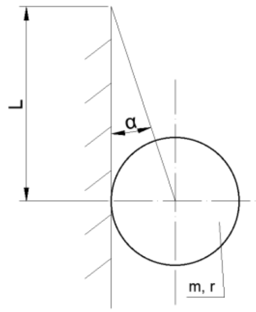
RÓWNANIA RÓWNOWAGI DLA WĘZŁA:

3) $\sum Pix$: $-T_1 \cdot \cos 28° + T_2 \cdot \cos 47° - T_3 = 0$

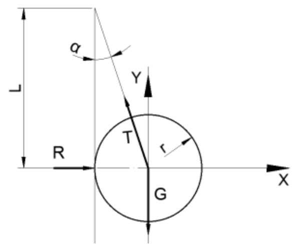
Podstawiając wartość T_3 do równania 3) otrzymujemy układ dwóch równań z dwiema niewiadomymi.

Zadanie 7

Jednorodna kula o masie m = 0,85 kg i promieniu r = 4,2 cm jest zawieszona przy ścianie na linie o znikomo małej masie, przymocowanej do haka odległego w pionie od środka kuli o l = 8 cm. Załóż, że między kulą a ścianą nie występuje tarcie. Wyznacz a) naprężenie liny i b) siłę działającą na kulę ze strony ściany[4].



UKŁAD SIŁ:



WYZNACZENIE α:

$$\tan\alpha = \frac{r}{L}$$

$\tan\frac{4{,}2}{8} = 0{,}52$, z tablic trygonometrycznych odczytujemy wielkość kąta – α = 28°

[4] D. Halliday, R. Resnick, J. Walker, *Podstawy fizyki*, Warszawa 2016.

RÓWNANIA RÓWNOWAGI:

$\sum Pix: R - T \cdot \sin\alpha = 0$, stąd obliczamy

$R = T \cdot \sin\alpha$

$R = 4{,}4$ N

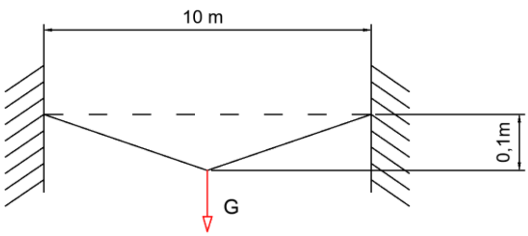
$\sum Piy: T \cdot \cos\alpha - G = 0$, stąd obliczamy

$$T = \frac{G}{\cos\alpha}$$

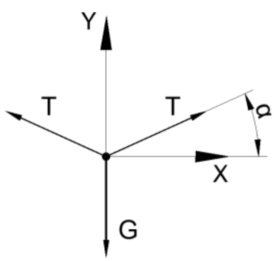
$T = 9{,}4$ N

Zadanie 8

Pomiędzy dwoma fragmentami muru odległymi od siebie o 10 m rozpięto linę o pomijalnie małej masie. Ile wynosiło naprężenie w linie, jeśli po obciążeniu jej w środku długości masą 100 kg ugięła się ona o 10 cm.



UKŁAD SIŁ:



WYZNACZENIE α:

$\sin\alpha = \frac{0,1}{5} = 0,02,$

RÓWNANIA RÓWNOWAGI:

1) $\sum Pix:\ -T + T = 0$

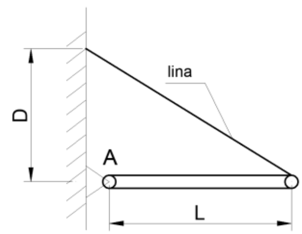
2) $\sum Piy: 2T \cdot \sin\alpha - G = 0$

$$T = \frac{G}{2 \cdot \sin\alpha}$$

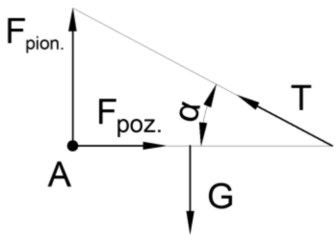
$T = 25000$ N

Zadanie 9

Poniższy rysunek przedstawia linę podtrzymującą pręt o długości L = 5 m i ciężarze G = 200 N. Drugi koniec pręta zamocowany jest do ściany za pomocą zawiasa. W jakiej odległości od zawiasa należy zamocować linę do ściany aby naprężenie w linie wynosiło 100 N?



UKŁAD SIŁ:



RÓWNANIE RÓWNOWAGI:

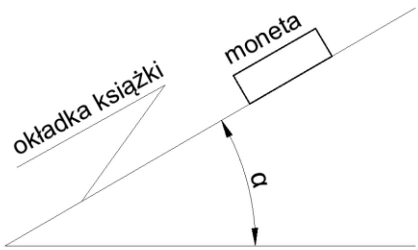
$\sum M_A$: $F_{poz} \cdot 0 + F_{pion} \cdot 0 + G \cdot \frac{L}{2} - T \cdot L \cdot \sin\alpha = 0$, stąd po przekształceniach otrzymujemy

$G \cdot \frac{L}{2} = T \cdot L \cdot \frac{D}{L}$

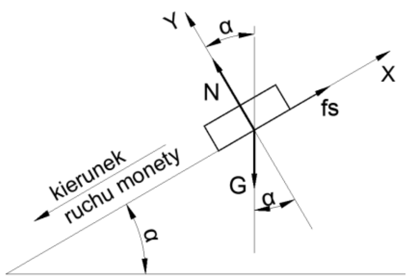
$D = \frac{G \cdot L}{2 \cdot T}$

Zadanie 10

Ile wynosi współczynnik tarcia pomiędzy równią pochyłą a znajdującym się na niej ciałem, jeśli dla kąta α = 15° jest ono na granicy ześlizgnięcia się?



UKŁAD SIŁ:



Komentarz:

– ruchowi monety zapobiega siła tarcia f_s,

– f_s ma wartość maksymalną dla

$f_{smax} = \mu_{smax} \cdot N$, stąd wynika, że

1) $\mu_{smax} = \frac{f_{smax}}{N}$

RÓWNANIA RÓWNOWAGI:

2) $\sum Pix$: $f_s + 0 - G \cdot \sin\alpha = 0$, po przekształceniu otrzymujemy

$$f_s = G \cdot \sin\alpha = m \cdot g \cdot \sin\alpha$$

3) $\sum Piy$: $0 + N - G \cdot \cos\alpha = 0$, po przekształceniu otrzymujemy

$$N = G \cdot \cos\alpha = m \cdot g \cdot \cos\alpha$$

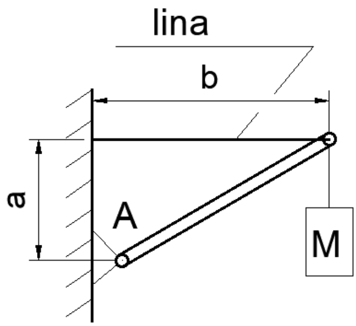
Wstawiając otrzymane wartości f_s i N do równania 1) otrzymujemy

$$\mu_s = \frac{m \cdot g \cdot \sin\alpha}{m \cdot g \cdot \cos\alpha} = \tan\alpha$$

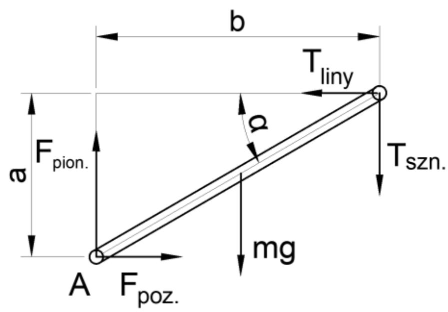
Uwzględniając wartość kąta α otrzymujemy wartość μ_s

Zadanie 11

Poniższy rysunek przedstawia uproszczony schemat wciągnika składającego się z jednorodnego wysięgnika przymocowanego do masztu za pomocą zawiasu A oraz liny. Ciężar M = 500 kg jest zawieszony na sznurze do wysięgnika, gdzie a = 2,0 m; b = 3,5 m. Wysięgnik składa się z belki na zawiasie oraz z poziomej liny łączącej belkę ze ścianą. Jednorodna belka ma masę m = 105 kg, masę sznura i liny pomijamy. Ile wynosi naprężenie w linie?



UKŁAD SIŁ:



RÓWNANIE RÓWNOWAGI DLA BELKI:

$\sum M_A: -a \cdot T_L + b \cdot T_{SZ} + \frac{1}{2} \cdot b \cdot m \cdot g = 0$, po przekształceniach otrzymujemy

1) $T_L = \frac{b \cdot T_{SZ} + \frac{1}{2} \cdot b \cdot m \cdot g}{a}$

RÓWNANIE RÓWNOWAGI DLA CIAŁA M:

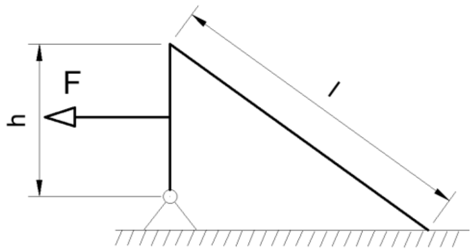
2) $\sum Piy$: $T_{SZ} = M \cdot g$, wstawiając do równania 1) mamy

$$T_L = \frac{b \cdot M \cdot g + \frac{1}{2} \cdot b \cdot m \cdot g}{a} = \frac{\left(M + \frac{1}{2} \cdot m\right) \cdot g \cdot b}{a}$$

3. Zadania do samodzielnego wykonania

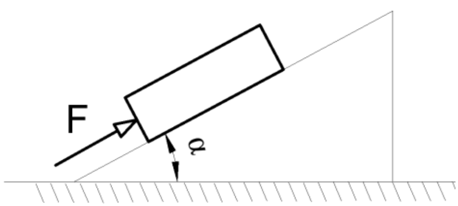
Zadanie 1

Rysunek przedstawia maszt o wysokości h = 10 m, którego jeden koniec jest zamocowany do podłoża na zawiasie, natomiast drugi jego koniec jest połączony z podłożem za pomocą nierozciągliwej liny o długości l = 20 m. Maszt jest w połowie wysokości obciążony siłą F = 1500 N równoległą do poziomu. Oblicz napięcie T w linie.



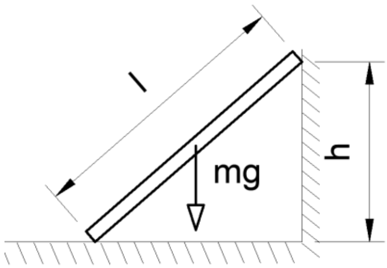
Zadanie 2

Na rysunku przedstawiono element o masie m = 1 kg, który został umieszczony na równi pochyłej. Na element działa siła F = 100 N skierowana równolegle do powierzchni równi. Ile wynosi kąt wzniosu równi pochyłej jeśli wiemy, że układ pozostaje w równowadze. Wpływ tarcia pominąć.



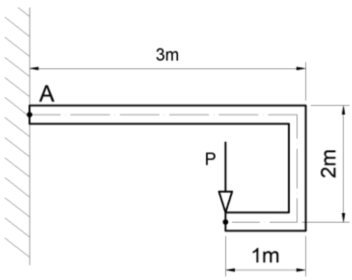
Zadanie 3

Książka o masie m = 0,3 kg i długości l = 25 cm stoi oparta o półkę na wysokości h = 20 cm. Ile wynoszą siły działające na książkę w punktach jej podparcia, jeśli nie uwzględnimy tarcia.



Zadanie 4

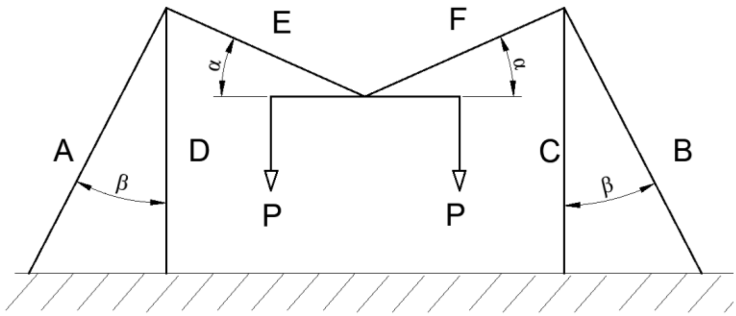
Rysunek przedstawia zamurowany w ścianie element, który obciążono siłą P = 200 N działającą w kierunku pionowym. Oblicz reakcję w punkcie A.



Zadanie 5

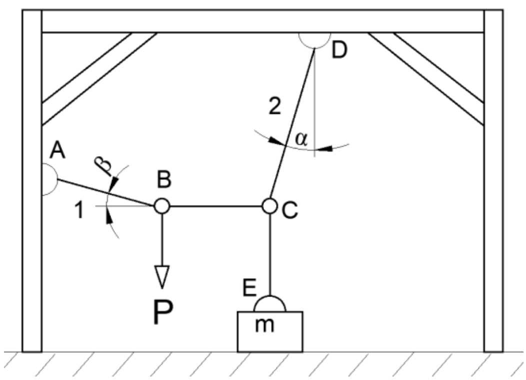
Dwa ciężary P = 2 kN zawieszono na linach E i F położonych pod kątem α = 20°. Należy wyznaczyć wartość sił w linach A, B, E i F oraz wartość sił ściskających w słupach C i D. Kąt pomiędzy liną a słupem wynosi β=30°[5].

[5] W. Siuta, S. Rososiński, B. Kozak, *Zbiór zadań z mechaniki technicznej*, Warszawa 1962, s. 11.



Zadanie 6

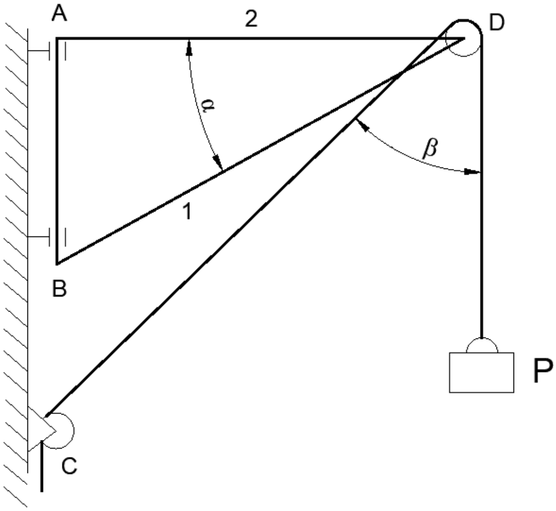
W celu podniesienia ciężaru *m*, przymocowano w punkcie E linę 2. Następnie drugi koniec liny zamocowano do ramy w punkcie D. Po zamocowaniu liny 2, w punkcie C przyczepiono linę 1 celem podniesienia ciężaru, a następnie w punkcie B przyłożono siłę *P*. Po przyłożeniu siły *P* układ przyjął położenie jak na rysunku: lina 2 na odcinku CE zajęła położenie pionowe, odcinek BC zajął położenie poziome, lina 2 na odcinku CD odchyliła się o kąt α natomiast lina 1 na odcinku AB odchyliła się o kąt β. Należy wyznaczyć wartość siły w linii 2 na odcinku CE[6].



[6] J. Nizioł, *Metodyka rozwiązywania zadań z mechaniki*, Warszawa 1978, s. 17.

Zadanie 7

Na obrotowym żurawiu zawieszono ciężar P = 10 kN. Wyznaczyć siły w prętach 1 i 2 jeżeli kąty wynoszą odpowiednio α = 30° natomiast β = 45°. Zadanie wykonać analitycznie oraz wykreślnie[7].



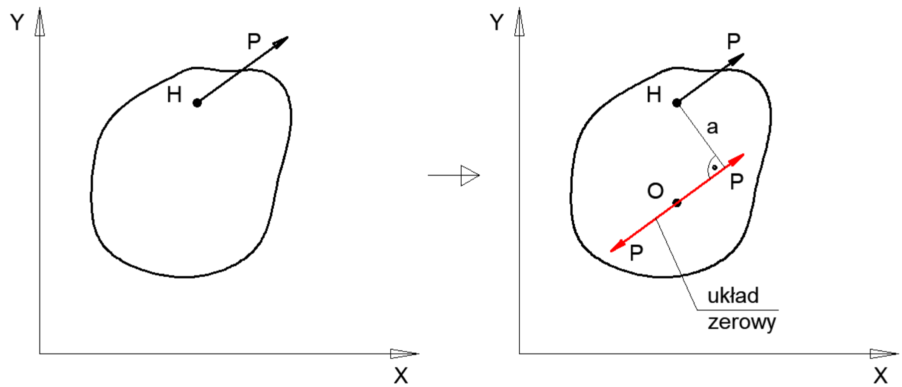
[7] W. Siuta, S. Rososiński, *Zbiór zadań z mechaniki technicznej*, Warszawa 1962, s. 12.

Rozdział 3

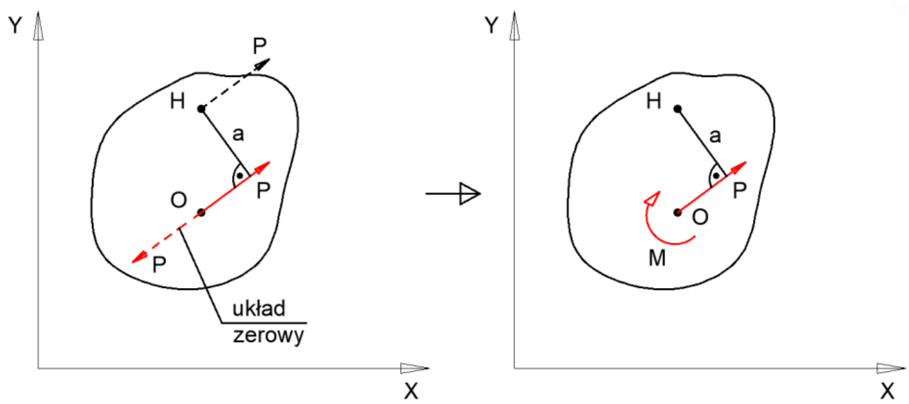
Płaski układ sił dowolnych

1. Redukcja siły do dowolnego punktu

Ciało sztywne znajduje się na płaszczyźnie X, Y. Na powierzchni ciała wyznaczamy dowolny punkt H i przykładamy do niego siłę *P* o dowolnym kierunku i zwrocie. W celu zredukowania siły *P* (przeniesienia) do punktu O, należy w punkcie O przyłożyć układ zerowy sił (dwie siły o przeciwnych zwrotach, mające wspólny początek oraz wartość siły *P*).



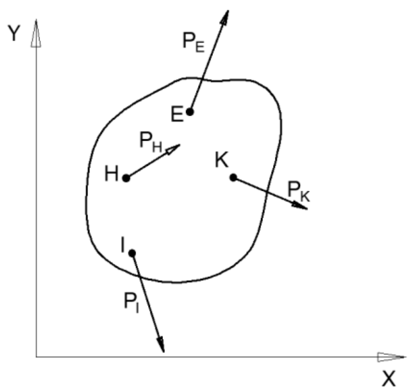
Dwie siły *P* oddalone o wartość *m* możemy zastąpić momentem sił, przyłożonym w rozpatrywanym punkcie O. W wyniku tego układ został zredukowany z punktu H do punktu O, gdzie w punkcie O występuje teraz moment *M* oraz siła *P*.



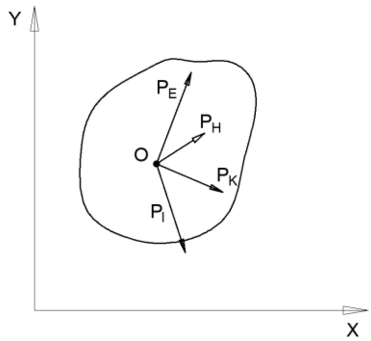
$$M = P \cdot a$$

2. Redukcja dowolnej liczby sił do dowolnego punktu

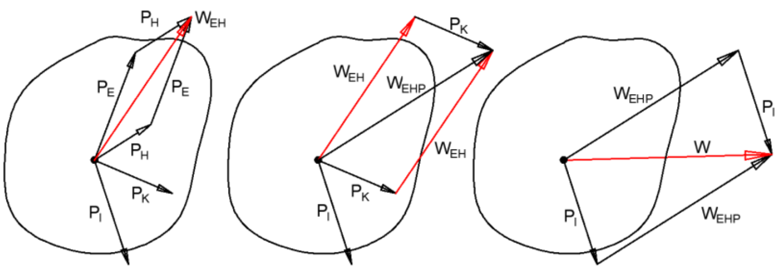
Ciało sztywne znajduje się na płaszczyźnie Y, X. Na powierzchni ciała wyznaczamy punkt H, E, K, I a następnie przykładamy do punktów siły, odpowiednio P_H, P_E, P_K oraz P_I.



W celu zredukowania sił (przeniesienia) do punktu O, należy redukować siły zgodnie z warunkami redukcji pojedynczej siły do dowolnego punktu. W wyniku tych zabiegów w punkcie O przyłożone zostają siły P_H, P_E, P_K, P_I oraz odpowiednio momenty M_H, M_E, M_K oraz M_I.

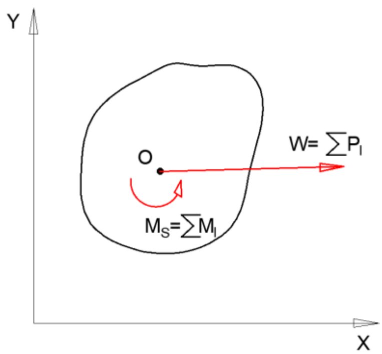


Zgodnie z zasadą równoległoboku, przeniesione siły P_H, P_E, P_K, P_I do punktu O możemy zastąpić jedną siłą wypadkową W.



$$W = P_H + P_E + P_K + \ldots\ldots + P_I = \sum P_I$$

$$M_S = M_H + M_E + M_K + \ldots\ldots + M_I = \sum M_I$$



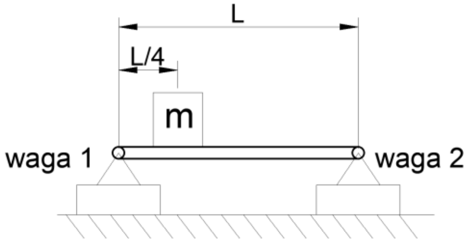
Warunki równowagi dowolnego płaskiego układu sił przedstawiają się następująco:

$$\sum F_{ix} = 0, \qquad \sum F_{iy} = 0, \qquad \sum M_I = 0$$

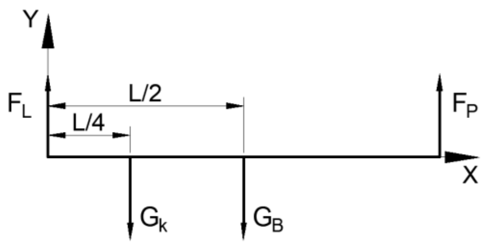
3. Zadania

Zadanie 1

Jednorodna belka o długości L i masie m = 1,8 kg znajduje się w spoczynku, a oba jej końce spoczywają na wagach. Na belce leży nieruchomo jednorodny klocek o masie M = 2,7 kg tak, że jego środek jest odległy od lewego końca belki o $L/4$. Jakie są wskazania obu wag?[8]



Skoro układ znajduje się w stanie równowagi statycznej, to spełnione są dla niego warunki równowagi.



[8] D. Halliday, R. Resnick, J. Walker, *Podstawy fizyki*, Warszawa 2016.

RÓWNANIA RÓWNOWAGI:

1) $\sum Pix = 0$

2) $\sum Piy$: $F_L - M \cdot g - m \cdot g + F_P = 0$

3) $\sum M_0$: $0 \cdot F_L + M \cdot g\frac{L}{4} + m \cdot g \cdot \frac{L}{2} - L \cdot F_P = 0$, dzieląc obustronnie przez L i przekształcając równanie otrzymujemy

$F_P = \frac{M \cdot g}{4} + \frac{L}{2} \cdot m \cdot g$, podstawiając wartości liczbowe mamy

$F_P = 15$ N

Aby obliczyć wskazania wag, należy podzielić wynik przez wartość przyspieszenia ziemskiego.

Podstawiając wartość F_P do równania 2) otrzymujemy

$$F_L = M \cdot g + m \cdot g - \frac{1}{4} \cdot M \cdot g - \frac{L}{2} \cdot m \cdot g$$

$$F_L = \frac{3}{4} \cdot M \cdot g + \frac{1}{2} \cdot m \cdot g$$

Zadanie 2

Jednorodna belka o długości L i masie m znajduje się w spoczynku. Na belce leżą nieruchomo dwa klocki. Pierwszy o masie M w odległości 1/3 L od lewej podpory i drugi o masie ½ M w odległości 2/3 L od lewej podpory. Oblicz reakcje.

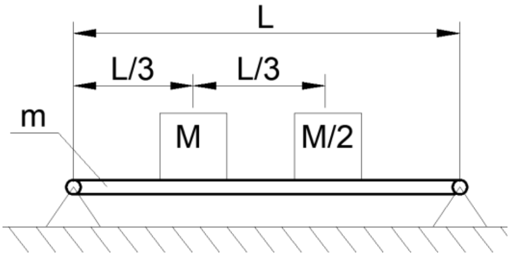
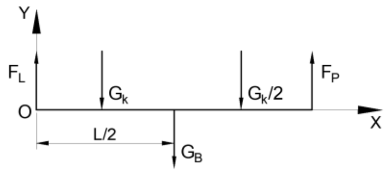


DIAGRAM SIŁ I UKŁAD WSPÓŁRZĘDNYCH:



RÓWNANIA RÓWNOWAGI:

1) $\sum Pix = 0$

2) $\sum Piy$: $F_L - G_K - G_B - \frac{G_K}{2} + F_P = 0$

3) $\sum M_0$: $F_L \cdot 0 + G_K \cdot \frac{L}{3} + G_B \cdot \frac{L}{2} + \frac{G_K}{2} \cdot \frac{2 \cdot L}{3} - F_P \cdot L = 0$, dzieląc obustronnie przez L i przekształcając równanie otrzymujemy

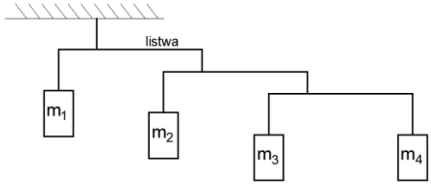
$F_P = \frac{M \cdot g}{3} + \frac{m \cdot g}{2} + \frac{M \cdot g}{3} = \frac{2 \cdot M \cdot g}{3} + \frac{m \cdot g}{2}$, podstawiając do równania 2) mamy

$F_L = M \cdot g + m \cdot g + \frac{M \cdot g}{2} - \frac{2 \cdot M \cdot g}{3} - \frac{m \cdot g}{2}$

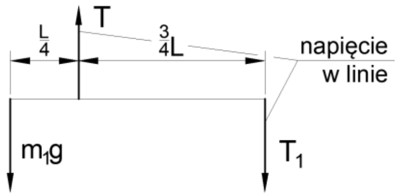
$F_L = \frac{5 \cdot M \cdot g}{6} + \frac{m \cdot g}{2}$

Zadanie 3

Do sufitu podłączono żyrandol składający się z czterech punktów świetlnych połączonych elementami o znikomej masie tak, jak przedstawiono to na rysunku. Oblicz ile wynosi masa elementów m_2, m_3 i m_4, jeśli masa elementu m_1 wynosi 480 g a układ pozostaje w spoczynku.



Podukład 1



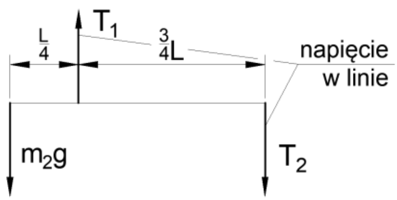
RÓWNANIE RÓWNOWAGI:

$\sum M_A: -\frac{1}{4} \cdot m \cdot g \cdot L + T \cdot 0 + T_1 \cdot \frac{3 \cdot L}{4} = 0$, po uproszczeniach otrzymujemy

$\frac{3}{4} \cdot T_1 = \frac{1}{4} \cdot m \cdot g$

$T_1 = \frac{1}{3} \cdot m \cdot g$

Podukład 2



RÓWNANIA RÓWNOWAGI:

$\sum Piy: -m_2 \cdot g + T_1 - T_2 = 0$, wstawiając wartość za T_1 otrzymujemy

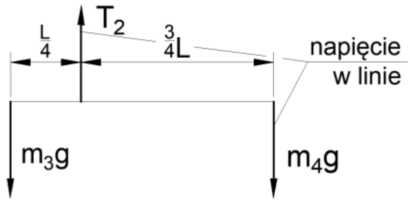
$T_2 = -m_2 \cdot g + \frac{1}{3} \cdot m \cdot g = \frac{1}{12} \cdot m \cdot g$

$\sum M_B: -m_2 \cdot g \cdot L + T_1 \cdot \frac{3 \cdot L}{4} + T_2 \cdot 0 = 0$, po wstawieniu wartości za T_1 i T_2 oraz uproszczeniach otrzymujemy

$-m_2 \cdot g \cdot L + \frac{1}{3} \cdot m \cdot g \cdot \frac{3 \cdot L}{4} = 0$, ostatecznie

$m_2 = \frac{m}{4}$

Podukład 3



RÓWNANIA RÓWNOWAGI:

$\sum M_C: -m_3 \cdot g \cdot L + m_4 \cdot g \cdot 0 + \frac{1}{12} \cdot m \cdot g \cdot \frac{3}{4} \cdot L = 0$, dzieląc obustronnie przez (–g · L) i upraszczając otrzymujemy

$m_3 = \frac{m}{16}$

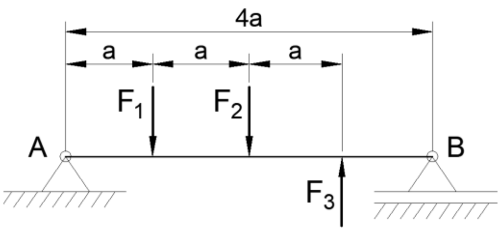
$\sum Piy: -m_3 \cdot g + T_2 - m_4 \cdot g = 0$, podstawiając wartość za T_2 i m_3, dzieląc obustronnie przez g i upraszczając równanie otrzymujemy

$-m_3 \cdot g + \frac{1}{12} \cdot m \cdot g - m_4 \cdot g = 0$

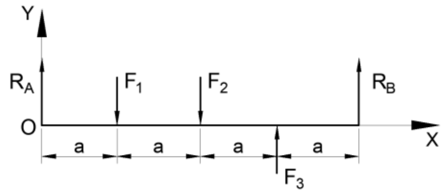
$m_4 = \frac{m}{12} - \frac{m}{16} = \frac{m}{48}$

Zadanie 4

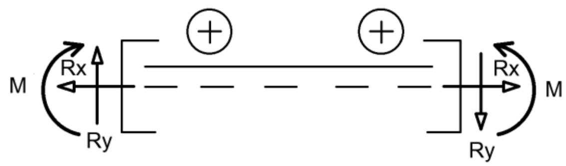
Weźmy pod uwagę belkę spoczywającą swobodnie na dwóch podporach obciążoną trzema siłami skupionymi: $F_1 = 500$ N, $F_2 = 500$ N i $F_3 = 400$ N. Długość odcinka a wynosi 0,5 m. Wyznacz reakcje w podporach oraz sporządź wykres momentów gnących i sił tnących.



OBLICZENIA REAKCJI:



Umowne przyjmowane kierunki podczas obliczania belek. W przypadku rozwiązywania belek metodą przekrojową proponuje się przyjmowanie kierunków zgodnie z rysunkiem – jeżeli strzałki w rozpatrywanym elemencie pokrywają się z poniższym rysunkiem, to znaki przyjmujemy za dodatnie.



RÓWNANIA RÓWNOWAGI:

$\sum Piy$: $R_A - F_1 - F_2 + F_3 + R_B = 0$, po przekształceniach i podstawieniu wartości liczbowych otrzymujemy

$R_A = F_1 + F_2 - F_3 - R_B$

1) $R_A = 600\ \text{N} - R_B$

$\sum M_A$: $R_A \cdot 0 + F_1 \cdot a + F_2 \cdot 2a - F_3 \cdot 3a - R_B \cdot 4a = 0$ po przekształceniach, podzieleniu dwustronnie przez a oraz podstawieniu wartości liczbowych otrzymujemy kolejno

$R_B = \frac{F_1 \cdot a + F_2 \cdot 2a - F_3 \cdot 3a}{4a}$

$R_B = \frac{500\ \text{N} + 1000\ \text{N} - 1200\ \text{N}}{4} = 75\ \text{N}$

Podstawiając wartość R_B do równania 1) otrzymujemy

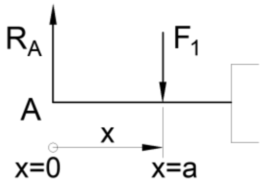
$R_A = 525\ \text{N}$

WYKRES MOMENTÓW GNĄCYCH:

W punkcie A

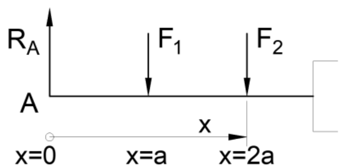
$M_{gA} = R_A \cdot 0 = 0$

W punkcie przyłożenia siły F_1



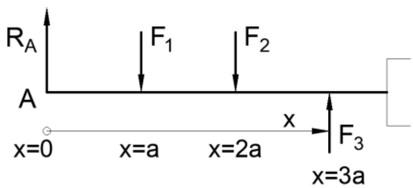
$M_{gF1} = R_A \cdot a = 525\ \mathrm{N} \cdot 0{,}5\ \mathrm{m} = 262{,}5\ \mathrm{Nm}$

W punkcie przyłożenia siły F_2



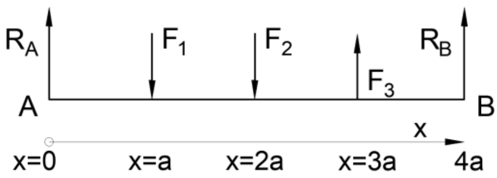
$M_{gF2} = R_A \cdot 2a - F_1 \cdot a = 525\ \mathrm{N} \cdot 1m - 500\ \mathrm{N} \cdot 0{,}5\ \mathrm{m} = 275\ \mathrm{Nm}$

W punkcie przyłożenia siły F_3



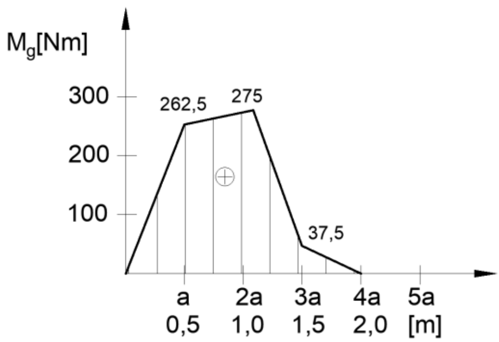
$M_{gF3} = R_A \cdot 3a - F_1 \cdot 2a - F_2 \cdot a = 525\ \mathrm{N} \cdot 1{,}5\ \mathrm{m} - 500\ \mathrm{N} \cdot 1\ \mathrm{m} -$
$- 500\ \mathrm{N} \cdot 0{,}5\ \mathrm{m} = 37{,}5\ \mathrm{Nm}$

W punkcie B



$$M_B = R_A \cdot 4a - F_1 \cdot 3a - F_2 \cdot 2a + F_3 \cdot a$$

$$M_B = 525\ \mathrm{N} \cdot 2\ \mathrm{m} - 500\ \mathrm{N} \cdot 1{,}5\ \mathrm{m} - 500\ \mathrm{N} \cdot 1\ \mathrm{m} +$$
$$+\ 400\ \mathrm{N} \cdot 0{,}5\ \mathrm{m} = 0$$



WYKRES SIŁ TNĄCYCH:

W przedziale od podpory A do miejsca przyłożenia siły F_1

$$T_{A-F1} = R_A = 525\ \mathrm{N}$$

W przedziale od miejsca przyłożenia siły F_1 do miejsca przyłożenia siły F_2

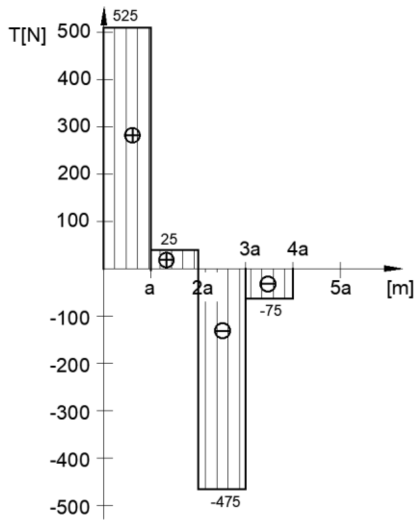
$$T_{F1-F2} = R_A - F_1 = 525\ \mathrm{N} - 500\ \mathrm{N} = 25\ \mathrm{N}$$

W przedziale od miejsca przyłożenia siły F_2 do miejsca przyłożenia siły F_3

$$T_{F2-F3} = R_A - F_1 - F_2 = 525\ \mathrm{N} - 500\ \mathrm{N} - 500\ \mathrm{N} = -475\ \mathrm{N}$$

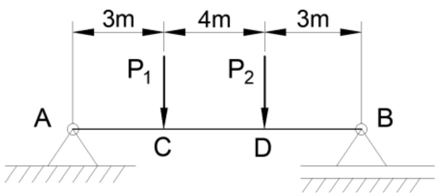
W przedziale od miejsca przyłożenia siły F_3 do podpory B

$$T_{F3-B} = R_A - F_1 - F_2 + F_3 = 525\ \mathrm{N} - 500\ \mathrm{N} - 500\ \mathrm{N} + 400\ \mathrm{N} =$$
$$= -75\ \mathrm{N}$$

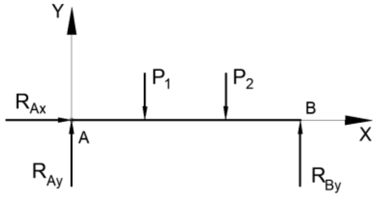


Zadanie 5

Weźmy pod uwagę belkę spoczywającą swobodnie na dwóch podporach obciążoną dwoma siłami skupionymi: P_1 = 10 kN, P_2 = 20 kN. Wyznacz reakcje w podporach oraz sporządź wykresy sił normalnych, momentów gnących i sił tnących. Konieczne do obliczeń wymiary znajdują się na poniższym rysunku.



OBLICZENIA REAKCJI:



RÓWNANIA RÓWNOWAGI:

1) $\sum Fix\colon R_A = 0$

2) $\sum Fiy\colon R_{AY} - \ P_1 - P_2 + R_{BY} = 0$

3) $\sum M_A \cdot 0 + rR_{AY} \cdot 0 + P_1 \cdot 3\text{ m} + P_2 \cdot 7\text{ m} - R_{BY} \cdot 10\text{ m} = 0$, po przekształceniach i wstawieniu wartości liczbowych otrzymujemy

$$R_{BY} = \frac{P_1 \cdot 3\text{ m} + P_2 \cdot 7\text{ m}}{10\text{ m}} = \frac{10\text{ kN} \cdot 3 + 20\text{ kN} \cdot 7}{10} = 17\text{ kN}$$

Podstawiając wartość R_{BY} do równania 2) otrzymujemy

$$R_{AY} = P_1 + P_2 - R_{BY} = 10\text{ kN} + 20\text{ kN} - 17\text{ kN} = 13\text{ kN}$$

WYKRES SIŁ NORMALNYCH:

W rozpatrywanym przykładzie brak jest sił normalnych, gdyż żadna z sił obciążających belkę nie ma składowej działającej w kierunku *x*.

WYKRES MOMENTÓW GNĄCYCH:

W punkcie A

$$M_{gA} = R_{AX} \cdot 0 + R_{AY} \cdot 0 = 0$$

W punkcie C

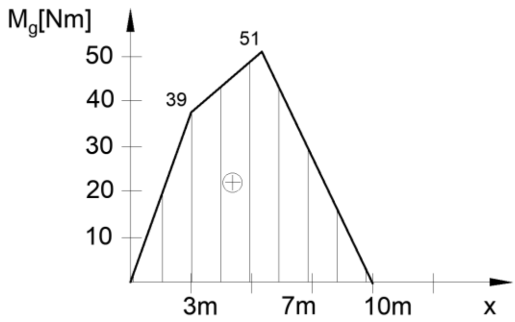
$$M_{gC} = R_{AY} \cdot 3m = 13\text{ kN} \cdot 3\text{ m} = 39\text{ kNm}$$

W punkcie D

$$M_{gD} = R_{AY} \cdot 7\text{ m} - P_1 \cdot 4\text{ m} = 13\text{ kN} \cdot 7\text{ m} - 10\text{ kN} \cdot 4\text{ m} = \\ = 51\text{ kNm}$$

W punkcie B

$$M_{gB} = R_{AY} \cdot 10\text{ m} - P_1 \cdot 7\text{ m} - P_2 \cdot 3\text{ m} = 130\text{ kNm} - 70\text{ kNm} - \\ - 60\text{ kNm} = 0$$



WYKRES SIŁ TNĄCYCH:

W przedziale od punktu A do punktu C

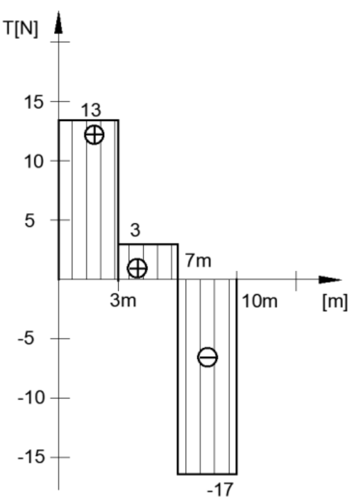
$$T_{AC} = R_{AY} = 13\ \text{kN}$$

W przedziale od punktu C do punktu D

$$T_{CD} = R_{AY} - P_1 = 13\ \text{kN} - 10\ \text{kN} = 3\ \text{kN}$$

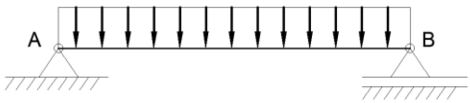
W przedziale od punktu D do punktu A

$$T_{DB} = R_{AY} - P_1 - P_2 = 13\ \text{kN} - 10\ \text{kN} - 20\ \text{kN} = -17\ \text{kN}$$

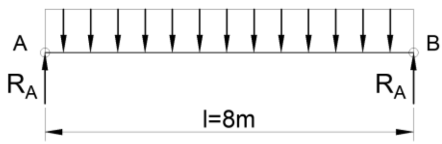


Zadanie 6

Analityczne rozwiązanie belki na dwóch podporach, obciążonej w sposób ciągły równomierny. Długość belki wynosi l = 8 m, wartość obciążenia to q = 1000 N/m.



OBLICZANIE REAKCJI:



RÓWNANIA RÓWNOWAGI:

1) $\sum Piy\colon R_A - q \cdot l + R_B = 0$

2) $\sum M_B = R_A \cdot l - q \cdot l \cdot \frac{l}{2} = 0$, stąd wynika

$R_A = \frac{q \cdot l^2}{2l} = \frac{1}{2} \cdot q \cdot l = 4000\ \mathrm{N}$

Podstawiając wartość R_A do równania 1) otrzymujemy

$R_B = q \cdot l - \frac{1}{2} \cdot q \cdot l = \frac{1}{2} \cdot q \cdot l = 4000\ \mathrm{N}$

WYKRES MOMENTÓW GNĄCYCH:

W punkcie A

$M_A = R_A \cdot 0 = 0$

W ¼ długości belki

$M_{l/4} = R_A \cdot \frac{l}{4} - q \cdot \frac{l}{4} \cdot \frac{l}{8}$ po podstawieniu wartości liczbowych otrzymujemy

$M_{l/4} = 4000\ \mathrm{N} \cdot \frac{8\ \mathrm{m}}{4} - 1000 \frac{\mathrm{N}}{\mathrm{m}} \cdot \frac{8\ \mathrm{m}}{4} \cdot \frac{8\ \mathrm{m}}{8} = 6000\ \mathrm{Nm}$

W ½ długości belki

$M_{l/2} = R_A \cdot \frac{l}{2} - q \cdot \frac{l}{2} \cdot \frac{l}{4}$ po podstawieniu wartości liczbowych otrzymujemy

$M_{l/2} = 4000\ \mathrm{N} \cdot \frac{8\ \mathrm{m}}{2} - 1000 \frac{\mathrm{N}}{\mathrm{m}} \cdot \frac{8\ \mathrm{m}}{2} \cdot \frac{8\ \mathrm{m}}{4} = 8000\ \mathrm{Nm}$

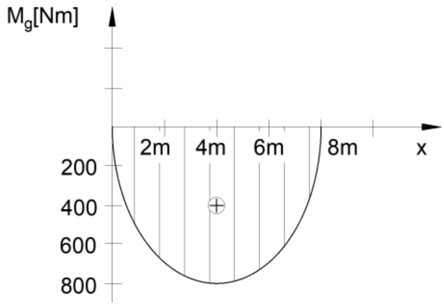
W ¾ długości belki

$M_{3l/4} = R_A \cdot \frac{3l}{4} - q \frac{3l}{4} \cdot \frac{3l}{8}$ po podstawieniu wartości liczbowych otrzymujemy

$M_{3l/4} = 4000\ \mathrm{N} \cdot \frac{3}{4} \cdot 8\ \mathrm{m} - 1000 \frac{\mathrm{N}}{\mathrm{m}} \cdot \frac{3}{4} \cdot 8\ \mathrm{m} \cdot \frac{3}{8} \cdot 8\ \mathrm{m} = 6000\ \mathrm{Nm}$

Na końcu belki

$M_B = 0$



WYKRES SIŁ TNĄCYCH:

$T = R_A - q \cdot x$

Na początku belki

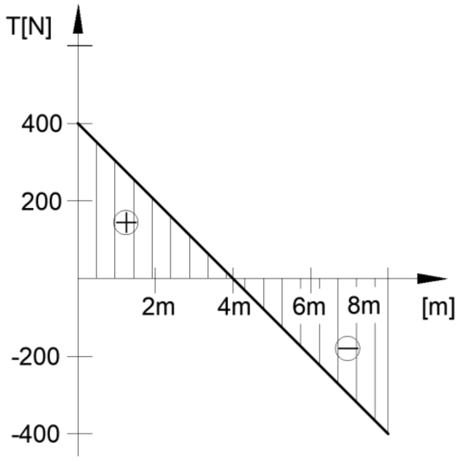
$T_0 = R_A - q \cdot 0 = R_A = 4000\ \mathrm{N}$

W środku belki

$T_{l/2} = R_A - q \cdot \frac{l}{2} = 4000\ \mathrm{N} - 1000 \frac{\mathrm{N}}{\mathrm{m}} \cdot \frac{8\ \mathrm{m}}{2} = 0\ \mathrm{N}$

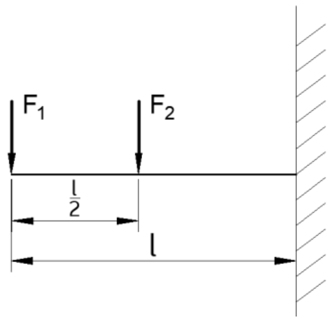
Na końcu belki

$T_l = R_A - q \cdot l = 4000\ \mathrm{N} - 1000 \frac{\mathrm{N}}{\mathrm{m}} \cdot 8\ \mathrm{m} = -4000\ \mathrm{N}$

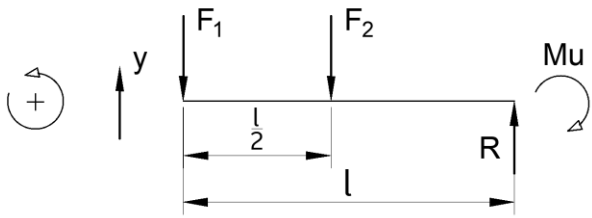


Zadanie 7

Analityczne rozwiązanie belki utwierdzonej. Długość belki wynosi 1 m a siła $F_1 = F_2 = 100$ N



OBLICZANIE REAKCJI:



RÓWNANIA RÓWNOWAGI:

$\sum Fix = 0$

$\sum Fiy$: $-F_1 - F_2 + R$ stąd wynika, że

$R = F_1 + F_2 = 200$ N

$\sum M_A$: $F_1 \cdot l + F_2 \cdot \frac{l}{2} - M_U = 0$ po przekształceniach otrzymujemy

$M_U = F_1 \cdot l + F_2 \cdot \frac{l}{2} = 100 \text{ N} \cdot 1 \text{ m} + 100 \text{ N} \cdot \frac{1}{2} \text{m} = 150 \text{ Nm}$

WYKRES MOMENTÓW GNĄCYCH:

Na początku belki

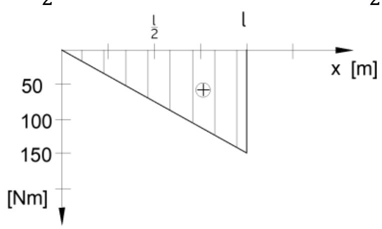
$M_0 = 0$

W połowie długości belki

$M_{l/2} = F_1 \cdot \frac{l}{2} = 100 \text{ N} \cdot \frac{1}{2} \text{m} = 50 \text{ Nm}$

Na końcu belki

$M_U = F_1 \cdot l + F_2 \cdot \frac{l}{2} = 100 \text{ N} \cdot 1 \text{ m} + 100 \text{ N} \cdot \frac{\text{m}}{2} = 150 \text{ Nm}$



WYKRES SIŁ TNĄCYCH:

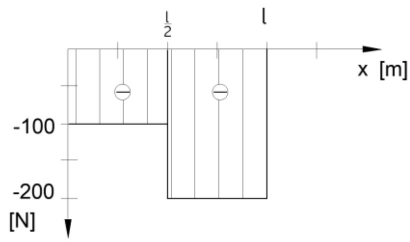
W przedziale od początku belki do środka belki

$T_{01} = -F_1 = -100$ N

+

W przedziale od początku belki do środka belki

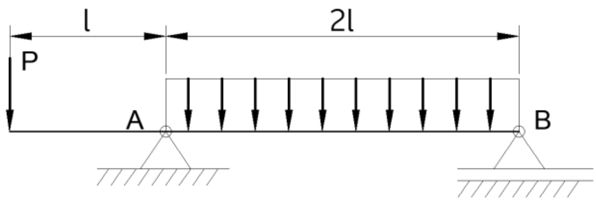
$T_{12} = -F_1 - F_2 = -100 \text{ N} - 100 \text{ N} = -200 \text{ N}$



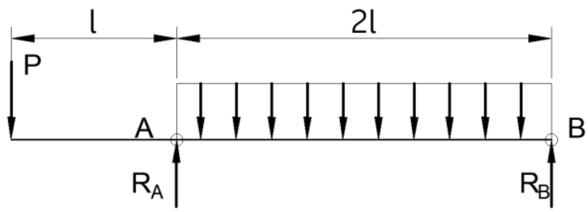
Zadanie 8

Jednorodna belka jest obciążona jak na rysunku. Wyznacz reakcje w podporach oraz sporządź wykresy momentów gnących i sił tnących.

Dane: P = 100 N; q = 100 N/m; l = 2 m.



OBLICZANIE REAKCJI:



RÓWNANIA RÓWNOWAGI:

1) $\sum Pix = 0$

2) $\sum Piy\colon\ -p + R_A - q \cdot 2l + R_B = 0$

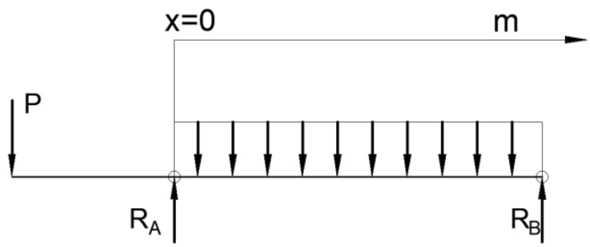
3) $\sum M_A\colon -P \cdot l + q \cdot 2l \cdot l - R_B \cdot 2l = 0$, przekształcając równanie i podstawiając wartości liczbowe otrzymujemy

$$R_B = \frac{-P \cdot l + q \cdot 2l^2}{2l} = \frac{2 \cdot q \cdot l - P}{2}$$

$$R_B = \frac{2 \cdot 100 \frac{\mathrm{N}}{\mathrm{m}} \cdot 2\ \mathrm{m} - 100\ \mathrm{N}}{2} = 150\ \mathrm{N}$$

Podstawiając wartość R_B do równania 2) mamy

$$R_A = 2 \cdot q \cdot l + P - R_B = 2 \cdot 100 \frac{\mathrm{N}}{\mathrm{m}} \cdot 2\ \mathrm{m} - 150\ \mathrm{N} - 100\ \mathrm{N} = 350\ \mathrm{N}$$



WYKRES MOMENTÓW GNĄCYCH:

W miejscu przyłożenia siły P

$$M_{gP} = 0$$

W punkcie A

$$M_{gA} = -P \cdot 2\ \mathrm{m} = -100\ \mathrm{N} \cdot 2\ \mathrm{m} = -200\ \mathrm{Nm}$$

Pomiędzy punktami A i B

$$M_{gAB} = -P \cdot (l + x) + R_A \cdot x - q \cdot x \cdot \frac{x}{2}$$

$P \cdot (l + x)$ – moment gnący od siły skupionej P

$R_A \cdot x$ – moment gnący od siły skupionej R_A (reakcji)

$q \cdot x \cdot \frac{x}{2}$ – moment gnący od obciążenia ciągłego

W punkcie C

$$M_{gC} = -P \cdot (l + 2) + R_A \cdot 2 - q \cdot 2 \cdot \frac{2}{2} = -100 \text{ N} \cdot 4 \text{ m} + \ 350 \text{ N} \cdot$$
$$\cdot 2 \text{ m} - 100 \frac{\text{N}}{\text{m}} \cdot 2 \text{ m}^2 = 100 \text{ Nm}$$

W punkcie B

$$M_{gB} = -P \cdot (l + 4) + 350 \text{ N} \cdot 4 \text{ m} - 100 \frac{\text{N}}{\text{m}} \cdot 4 \text{ m} \cdot \frac{4 \text{ m}}{2} =$$
$$= -600 \text{ Nm} + 1400 \text{ Nm} - 800 \text{ Nm} = 0 \text{ Nm}$$

WYKRES SIŁ TNĄCYCH:

W przedziale od początku belki do punktu A

$$T_{PA} = -100 \text{ N}$$

W przedziale od punktu A do punktu B

$$T_{AB} = -P + R_A - q \cdot x$$

Dla x = 4m mamy

$$T_{AB} = -P + R_A - q \cdot 4 \text{ m} = -100 \text{ N} + 350 \text{ N} - 100 \frac{\text{N}}{\text{m}} \cdot 4 \text{ m} =$$
$$= -150 \text{ N}$$

ZNALEZIENIE EKSTREMUM ORAZ JEGO WARTOŚCI:

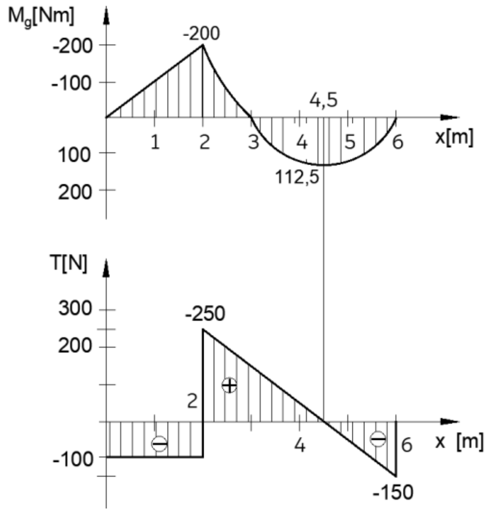
Miejsca zerowe wykresu momentów gnących

Miejsce przecięcia wykresu sił tnących z osią *x*:

$T_{AB} = -P + R_A - q \cdot x = 0$, stad mamy

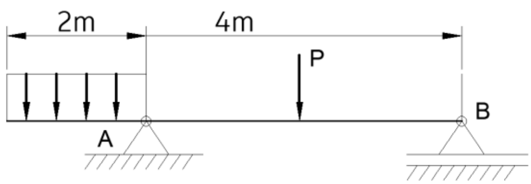
$$x = \frac{R_A - P}{q} = \frac{350 \text{ N} - 100 \text{ N}}{100 \frac{\text{N}}{\text{m}}} = 2{,}5 \text{ m}$$

Punkt przecięcia wykresu sił tnących z osią *x* znajduje się w odległości 2,5 m od podpory A w kierunku podpory B.

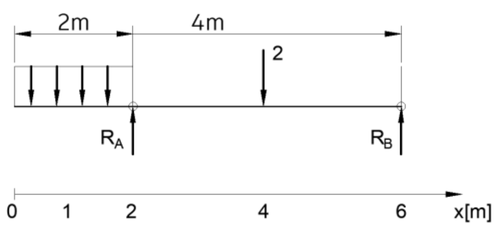


Zadanie 9

Belka jest obciążona jak na rysunku. Wyznacz reakcje, narysuj wykresy momentów gnących i sił tnących. Dane: P = 100 N, q = 100 N/m.



OBLICZANIE REAKCJI:



RÓWNANIA RÓWNOWAGI:

1) $\sum Pix = 0$

2) $\sum Piy : -q \cdot 2\ \mathrm{m} + R_A - 2P + R_B = 0$

3) $\sum M_A : -q \cdot 2\ \mathrm{m} \cdot 1\ \mathrm{m} + R_A \cdot 0 + 2P \cdot 2\ \mathrm{m} - R_B \cdot 4\ \mathrm{m} = 0$,
po przekształceniach i podstawieniu wartości liczbowych

$R_B = \frac{-q \cdot 2\ \mathrm{m}^2 + 2P \cdot 2\ \mathrm{m}}{4\ \mathrm{m}} = \frac{-200\ \mathrm{Nm} + 400\ \mathrm{Nm}}{4\ \mathrm{m}} = 50\ \mathrm{N}$, podstawiając do równania 2) otrzymujemy

$R_A = -R_B + 2P + q \cdot 2\ \mathrm{m} = -50\ \mathrm{N} + 200\ \mathrm{N} + 200\ \mathrm{N} = 350\ \mathrm{N}$

WYKRES MOMENTÓW GNĄCYCH:

Od początku belki do punktu A

$$M_g = -q \cdot x \cdot \frac{x}{2} = -100 \frac{\mathrm{N}}{\mathrm{m}} \cdot \frac{x^2}{2}\ \mathrm{m}^2 = -50 \cdot x^2\ \mathrm{Nm}$$

Dla $x = 0$

$$M_{gP} = 0$$

Dla $x = 1$

$$M_g = -50\ \mathrm{Nm}$$

Dla $x = 2$

$$M_g = -200\ \mathrm{Nm}$$

Momenty gnące pomiędzy punktami A i C

$$M_g = -P_2 \cdot (x_1 + 1) + R_A \cdot x_1$$

Wprowadzamy siłę zastępczą

$$P_Z = q \cdot 2\ \mathrm{m} = 200\ \mathrm{N}$$

Dla $x_1 = 2$ m

$M_g = -P_Z \cdot (x_1 + 1\ \mathrm{m}) + R_A \cdot x_1$, podstawiając dane liczbowe otrzymujemy

$M_g = -200\ \mathrm{N} \cdot 3\ \mathrm{m} + 350\ \mathrm{N} \cdot 2\ \mathrm{m} = 100\ \mathrm{N}$

Momenty gnące pomiędzy punktami C i B

$M_g = -P_Z \cdot (x_2 + 3\ \mathrm{m}) + R_A(x_2 + 2\ \mathrm{m}) - 2P \cdot x_2$, podstawiając dane liczbowe otrzymujemy

$M_g = -200\ \mathrm{N} \cdot 5\ \mathrm{m} + 350\ \mathrm{N} \cdot 4\ \mathrm{m} - 200\ \mathrm{N} \cdot\ 2\ \mathrm{m} = 0$

WYKRES SIŁ TNĄCYCH:

$T = -q \cdot x$

W przedziale od początku belki do punktu A

Dla x = 0 m

$T = -q \cdot 0 = 0$

Dla x = 2 m

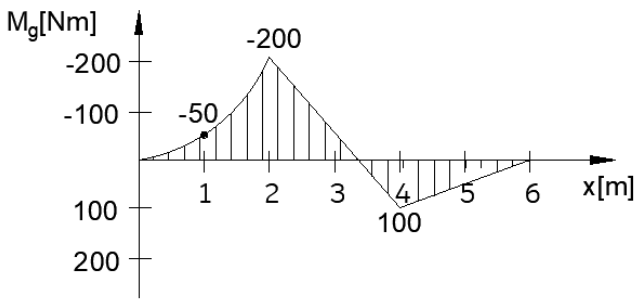
$T = -q \cdot 2\ \mathrm{m} = -200\ \mathrm{N}$

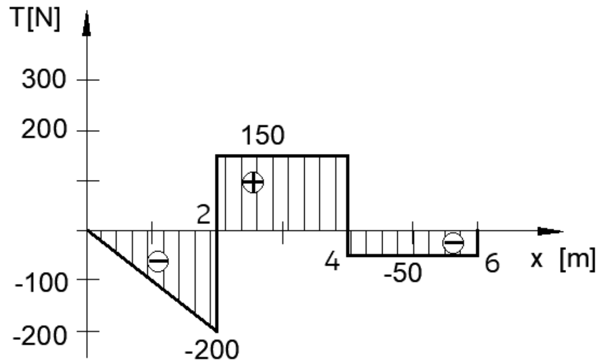
W przedziale od punktu A do punktu C

$T = -200\ \mathrm{N} + R_A = -200\ \mathrm{N} + 350\ \mathrm{N} = 150\ \mathrm{N}$

W przedziale od punktu C do punktu B

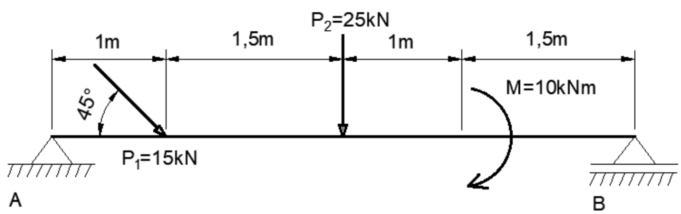
$T = -200\ \mathrm{N} + 350\ \mathrm{N} - 2P = 150\ \mathrm{N} - 2 \cdot 100 = 50\ \mathrm{N}$



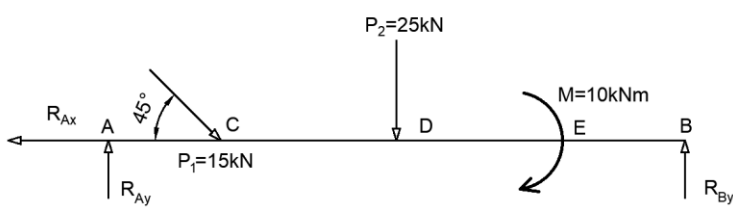


Zadanie 10

Oblicz reakcje w podporach oraz narysuj wykresy momentów gnących i sił tnących.

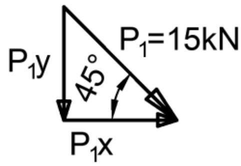


OBLICZANIE REAKCJI:



RÓWNANIA RÓWNOWAGI:

Z funkcji trygonometrycznych wyznaczamy składowe P_1x i P_1y wektora P_1.



$$\cos 45^0 = \frac{P_1 x}{P_1}$$

$$P_1 x = 15\ \mathrm{kN} \times \frac{\sqrt{2}}{2} = 10{,}6$$

$$\sin 45^0 = \frac{P_1 y}{P_1}$$

$$P_1 y = 15\ \mathrm{kN} \times \frac{\sqrt{2}}{2} = 10{,}6$$

1) $\sum Pix = P_1 x - R_A x = 0$

$R_A x = P_1 x = 10{,}6\ \mathrm{kN}$

2) $\sum Piy\colon -P_2 - P_1 y + R_{Ay} + R_{By} = 0$

3) $\sum M_A\colon -P_1 y \times 1\ \mathrm{m} - P_2 \times 2{,}5\ \mathrm{m} - M + R_B y \times 5\ \mathrm{m} = 0$

Z równania 3) wyliczamy wartość R_By.

$$R_{By} = \frac{10{,}6\ \mathrm{kN} \cdot 1\ \mathrm{m} + 25\ \mathrm{kN} \cdot 2{,}5\ \mathrm{m} \cdot 1\ \ +10\ \mathrm{kNm}}{5\ \mathrm{m}}$$

$$R_{By} = \frac{10{,}6\ \mathrm{kN} \cdot 1\ \mathrm{m} + 25\ \mathrm{kN} \cdot 2{,}5\ \mathrm{m} \cdot 1\ \mathrm{m} + 10\ \mathrm{kNm}}{5\ \mathrm{m}} = 16{,}62\ \mathrm{kN}$$

Podstawiając wartość R_{By} do równania 2) wyliczamy R_{Ay}

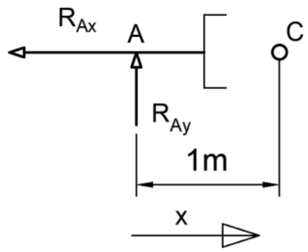
$$R_{Ay} = -R_B + P_2 + P_1 y = -16{,}62\ \mathrm{kN} + 25\ \mathrm{kN} + 10{,}6\ \mathrm{kN} =$$
$$= \ 18{,}98\ \mathrm{kN}$$

WYKRES MOMENTÓW GNĄCYCH:

W punkcie A

$M_{gA} = 0$

W przedziale od punktu A do punktu C

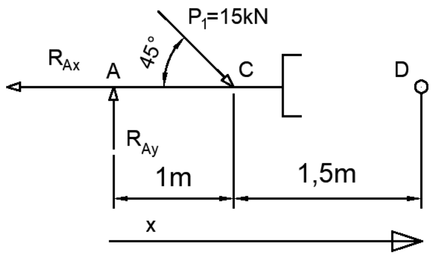


$M_{gAC} = R_Ay \cdot x$

Dla x = 1 m

$M_{gAC} = 18{,}98\ \text{kN} \cdot 1\ \text{m} = 18{,}98\ \text{kNm}$

W przedziale od punktu C do punktu D

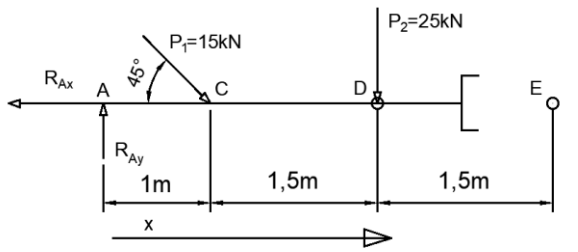


$M_{gCD} = R_Ay \cdot x - P_1y \cdot (x - 1m)$

Dla x = 2,5 m

$M_{gCD} = 18{,}98\ \text{kN} \cdot 2{,}5\ \text{m} - 10{,}6\ \text{kN} \cdot 1{,}5\ \text{m} =$
$= 47{,}45\ \text{kN} - 15{,}98\ \text{kN} = 31{,}55\ \text{kN}$

W przedziale od punktu D do punktu E

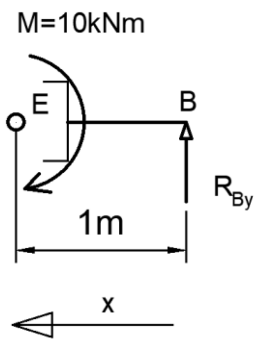


$M_{gDE} = R_A y \cdot x - P_1 y \cdot (x - 1\text{ m}) - P_2 \cdot (x - 2{,}5\text{ m})$

Dla x = 4 m

$M_{gDE} = 18{,}98\text{ kN} \cdot 4\text{ m} - 10{,}6\text{ kN} \cdot 3\text{ m} - 25\text{ kN} \cdot 1{,}5\text{ m} =$
$= 75{,}92\text{ kN} - 31{,}8\text{ kN} - 37{,}5\text{ kN} = 6{,}62\text{ kN}$

W punkcie E – obliczamy z drugiej strony – sprawdzenie



$M_{gBE} = R_B y \cdot x - M$

Dla x = 1 m

$M_{gBE} = 16{,}62\text{ kN} \cdot 1\text{ m} - 10\text{ kNm} = 6{,}62\text{ kNm}$

WYKRES SIŁ TNĄCYCH:

W przedziale od punktu A do punktu C

$T_{AC} = R_{Ay} = 18{,}98\text{ kN}$

W przedziale od punktu C do punktu D

$$T_{CD} = R_{Ay} - P_1 y$$

$$T_{CD} = 18{,}98\ \mathrm{kN} - 10{,}6\ \mathrm{kN} = 8{,}38\ \mathrm{kN}$$

W przedziale od punktu D do punktu E

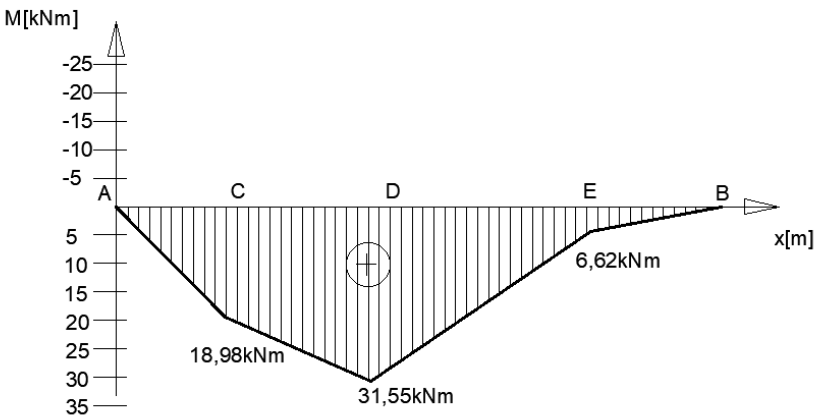
$$T_{DE} = R_{Ay} - P_1 y - P_2$$

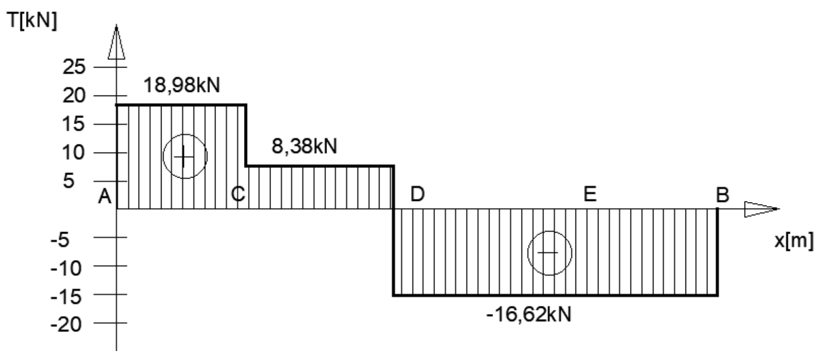
$$T_{DE} = 18{,}98\ \mathrm{kN} - 10{,}6\ \mathrm{kN} - 25\ \mathrm{kN} = -16{,}62\ \mathrm{kN}$$

W przedziale od punktu B do punktu E – sprawdzenie

$$T_{BE} = -R_{By}$$

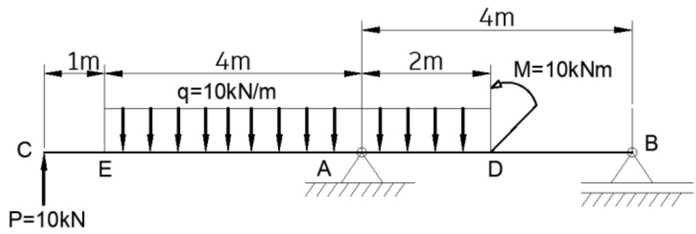
$$T_{BE} = -16{,}62\ \mathrm{kN}$$



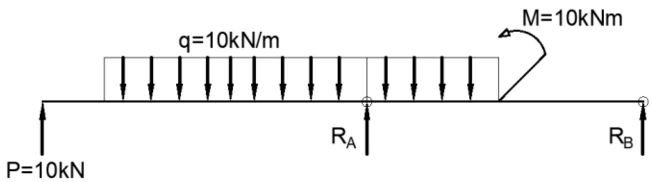


Zadanie 11

Oblicz reakcje w podporach oraz narysuj wykresy momentów gnących i sił tnących.



OBLICZANIE REAKCJI:



RÓWNANIA RÓWNOWAGI:

1) $\sum Pix = 0$

2) $\sum Piy: P - q \cdot 6\ \mathrm{m} + R_A + R_B = 0$

3) $\sum M_A: P \cdot 5\ \mathrm{m} - q \cdot 4\ \mathrm{m} \cdot 2\ \mathrm{m} + q \cdot 2\ \mathrm{m} \cdot 1\ \mathrm{m} - M - R_B \cdot 4\ \mathrm{m} = 0$

Drugi i trzeci człon równania 3) to odpowiednio: moment od obciążenia ciągłego względem punktu A z „lewej strony" i moment od obciążenia ciągłego względem punktu A z „prawej strony".

Z równania 3) wyliczamy wartość R_B.

$$R_B = \frac{10\ \mathrm{kN} \cdot 5\ \mathrm{m} - 20\frac{\mathrm{kN}}{\mathrm{m}} \cdot 4\ \mathrm{m} \cdot 2\ \mathrm{m} + 20\frac{\mathrm{kN}}{\mathrm{m}} \cdot 2\ \mathrm{m} \cdot 1\ \mathrm{m} - 10\ \mathrm{kNm}}{4\mathrm{m}}$$

$$R_B = \frac{50\ \mathrm{kNm} - 160\ \mathrm{kNm} + 40\ \mathrm{kNm} - 10\ \mathrm{kNm}}{4\mathrm{m}} = -20\ \mathrm{kN}$$

Podstawiając wartość R_B do równania 2) wyliczamy R_A

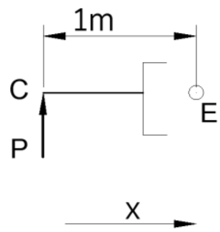
$$R_A = -R_B - P + q \cdot 6\ \mathrm{m} = 20\ \mathrm{kN} - 10\ \mathrm{kN} + 120\ \mathrm{kN} = 130\ \mathrm{kN}$$

WYKRES MOMENTÓW GNĄCYCH:

W punkcie C

$$M_{gC} = 0$$

W przedziale od punktu C do punktu E

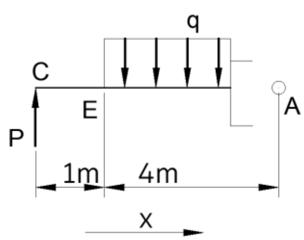


$$M_{gCE} = P \cdot x$$

Dla x = 1m

$$M_{gCE} = 10\ \mathrm{kN} \cdot 1\ \mathrm{m} = 10\ \mathrm{kNm}$$

W przedziale od punktu E do punktu A



$$M_{gEA} = P \cdot (1\ \mathrm{m} + x_1) - q \cdot x_1 \cdot \frac{x_1}{2}$$

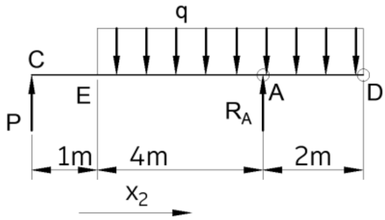
Dla x_1 = 2 m

$$M_{gEA} = 10\ \mathrm{kN} \cdot 3\ \mathrm{m} - 20k\frac{\mathrm{N}}{\mathrm{m}} \cdot 2\ \mathrm{m} \cdot 1\ \mathrm{m} = -10\ \mathrm{kNm}$$

Dla x_1 = 4 m

$$M_{gEA} = 10\ \mathrm{kN} \cdot 5\ \mathrm{m} - 20k\frac{\mathrm{N}}{\mathrm{m}} \cdot 4\ \mathrm{m} \cdot 2\ \mathrm{m} = -110\ \mathrm{kNm}$$

W przedziale od punktu A do punktu D



$$M_{gAD} = P \cdot (5\ \mathrm{m} + x_2) - q \cdot (4\ \mathrm{m} + x_2) \cdot \left(\frac{4 + x_2}{2}\right) + R_A \cdot x_2$$

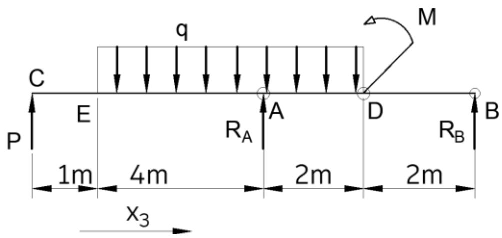
Dla $x_2 = 1$ m

$$M_{gAD} = 10\ \mathrm{kN} \cdot 6\ \mathrm{m} - 20k\frac{\mathrm{N}}{\mathrm{m}} \cdot 5\ \mathrm{m} \cdot 2{,}5\ \mathrm{m} + 130\ \mathrm{kN} \cdot 1\ \mathrm{m} =$$
$$= -60\ \mathrm{kNm}$$

Dla $x_2 = 2$ m

$$M_{gAD} = 70\ \mathrm{kNm} - 20k\frac{\mathrm{N}}{\mathrm{m}} \cdot 6\ \mathrm{m} \cdot 3\ \mathrm{m} + 130\ \mathrm{kN} \cdot 2\ \mathrm{m} = -30\ \mathrm{kNm}$$

W przedziale od punktu D do punktu B



$$M_{gDB} = P \cdot (7\ \mathrm{m} + x_3) - q \cdot 6\mathrm{m} \cdot (3\ \mathrm{m} + x_3) - M + R_A \cdot (2\mathrm{m} + x_3)$$

Dla $x_3 = 0$

$$M_{gDB} = -30\ \mathrm{kNm} - 10\ \mathrm{kNm} = -40\ \mathrm{kNm}$$

Dla $x_3 = 2$ m

$$M_{gDB} = 10\ \mathrm{kN} \cdot 9\ \mathrm{m} - 20k\frac{\mathrm{N}}{\mathrm{m}} \cdot 6\ \mathrm{m} \cdot 5\ \mathrm{m} - M + 130\ \mathrm{kN} \cdot 4\ \mathrm{m} = 0$$

WYKRES SIŁ TNĄCYCH:

W przedziale od punktu C do punktu E

$T_{CE} = P = 10\ \mathrm{kN}$

W przedziale od punktu E do punktu A

$T_{EA} = P - q \cdot x$

Dla $x = 0$

$T_{EA} = 10\ \mathrm{kN}$

Dla $x = 4$ m, z „lewej strony” punktu A

$T_{EA} = 10\ \mathrm{kN} - 80\ \mathrm{kN} = -70\ \mathrm{kN}$

W przedziale od punktu A do punktu D

$T_{AD} = P - q \cdot (4 + x_1) + R_A$

Dla $x_1 = 0$, z „prawej strony” punktu A

$T_{AD} = -70\ \mathrm{kN} + 130\ \mathrm{kN} = 60\ \mathrm{kN}$

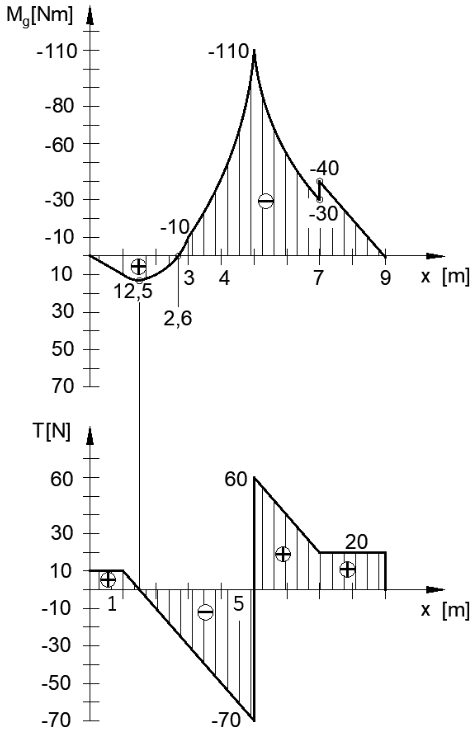
Dla $x_1 = 2$ m

$T_{AD} = 10\ \mathrm{kN} - 120\ \mathrm{kN} = 130\ \mathrm{kN} = 20\ \ \mathrm{kN}$

W przedziale od punktu D do punktu B

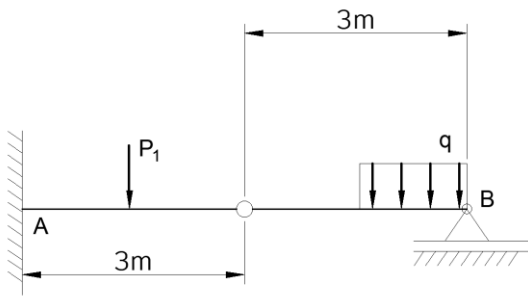
$T_{DB} = P - q \cdot 6\ \mathrm{m} + R_A$

$T_{DB} = 10\ \mathrm{kN} - 20k\frac{\mathrm{N}}{\mathrm{m}} \cdot 6\ \mathrm{m} + 130\ \mathrm{kN} = 20\ \mathrm{kN}$

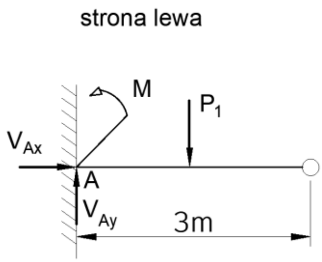


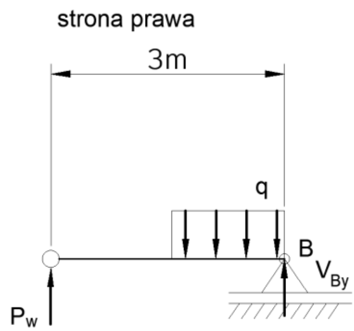
Zadanie 12

Belka gerberowska (przegubowa) przymocowana jest w punkcie A i podparta w punkcie B. Wyznacz reakcje w ścianie, podporze oraz sporządź wykresy momentów gnących i sił tnących. Dane: $P_1 = 20$ kN, $q = 10$ kN/m.

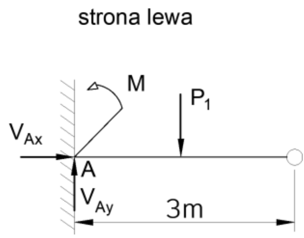


W przypadku belek gerberowskich dokonujemy „podziału” belki w miejscu przegubu. Belkę dzielimy na „prawą stronę” i „ lewą stronę”.

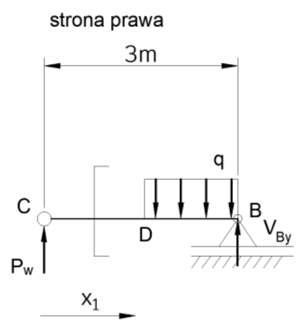




Widzimy, że lewa strona belki jest „podtrzymywana” przez reakcje oraz moment utwierdzenia:



Prawa strona belki jest tylko podpierana w punkcie podpory, a więc aby zachowana była równowaga tej strony belki, musi być ona dodatkowo podpierana przez lewą stronę. Dlatego wprowadzamy dodatkową siłę nazywaną P_w (siła wirtualna).



Dla prawej belki układamy równania równowagi.

RÓWNANIA RÓWNOWAGI:

1) $\sum Pix = 0$

2) $\sum Piy: P_w - q \cdot 1{,}5\ \mathrm{m} + V_{By} = 0$

3) $\sum M_B: -P_w \cdot 3\ \mathrm{m} + q \cdot 1{,}5\ \mathrm{m} \cdot 0{,}75\ \mathrm{m} = 0$

Z równania 3) wyliczamy wartość P_w.

$$P_w = \frac{11{,}25\ \mathrm{kNm}}{3\ \mathrm{m}}$$

$$P_w = 3{,}75\ \mathrm{kN}$$

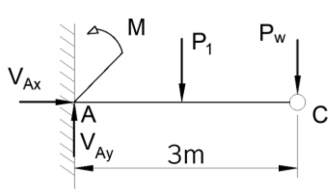
Podstawiając wartość P_w do równania 2) wyliczamy V_{BY}

$$3{,}75\ \mathrm{kN} - 15\ \mathrm{kN} + V_{By} = 0$$

$$V_{By} = 15\ \mathrm{kN} - 3{,}75\ \mathrm{kN} = 11{,}25\ \mathrm{kN}$$

Otrzymaliśmy w wyniku obliczeń wartość reakcji w podporze B oraz wartość siły wirtualnej P_w. Następnie siłę P_w przykładamy do lewej strony belki, również w miejscu przegubu, pamiętając jednak o zmianie zwrotu działania.

strona lewa



RÓWNANIA RÓWNOWAGI:

1) $\sum Pix = 0$

2) $\sum Piy: -P_w + V_{Ay} - P_1 = 0$

3) $\sum M_A: M - P_1 \cdot 1{,}5\ \mathrm{m} - P_w \cdot 3\ \mathrm{m} = 0$

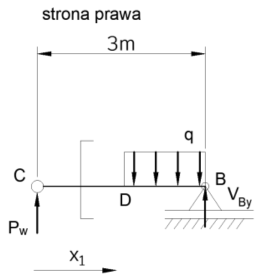
Z równania 2) wyliczamy wartość V_{Ay}.

$$V_{Ay} = P_w + P_1 = 23{,}75 \text{ kN}$$

Z równania 3) wyliczamy wartość M.

$$M = 30 \text{ kNm} + 11{,}25 \text{ kNm} = 41{,}25 \text{ kNm}$$

WYKRES MOMENTÓW GNĄCYCH DLA PRAWEJ STRONY BELKI:



WYKRES MOMENTÓW GNĄCYCH:

W punkcie D

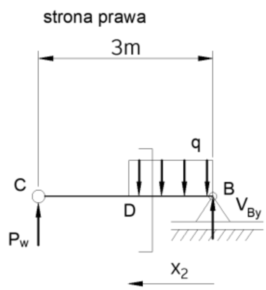
$$M_{gCD} = P_w \cdot x_1$$

Dla x = 0 m

$$M_{gCD} = 0$$

Dla x = 1,5 m

$$M_{gCD} = P_w \cdot 1{,}5 \text{ m} = 5{,}625 \text{ kNm}$$



W punkcie D – obliczamy z drugiej strony

$$M_{gBD} = V_{By} \cdot x_2 - qx_2 \cdot \frac{x_2}{2} =$$
$$= \ 11{,}25 \text{ kN} \cdot 1{,}5 \text{ m} - \frac{10 \text{ kN}}{\text{m}} \cdot 1{,}5 \text{ m} \cdot 0{,}75 \text{ m} =$$
$$= 16{,}875 \text{ kNm} - 11{,}25 \text{ kNm} = 5{,}625 \text{ kNm}$$

Obliczamy ekstremum funkcji (funkcja kwadratowa osiąga swoje ekstremum w miejscu gdzie jej pochodna wynosi zero):

$M'(x) = 0$

więc:

$$M_{x_2} = V_{By} \cdot x_2 - qx_2 \cdot \frac{x_2}{2} = 11{,}25x_2 - 10\frac{x_2^2}{2} = 11{,}25x_2 - 5x_2^2$$

$$(11{,}25x_2 - 5x_2^2)' = 0$$

$$11{,}25 - 10x_2 = 0$$

$$10x_2 = 11{,}25$$

$x_2 = 1{,}125$ – funkcja w tym miejscu osiąga swoje ekstremum,

Obliczamy zatem maksymalny moment gnący dla $x = 1{,}125$ m

$$M_{x_2=1{,}125} = V_{By} \cdot x_2 - qx_2 \cdot \frac{x_2}{2} = 12{,}66 \text{ kNm} - 6{,}33 \text{ kNm} = 6{,}33 \text{ kNm}$$

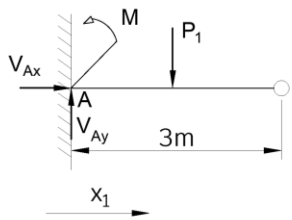
Obliczamy moment dla $x = 1{,}13$ – sprawdzająco

$$M_{x_2=1{,}13} = V_{By} \cdot x_2 - qx_2 \cdot \frac{x_2}{2} = 12{,}7125 \text{ kNm} - 6{,}3845 \text{ kNm} =$$
$$= 6{,}328 \text{ kNm} \text{ – a zatem wartość momentu maleje}$$

Obliczamy moment dla x = 1,1 – sprawdzająco

$$M_{x_2=1{,}13} = V_{By} \cdot x_2 - qx_2 \cdot \frac{x_2}{2} = 12{,}3755 \text{ kNm} - 6{,}05 \text{ kNm} =$$
$$= 6{,}325 \text{ kNm} \text{ – a zatem wartość momentu maleje}$$

WYKRES MOMENTÓW GNĄCYCH DLA PRAWEJ STRONY BELKI:

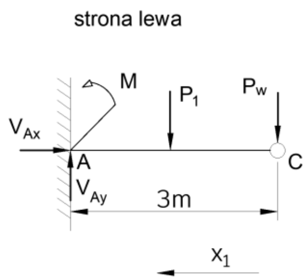


WYKRES MOMENTÓW GNĄCYCH:

W punkcie A

$M_{gA} = M = 41{,}25$ kNm

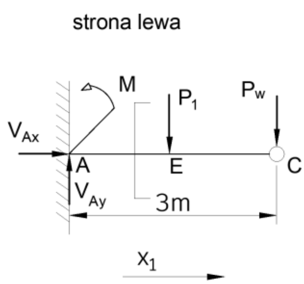
Dla sprawdzenia obliczamy z drugiej strony:



W punkcie A

Dla $x_1 = 3$ m

$M_{gA} = -P_w \cdot 3\text{ m} - P_1 \cdot 1{,}5\text{ m} = -11{,}25\text{ kNm} - 30\text{ kNm} =$
$= -41{,}25$ kNm – wartość momentu pochodząca od siły P_1 i P_w jest zrównoważona momentem w utwierdzeniu (M).



Obliczamy moment na przedziale AE

Dla $x_1 = 1{,}5$ m

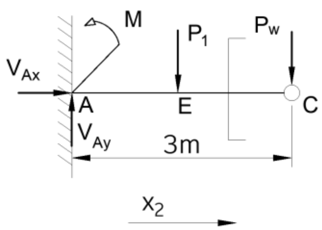
$$M_{gE} = -M + V_{Ay} \cdot 1{,}5 \text{ m} = -41{,}25 \text{ kNm} + 35{,}625 \text{ kNm} =$$
$$= -5{,}625 \text{ kNm}$$

Obliczamy moment w przegubie (przegub nie przenosi momentu, a zatem jego wartość powinna wynosić 0)

Dla $x_2 = 3$ m

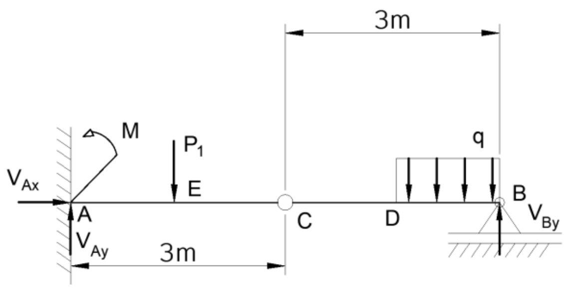
$$M_{gC} = -M + V_{Ay} \cdot 3 \text{ m} - P_1 \cdot 1{,}5 \text{ m} =$$
$$= -41{,}25 \text{ kNm} + 71{,}25 \text{ kNm} - 30 \text{ kNm} = 0 \text{ kNm}$$

strona lewa



WYKRES SIŁ TNĄCYCH:

Rozpatrujemy belkę w całości, ponieważ przegub przenosi siły tnące.



W przedziale od punktu A do punktu E

$$T_{AE} = V_{Ay} = 23{,}75 \text{ kN}$$

W przedziale od punktu E do punktu C

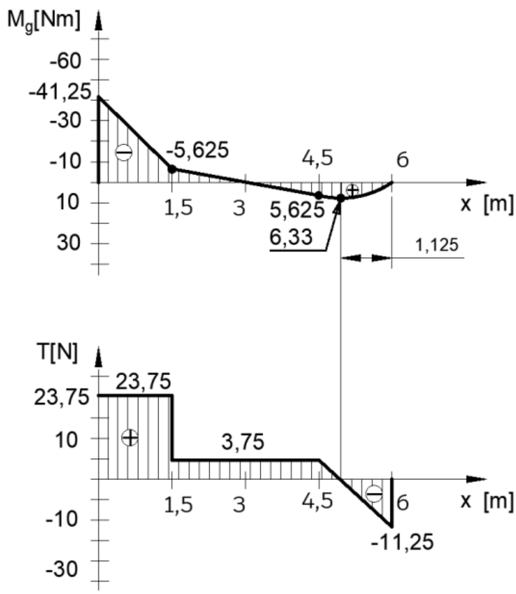
$$T_{EC} = V_{Ay} - P_1 = 23{,}75\ \text{kN} - 20\ \text{kN} = 3{,}75\ \text{kN}$$

W przedziale od punktu C do punktu D

$$T_{EC} = V_{Ay} - P_1 = 23{,}75\ \text{kN} - 20\ \text{kN} = 3{,}75\ \text{kN}$$

W przedziale od punktu D do punktu B

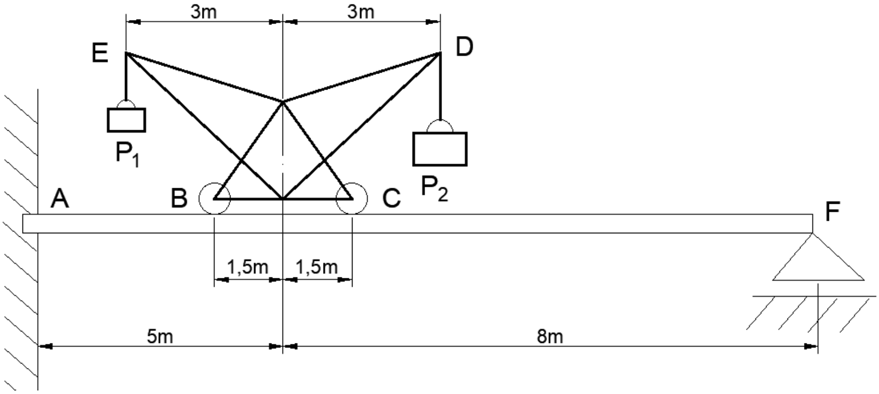
$$T_{EC} = V_{Ay} - P_1 - q \cdot 1{,}5 = 23{,}75\ \text{kN} - 20\ \text{kN} - 15\ \text{kN} =$$
$$= -11{,}25\ \text{kN}$$



4. Zadania do samodzielnego wykonania

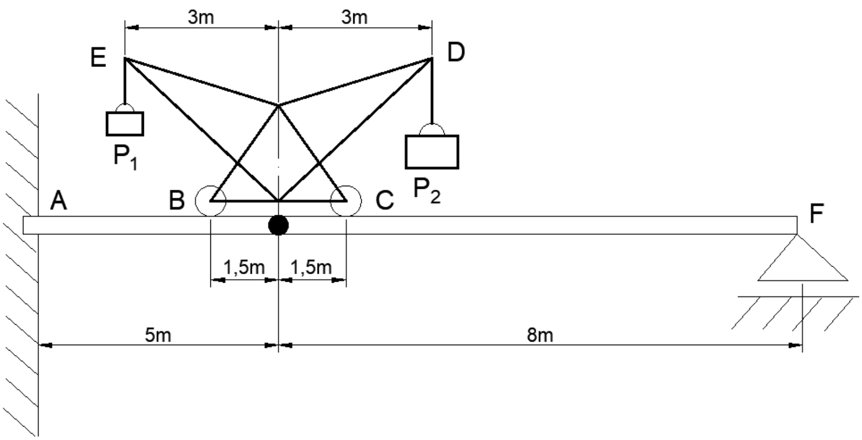
Zadanie 1

Na poziomej belce zamocowanej jednym końcem w ścianie znajduje się ruchomy dwuramienny dźwig. Drugi koniec belki zamocowany jest na ruchomej podporze. Wyznacz wartość sił tnących, momentów gnących w belce oraz reakcje w podporach. Obliczenia przeprowadź dla położenia dźwigu jak na rysunku. Wartość siły P_1 = 3 kN, P_2 = 5 kN a ciężar dźwigu Q = 6 kN.



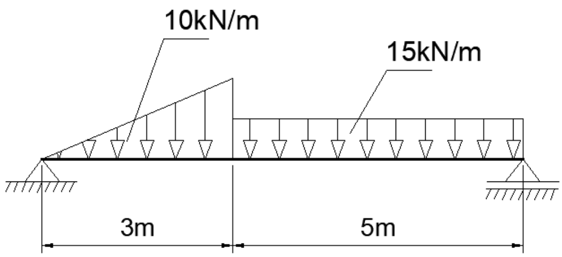
Zadanie 2

Na poziomej przegubowej belce zamocowanej jednym końcem w ścianie znajduje się ruchomy dwuramienny dźwig. Drugi koniec belki zamocowany jest na ruchomej podporze. Wyznacz wartość sił tnących, momentów gnących w belce oraz reakcje w podporach. Obliczenia przeprowadź dla położenia dźwigu jak na rysunku. Wartość siły P_1 = 4 kN, P_2 = 6 kN a ciężar dźwigu Q = 7 kN.



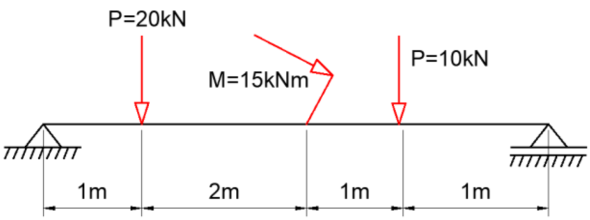
Zadanie 3

Oblicz reakcje w podporach oraz narysuj wykresy momentów gnących i sił tnących.



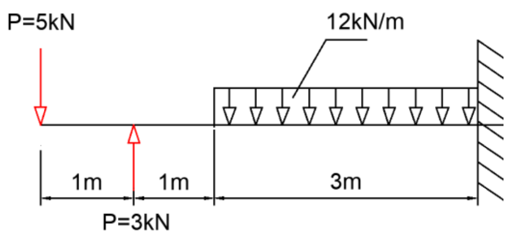
Zadanie 4

Oblicz reakcje w podporach oraz narysuj wykresy momentów gnących i sił tnących.



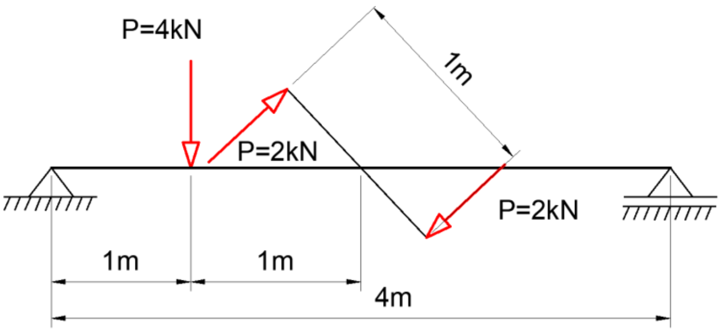
Zadanie 5

Oblicz reakcje w podporach oraz narysuj wykresy momentów gnących i sił tnących.



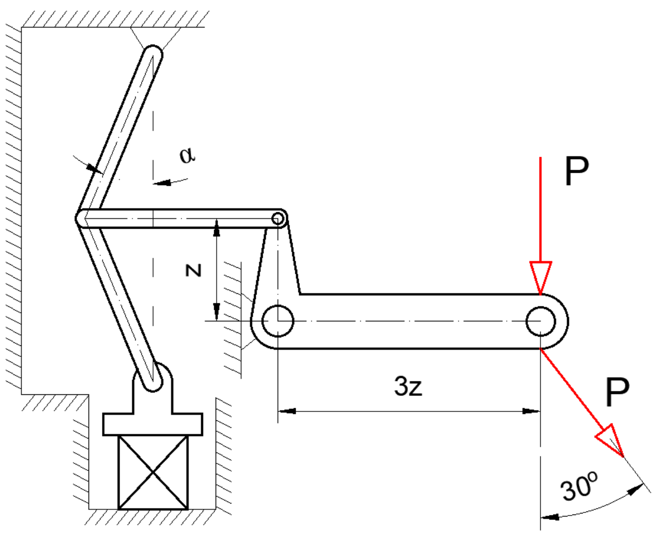
Zadanie 6

Oblicz reakcje w podporach oraz narysuj wykresy momentów gnących i sił tnących.



Zadanie 7

Drewniany klocek dociskany jest za pomocą mechanizmu dźwigniowego. Należy wyznaczyć wartość siły jaka działa na klocek, jeżeli siła *P* = 2 kN. Wartość kąta α=10°[9].



[9] T. Niezgodziński, *Zbiór zadań z mechaniki ogólnej*, Warszawa 2008, s. 65.

Literatura

Halliday D., Resnick R., Walker J., *Podstawy fizyki*, Warszawa 2016.

Niezgodziński T., *Mechanika ogólna*, Warszawa 2012.

Niezgodziński T., *Zbiór zadań z mechaniki ogólnej*, Warszawa 2008.

Nizioł J., *Metodyka rozwiązywania zadań z mechaniki*, Warszawa 1978.

Siuta W., *Mechanika techniczna*, Warszawa 1999.

Siuta W., Rososiński S., Kozak B., *Zbiór zadań z mechaniki technicznej*, Warszawa 1962.

Siuta W., Rososiński S., *Zbiór zadań z mechaniki technicznej*, Warszawa 1962.