PROSTSZY DOWÓD PEWNEGO SPOSOBU WYMIERZANIA LINII ZEWSZĄD NIEPRZYSTĘPNÉJ.

Z pomiędzy dwudziestu sposobów, które Mascheroni (1) na wymierzanie linii zewsząd nieprzystępnéj podaje, sposób dwunasty zależy na tém, co następuje:

Niech będzie potrzeba *znaleźć długość linii* XZ (fig. 1) *zewsząd nieprzystępnéj*.

Za pomocą węgielnicy mierniczéj wynajduję trzy punkta A, B, C, takie, aby każdy z kątów XAZ, XBZ i XCZ był kątem prostym, i mam trójkąt ABC; za pomocą téjże węgielnicy, z wiérzchołka B spuszczam do podstawy AC, prostopadłą BD; wymierzam linie AB, BC, BD, i będę miał

$$XZ = \frac{AB . BC}{BD}.$$

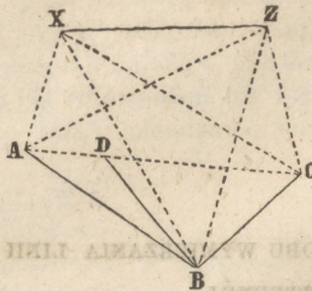
Udowodnienie tego zostawia autor, jak wszędzie, samemuż czytelnikowi.

Servois (2), poczytując wypisane dopiéro rozwiązanie za nader udatne, uczynił uwagę: że kąty XAZ,

(1) *Problemi per gli Agrimensori con varie soluzione. Pavia.* 1793.— *Problèmes de géométrie pratique, avec différentes solutions, par* L.-M. Mascheroni. *Ouvrage traduit de l'italien. Deuxième édition. Paris,* 1838 (*Liv.* 1er, *probl.* III).

(2) *Solutions peu connues de différens problèmes de géométrie pratique; recueillies par* F.-J. Servois, *professeur de Mathématiques aux Écoles d'Artillerie. A Metz et à Paris. An* XII (1804). Str. 76—78.

Fig. 1.



XBZ, XCZ i BDC nie mają być koniecznie proste, lecz tylko, wszystkie cztéry, sobie równe. Według téj uwagi, można szukać punktów A, B, C, D i za pomocą węgielnicy niezregulowanéj, tojest, któréjby linie celowe nie były ściśle do siebie prostopadłe, lub nawet za pomocą tak zwanéj *niby-węgielnicy* (tojest jakiegokolwiek kąta danego, *fausse équerre*), którą sobie łatwo samemu przysposobić, robiąc na płaszczyznie górnego końca kołka dwie rysy nakrzyż za pomocą piłki, lub téż zatykając na téjże płaszczyznie trzy szpilki do niéj prostopadle. Tak uogólnionego przez siebie rozwiązania podał Servois oraz dowodzenie trygonometryczne, które téż w gruncie przejął do swego dzieła Grunert [3]. Użycie dzieła Grunertowego za książkę podręczną przy wykładzie miernictwa w r. 1845, podało mi sposobność powiedzenia uczniom, że zamiast dowodu znajdującego się tam na str. 216—217 [4] (a ma-

[3] *Geodäsie oder die Lehre vom Aufnehmen, das Nivelliren und die Markscheidekunst von Johann August* Grunert. *Leipzig*, 1842.

[4] Dowód o którym tu mowa, gdy w nim opuścimy mniéj potrzebne dwa wzory przechodne, jest taki:

W trójkątach CXZ i ACZ mamy proporcye

$$XZ : CZ = \text{wst}\ XCZ : \text{wst}\ CXZ,$$
$$CZ : AC = \text{wst}\ CAZ : \text{wst}\ AZC.$$

A że według wykréślenia, punkta X, A, B, C, Z, znajdują się, wszystkie pięć, na okręgu jednegoż koła; kąty przeto CXZ i CAZ są równe, a tém samém ze złożenia powyższych dwóch proporcyj otrzymujemy proporcyą

$$XZ : AC = \text{wst}\ XCZ : \text{wst}\ AZC;$$

z niniejszéj zaś proporcyi, dlatego że w czworokącie ABCZ, jako wpisanym w koło, summa kątów AZC i ABC wynosi 180°, a tém samém wst AZC = wst ABC, wypada

$$XZ = \frac{AC.\ \text{wst}\ XCZ}{\text{wst}\ ABC}.$$

W trójkątach ABC i BCD mamy proporcye

$$AC : AB = \text{wst}\ ABC : \text{wst}\ ACB,$$
$$BD : BC = \text{wst}\ ACB : \text{wst}\ BDC,$$

jącego na celu wykazanie, iż gdy punkta A, B, C, będą obrane tak, aby kąty XAZ, XBZ, XCZ, były sobie równe, i gdy też na linii AC będzie wzięty punkt D taki, aby i kąt BDC był każdemu ze trzech poprzednich równy, natenczas XZ będzie czwartą proporcyonalną do BD, AB i BC), możnaby położyć dowód następujący.

Ponieważ kąty XAZ, XBZ i XCZ są z wykreślenia równe, punkta zatém X, A, B, C, Z, znajdują się, wszystkie pięć, na okręgu jednegoż koła, którego promień niech się nazywa R. Wyobraźmy sobie przez punkta B, C, D, poprowadzony drugi okrąg koła, i niech promień tego drugiego okręgu będzie R′. Dla równości kątów BCD, BCA, linie BD i AB są: piérwsza w kole z promienia R′, a druga w kole z promienia R, cięciwami łuków podobnych; a że w kołach, cięciwy łuków podobnych są proporcyonalne promieniom tych kół, jest przeto

$$BD : AB :: R' : R.$$

I znowu, ponieważ dla równości kątów BDC, XAZ, linie BC i XZ są w tychże samych dwóch kołach, R′ i R za promienie mających, cięciwami łuków, także podobnych; jest przeto także

$$BC : XZ :: R' : R.$$

Już zaś z tych dwóch proporcyj wypływa; oczywiście proporcya

$$BD : AB :: BC : XZ,$$

których złożenie z sobą, przy uwadze, że kąty XCZ i BDC są, z samegoż wykréślenia, równe, daje proporcyą

$$AC.\, BD : AB.\, BC = \text{wst}\ ABC : \text{wst}\ XCZ.$$

A że z téj proporcyi wypada

$$AC.\, BD.\ \text{wst}\ XCZ = AB.\, BC.\ \text{wst}\ ABC,$$

a tém samém

$$\frac{AC.\ \text{wst}\ XCZ}{\text{wst}\ ABC} = \frac{AB\,.\,BC}{BD};$$

więc na mocy powyższego wyrażenia dla XZ, jest

$$XZ = \frac{AB\,.\,BC}{BD}:$$

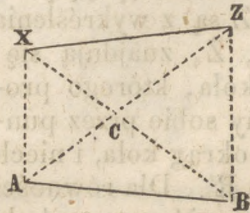
co b. do d.

dająca

$$XZ=\frac{AB.BC}{BD};$$

co b. do d.

Fig. 2.



W dziewiętnastym sposobie wymierzania linii XZ (*fig.* 2) zewsząd nieprzystępnéj, mówi Mascheroni: że jeżeli znajdziemy punkt C taki, aby kąt XCZ był prosty, i przedłużymy ZC i XC do A i B tak, aby kąty CAX i CBZ były połowami kąta prostego, będzie

$$XZ=AB.$$

Otóż w związku z powyższém rozwiązaniem dwunastém, możnaby uważać, że i wypisane dopiéro rozwiązanie dziewiętnaste ostoi się jeszcze, chociaż kąt XCZ będzie ostry lub rozwarty, byleby tylko kąty CAX, CBZ, były onegoż połowami. I w tém albowiem założeniu, kąty CAX i CXA, CBZ i CZB, będą równe, a ztąd trójkąty CXZ i CAB, jako mające kąty przy C równe, bok CX równy CA, a obok CZ równy CB, przystaną do siebie. Możnaby więc i teraźniejsze rozwiązanie wykonać za pomocą niby-węgielnicy, tylko że dla prędszego znalezienia punktu C, wpadałoby kąt téj niby-węgielnicy, na niéjże saméj, przez celowanie do lasek, pierwéj podwoić.

A. F.