317

DER

ALGORISMUS PROPORTIONUM

DES

NICOLAUS ORESME.

ZUM ERSTEN MALE NACH DER LESART DER HANDSCHRIFT R. 4°. 2.

DER

KÖNIGLICHEN GYMNASIAL-BIBLIOTHEK ZU THORN

HERAUSGEGEBEN VON

E. L. W. M. CURTZE.

MIT EINER LITHOGRAPHIERTEN TAFEL.

DEM

GYMNASIUM ZU THORN

ZUR

DRITTEN SAECULARFEIER

DEN 8. MÆRZ 1868

DER COPERNIKUS-VEREIN FÜR WISSENSCHAFT UND KUNST ZU THORN.

EINLEITUNG.

Der hier zum ersten Male abgedruckte Text des *Algorismus Proportionum Magistri Nicolai Oresmii* ist in einer Handschrift der hiesigen Königl. Gymnasialbibliothek aus dem XIV. Jahrhundert enthalten, die den Katalogtitel „*R.* 4° 2. *Problematum Euclidis explicatio*“ führt. Er umfasst in dieser Handschrift Seite 32 Zeile 5 bis Seite 93 Zeile 18, zum Theil sehr unleserlich geschrieben. Auf die grosse Bedeutung desselben für die Geschichte der Mathematik habe ich wohl zuerst hingewiesen in meiner Abhandlung in der Zeitschrift für Mathematik und Physik, XIII. Jahrgang, Heft 2: *Ueber die Handschrift R.* 4° 2, *Problematum Euclidis explicatio, der Königl. Gymnasialbibliothek zu Thorn*, die eine genaue Analyse der ganzen Handschrift enthält. Da ich nicht glaube annehmen zu dürfen, dass die Ergebnisse derselben allgemein bekannt sind, so werde ich hier die Hauptresultate in Bezug auf die vorliegende Schrift nochmals zusammenfassen, besonders auch deshalb, weil dieselben aus dem Werke des Oresme selbst sich erst nach eingehendem Studium gewinnen lassen. Ehe ich jedoch hierzu übergehe, stelle ich das zusammen, was ich über die Lebensumstände des Oresmius aus verschiedenen Quellen habe finden können.[1])

[1]) *Gallia christiana,* Th. XI, Paris 1759. S. 788—89. — *Biographie universelle.* T. 32. p. 62—64, Paris 1822. — *Histoire littéraire de la France* T. XXIV Quatorzième siecle. Paris 1862 an verschiedenen Stellen. — **Du Pin,** *Bibliothèque des auteurs ecclesiastiques du S. XIV.* Utrecht 1731 T. XI p. 82. — **Fabricius,** *Bibliotheca latina mediae et infimae aetatis.* T. V. p. 369. Hamburg 1736.

Nicolaus Oresmius (Oresme, Orem, Oranus, Horen) war geboren im Dorfe Allemagne bei Caen in der Normandie wahrscheinlich am Anfang des XIV. Jahrhunderts. Seine Studien machte er am Collége de Navarre, nachher an der Universität in Paris und erwarb sich dort auch die Doctorwürde — Du Pin nennt ihn am a. O. *Docteur de Paris,* unser Manuscript *Parisius* —; bald wurde er weit berühmt, so dass ihn König Johann von Frankreich auserwählte, die Studien des nachmaligen Königs Charles V. le Sage zu leiten. Dieser Monarch zählte ihn durch sein ganzes weiteres Leben zu seinen treuesten Rathgebern und hielt ihn sich stets zur Seite. 1356 erhielt Oresme die Stellung als Grand-maître des Collége de Navarre, an derselben Anstalt, der er seine erste Bildung zu danken hatte. Er hatte dort vorzugsweise Theologie, aber auch Mathematik zu lehren, und aus dieser Zeit scheinen seine mathematischen Abhandlungen zu stammen. Er blieb in seinem Amte bis zum Jahre 1361. In diesem Jahre übernahm er das Decanat zu Rouen und wurde gleichzeitig Schatzmeister der Saint-Chapelle zu Paris. 1363 sandte ihn sein königlicher Gönner nach Avignon, um den Papst Urban V. von seiner beabsichtigten Flucht zurückzuhalten, und bei dieser Gelegenheit hielt er seine berühmte Predigt über den Text aus Jesaias: *Juxta est salus mea,* welche die Fehler und Schwächen des Papstes und der Kardinäle schonungslos geiselte. Seit 1370 beschäftigte er sich auf Geheiss seines frühern Schülers mit Uebersetzungen griechischer Autoren nach lateinischen Uebersetzungen ins Französische, namentlich die Bücher vom Himmel und der Welt, die Ethik und Politik des Aristoteles hat er so französisch geliefert. Auch die Bibel soll er in seiner Muttersprache wiedergegeben haben. Trotzdem gerade das Französisch in diesen Uebersetzungen sehr gerühmt wird, [2]) konnte doch noch im Jahre 1866 von dem bekannten J. Barthelémy Saint-Hilaire eine Uebersetzung des Werkes *de coelo* erscheinen, welche auf dem Titel die Bemerkung hat **traduit en français pour la première fois.** Es ist also im Allgemei-

[2]) *Histoire littéraire de la France* a. a. O. S. 182.

nen die Erinnerung an diese Uebersetzungen selbst im Vaterlande des Oresmius verloren gegangen[3]).

Am 16. November 1377 wurde Oresme endlich auf Verwendung des Königs in Avignon zum Bischof von Lisieux geweiht und starb als solcher den 11. Juli 1382. Nach Du Pin a. a. O. wäre er im Jahre 1384, wie er hinzufügt, sieben Jahre nach erhaltner Investitur gestorben, aber eine Stelle der Gallia christiana S. 788 des erwähnten Bandes: *Defunctus die 11. Julii 1382, sepulturam accepit in cathedrali juxta sinistram chori portam et die sequenti fit ejus obitus in ecclesia Lexoviensi. Et certe vacabat sedes an. 1382 die 5. Augusti ex reg. 123. Caroli VI. in quo Nicolai Lexoviensis bonae memoriae episcopi fit mentio:* lässt wohl kaum einem Zweifel Raum über den 11. Juli 1382 als Todestag des Oresmius.

Von seinen Werken sind im Drucke erschienen:

1. *Liber de mutatione monetae, a bono Principe non permittenda* (Bibliotheca sanctorum Patrum, T. IX. Paris 1589, 1644. auch zu Cöln und Leyden. Ferner Helmstedt 1622, und in den Actis publicis monetariis von Th. v. Hagelstein Th. 1, S. 247, Augustae 1692). Authenticität angezweifelt.

2. *Juxta est salus mea, ut veniat etc.*, die oben erwähnte Predigt. (In Catalogus testium veritatis des Flacius Illyricus Th. 1, ferner in den Lectiones memorabilium von Joh. Wolfius Th. 2, S. 648 auch apart gedruckt Wittenberg 1604, cura Sal. Gesneri).

3. *Epistolae Luciferi ad praelatos Ecclesiae.* (In den Lectt. memorabill. des Joh. Wolfius Th. 1, S. 654 und separat, durch Flacius Illyricus besorgt, Magdeburg 1549).

4. *Tractatus de Antichristo, eius ministris, aduentu, signis propinquis et remotis et S. Scriptura* (Edmund Marten, Monumenta Th. X. S. 1274). Letztere beiden als echt angezweifelt.

5. *Aristotelis Politica et Oeconomica cum Glossematibus*, Französisch. Paris 1486, in Fol.

[3]) Dies lässt sich auch daraus schliessen, dass auch Jourdain, *Sur les traductions latines d'Aristote* weder in der ersten noch zweiten Auflage des Oresme erwähnt. Auch in der Bearbeitung, die Stahr von der ersten Auflage geliefert, fehlt der Name des Oresme völlig.

6. *Aristotelis Ethicorum libri X.* sowie einige Schriften des *Cicero* und Anderer, ebenfalls französisch, Paris 1488, in Fol.

7. *Francisci Petrarchae de remediis utriusque fortunae liber*; ebenfalls französisch, Paris 1534. Wahrscheinlich nicht von Oresme.

8. *Traité de la sphère* in 50 Capiteln, Paris 1546.

9. *Tractatus de latitudinibus formarum.* (In dem Werke Questio de Modulibus Bassani Soliti cet. Venetiis 1505 [4]). Dieses Werk des Oresme befindet sich auch in unsrem Codex und ist ebenfalls von grosser Wichtigkeit für die Geschichte der Mathematik.

Zum ersten Male gedruckt erscheint hier der *Tractatus de proportionibus proportionum* oder der *Algorismus proportionum.* Hiervon verschieden ist jedenfalls der in der Bibliothek des Collége de Navarre befindliche *Tractatus de proportione Velocitatum in motibus.* Dort wird auch noch aufbewahrt ein *Tractatus de Instantibus,* sowie ein *Tractatus de Configuratione qualitatum,* wahrscheinlich auch mathematisch-psysikalischen Inhalts.

Der *Algorismus proportionum* ist nur in sehr wenigen Exemplaren vorhanden. Ausser unsrem Manuscripte kenne ich nur zwei andere, eines in der Bibliothek des Sam. Pepys in der Bodlejana, das andere in der Bibliothek des Klosters San-Marco in Florenz [5]). Letzteres hat ebenfalls den Titel *Algorismus Propor-*

[4]) Auf diese Ausgabe des *tractatus de latitudinibus formarum* bin ich auf eine Anfrage hin durch Fürst Boncompagni aufmerksam gemacht. In dem angeführten Werke ist der Titel: *Incipit perutilis tractatus de latitudinibus formarum secundum Reuerendum Magistrum Nicholaum Horen.* Ich war deshalb zweifelhaft, ob Oresme wirklich der Verfasser sei, doch Fabricius a. a. O. löste diese Unsicherheit, da er denselben Tractat als in der Bibliothek des Collége de Navarre befindlich unter Oresme's Namen aufführt.

[5]) Indem dies gedruckt wird, erhalte ich durch die fast unerschöpfliche Grossmuth des Fürsten Boncompagni in Rom Abschrift des Anfangs und des Endes dieser Handschrift. Dieselbe befindet sich jetzt in der Biblioteca Magliabechiana in Florenz und führt die Nummer „*Conventi sopressi I, IX,* 26“, früher *No.* 123 der Bibliothek des Klosters San Marco. Nach diesen Auszügen zu urtheilen enthält dieselbe nur das Werk bis § 4 des 2ten Tractats einschliesslich, obwohl es auch möglich ist, dass nur eine andere Anordnung beliebt ist. Man sehe auch die folgende Anmerkung. In Bezug auf das erste Mscrpt. vergleiche man: *Catalogus libr. Mscrpt. Angliae et Hiberniae in unum Collecti.* Oxoniae, 1697. Fol. Tom. II. Part. 1, p. 209 No. 6780. 61.

tionum. Beide Handschriften standen mir nicht zu Gebote, und so ist die nachfolgende Ausgabe ganz allein nach unsrem Manuscripte besorgt.

Der Inhalt des *Algorismus proportionum* ist nun folgender. Nach einer Einleitung, die die neuen Bezeichnungen des Verfassers, welcher er sich später bedient, enthält, folgen neun Regeln, welche die Zusammensetzung der Proportionen behandeln; unter Proportion, wie stets im Mittelalter, das geometrische Verhältniss verstanden. Proportion in unsrem Sinne ist *Proportionabilitas* oder *similitudo proportionum.* Unter Verhältniss versteht er stets ein fallendes, das steigende Verhältniss dagegen kennt er nur unter dem Namen *fractio.* Der Werth eines Verhältnisses ist bei ihm also stets eine ganze oder eine gemischte Zahl. Diese schreibt er dem Wesen nach genau so, wie wir es noch jetzt zu thun pflegen, und also umgekehrt wie Leonard von Pisa, der den Bruch immer voranschreibt. Sind die beiden Verhältnisse, deren zusammengesetztes Verhältniss gesucht wird, beide gleichzeitig direct oder indirect, so heisst ihm die Operation *Addition zweier Verhältnisse.* Im entgegengesetzten Falle *Subtraction derselben.* Sind bei der Addition die Verhältnisse gleich, so entsteht das quadratische, cubische etc. Verhältniss. Diese bezeichnet er speciell durch *duae duplae* (*raison doublée double* sagen die Franzosen), *tres duplae* etc., und hierin ist ein Analogon zu unsrer Potenzbezeichnung 2^2, 2^3 cet nicht zu verkennen. Mit Zeichen schriebe dies Oresme $2 . 2^p$. Nun erweitert er diese Potenzbezeichnung dahin, dass er auch von *medietas, tertia pars duplae* u. s. w. spricht; das heisst in seinen Zeichen $\frac{1}{2}2^p, \frac{1}{3}2^p$. in moderner Bezeichnung aber $2^{\frac{1}{2}}$, $2^{\frac{1}{3}}$, ... Es treten also hier wohl zuerst die Potenzen mit gebrochenen Exponenten auf, und zwar wie noch jetzt in der Auffassung als interpolierte Glieder zwischen den Potenzen mit ganzen Exponenten. Bisher wurde die Erfindung dieser Bezeichnungsweise dem Simon Stevin von Brügge, dessen Werke am Anfange des 17. Jahrhunderts in Leyden erschienen sind, zugeschrieben. Man sehe darüber die Abhandlung Prouhet's, *Sur l'invention des exposants fractionnaires ou incommensurables*

(Nouvelles Annales de Mathématiques. T. XVIII. Bulletin de Bibliographie p. 42). Es ist daher wohl eine nicht ganz unwichtige Thatsache, dass der ganze Algorithmus dieser Grössenarten sich schon fast 300 Jahre vor Stevin in so weit ausgebildeter Weise vorfindet.

Die erwähnten neun Regeln, welche den ersten Tractatus bilden, enthalten nun die Rechnung mit Potenzen und Wurzeln in ziemlicher Vollständigkeit. Wollte man mit moderner Bezeichnung die Formeln angeben, die Oresmius entwickelt, so erhielte man die folgenden:

1) $a^m \cdot a^n = a^{m+n}$, (Regel 1);

2) $\dfrac{a^m}{a^n} = a^{m-n}$, (Regel 2);

3) $a^{\frac{m}{n}} = (a^m)^{\frac{1}{n}}$, (Regel 3);

4) $a^{\frac{1}{m}} = \left(a^{\frac{p}{m}}\right)^{\frac{1}{p}}$, (Regel 3);

5) $\left(a^{\frac{1}{p}}\right)^{\frac{p}{m}} = a^{\frac{1}{m}}$, (Regel 3);

6) $(a^m)^{\frac{p}{q}} = \left(a^{\frac{mp}{n}}\right)^{\frac{1}{q:n}}$, (Regel 4);

7) $(a^m)^{\frac{p}{q}} = (a^{mp})^{\frac{1}{q}}$, (Regel 4);

8) $a \cdot b^{\frac{1}{n}} = (a^n \cdot b)^{\frac{1}{n}}$, (Regel 5);

9) $\dfrac{b^{\frac{1}{n}}}{a} = \left(\dfrac{b}{a^n}\right)^{\frac{1}{n}}$, (Regel 6);

10) $\dfrac{a}{b^{\frac{1}{n}}} = \left(\dfrac{a^n}{b}\right)^{\frac{1}{n}}$, (Regel 6);

11) $\dfrac{a^{\frac{1}{n}}}{b^{\frac{1}{n}}} = \left(\dfrac{a}{b}\right)^{\frac{1}{n}}$, (Regel 6);

12) $a^{\frac{1}{m}} = a^{\frac{p}{mp}}$, (Regel 7);

13) $a^{\frac{1}{e}} . b^{\frac{1}{f}} = (a^f . b^e)^{\frac{1}{ef}}$, (Regel 7);

14) $$\frac{a^{\frac{1}{e}}}{b^{\frac{1}{f}}} = \left(\frac{a^f}{b^e}\right)^{\frac{1}{ef}}, \text{ (Regel 8)};$$

15) $a^{\frac{1}{n}} . b^{\frac{1}{n}} = (a.b)^{\frac{1}{n}}$, (Regel 9);

16) $$\left(\frac{a}{b}\right)^{\frac{1}{n}} = \frac{a^{\frac{1}{n}}}{b^{\frac{1}{n}}}, \text{ (Regel 9)};$$

17) $a^m . a^{\frac{1}{n}} = a^{m+\frac{1}{n}}$, (§. 11.);

18) $$\frac{a^m}{a^{\frac{1}{n}}} = a^{m-\frac{1}{n}}, \text{ (§. 11.)}.$$

Der zweite Tractat enthält noch eine weitere Regel, die man folgendermassen in modernen Zeichen wiedergeben kann: Ist

$$a : b = c : 1$$

und gleichzeitig entweder $m : n = h : 1$ oder $n : m = h : 1$, so hat man:

$$ma : nb = c.h : 1 \text{ oder } ma : nb = \frac{c}{h} : 1$$

wobei auch der Fall eintreten kann, dass $ma < nb$, wo dann die letzte Form sich verwandelt in:

$$nb : ma = \frac{h}{c} : 1.$$

Es ist das die Operation, welche man wohl Multiplication zweier Proportionen genannt hat.

Die wichtigsten Anwendungen, die Oresme macht, enthält der dritte Tractat. Ich mache besonders auf die Verhältnisse der regulären Polygone aufmerksam und einige Theoreme, specielle Fälle des Satzes: *Das reguläre eingeschriebene 2n eck ist die mittlere Proportionale zwischen dem um- und eingeschriebenen regulären n-eck* [6]).

[6]) In der oben angeführten Handschrift der Biblioteca Magliabechiana heissen die Schlussworte: *Et nota quod demonstratio de octogono est generalis etiam ad alias figuras inscriptas et circumscriptas, semper data mea proportione*

Citiert werden Boetius, *de institutione musica.* (Tr. II. § 4, 2); Euclides, *Elementa* (Tr. II. § 1, 2; § 3, 1; Tr. III. § 1, 2; § 1, 5; § 1, 7; § 12, 4); Jordanus Nemorarius, *Arithmetica* (Tr. I. § 2, 4; § 3, 2).

cum duobus lateribus. Vergleicht man dies mit der *Ultima suppositio* des 3ten Tractats, so sieht man unmittelbar, dass der im Text angeführte Satz dadurch in seiner ganzen Allgemeinheit ausgesprochen ist. In dieser Schlussbemerkung liegt auch der Grund, weshalb ich oben von einer möglichen Umstellung der Tractate gesprochen habe. Meunier, *Essai sur la vie et les ouvrages de Nicole Oresme,* Paris 1857. gibt eine Handschrift des *Algorismus Proportionum* in der Kaiserlichen Bibliothek zu Paris an, *Anc. fond latin.* ms. no. 7371. Wenn er aber zu derselben sowie zu dem auch in derselben enthaltenen *Tractatus de latitudinibus formarum* hinzufügt: *Traité contre l'astrologie,* so dürfte wohl die Bemerkung erlaubt sein, dass derselbe sich nicht bemüht zu haben scheint, den wirklichen Inhalt dieser beiden Werke zu erforschen. Auch die oben angegebene Ausgabe des *Tractatus de latitudinibus formarum* kennt er nicht.

ALGORISMUS PROPORTIONUM MAGISTRI NICOLAY OREM. PARISIUS.

IN NOMINE DOMINI INCIPIT ALGORISMUS PROPORTIONUM.

Vna media debet sic scribi $\frac{1}{2}$, vna tertia sic $\frac{1}{3}$ et due tertie sic $\frac{2}{3}$; et sic de alijs. et numerus, qui supra uirgulam, dicitur numerator, iste uero, qui est sub uirgula, dicitur denominator. 2. Proportio dupla scribitur isto modo $2.^{1a}$, et tripla isto modo $3.^{1a}$; et sic de alijs. Proportio sesquialtera sic scribitur $1.^{p}\frac{1}{2}$, et sesquitertia $1.^{p}\frac{1}{3}$. Proportio superpartiens duas tertias scribitur sic $1.^{p}\frac{2}{3}$. Proportio dupla superpartiens duas quartas scribitur sic $2.^{p}\frac{2}{3}$; et sic de alijs. 3. Medietas duple scribitur sic $\frac{1}{2}2^{p}.$, quarta pars duple sesquialtere scribitur sic $\frac{1}{4}2^{p}.\frac{1}{2}$; et sic de alijs. 4. Et quecunque proportio rationalis scribitur per suos terminos sev numeros minimos, sicud dicetur proportio . 13 . ad . 9., que uocatur superpartiens quatuor nonas. 5. Similiter proportio irrationalis sicud medietas superpartiens $\frac{2}{3}$ scribitur sic: Medietas proportionis . 5 . ad tria; et ita de alijs. 6. Omnis proportio irrationalis, de qua nunc est mencio, denominatur a proportione rationali taliter, quod dicitur pars eius aut partes; sicud dicendo medietas triple, aut tertia pars triple, uel due tertie quadruple, vnum patet quod in denominatoris [loco] talis proportionis irrationalis sunt tria, sev numerator, denominator et proportio rationalis, a qua denominatur, cuius ista [ir]rationalis dicitur pars aut partes. sicud cum dicitur vna medietas duple, vnitas est numerator uel loco numeratoris, . 2. est denominator et proportio dupla est ista, a qua ista denominatur. et ita potest patere faciliter de alijs. —

2. Prima Regula. *Proportionem rationalem proportioni rationali addere.* Ponatur vterque in suis minimis numeris et.mnltiplicetur minor terminus uel numerus vnius per minorem alterius et maior per maiorem et exibunt numeri sev termini proportionis composite ex ambabus datis. 2. Et ita possunt addi tres aut quelibet, addendo duas illarum in simul et demum toti composito ex ambabus addendo tertiam, demum quartam et sic ultimam. 3. Verbi gratia . uolo simul addere sesquitertiam et quintuplam. Primi numeri sesquitertie sunt . 4. et . 3. et alterius . 5. et . 1. Multiplicabo itaque, ut dictum est, tria per vnum et . 4. per . 5. et ueniunt . 20. et tres, quarum proportio est sextupla superpartiens $\frac{2}{3}$. 4. Et ita potest proportio duplari, triplari quamcumlibet. Et hoc potest demonstrari et satis habetur ex sexta conclusione quinti arismetice Jordani.

3. Secunda Regula. *Proportionem rationalem a proportione rationali subtrahere.* Ponatur, ut prius, quelibet in suis numeris minimis. Demum ducetur contradictione crucis minor numerus vnius per maiorem alterius et ita de reliquis et exibunt termini illius proportionis, in qua maior excedit minorem de proportionibus datis . et illa erat maior, cuius maior terminus ductus in minorem terminum alterius producit numerum maiorem. 2. Verbi gratia. Subtrahatur sesquitertia a sesquialtera. Primi numeri sesquitertie sunt . 4. et . 3., et primi numeri sev termini sesquialtere sunt . 3. et . 2. Multiplicabo . 4. per . 2., tunc sunt . 8. et iterum . 3. per . 3. et sunt . 9.; igitūr proportio sesquialtera est maior quam sesquitertia per proportionem . 9. ad . 8., uel per sesquioctuam (Fig. 1.) . hoc autem demonstrari potest ex . 27. secundi arismetice Jordani.

4. Tertia Regula. *Si proportio irrationalis fuerit partes alicuius rationalis, ipsam possibile est partem notare.* Et hoc alterius rationalis, licet non eiusdem . vnum competentius notatur pars quam partes. — 2. Sit itaque . b. irrationalis partes . a. rationalis . igitur ipsum . b. habebit numeratorem et denominatorem. Dico ergo, quod non mutato denominatore ipsum . b. erit pars alicuius proportionis multiplicis ad . a. secundum numeratorem. Et quia omni proportioni rationali contingit dare quomodolibet multiplicem, quelibet erit irrationalis, de qua est mencio, pars alterius rationalis. 3. Verbi gratia . proponatur proportio, que sit due tertie quadruple; et quia duo est numerator, ipsa erit vna tertia quadruple duplicate; sev sedecuple; et sic de alijs . 4. et regula est, quoniam vniversaliter vna tertia totius est due tertie medietatis uel subduple et e contrario, due tertie subduple proportionis sunt vna tertia duple. Et sic de quibuslibet partibus.

5. Quarta Regula. *Denominatorem proportionis irrationalis proprissime assignare.* Pro isto sciendum est, quod proportio rationalis dicitur primaria, que non potest diuidi in proportiones rationales equales. Et est illa, inter cuius numeros minimos nullus est numerus medius proportionalis sev numeri medii proportionales; sicud est dupla aut tripla aut sesquialtera. 2. Sed ista uocatur secundaria, que potest sic diuidi et inter cuius numeros est numerus uel numeri medij proportionales, id est medio loco proportionales . sicud sunt quadrupla, que diuiditur in duas duplas, et octupla in tres duplas. Similiter nonupla in duas triplas; et sic de alijs. 3. Proposita itaque proportione irrationali qualibet, si denominentur partes tunc per regulam precedentem fiat quod uocetur pars. quo posito uideatur, si proportio rationalis, a qua denominatur, sit primaria. Et si sic, tunc standum est, quia proportio irrationalis, de qua est sermo, est competentissime nominata; sicud dicendo vna tertia sextuple uel vna tertia duple; et sic de alijs. 4. Si uero proportio rationalis, a qua denominatur, sit secundaria, uideatur, quot habet proportiones rationales primarias, que sunt eius partes equales. Et si numerus quotiens istarum partium et denominator proportionis irrationalis proposite sunt incommunicantes, standum est in tali denominatione. 5. Sicud si dicatur vna medietas octuple, talis denominatio est propria, quia octupla habet . 3. partes equales rationales sev tres duplas et duo est denominator proportionis irrationalis proposite. modo . 3. et . 2. sunt numeri incommunicantes, ideo medietas octuple non est pars alicuius proportionis rationalis minoris quam octuple; quamuis bene partes sit, quia medietas octuple est $\frac{3}{4}$ 4.ᵖ sed talis denominatio non esset propria. 6. Si autem numerus minor, id est primarum partium talis proportionis rationalis secundarie, a qua denominatur proportio irrationalis, et denominator illius proportionis irrationalis, que est pars ipsius, sint numeri communicantes; tunc accipitur maximus numerus, in quo communicant, et per ipsum diuidendus est uterque illorum. et diuidendo numerum partium proportionis secundarie prouenit numerus proportionum partialium, ex quibus componitur proportio rationalis a qua denominatur proportio proprissime proposita. Diuidendo uero denominatorem proportionis per eundem maximum numerum prius habitum uenit denominator proportionis irrationalis proprissimus et quesitum. — 7. Verbi gratia. proponatur proportio, que uocetur $\frac{3}{4}4^{p}$. tunc agendo per tertiam regulam patet, quod ipsa est vna quarta proportionis . 64^{p} . Sed quia . 64^{p} . componitur ex . 6. duplis et . 6 ., qui est numerus partium primariarum istius 64^{ple}., et . 4 ., qui est denominator proportionis proposite, sunt communicantes in . 2.; ergo diuidendo . 6 . per . 2 . exient . 3 . igitur proportio proposita est pars trium duplarum sev pars octuple. Similiter diuidendo .4 . per . 2 . venit . 2 ., igitur proportio proposita est vna medietas. patet ergo ex hac regula quod proportio proposita est vna medietas octuple et scribitur sic $\frac{1}{2}.8.^{p}$. Et ista est eius denominatio competentior. 8. Eodem modo vna duodecima quatuor triplarum sev. 81^{p}. est vna tertia triple, et similiter vna quarta sex triplarum est $\frac{1}{2}$. trium triplarum sev. 27^{p}. etc.

6. Quinta Regula. *Proportionem irrationalem proportioni rationali addere.* Sit . b . irrationalis addenda proportioni rationali, cuius . b . est pars et a qua proprissime denominatur secundum priores regulas; tunc capiatur denominator ipsius . b . et totidem . a . addatur de proportione, quotus est iste denominator per primam regulam et totum aggregatum sit . c . Dico ergo, quod proportio composita ex . a . et . b . erit pars ipsius . c . denominata eadem denominatione, qua . b . denominabatur pars sue proportionis denominantis sev . d . 2. Verbi gratia. addatur vna tertia duple proportioni sesquialtere. continuentur ergo . 3 . sesquialtere cum dupla et exibit proportio sextupla superpartiens $\frac{3}{4}$, qui est proportio . 27 . ad . 4 . Et ista proportio sic resultans scribitur sic $\frac{1}{3}6^{p}.\frac{3}{4}$.

7. Sexta Regula. *Proportionem irrationalem a proportione rationali subtrahere.* Sit . a . proportio rationalis, . b . irrationalis denominata a proportione rationali, que sit . d . igitur siue . a . sit maior quam . b . siue minor. multiplicetur . a . per denominatorem ipsius . b.; et idem est, quam accipere proportionem compositam ex totidem . a., quotus est ille denominator ipsius . b., et hoc docet facere prima regula. Sit igitur ista proportio composita aut producta . c. Tunc per secundam regulam cognoscatur, vtrum . c . sit maior quam . d . aut minor. Si . c . sit maior, tunc . a . erat maior quam . b. Et si . d . est maior quam . c., tunc . b . erat maior quam . a . Et quoque dato subtrahatur minor a maiori illarum proportionum sev . c . et . d ., quod fit per secundam regulam, et residuum sit . f. Dico igitur, quod si . f . subtrahatur ex . b . aut e contrario, residuum erit tota pars ipsius . f., quota pars . b . erat ipsius . d. — 2. Verbi gratia . subtrahatur sesquitertia a medietate duple . continuabo duas sesquitertias et exibit proportio, que est . 16 . ad . 9 ., que est minor quam dupla; et ergo subtrahatur a dupla et remanebit sesquioctaua. igitur subtrahendo sesquitertiam a medietate duple remanet medietas sesquioctaue. 3. Item si uelis subtrahere tertiam partem duple a sesquialtera, continuentur . 3 . sesquialtere et uenit . 27 . ad . 8 ., a qua subtrahatur dupla et restabit proportio . 27 . ad . 16 . ergo si vna tertia duple subtrahatur a sesquialtera, remanebit vna tertia . 27 . ad . 16 . et hoc est tertia pars illius, quod restaret, si tota dupla subtrahetur a tribus sesquialteris. 4. Et ex hoc potest faciliter demonstrari regula ista vniversalis: quia si primum subtrahatur a secundo et remanet tertium, igitur et si tertia pars primi subtrahatur a tertia parte secundi remanet tertia pars tertij; et ita de medietate uel quarta parte uel quinta etc.

8, 9. Septima et Octaua Regula. *In additione irrationalis ad irrationalem et subtraxione irrationalis ab irrationali sunt regule generales pro quibuslibet quantitatibus.* Sit itaque pars nota rei note addenda parti note rei note uel demenda. Verbi gratia . sit . c . pars rei . a . et . d . sit pars rei . b ., et quod . c . denominetur numero . e . et . d . numero . f. Ducam igitur . a . in . f ., idem continuabo totidem . a ., quotus est numerus . f . et exibit . g. Similiter ducam . b . in . e . et uenit . h . erit ergo . c . pars ipsius . g . secundum numerum qui fit ex ductu . e . in . f ., et secundum eundem numerum erit . d . pars ipsius . h .; igitur sicud . c . ad . g . ita . d . ad . h. 2. *Addendo* igitur sequitur, quod sicud . c . ad . g . et etiam . d . ad . h ., ita aggregatum ex . c . et . d . ad aggregatum ex . g . et . h .; ergo additum uel aggregatum . c . d . est pars aggregati . g . h . secundum numerum, qui fit ex ductu . e . in . f. 3. *Subtrahendo* uero sequitur, quod si . g . extrahatur ex . h . aut e contrario et . c . ex . d . aut e contrario, residuum erit residui tota pars, quota pars . c . erat ipsius . g ., aut quota pars erat . d . ipsius . h . et hoc est secundum numerum, qui fit ex . e . in . f. 4. [Exemplum in additione]. Verbi gratia in additione proportionum irrationalium. Et sit medietas duple addenda cum tertia parte triple proportionis. Continuabo ex vna parte . 3 . duplas, ut docet prima regula, et hoc facio, quia alia proportio denominatur a ternario et dicitur tertia pars. et ex altera parte ibidem et per idem continuabo duas triplas et multiplicabo denominationes partium vnum per allerum sev . 2. per . 3., et uenit . 6.; igitur medietas duple est sexta pars trium duplarum. Et similiter tertia pars triple est sexta pars duarum triplarum, ergo aggregatum ex medietate duple et tertia parte triple est sexta pars aggregati ex tribus duplis et duabus triplis. Et per primam regulam patet quod tale aggregatum est proportio 72^p . sev . 72, ad . 1. igitur addendo medietatem duple proportionis tertia parte triple venit sexta pars proportionis 72^p . 5. [Exemplum in subtraxione.] Verbi gratia in subtraxione proportionum irrationalium. Subtrahatur medietas duple proportionis a tertia parte triple. Primo igitur subtrahatur aggregatum ex tribus duplis ab aggregato ex duobus triplis per secundam regulam et remanet sesquioctaua. igitur subtrahendo sextam partem a sexta parte sev medietatem duple a tertia parte triple remanet sexta pars sesquioctaue. (Fig. 2.) 6. Nam medietas duple est sexta pars trium duplarum et tertia pars triple est sexta pars duarum triplarum. igitur subtrahendo sextam a sexta residui quod remanet subtrahendo totam a toto. Et hoc est facile demonstrare.

10. Nona Regula. *Si autem partes habent eandem denominationem.* Tunc preter regulam generalem propositam potest dari facilior regula specialis ista. Quid si tertia pars . a . addatur tertia parti . b ., exibit tertia pars illius, quod fieret ex additione . a . ad . b. 2. Similiter si tertia pars . a . subtrahatur a tertia parte . b . remanebit tertia pars residui, quod restat per subtraxionem . a. de . b. 3. Vt si dupla addatur triple venit sextupla, ergo si medietas duple addatur medietate triple, venit medietas sextuple. 4. Similiter si dupla subtrahatur a tripla, remanet sesquialtera, ergo, si tertia duple subtrahatur a tertia triple, remanet tertia pars sesquialtere; et ita de alijs. 5. Additio autem probat subtraxionem et e contrario sicud in alijs.

11. *Proportio* duplatur, triplatur et quomodolibet multiplicetur etiam sesquialteratur aut quomodolibet proportionaliter augetur per additionem proportionis ad proportionem. Vt si quis uellet habere proportionem sesquitertiam ad duplam, oportet addere proportioni duple tertiam partem eius per quintam regulam. Et uenit tertia pars sedecuple, ita quod tertia pars sedecuple est sesquitertia ad duplam. 2. Eodem modo per subtractionem subduplatur, subtriplatur, subsesquialteratur etc. — 3. Vna uero proportio per alteram non multiplicetur nec diuiditur nisi inproprie, sicud multiplicare duplas duas per duas duplas sunt quatuor duple. sed hoc non est, nisi multiplicatio numerorum, quoniam multiplicare duas duplas per duas triplas nichil est, sicud nec multiplicare hominem per asinum et eodem modo de diuisione. 4. ergo nulla species algorismi habet locum, in proportione additio et subtractio, ut determinatum est, sufficient.

EXPLICIT ALGORISMUS PROPORTIONUM MAGISTRI NICOLAY OREM. PARISIUS. INCIPIT SECUNDUS TRACTATUS.

E*st autem istarum regularum de algorismo* proportionum utilitas ualde magna, quia possunt ad innumerabilia proposita applicari, quorum aliqua nunc occurrunt, que ponuntur pro exemplis.

2. **Questio Prima.** *Sint igitur duo corpora cubica . a . b., et basis . a . sit dupla ad basim . b., queritur, que est proportio cuborum.*: — Premittitur, quod proportio cuborum similium est sicud proportio suorum laterum sev linearis proportio triplicata et superficiei sev basium proportio duplicata per 19, 6 Euclidis. 3. Erit igitur proportio corporum sicud suarum basium proportio sesquialterata. oportet igitur sesquialterare duplam; et hoc [est] addere medietatem duple cum dupla, quod potest fieri per quintam regulam et resultabit medietas octuple; et hoc est proportio cuborum de quibus erat questio.

2. Questio Secunda. *Sit igitur alia. Sint igitur tria corpora cubica . a . b . c., et sit . a. triplum ad . c. et basis . a sit dupla ad basim . b. Queritur ergo de proportione istorum corporum. Item de proportione suarum basium.* — 2. Premittantur: Quoniam basis . a.

ponitur dupla ad basim . b. oportet sicud prius sesquialterare duplam et uenit proportio . a. ad . b. sev medietas octuple. 3. Que si subtrahatur [a] . a. ad . c. sev a proportione tripla, sicud docet regula sexta, exibit uel restabit proportio . b. ad . c. et erit medietas sesquioctaue. 4. Item quia proportio basium est sicud proportio cuborum sesquialterata, erit basis . a. ad basim . b. proportio, que est due tertie triple, igitur per tertiam regulam basis . a. ad basim . c. est vna tertia proportionis nonuple. 5. Et quia basis . a. ad basim . b. est proportio dupla, ut positum est, ideo per sextam regulam subtrahenda est proportio dupla ab vna tertia nonuple. Et habebitur proportio basis . b. ad basim . c.; et hoc est proportio, que dicitur vna tertia sesquioctaue. (Fig. 3.) 6. Quod patet aliter. quia cubus . b. ad cubum . c. est medietas sesquioctaue, ut iam dictum est, igitur basis ad basim est proportio sesquialterata. ergo a medietate sesquioctaue subtrahenda est tertia pars eius per octauam regulam et habebitur quod prius. 7. Vel breuius per fractiones. patet quod subsesquialterando medietatem sesquioctaue restant due tertie medietatis sesquioctaue et due tertie medietatis ut vna tertia totius, ut notum est, igitur proportio basis . b. ad basim . c. [est] vna tertia sesquioctaue. 8. Iterum proportio laterum cuborum est sicud proportio basium subduplicata; igitur statim patet, quod latus lineare . a. ad latus . b. est medietas duple. 9. Similiter per idem lateris . a. ad latus . c. proportio est $\frac{1}{3}3^p$. 10. Etiam lateris . b. ad latus . c. tertia pars medietatis sesquioctaue vel sexta pars sesquioctaue. — (Fig. 4.)

3. Eodem modo potest queri de proportione sperarum et dyametrorum et maximorum circulorum. vnum idem est uidendum de basibus rectis cuborum sicud de maximis circulis sperarum rectis earum. Et similiter de lateribus rectis cuborum sicud de dyametris sperarum rectis earum, ut patet ex secunda et quinta et ultima 12. Euclidis.

2. **Questio Tertia.** Ideo adhuc gratia exercitij fiat altera questio, et *sint* . 3. *spere . a. b. c. Et sit proportio spere . a. ad . b. medietas duple. Et ipsius spere . a. maximus circulus ad maximum circulum spere . c. sit in medietate triple. Queritur igitur de proportione sperarum. Item de proportione maximorum circulorum earundem sperarum. Item de proportione dyametrorum.* 4. Solutio prime questionis ex hoc patet. Quoniam maximus circulus . a. ad maximum

circulum ipsius . c. est in medietate triple, ergo proportio spere . a. ad speram . c. est $\frac{3}{4} 3^p$., sev vna quarta trium triplarum uel 27^p. 4. Et quia spere . a. ad speram . b. est medietas duple, inde est, quod medietas duple subtrahenda est ab $\frac{1}{4} 27^p$. per octauam regulam et remanebit proportio spere . a. ad speram . c., que est vna octaua pars proportionis . 729. ad . 16. Igitur per quartam regulam ista proportio est idem, quod quarta pars proportionis . 37. ad . 4. 5. Ad secundam questionem solutio talis est. Quia positum est quod spera . a . ad speram . b. se habet in medietate duple, igitur proportio maximi circuli . a. ad maximum circulum . b. est due tertie medietatis duple. Et patet per tertiam regulam, quod hoc est tertia pars duple. 6. Et quia tunc maximi circuli . a. ad maximum circulum ipsius . c. est medietas triple, inde est, quod per octauam regulam subtrahenda est vna tertia duple a medietate triple, et remanebit proportio maximi circuli ipsius . b. ad maximum circulum . c.; et ista proportio est $\frac{1}{6}$ proportionis . 27. ad . 4. 7. Solutio tertie questionis, que est de dyametris, patent [*sic!*] ex solutione secunde, eo quod dyametrorum sperarum est proportio sicud maximorum circulorum proportio subduplicata. Erit ergo dyameter . a. ad dyametrum . b. in proportione, que est $\frac{1}{6} 2^p$. Similiter proportio dyametri . a. ad dyametrum . c. [est] vna quarta triple. 8. Sic erit dyametri . b. ad dyametrum . c. vna 12^a. proportionis, que est . 27. ad . 4. (Fig. 5.) 9. Et per idem potest queri de cubis, ut de taxillis, uariando difficilius questiones quomodolibet. Et possunt fieri facile, ut patet in exemplo in casu nunc dato.

4. Questio Quarta. [De quadratis musicis]. *Sint iterum duo qnadrata et dyameter vnius ad costam alterius resonet dyesin uel semitonium vnius in sonis. Queritur que sit proportio horum quadratorum.* — 2. Premittitur: Sit vnum istorum . d . e. cuius dyameter sit . a. et costa ipsius sit . c.; et alterum quadratum sit . f . g., cuius costa uel corda sibi equalis sit . b.; et sit . a. longior quam . b., cuius igitur proportio . a. ad . b., qui in sonis est dyesis, in numeris est sicud proportio . 256. ad . 243. ut patet per Boetium. (Fig. 6.) 3. Et proportio . a. ad . c. est medietas duple . ergo subtrahenda est vna istarum proportionum ab altera. Et per sextam regulam patet, quod prima est minor quam secunda, et . b. est maius quam . c. in proportione, que restabit per illam subtractionem, et quod proportio . b. ad . c. est medietas proportionis istius numeri . 59049. ad istum numerum . 32768. 4. Et quia proportio quadratorum est sicud suorum laterum proportio duplicata, oportet duplicare proportionem istorum laterum sev proportionem . b. ad . c., sicud docet prima regula, et inuenitur, quod quadratum . f . g. est maius quadrato . e . d . in proportione, que est medietas proportionis istius numeri . 3486784401. ad istum numerum . 1073741824.; talis est ergo proportio quadratorum de quibus querebamus.

5. Adhuc occurrit alia difficultas uel utilitas et alius modus operandi, sed vna regula primitus est ponenda et est ista.

2. **Regula.** *Si duarum rerum fuerit proportio data proportionem quamlibet sibi multiplicem assignare.* 3. Sit . a. maius et . b . minus et eorum proportio data sit . c., sitque . d. multiplex ad . a. secundum numerum . e., sit etiam . f . multiplex ad . b . secundum numerum . g. et proportio inter . g. et . e. sit . h. 4. [Primus casus]. Si igitur numeri . e. et . g. sunt equales manifestum est, quod proportio . d. ad . f. est sicud proportio . a. ad . b., que est data. 5. Secundus casus]. Si autem . e . est maior quam . g., tunc simul addende sunt due proportiones . c. et . h. et proportio ex eis confecta est proportio . d. ad . f. quesita. 6. Verbi gratia . sit . c. sesquialtera et . h. sesquitertia et quod . e. sit . 4. et . g. tres, tunc patet, quod . 4 . a. excedunt . 3 . a. in sesquitertia. Et 3 . a. excedunt tria . b. in sesquialtera igitur . 4 . a . excedunt . 3 . b. in proportione composita ex sesquialtera et sesquitertia sev in dupla. igitur . d . exedit . f . in ista proportione. (Fig. 7.) 7. [Tertius casus]. Si uero e contrario . g . fuerit maior quam . e ., tunc igitur uel . h . et . c . proportiones sunt equales et ergo . d . et . f . sunt equalia, quoniam si . a . est sesquialterum ad . b . tunc tria . b . sunt equalia duobus . a . 8. Sed si proportiones . c . et . h . sunt inequales et sicud primus . g . sit maior numerus quam . e., tunc de istis proportionibus subtrahenda est minor a maiore secundum regulas superius positas. Et proportio residua est proportio . d . ad . f . 9. Et si . e . est maior quam . g ., tunc . d . est maius quam . f. Et si e contrario, tunc e contrario. 10. Verbi gratia si . c . est proportio sesquialtera et . h. sesquitertia, tunc tria . a . faciunt magis quam . 4 . b . quod patet, quia . 3 . a . ad . 3 . b . sunt in proportione sesquialtera. Sed . 4 . c . ad . 3 . b . est proportio sesquitertia; ergo tria . a . sunt magis quam 4 . b . in proportione in qua sesquialtera excedit sesquitertiam sev per sesquioctauam. ergo proportio . d . ad . f. est sesquioctaua. (Fig. 8.) 11. Eodem modo agendum est, si

fuerit e contrario, sev si . h . sit maior quam . c . ut si . h . sit sesquialtera et . c . sesquitertia. sed tunc euenit e contrario, sev quod . f. erit maius quam . d . in proportione sesquioctaua. autem . d . erat sicud . g . et . f . 8., nunc autem . f . est nouem et . d . 8 . et similiter agendum est de proportionibus irrationalibus.

6. Questio Quinta. *Sint igitur duo cubi . a . b . et basis ipsius . a . sit tripla ad basim . b . Queritur ergo, que sit proportio quinque . b ., id est aggregati ex quinque talibus, sicud est . b ., ad vnum . a .* 2. Premittitur: quod basis . a . ad basim . b . ponitur tripla et proportio cuborum sicud suorum basium sesquialterata, igitur ad proportionem triplam addenda est medietas triple per tertiam regulam. Et uenit proportio . a . ad . b . vel medietas proportionis . 27^p.; et patet per sextam regulam, quod ista proportio est maior quam tripla, igitur . a . est maius quam 3 . b . Et per eandem sextam regulam patet, quod proportio vij ad quinque est medietas proportionis . 27 . ad . 25 . 3. Et sic possunt formari et solui questiones.

7. Questio Sexta. Et fiet adhuc vna de ludo taxillorum. *Sint duo taxilli inequales et sit basis maioris dupla ad basim minoris tunc proiiciantur et queritur de proportione tot magnorum, quotus est numerus in basi sua superiore, ad totidem paruos simul sumptos, qui vniuersaliter sint in sua basi superiore.* 2. Et tunc oportebit aliquantum vti additione, aliquantum subtractione. 3. Verbi gratia. sit in maiori . 1 . et in minori tria. queritur ergo de proportione trium paruorum simul ad vnum magnum. 4. Premittitur: quod proportio vnius magni ad vnum paruum est medietas octuple et proportio trium paruorum ad vnum eorum est tripla, ergo subtrahenda est medietas octuple a tripla per sextam regulam et restat trium paruorum ad vnum magnum proportio, que est medietas sesquioctaue. (Fig. 9.) 5. Et ita agendum est in alijs numeris proiectis. Sed quamcumque veniret maior numerus in taxillo maiore, tunc vtendum erit additione proportionum. 6. Si quis autem esset bene promtus in hoc ludo, bene intelligeret in proportionibus.

8. Questio Septima. *Similiter si queritur, que est proportio trium dyametrorum ad quatuor costas eorum quadratorum.* 2. Per idem patet, quod proportio sesquitertia subtrahenda est a medietate duple, quia est minor. igitur . 3 . dyametri excedunt . 4 . costas. [Et] per sextam regulam patet, quod hoc est in medietate sesquioctaue; et sic de consimilibus.

9. **Questio Octaua**. *Sit iterum circulus . c . duplus ad circulum . d . et moueatur . a . circa . c . et . b . circa . d . et perficiat . a . quinque reuolutiones in [tempore], quo . b . perficiat . 7 . Queritur igitur de proportione uelocitatum istorum motuum.* 2. Premittitur: quod circulus . c . ponitur duplus ad circulum . d ., igitur proportio circumferentie ipsius . c . ad circumferentiam ipsius . d . est medietas duple. 3. Sit itaque . e . circumferentia ipsius . c . et . f . circumferentia ipsius . d . ergo proportio . 5 . e . ad . 5 . f . est medietas duple, sed proportio . 7 . f . ad . 5 . f . est proportio superpartiens duas quintas et per eandem sextam patet, quod medietas duple est maior quam superpartiens duas quintas. 4. Et per eandem sextam patet subtrahendo, quod excessus iste est medietas proportionis . 50 . ad . 49. 5. Et quoniam proportio uelocitatum est sicud proportio spatiorum pertransitorum in eodem tempore, sequitur, quod . a . moueatur velocius . b . in proportione, que est medietas proportionis . 50 . ad . 49 . — (Fig. 10).

10. **Questio Nona**. *Eodem modo si ponitur, quod . a . pertransiret dyametrum quadrati in . 7 . diebus et . b . costam eiusdem quadrati in . 5 . Et queritur de proportione velocitatum.* 2. Premittendum est quod [si] . c . pertransiret dyametrum in . 5 . diebus, tunc patet, qnod . c . esset uelocius quam . a . in proportione superpartiente duas quintas, et ideo est uelocius . b . in medietate duple. 3. ergo . a . est uelocius . b . in ista proportione, in qua medietas duple excedit superpartientem duas quintas et ista est medietas proportionis . 50 . ad . 49 . ut dictum est ante, et ita dicendum est de similibus questionibus.

EXPLICIT SECUNDUS TRACTATUS. [INCIPIT TERTIUS.]

Nunc ergo ludendo in alio proposito ponatur triangulus equilaterus . a . b . c . (Fig. 11) inscriptus circulo, cuius dyameter sit . a . e . diuidens trigonum et eius latus . b . c . per equalia in puncto . d .; tunc primo aliquas suppositiones. Et postea conclusiones. 2. **Prima suppositio**. *Quadratum dyametris . a . e . est sesqnitertium quadrato lateris . a . c .* hec suppositio satis patet ex octaua . 13 . Euclidis et probatur, quia protracta linea . c . e . erit triangulus in semicirculo rectus per . 30. tertij; ergo quadratum . a . e . ut duo quadrata . a . c . et . c . e . per penultimam primi, et quia linea . c . e . est latus exagoni et per . 9 . equalis semidyametro, per . 15 . quarti erit quadratum . a . c . quadruplum quadrato . c . e .; ergo quadratum . a . e . erit sesquitertium quadrate . a . c . etc. — 3. **Secunda suppositio**. *Quadratum . a . c . est sesquitertium quadrati . a . d .* quia angulus . d . est rectus, quadratum . a . c . velut duo quadrata . a . d . et . d . c . Et quoniam linea . a . c . dupla est linea . c . d . erit quadratum . a . c . quadruplum quadrato . c . d . ergo sesquitertium quadrato . a . d . — 4. **Tertia suppositio**. *Quadratum . a . d . triplum est quadrato . c . d .* patet, quia per precedentem quadratum . a . c . est sesquitertium quadrato . a . d . et quadruplum quadrato . c . d .; ergo qnadratum . a . d . triplum est quadrato . c . d . — 5. **Quarta suppositio**. *Proportio quadrati* [. *a . d* .] *ad trigonum inscriptum est medietas triple* . quoniam quadratum . a . d . ad quadratum . c . d . est triplum per precedentem, igitur proportio linee [. a . d .] ad lineam . c . d . est medietas triple per . 19 . sexti. Sit ergo . d . f . medio loco proportionalis inter . a . d . et . c . d . ergo proportio quadrati . a . d . ad . d . f . est equale ei, quod fit ex . a . d . in . d . c . per . 17 . sexti. Et illud, quod fit ex . a . d . in . c . d . est equale trigono; igitur quadratum . d . f . est equale trigono . sed iam patuit, quod proportio quadrati . a . d . ad quadratum . d . f . est medietas triple, ergo proportio . a . d . ad trigonum est medietas triple, quod est propositum. — 6. **Quinta suppositio**. *Quadratum circumscriptum duplum est quadrato inscripto*, patet satis, quia dyameter quadrati inscripti equalis est lateri seu coste quadrati circumscripti. ergo lateris circumscripti ad latus inscripti proportio est medietas duple; igitur quadrati ad quadratum est proportio dupla. — 7. **Sexta suppositio**. *Trigonus circumscriptus trigono inscripto est quadruplus.* Quoniam si a tribus punctis . a . b . c . trigoni inscripti protrahuntur . 3 . linee contingentes circulum, constituunt trigonum circumscriptum, cuius vnus angulus sit . g ., igitur supra punctum . a . sunt tres anguli trium trigonorum equales et similiter supra punctum . b . duplatus . a . b . est conveniens (?), igitur per . 26 . primi Euclidis . a . b . g . et . a . b . c . sunt equales et ita de alijs. igitur trigonus circumscriptus continet quatuor trigonos equales trigono inscripto etc. (Fig. 11).

2. Prima Conclusio. *Proportio quadrati lateris trigoni equilateri ad trigonum eundem est medietas proportionis . 16 . ad . 3 . sev medietas quintuple sesquitertie.* 2. Quoniam secundam figuram prius positam quadratum lateris . a . c . est sesquitertium quadrato linee

. a . d . per secundam suppositionem, ut proportio [quadrati] . a . d . ad trigonum est medietas triple per quartam suppositionem. ergo proportio quadrati . a . c . ad trigonum est composita ex sesquitertia et medietate triple, et per additionem proportionum secundam quintam regulam patet, quod ista est medietas . 16 . ad . 3 ., quod est propositum.

3. Secunda Conclusio. *Proportio quadrati circumscripti circulo ad trigonum equilaterum eidem circulo inscriptum est medietas istius numeri . 256. ad istum numerum . 27.* Quod sic patet. nam quadratum circumscriptum est quadratum dyametri . a . e. Et illud quadratum dyametri . a . c . est sesquitertium quadrati lateris . a . c . per primam suppositionem. Et proportio quadrati . a . c . ad trigonum est medietas proportionis . 16 . ad. 3. per precedentem. 3. ergo proportio quadrati circumscripti ad trigonum inscriptum est composita ex sesquitertia et medietate proportionis . 16 . ad . 3 .; et per quintam regulam algorismi proportionum constat, quod ista proportio est medietas proportionis . 256. ad . 27. sev medietas nonuple superpartientis . 13. vicesimas septimas, quod scribitur sic $\frac{1}{2} 9^{p} \frac{13}{27}$. —

4. Tertia Conclusio. *Proportio trigoni circumscripti ad quadratum circumscriptum est medietas proportionis . 27. ad . 16.* 2. Quoniam trigonus circumscriptus est quadruplus ad trigonum inscriptum per sextam suppositionem et proportio quadrati circumscripti ad trigonum inscriptum est medietas proportionis . 256. ad . 27. per precedentem, igitur ista medietas subtrahenda est a proportione quadrupla per sextam regulam et restabit proportio trigoni circumscripti ad quadratum circumscriptum sev medietas proportionis . 27. ad . 16. 3. Quoniam si duo inequalia componuntur ad tertium, verbi gratia . a . et . b . ad . c., si proportio . a . ad . c. subtrahatur a proportione . b. ad . c. aut e contrario, remanet proportio . b. ad . a. 4. Sic ergo patet propositum.

5. Quarta Conclusio. *Proportio quadrati inscripti ad trigonum inscriptum est medietas proportionis . 64. ad . 27.* 2. Probatur sic: proportio quadrati circumscripti ad trigonum inscriptum est medietas . 256 . ad . 27. per secundam conclusionem et proportio quadrati circumscripti ad quadratum inscriptum est dupla per quintam suppositionem. 3. ergo proportio dupla subtrahenda est [a] medietate proportionis . 256. ad . 27. per sextam regulam et restabit medietas proportionis . 64. ad . 27., que est proportio quadrati inscripti ad trigonum inscriptum et hoc fuit probandum. —

6. Quinta Conclusio. *Proportio trigoni circumscripti ad quadratum inscriptum est medietas proportionis . 27. ad . 4.* 2. Quoniam hec proportio componitur ex proportione trigoni circumscripti ad quadratum circumscriptum, que est medietas proportionis . 27. ad . 16. per tertiam conclusionem, et ex proportione quadrati circumscripti ad quadratum inscriptum, qui est dupla per quintam suppositionem, et proportio ex hijs composita est medietas proportionis . 27. ad . 4. per quintam regulam; ergo hec proportio est, quam querimus. 3. Hoc idem potest probari ex sexta suppositione et quarta conclusione et sexta regula, subtrahendo medietatem proportionis . 64. ad . 27. a proportione quadrupla, et venit, ut prius, medietas proportionis . 27. ad . 4.; ergo conclusio uera. —

7. Sic ergo dictum sit de trigonis et quadratis tam inscriptis quam circumscriptis quarum proportiones ponentur preterea in figura. (Fig. 12.) Nunc ergo ad figuras alias transeamus et ponitur adhuc vna suppositio talis: 3. **Septima suppositio.** *Exagonus inscriptus duplus est trigono inscripto.* quod patet faciliter inscribendo exagonum circa trigonum et diuidendo trigonum in tres triangulos per tres lineas protractas ab angulis trigoni ad centrum circuli, et tunc fierent in exagono . 6. [tri]anguli similes et equales, quod faciliter patet, quorum . 3. continet trigonus inscriptus; igitur exagonus est trigono duplus. [Corrollarium.] Ex quo cum sexta suppositione statim sequitur, quod *trigonus circumscriptus duplus est exagono inscripto.* — (Fig. 13).

8. Ex quo corrollario cum tertia conclusione et sexta regula patet sexta conclusio, que talis est:

2. **Sexta conclusio.** *Proportio quadrati circumscripti ad exagonum inscriptum est medietas proportionis . 64. ad . 27.* 3. Vnum patet, quod est eadem proportio sicud quadrati inscripti ad trigonum inscriptum. 4. Et potest statim probari ex precedentis suppositione, conclusione et regula, agendo sicud prius. —

9. Septima conclusio. *Proportio exagoni inscripti ad quadratum inscriptum est medietas proportionis . 27. ad . 16.* 2. hec conclusio [patet] per eundem modum, sicud et alia, et hoc ex septima suppositione et quarta conclusione et sexta regula. Et hec proportio est eadem sicud trianguli circumscripti ad quadratum circumscriptum. 3. Hec ergo sufficiant de exagono inscripto. —

10. Sed videamus de exagono circumscripto et premittatur iterum altera suppositio et est ista. 2. **Octaua suppositio.** *Exagonus circumscriptus exagono inscripto est sesquitertium.* patet sic: Describatur in circulo latus exagoni, quod sit . e . f., factoque trigono super centrum . a. protahatur . a . g. et . a . c. et sit . c . g. contingens circulum equedistans linee . e . f.; erit ergo. . g . c. latus exagoni circumscripti. Protrahaturque . a . et . b. per medium trigonum, qui est equilaterus et ergo quadratum . a . c. est sesquitertium quadrato . d . b . per secundam suppositionem; ergo . a . b . ad . a . c. est medietas sesquitertie . sed . a . b. et . a . c. sunt equales, igitur . a . c . ad . a . e. sev latus maioris trigoni ad latus minoris est medietas sesquitertie. Et quoniam duo trianguli . a . c . b. et . a . e . d. sunt equales, ergo per quartam sexti proportio . b . c . ad . e . d. est medietas sesquitertie . igitur . g . c., lateris exagoni circumscripti, ad . e . f., latus exagoni inscripti, est medietas sesquitertie; igitur exagonum circumscriptum ad exagonum inscriptum est proportio sesquitertia, quod est propositum. (Fig. 14.)

11. Ex isto suppositione cum predictis conclusionibus et regulis algorismi positis superius possunt inuestigari proportiones exagoni circumscripti ad omnia aut data et dicta modo et formas superius annotatas. 2. Et omnes igitur he proportiones omnium figurarum predictarum sunt armonice uel medietates armonicarum, quas omnes, ut pateant clarius, ponuntur in figura ista (Fig. 12). 3. Inspice, quam pulcre . 27 . est proportionum plurium medietarum in . 6 . modo maior terminus, modo minor terminus uicibus alternatis. 4. Omnisque proportio superior medietas est numeri quadrati ad cubicum aut e contrario. Et semper in superioribus proportionibus medietans numerus quadratus est a parte figure quadrate. 5. Sciendum autem est quod . a ., trigonus circumscriptus, magis est quam . b . et . b . est maius . g . Similiter . g . maius quam . c. Et sit . b . quadratum circumscriptum et . g . exagonus circumscriptus, . c . exagonus inscriptus, . e . trigonus inscriptus. 6. Communiter notandum erit quod omnium figurarum circulo inscriptarum equilaterum ista, que habet plura latera, semper est maior . sed de circulo inscriptis est e contrario, que plurium fuerint angulorum uel laterum. ita est . d ., quadratum inscriptum, minor, quod esset satis facile demonstrare. 7. Sed non oportet, dicunt terminare uel exire proportionem. 8. Similitudines itaque proportionum, que sunt in precedenti figura, satis patent intuenti . quoniam sicud. a . ad . c . ita . c . ad . e . et ita . b . ad . d . Iterum sicud. . b . ad . c . ita . d . ad . e. —

12. Per eundem modum potest inuestigari proportio cuiuslibet figure ad quamlibet istarum, si scietur eius proportio ad vnam earum. Et ergo gratia exempli probatur adhuc vna altera suppositio sev geometrica conclusio, que talis est. 2. Sequitur **Ultima suppositio.** *Octogonus circulo inscriptus est medium proportionale inter quadratum eidem circulo inscriptum et quadratum eidem circumscriptum.* (Fig. 15.) Scribatur circulus, cuius centrum sit . a .; cui inscribatur quadratum, cuius vnum latus sit . b . d . et etiam octogonus, cuis vnum latus sit . b . f ., et circumscribatur quadratum, cuius vnum latus sit . k . c ., ut patet in exemplo, in quo apparet, quod quadratum . a . b . c . d . est quarta pars quadrati circumscripti et eius dyameter . a . c . diuidatur per medium in puncto . e . per lineam . b . d ., que est latus quadrati inscripti, et similiter linea . a . k . diuiditur per medium in puncto . g. Et est iste aliud punctum quadrati . a . g . b . e ., cuius linea . a . b . est dyameter. ergo proportio . a . b . ad . a . c . est sicud dyametri ad costam, sev medietas duple. 3. Sed . a . b . et . a . f . sunt equales ergo . a . f . ad . a . e . proportio est medietas duple et . a . c . [ad] . a . e . est dupla proportio. igitur . a . f . est medium proportionale inter . a . c . et . a . e. 4. Ymaginamus igitur trianguli (sic!) . a . b . c . et . a . b . e ., que sunt in eadem altitudine . igitur per primam sexti Euclidis earum proportio est sicud suorum basium, ergo etiam eorum multiplicium. Sed tres figure date sunt huius, quia primus triangulus est octaua pars quadrati circumscripti et secundus octaua pars quadrati inscripti . ergo iste figure sunt continue proportionales secundum medietatem proportionis duple. —

13. Proportio itaque octogoni inscripti ad quadratum inscriptum est medietas duple et ad omnes figuras, de quibus prius dicimus, habet tales proportiones, quales hic inferius describuntur (Fig. 16). 2. Quod potest probari per regulas, suppositiones et conclusiones prius positas. 3. Et sicud de alijs dicebatur, omnes he proportiones sunt armonice uel medietates armonicarum. 4. Verum ymaginande sunt due series numerorum ab vnitate continue proportionalium, vna secundam proportionem duplam, ut: 1. 2. 4. 8. 16. etc. in infinitum, altera secundam proportionem triplam, vt: 1. 3. 9. 27. etc. 5. Et isti numeri dicuntur armonici. Et quelibet proportio inter duos istorum, siue sint eiusdem ordinationis, siue vnius de alia et alter de alia, dicitur armonica Et tum hec (sic!) numeri ex eis generati dicuntur armonici. 6. Sed non ita principaliter. pro talibus itaque figuris, que dicta sunt, sufficiant. —

14. De proportionibus Aspectuum Celi. Ponam rursum. 4. linee recte in circulo, que sint distantie recte sev quatuor principalium aspectuum, que ponuntur in celo. 2. Protrahanturque he linee ab vno puncto et sint . a . b ., . a . c ., . a . d . et . a . e . Sitque . a . e aspectus sextilis, ergo ipsum . a . e . erit latus exagoni inscripti circulo. Sit etiam . a . d . aspectus quartus, ergo ipsum . a . d . erit latus quadrati circulo inscripti; et sit . a . c . aspectus tertius, ergo ipsa linea . a . c . erit latus trigoni equilateri circuli inscripti. Sitque . a . b . aspectus oppositus, ergo . a . b . erit dyameter circuli, ergo etiam erit dyameter quadrati cui . a . d . est latus. 3. Dicamus ergo quod proportio . a . b . ad . a . d . est medietas duple, quia sicud dyametri ad costam quadrati. 4. Et proportio . a . b . ad . a . e . est proportio dupla, quia . a . e . est latus exagoni circulo inscripti et per conclusionem erit semidyameter et subdupla dyametro. 5. Ergo si proportio . a . b . ad . a . d ., que est medietas duple, subtrahatur a proportione . a . b . ad . a . e ., que est dupla, restabit proportio . a . b . ad . a . e . sev medietas duple. 6. Et quoniam quadratum linee . a . b . est sesquitertium quadrato linee . a . c . per primam suppositionem, erit proportio linee . a . b . ad lineam. a . c . medietas sesquitertie. 7. Et si hec proportioque est medietas sesquitertie, subtrahatur a proportione linee . a . b . ad lineam . a . d . que est medietas duple, sicud docet nona regula, restabit proportio . a . c . ad . a . d . Et per eandem regulam patet, quod hec proportio est medietas sesquialtere. 8. Si autem hec proportio . a . c . ad . a . d . que est medietas sesquialtere, addatur cum proportione . a . d, ad . a . e ., que est medietas duple, uenit proportio . a . c . ad . a . e . Et per nonam regulam patet, quod proportio est medietas triple. 9. Sic igitur se habent aspectus signorum celi secundum hanc consideratonem et patet in figura. (Fig. 17).

[EXPLICIT TERTIUS TRACTATUS.]

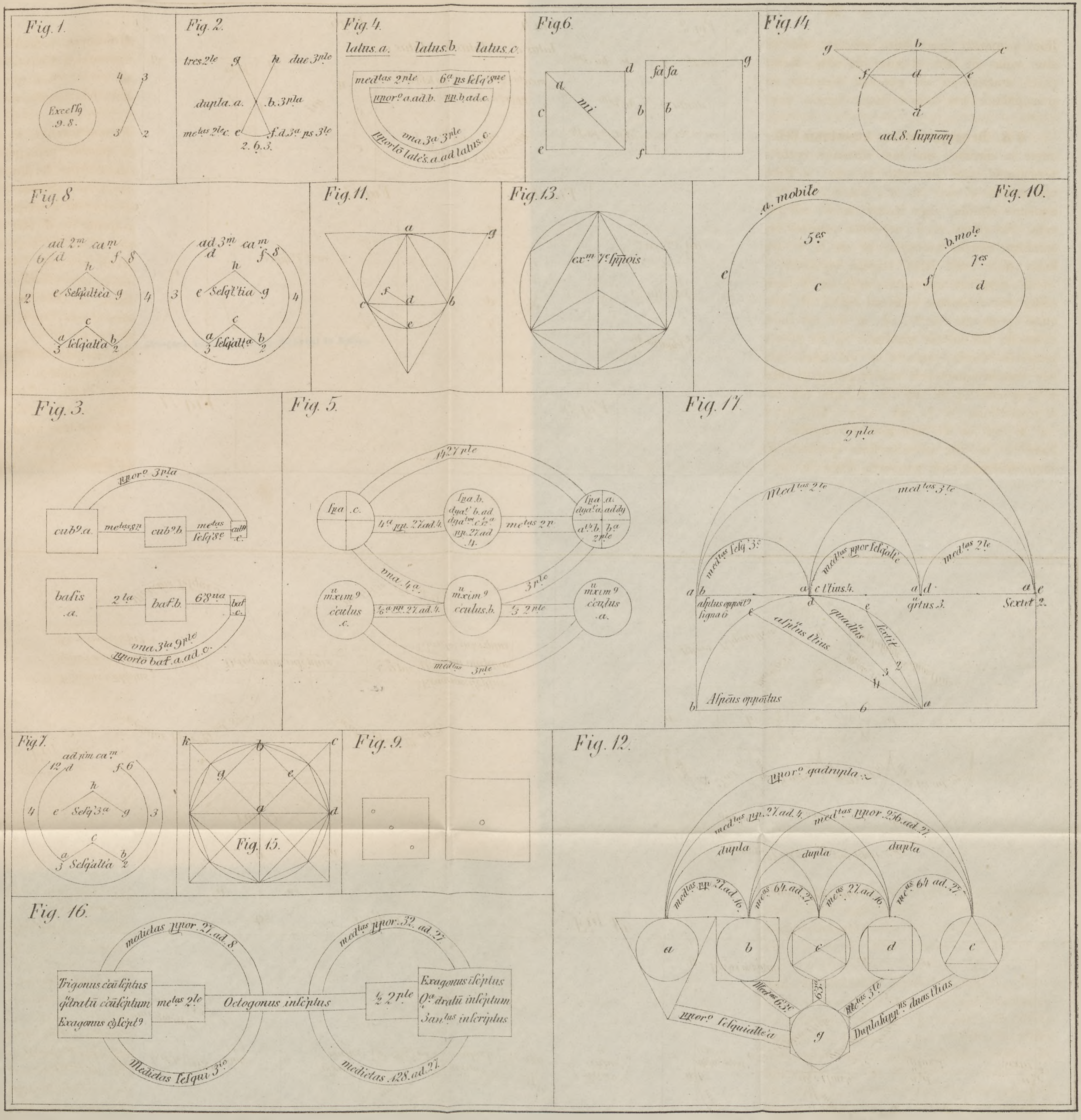
Fig. 1.
Fig. 2.
Fig. 4.
latus. a.
latus. b.
latus. c.
Fig. 6.
Fig. 14.
Fig. 8.
Fig. 11.
Fig. 13.
Fig. 10.
a. mobile
Fig. 3.
Fig. 5.
Fig. 17.
Fig. 7.
Fig. 15.
Fig. 9.
Fig. 12.
Fig. 16.
Trigonus
Exagonus
Octogonus inscriptus
Exagonus inscriptus
medietas sesqui 3.
medietas 128. ad 27.

Druck von J. Draeger's Buchdruckerei (C. Feicht) in Berlin.