Zu der

Donnerstag, den 21sten März 1839,

abzuhaltenden

öffentlichen Prüfung

der

sämmtlichen Klassen des Gymnasiums

zu Königsberg in der Neumark

ladet ergebenst ein

J. GUIARD,
Prorektor des Gymnasiums und Prediger der kleineren evangelischen Gemeine.

Hierin die Abhandlung des Oberlehrers Heiligendörfer:
Ueber das Problem: In eine Kurve des zweiten Grades ein Dreieck zu beschreiben, dessen Seiten durch drei gegebene Punkte gehen.

Königsberg in der Neumark.
Aus der Druckerei von Windolff & Striese.

Zu der

Donnerstag, den 21ten März [illegible],

anzustellenden

öffentlichen Prüfung

der

[illegible] Schülern des Gymnasiums

[illegible]

ladet ergebenst ein

[illegible],

[illegible]

[illegible]
[illegible]
[illegible]

Königsberg in der Neumark.

[illegible]

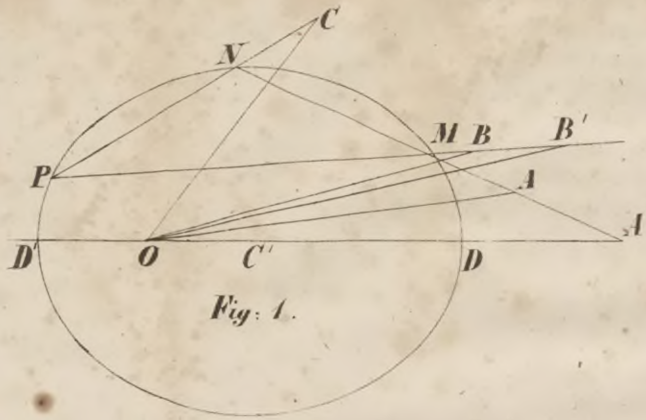

Fig: 1.

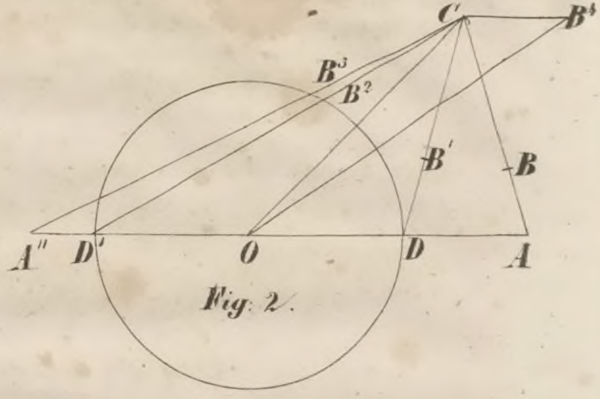

Fig: 2.

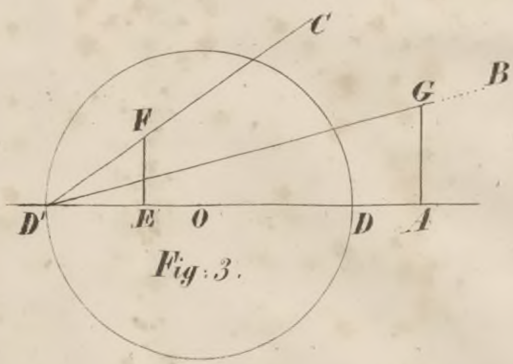

Fig: 3.

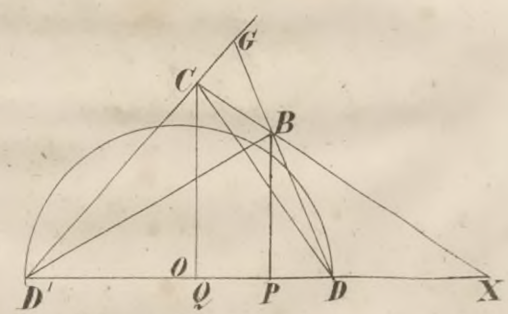

Fig. 4.

Ueber das Problem: In eine Kurve des zweiten Grades ein Dreieck zu beschreiben, dessen Seiten durch drei gegebene Punkte gehen,

von

Gustav Heiligendörfer,
Oberlehrer der Mathematik und Physik.

Wenn im Folgenden ein schon von mehren Mathematikern behandeltes Problem von Neuem untersucht wird, so hat indeß hier der Verf. die Untersuchungen, die seines Wissens bisher nur für den Kreis geschahen, bei den Kegelschnittslinien im Allgemeinen vorgenommen, daraus Folgerungen in verschiedener Beziehung beim Kreise entwickelt, und nach seiner eigenen Konstruction analytisch dargestellt. Ein Hauptaugenmerk ist besonders darauf gerichtet, Anfängern in der Analysis nützlich zu werden.

№ 1.

Es sei Fig. 1. Bei der Ellipse O der Brennpunkt, C' der Mittelpunkt, $C'O = c'$ die Excentricität, $C'D = a'$ die halbe große Axe, b' die halbe kleine Axe, MN eine Seite des gesuchten Dreiecks, welche durch den gegebenen Punkt A geht, dessen Entfernung von O sowohl, als der W. AOD als bekannt vorausgesetzt werden kann. Man setze daher W. $AOD = \alpha$, $AO = a$ und die gesuchten Winkel $MOD = \varphi$ $NOD = \psi$. Hieraus folgt, daß W. $MOA = \varphi - \alpha$, W. $NOA = \psi - \alpha$, W. $OAN + ONA = 180^0 - NOA$, $\frac{OAN + ONA}{2} = 90^0 - \frac{NOA}{2}$,

tang. $\frac{1}{2}$ $(OAN + ONA) = \text{cotg.}\ \frac{NOA}{2} = \frac{1}{\text{tg.}\ \frac{\psi - \alpha}{2}}$; ebenso tang. $\frac{1}{2}$ $(OMA + OAM) = \frac{1}{\text{tg.}\ \frac{\varphi - \alpha}{2}}$;

ferner ist $NOM = NOD - MOD = \psi - \varphi = \psi - \alpha - (\varphi - \alpha)$.

Im Folgenden sollen der Sinus und Cosinus eines Bogens z. B. von α resp. durch α, α_2 bezeichnet, also sin. $\alpha = \alpha$, cos. $\alpha = \alpha_2$ und auf dieselbe Weise die Sinus und Cosinus zwei- und mehrtheiliger Winkel der Kürze wegen geschrieben werden. Z. B. sin. $(A + B) = (A + B)$, cos. $(A + B) = (A + B)_2$ u. s. w.

Da nun, wenn u der Leitstrahl aus dem Brennpunkt und der von diesem mit der Axe gebildete Winkel $= t$ ist, $u = \frac{b,^2}{a' - c't_2}$ und

$$OA+ON:OA-ON=\text{tang. } \tfrac{1}{2}\,(ONA+OAN):\text{tang. } \tfrac{1}{2}\,(ONA-OAN)$$
$$OA+OM:OA-OM=\text{tang. } \tfrac{1}{2}\,(OMA+OAM):\text{tang. } \tfrac{1}{2}\,(OMA-OAM);$$

so folgt nach gehöriger Substitution aus den Dreiecken AON und AOM mit Berücksichtigung der Winkel ψ und φ statt W. t

$$a+\frac{b'^2}{a'-c'\psi_2}:a-\frac{b'^2}{a'-c'\psi_2}=\frac{1}{\text{tg. }\frac{\psi-\alpha}{2}}:\text{tang. } \tfrac{1}{2}\,(ONA-OAN)$$

$$a+\frac{b'^2}{a'-c'\varphi_2}:a-\frac{b'^2}{a'-c'\varphi_2}=\frac{1}{\text{tg. }\frac{\varphi-\alpha}{2}}:\text{tg. } \tfrac{1}{2}\,(ONA-OAM+\psi-\alpha-(\varphi-\alpha)$$

Setzt man nun $a(a'-c'\psi_2)+b'^2=\pi$, $a(a'-c'\psi_2)-b'^2=\varrho$, $a(a'-c'\varphi_2)+b'^2=\pi'$, $a(a'-c'\varphi_2)-b'^2=\varrho'$, tang. $\frac{\psi-\alpha}{2}=\omega$, tang. $\frac{\varphi-\alpha}{2}=\omega'$, $ONA-OAM=\zeta$, so verwandeln sich die beiden letzten Proportionen in folgende:

$$\left.\begin{array}{l}\pi:\varrho=\dfrac{1}{\omega}:\text{tang. } \tfrac{1}{2}\zeta \text{ und}\\[2ex] \pi':\varrho'=\dfrac{1}{\omega'}:\text{tang. } \left(\tfrac{1}{2}\zeta+\dfrac{\psi-\alpha-(\varphi-\alpha)}{2}\right)\end{array}\right\}\;\ldots\;(A)$$

Eliminirt man aus (A) tang. $\frac{1}{2}\zeta$, indem man bemerkt, daß

$$\text{tang. }\left(\tfrac{1}{2}\zeta+\frac{\psi-\alpha-(\varphi-\alpha)}{2}\right)=\frac{\text{tg. }\tfrac{1}{2}\zeta+\text{tg. }\frac{\psi-\alpha-(\varphi-\alpha)}{2}}{1-\text{tg. }\tfrac{1}{2}\zeta.\ \text{tg. }\frac{\psi-\alpha-(\varphi-\alpha)}{2}}$$

$$\text{tang. }\left(\frac{\psi-\alpha}{2}-\frac{\varphi-\alpha}{2}\right)=\frac{\text{tg. }\frac{\psi-\alpha}{2}-\text{tg. }\frac{\varphi-\alpha}{2}}{1+\text{tg. }\frac{\psi-\alpha}{2}.\ \text{tg. }\frac{\varphi-\alpha}{2}}=\frac{\omega-\omega'}{1+\omega\omega'}$$

$$\text{folglich tang. }\left(\tfrac{1}{2}\zeta+\frac{\psi-\alpha-(\varphi-\alpha)}{2}\right)=\frac{\frac{\varrho}{\pi\omega}+\frac{\omega-\omega'}{1+\omega\omega'}}{1-\frac{\varrho}{\pi\omega}\cdot\frac{\omega-\omega'}{1+\omega\omega'}}$$

$=\dfrac{\varrho}{\pi'\omega'}$; so erhält man:

$\pi\varrho'\omega+\pi\varrho'\omega^2\omega'-\varrho\varrho'\omega-\varrho\varrho'\omega'=\pi\varrho\omega'+\pi'\varrho\omega\omega'^2+\pi\pi'\omega^2\omega'-\pi\pi'\omega\omega'^2$. Nun ist aber $\varrho=\pi-2b'^2$, $\varrho'=\pi'-2b'^2$, welche Werthe in die letzte Gleichung substituirt geben.

$$2b'^2(\omega'-\omega)+\pi'\omega-\pi\omega'+\omega\omega'(\pi'\omega'-\pi\omega)=0\;\ldots\;(B)$$
$$\text{oder: } 2b'^2(\omega'-\omega)+\pi'\omega(1+\omega'^2)-\pi\omega'(1+\omega^2)=0$$

Anmerk. Wenn man den Leitstrahl aus dem Mittelpunkt nimmt, $C'N=u$ setzt, so sind, wenn jetzt W. $NCD=\psi$, die diesem Winkel entsprechenden rechtwinkligen Koordinaten $u\psi_1$, $u\psi_2$, und es wird daher die Gleichung der Ellipse, nachdem man diese Werthe substituirt hat, durch den Leitstrahl ausgedrückt, folgende: $u=\dfrac{a'b'}{\sqrt{a'^2-c'^2\psi_2}}$ Man erhält dann für

π, ϱ, π', ϱ' Ausdrücke, die den vorigen analog sind z. B. $\pi = a(a'^2 - c'^2\psi_2)^{\frac{1}{2}} + a'b'$, $\varrho = \pi - 2a'b'$ u. s. w., ferner eine Gleichung, übereinstimmend mit (B).

Nimmt man aber vortheilhafter den Leitstrahl aus dem Brennpunkt, so ist die Lösung auf alle Kegelschnittslinien (auch auf die Parabel) anwendbar.

Da nach dem bekannten Satz $1 + \text{tang. } A^2 = \text{sec. } A^2 = \frac{1}{\text{cos. } A}$, $\text{cos. } \frac{1}{2}A^2 = \frac{1 + \text{cos. } A}{2}$ und wenn zur Abkürzung $(\varphi - \alpha)_2 = \eta$, $(\psi - \alpha)_2 = \zeta'$, so verwandelt sich die Gleichung (B) in: $2b'^2(\omega' - \omega) + \frac{2\pi'\omega}{1+\eta} - \frac{2\pi\omega'}{1+\zeta'} = o$ oder [durch $2\omega'$ dividirt und da $\text{tang.} \frac{1}{2}A = \frac{1 - \text{cos.} A}{\text{sin.} A}$ also $\frac{\omega}{\omega'}$

$$= \frac{1-\zeta'}{1-\eta}\sqrt{\frac{1-\eta^2}{1-\zeta'^2}}\Bigg] \text{ in:}$$

$$b'^2\left[\frac{1-\zeta'}{1-\eta}\sqrt{\frac{1-\eta^2}{1-\zeta'^2}} - 1\right] - \frac{\pi'}{1+\eta} \cdot \frac{1-\zeta'}{1-\eta}\sqrt{\frac{1-\eta^2}{1-\zeta'^2}} + \frac{\pi}{1+\zeta'} = o$$

oder $$\sqrt{\frac{1-\zeta'}{1+\zeta'}}\sqrt{\frac{1+\eta}{1-\eta}}\;\frac{b_,^2 + b_,^2\eta - \pi'}{1+\eta} + \frac{\pi - b'^2 - b'^2\zeta'}{1+\zeta'} = o$$

oder $$\sqrt{\frac{1-\zeta'^2}{1-\eta^2}}\,(b'^2 + b'^2\eta - \pi') + \pi' - b' - b'^2\zeta' = o$$

oder $$\sqrt{\frac{1-\zeta'^2}{1-\eta^2}}\; b'^2\eta - aa' + ac'\varphi_,) + aa' - ac\psi_2 - b'^2\zeta' = o$$

oder (unter einerlei Benennung gebracht, und weil $\text{sin. } (A - B) = \text{sin. } A. \text{ cos. } B - \text{cos. } A. \text{ sin. } B.$)

$$\frac{b'^2}{a}\,\frac{(\psi-\varphi)_,}{(\varphi-\alpha)_,} + c'\left(\varphi^2\frac{(\psi-\alpha)_,}{(\varphi-\alpha)_,} - \psi^2\right) + a'\left(1 - \frac{(\psi-\alpha)_,}{(\varphi-\alpha)_,}\right) = o$$

oder: $$\frac{b_,^2}{a}(\psi-\varphi)_, + c'(\varphi^2(\psi-\alpha)_, - \psi^2(\varphi-\alpha)_,) + a'((\varphi-\alpha)_, - (\psi-\alpha)_,) = o$$

oder: $$\frac{b'^2}{a}(\psi_,\varphi_2 - \varphi_,\psi_2) + c'[\varphi^2(\psi_,\alpha_2 - \alpha_,\psi_2) - \psi^2(\varphi_,\alpha_2 - \alpha_,\varphi_2)] - a'(\psi_,\alpha_2 - \alpha_,\psi_2)$$
$$+ a'(\varphi_,\alpha_2 - \alpha_,\varphi^2) = o$$

oder: $$\psi_,\left(\frac{b'^2}{a}\varphi_2 + c'\alpha_2\varphi_2 - a'\alpha_2\right) - \varphi_,\left(\frac{b'^2}{a}\psi_2 + c'\alpha_2\psi_2 - a\alpha_2\right) + a'\alpha_,(\psi_2 - \varphi_2) = o$$

oder: $$\left(\frac{b'^2}{a} + c'\alpha_2\right)(\psi_,\varphi_2 - \varphi_,\psi_2) - a'\alpha_2(\psi_, - \varphi_,) - a'\alpha_,(\varphi_2 - \psi_2) = o$$

oder: [da $\text{sin. } A = 2\text{sin.}\frac{1}{2}A.\ \text{cos.}\frac{1}{2}A$, $\text{sin.} A - \text{sin.} B = 2\text{sin.}\frac{1}{2}(A - B).\ \text{cos.}\frac{1}{2}(A + B).$
$\text{cos.} B - \text{cos.} A = 2\text{sin.}\frac{1}{2}(A + B).\ \text{sin.}\frac{1}{2}(A - B)$]

$$\left(\frac{b'^2}{a} + c'\alpha_2\right).\ \left(\frac{\psi-\varphi}{2}\right)_,\left(\frac{\psi-\varphi}{2}\right)_2 - a'\alpha_2\left(\frac{\psi-\varphi}{2}\right)_,.\ \left(\frac{\psi+\varphi}{2}\right)_2 - a'\alpha_2\left(\frac{\psi+\varphi}{2}\right)_,.\ \left(\frac{\psi-\varphi}{2}\right)_, = o$$

oder: $$\left(\frac{b'}{a} + c'\alpha_2\right).\ \left(\frac{\psi-\varphi}{2}\right)_2 - a'\alpha_2\left(\frac{\psi+\varphi}{2}\right)_2 - a'\alpha_,\left(\frac{\psi+\varphi}{2}\right)_, = o$$

oder [ausgeführt und durch $\psi_2\varphi_2$ dividirt]

$$\left(\frac{b'^2}{a}+c'\alpha^2\right)\left(1+tg.\tfrac{1}{2}\psi.\ tg.\tfrac{1}{2}\varphi\right)-a'\alpha_2\left(1-tg.\tfrac{1}{2}\varphi\, tg.\tfrac{1}{2}\psi\right)-a'\alpha_{,}\left(tg.\tfrac{1}{2}\psi+tg.\tfrac{1}{2}\varphi\right)=0$$

oder endlich:

$$tang.\tfrac{1}{2}\psi\ tang.\tfrac{1}{2}\varphi\left(\frac{b'^2}{a}+c'\alpha_2+a'\alpha_2\right)-a'\alpha_{,}\ tang.\tfrac{1}{2}\psi-a'\alpha_{,}\ tg.\tfrac{1}{2}\varphi+\frac{b'^2}{a}+c'\alpha_2-a'\alpha_2=0 \ \ldots\ldots (C)$$

Um die zweite Gleichung zu erhalten, vertausche man A, AO=a, W. AOD=α, W. MOD=φ, W. NOD=ψ nach der Reihe mit B, BO=b, W. BOD=β, W. MOD=φ, W. POD=ξ folglich heißt die zweite Gleichung:

$$tang.\tfrac{1}{2}\xi.\ tang.\tfrac{1}{2}\varphi\left(\frac{b'^2}{b}+c'\beta_2+a'\beta_2\right)-a'\beta_{,}.\ tg.\tfrac{1}{2}\xi-a'\beta_2.\ tg.\tfrac{1}{2}\varphi+\frac{b'^2}{b}+c'\beta_2-a'\beta_2=0 \ \ldots\ldots (C').$$

Ebenso vertausche man, um die dritte Gleichung zu erhalten, A, AO=a, W. AOD =α, W. MOD=φ, W. NOD=ψ nach der Reihe mit C, CO=c, W. COD=γ, W. POD =ξ, W. NOD=ψ, und es heißt daher die dritte Gleichung:

$$tang.\tfrac{1}{2}\psi.\ tang.\tfrac{1}{2}\xi\left(\frac{b'^2}{c}+c'\gamma_2+a'\gamma_2\right)-a'\gamma_{,}.\ tg.\tfrac{1}{2}\xi-a'\gamma_{,}.\ tang.\tfrac{1}{2}\psi+\frac{b'^2}{c}+c'\gamma_2-a'\gamma_2=0 \ \ldots (C'').$$

Wenn man tang. $\frac{1}{2}\varphi=x$, tang. $\frac{1}{2}\psi=y$, tang. $\frac{1}{2}\xi=z$.

$$\frac{b'^2}{a}+c'\alpha_2+a'\alpha_2=M,\quad \frac{b'^2}{a}+c'\alpha 2-a'\alpha_2=N$$

$$\frac{b'^2}{b}+c\beta'_2+a'\beta_2=M',\quad \frac{b'^2}{b}+c'\beta_2-a'\beta_2=N'$$

$$\frac{b'^2}{c}+c'\gamma_2+a'\gamma_2=M'',\quad \frac{b'^2}{c}+c'\gamma_2-a'\gamma_2=N''$$ setzt, so hat man:

$$\left.\begin{array}{l} xyM-a'\alpha_{,}(x+y)+N-0 \\ xzM'-a'\beta_{,}(x+z)+N'=0 \\ yzM''-a'\gamma_{,}(y+z)+N''=0 \end{array}\right\} \ldots\ldots (D)$$

oder $x=\dfrac{a'\alpha_{,}y-N}{My-a'\alpha_{,}}$, $z=\dfrac{a'\beta_{,}x-N'}{M_{,}x-a'\beta_{,}}$, $y=\dfrac{a'\gamma_{,}z-N''}{M''z-a'\gamma_{,}}$.

Hieraus y und z eliminirt erhält man:

$$x^2[M(a'^2\beta_{,}\gamma_{,}-M'N'')-a'^2\alpha_{,}(M''\beta_{,}-M'\gamma_{,})]$$
$$+x[Ma'(N''\beta_{,}-N'\gamma_{,})+M''a'(N''\alpha_{,}+N\beta_{,})+M'a'(N''\alpha_{,}-N\gamma_{,})-2a'^3\alpha_{,}\beta_{,}\gamma_{,}]$$
$$+N'(a'^2\alpha_{,}\gamma_{,}-M''N)-a'^2\beta_{,}(N''\alpha_{,}-N\gamma_{,})=0$$

Durch Elimination von x und z wird die Gleichung in y gefunden, nemlich:

$$y^2[M''(a'^2\alpha_{,}\beta_{,}-MN')-a'^2\gamma_{,}(M'\alpha_{,}-M\beta_{,})]$$
$$+y[M''a'(N'\alpha_{,}-N\beta_{,})+M'a'(N\gamma_{,}+N''\alpha_{,})+Ma'(N'\gamma_{,}-N''\beta_{,})-2a'^3\alpha'\beta_{,}\gamma_{,}]$$
$$+N(a'^2\beta_{,}\gamma_{,}-N''M')-a'^2\alpha_{,}(N'\gamma_{,}-N''\beta_{,})=0$$

und durch Elimination von x und y die Gleichung in z

$$z^2[a'^2\alpha_{,}(M\gamma_{,}+M'\beta_{,})-M'(M''N+a'^2\beta_{,}\gamma_{,})]$$
$$+z[Na'(M'\gamma_{,}+M''\beta_{,})-MN''a'(\alpha_{,}-\beta_{,})+N'a'(M\gamma'-M''\alpha_{,})-2a'^3\alpha_{,}\beta_{,}\gamma_{,}]$$
$$+N''(a'^2\alpha_{,}\beta_{,}-MN')-a'^2\gamma_{,}(N\beta_{,}-N'\alpha_{,})=0$$

№ 2.

1. Wir wollen im Folgenden betrachten, wie die eben für die Ellipse erhaltenen

Gleichungen sich gestalten, für den Fall, daß die Ellipse ein Kreis vom Halbmesser $=r$ ist. Man hat alsdann $a'=b'=r$, $c'=0$, ferner W. $\alpha=0$, da es bei dem Kreise erlaubt ist, daß die Axe durch den gegebenen Punkt A gehe, sin. $\alpha=\alpha_{,}=0$, cos. $\alpha=\alpha_2=1$.

Bezeichnet man die Werthe M, M', M'', N, N', N'' in den Gleichungen (D) nach der Reihe mit m, m′, m″, n, n′, n″; so hat man:

$$m=\frac{r^2}{a}+r,\quad n=\frac{r^2}{a}-r,\quad m'=\frac{r^2}{b}+r\beta_2,\quad n'=\frac{r^2}{b}-r\beta_2$$

$$m''=\frac{r^2}{c}+r\gamma_2,\quad n''=\frac{r^2}{c}-r\gamma_2,\ \text{folglich}$$

$$\left.\begin{array}{l} xy\left(\frac{r}{a}+1\right)+\frac{r}{a}-1=0 \\ xz\left(\frac{r}{b}+\beta_2\right)-\beta_{,}(x+z)+\frac{r}{b}-\beta_2=0 \\ yz\left(\frac{r}{c}+\gamma_2\right)-\gamma_{,}(y+z)+\frac{r}{c}-\gamma_2=0 \end{array}\right\}\ \ldots\ (D')$$

2. Wir haben aus diesen drei Gleichungen die Werthe für x, y, z zu entwickeln. Zur Erleichterung dieser Arbeit setzen wir einstweilen

$$\left.\begin{array}{l} r-b\beta_2=p'\quad r+b\beta_2=p'' \\ r-c\gamma_2=q'\quad r+c\gamma_2-q'' \end{array}\right\}\ \ldots\ (\varrho)$$

daraus kommt: $y=\frac{a-r}{a+r}\cdot\frac{1}{x}$, $z=\frac{p'-b\beta_{,}x}{b\beta_{,}-p''x}$, $z=\frac{q'-c\gamma_{,}y}{c\gamma_{,}-q''y}$ . . . (ζ)

Eliminirt man aus (ζ) zuerst y, z, so erhält man:

$$x^2(p''q'-bc\beta_{,}\gamma_{,})+x\left(c\gamma_{,}p'+\frac{a-r}{a+r}b\beta_{,}q''-b\beta_{,}q'-\frac{a-r}{a+r}c\gamma_{,}p''\right)$$
$$+\frac{a-r}{a+r}(bc\beta_{,}\gamma_{,}-p'q'')=0\ \ldots\ (\alpha)$$

Setzt man wegen $xy=\frac{a-r}{a+r}$ [ζ], anstatt x, $\frac{a-r}{a+r}\cdot\frac{1}{y}$ in die vorige Gleichung, so erhält man:

$$y^2(bc\beta_{,}\gamma_{,}-p'q')+y\left(c\gamma_{,}p'+\frac{a-r}{a+r}b\beta_{,}q''-b\beta_{,}q'-\frac{a-r}{a+r}c\gamma_{,}p''\right)$$
$$+\frac{a-r}{a+r}(p''q'-bc\beta_{,}\gamma_{,})=0\ \ldots\ (\alpha').$$

Eliminirt man endlich aus (ζ) x, y, so erhält man:

$$z^2\left(bc\beta_{,}\gamma_{,}-\frac{a-r}{a+r}p''q''\right)+z\left[\frac{a-r}{a+r}(c\gamma_{,}p''+b\beta_{,}q'')-c\gamma_{,}p'-b\beta_{,}q'\right]$$
$$+p'q'-\frac{a-r}{a+r}bc\beta_{,}\gamma_{,}=0\ \ldots\ (\alpha'')$$

Man erhält also drei quadratische Gleichungen von folgender Form:

$$Ax^2+Bx+C=0,\quad A'y^2+B'y+C'=0,\quad A''z^2+B''z+C''=0.$$

Setzen wir nun in den Koeffizienten dieser drei Gleichungen aus (ϱ) die Werthe für

p', p'', q', q'', so hat man [nach dem Satze $\cos.(A+B)=\cos.A.\ \cos.B-\sin.A.\ \sin.B$ und $\sin.(A-B)=\sin.A.\ \cos.B-\cos.A \sin.B$]

$$A=(a+r)[-r(c\gamma_2-b\beta_2)+r^2-bc(\gamma-\beta)_2]$$
$$B=2r^2(c\gamma_{,}-b\beta_{,})-2abc(\gamma-\beta)_{,}$$
$$C=(a-r)[-r(c\gamma_2-b\beta_2)-(r^2-bc(\gamma-\beta)_2)]$$
$$A'=(a+r)[r(c\gamma_2+b\beta_2)-(r^2+bc(\gamma-\beta)_2)]$$
$$B'=2r^2(c\gamma_{,}-b\beta_{,})-2abc(\gamma-\beta)_{,}$$
$$C'=(a-r)[r^2-r(c\gamma_2-b\beta_2)-bc(\gamma-\beta)_2]$$
$$A''=\frac{1}{a+r}[rbc(\gamma-\beta)_2-abc(\gamma+\beta)_2-r(a-r)(r+b\beta_2+c\gamma_2)]$$
$$B''=\frac{2}{a+r}[abc(\gamma+\beta)_{,}-r^2(c\gamma_{,}+b\beta_{,})]$$
$$C''=\frac{1}{a+r}[rbc(\gamma-\beta)_2+abc(\gamma+\beta)_2-r[(a+r)(b\beta_2+c\gamma_2)-r^2]]$$

№ 3.

Das vorliegende Problem hat die Eigenschaft, daß das gesuchte Dreieck *MN*P sich nicht ändert, wenn die drei gegebenen Punkte A, B, C resp. in den drei Linien *MN*, P*M*, P*N* fortrücken. Dieser Umstand begründet eine mehr elegante analytische Konstruktion der drei gesuchten Winkel φ, ψ, ξ, also auch die Auflösung der Aufgabe. Wir wollen dieses ausführlich im Folgenden nachweisen, jedoch nur, der Leichtigkeit wegen beim Kreise. Die Linie P*M* geht durch die zwei Punkte P und *M*, deren rechtwinklige Koordinaten $r\xi_{,}$, $r\xi_2$, $r\varphi_{,}$, $r\varphi_2$ sind. Dieselbe Linie geht aber auch durch den Punkt B, dessen rechtwinklige Koordinaten $b\beta$, $b\beta_2$ (anstatt der Polarkoordinaten b, β) sind. Da nun der Punkt B in der Linie P*M* Fig. 1. fortrückt, ohne daß das Dreieck im mindesten sich ändert, so können $b\beta$, $b\beta_2$ als vollständig veränderliche Grössen angesehen werden. Wir wollen mit der Linie *MN* und dem dazu gehörigen Punkt A anfangen. Man hat die Gleichung für *MN*, weil sie durch die zwei Punkte *M*, *N* geht [nach dem analytisch geometr. Satz: $u-\beta=\frac{\beta'-\beta}{\alpha'-\alpha}(t-\alpha)$]

$$u-r\varphi_{,}=\frac{r\psi_{,}-r\varphi_{,}}{r\psi_2-r\varphi_2}(t-r\varphi_2)$$

Da die Linie *MN* auch durch A geht, dessen veränderliche Koordinaten sind: $u=o$, $t=a$, so hat man nach der Substitution

$$r(\psi_{,}\varphi_2-\varphi_{,}\psi_2)=a(\psi_{,}-\varphi_{,})$$

oder, nach dem Satze: $\sin.A=\frac{2\tan g.\frac{1}{2}A}{1+tg.\frac{1}{2}A^2}$, $\cos.A=\frac{1-tg.\frac{1}{2}A^2}{1+tg.\frac{1}{2}A^2}$

d. i. $\varphi_{,}=\frac{2x}{1+x^2}$, $\psi_{,}=\frac{2y}{1+y^2}$, $\varphi_2=\frac{1-x^2}{1+x^2}$, $\psi_2=\frac{1-y^2}{1+y^2}$,

und wenn man die Gleichung durch $\frac{2r(x-y)}{(1+x^2)(1+y^2)}$ dividirt,

$a-r=(a+r)xy$, wie in der ersten der Gleichungen (D') Nr. 2.

Zweitens für die Linie *MP* hat man die Gleichung (da für P die rechtwinkligen Koordinaten $r\xi$, $r\xi_2$ sind)

$$(u-r\varphi_1)(\xi_2-\varphi_2)=(t-r\varphi_2)(\xi_1-\varphi_1)$$

also [da für den Punkt B die veränderlichen Koordinaten $u=b\beta_1$, $t=b\beta_2$ sind]

$$(b\beta_1-r\varphi_1)(\xi_2-\varphi_2)=(b\beta_2-r\varphi_2)(\xi_1-\varphi_1)$$

oder [da $\xi_1=\frac{2z}{1+z^2}$ $\xi_2=\frac{1-z^2}{1+z^2}$]

$$b\beta_1(x^2-z^2)+b\beta_2(x-z)(1-xz)+r(xz+1)(z-x)=0$$

d. h. $(x+z)b\beta_1+b\beta_2-b\beta_2xz-r(xz+1)=0$

übereinstimmend mit der zweiten Gleichung in (D'). Für die dritte Gleichung hat man nur zu verwechseln φ mit ψ, β mit γ, b mit c. Man erhält [da für den Punkt C die rechtwinkligen Koordinaten $c\gamma_1$, $c\gamma_2$ sind] auf eine ähnliche Weise eine mit der dritten Gleichung in (D') übereinstimmende:

$$c\gamma_1(y+z)-yz(r+c\gamma_2)-r+c\gamma_2=0$$

№ 4.

Es sollen hier die Grössen unter dem Wurzelzeichen der quadratischen Gleichungen Nr. 2. näher untersucht werden.

1. Aus den quadrat. Gleichungen Nr. 2. folgt:

$$x=\frac{-\frac{B}{2}\pm\sqrt{\frac{B^2}{4}-A.C}}{A},\quad y=\frac{-\frac{B'}{2}\pm\sqrt{\frac{B'^2}{4}-A'.C'}}{A'}$$

$$z=\frac{-\frac{B''}{2}\pm\sqrt{\frac{B''^2}{4}-A''C''}}{A''}.$$

Es sind also die Grössen $\frac{B^2}{4}-A.C$, $\frac{B'^2}{4}-A'.C'$, $\frac{B''^2}{4}-A''.C''$ zu betrachten, und zu dem Ende zunächst die Gleichung der Linie BC. Da die rechtwinkl. Koordd. des Punkts B $b\beta_1$, $b\beta_2$ und vom Punkt C $c\gamma_1$, $c\gamma_2$ sind, so ist die Gleichung der Geraden BC: $u-b\beta_1=\frac{c\gamma_1-b\beta_1}{c\gamma_2-b\beta_2}(t-b\beta_2)$. Setzt man darin $u=0$, so kommt nach der nöthigen Reduction: $(c\gamma_1-b\beta_1)t=bc(\gamma-\beta)$, oder, wenn man $c\gamma_1-b\beta_1=p$, $(\gamma-\beta)_1=S$ setzt,

$$pt=bcS\ \ldots\ldots\ (a).$$

Die Gerade BC schneide die Axe in X also $OX=t$. Es sei $OC''||CX$, $BB'||OX||CC''$, $CC_1||OB$ *); so ist $\Delta BCB'=\frac{pt}{2}=\Delta OBC=\frac{bcS}{2}$. Aus (a) und den in Nr. 2. entwickelten Koeffizienten A, B, C, wenn man noch die Linie $BC=d$, $c\gamma_2-b\beta_2=q$ setzt, hat man: $p=\frac{bcS}{t}$, $-\frac{B}{2}=-\frac{r^2bcS}{t}+abcS=-\frac{bcS(r^2-at)}{t}$, $p^2=\frac{(bcS)^2}{t^2}=d^2-q^2$, $q^2=d^2-\frac{(bcS)^2}{t^2}$;

$$A.C=(a^2-r^2)\left[r^2\left(d^2-\frac{(bcS)^2}{t^2}\right)-r^4+2r^2bc(\gamma-\beta)_2-b^2c^2(\gamma-\beta)_2^2\right]$$

---

*) Wenn für diese, sowie für andere Stellen dieser Schrift die Figuren nicht vollständig ausgeführt sind, so hofft der Verf. um so mehr auf Entschuldigung, da theils das Fehlende sich nach der Beschreibung leicht ergänzen läßt, theils auf Ersparung der Kosten Bedacht zu nehmen war.

$$\frac{B^2}{4}-A.C=\frac{(bcS)^2(r^2-at)^2}{t^2}+(r^2-a^2)r^2\left(d^2-\frac{(bcS)^2}{t^2}\right)+(a^2-r^2)[r^4-2r^2bc(\gamma-\beta)_2$$

$+b^2c^2(\gamma-\beta)_2^2]$ folglich [da $(\gamma-\beta)_2=1-S_2$, $\frac{b^2+c^2-d^2}{2bc}=(\gamma-\beta)_2$]

$$\frac{B^2}{4}-A.C=(a^2-r^2)(r^4+b^2c^2-r^2d^2)+(r^2-a^2)(bcS)^2+(bcS)^2\frac{(r^2-at)^2}{t^2}$$

$+\frac{(a^2-r^2)r^2(bcS)^2}{t^2}-r^2(a^2-r^2)(b^2+c^2-d^2)=$[wenn man alle Glieder, welche $(bcS)^2$ als Faktor enthalten, zusammenfaßt]$(a^2-r^2)(r^4+b^2c^2-r^2d^2-r^2b^2-r^2c^2+r^2d^2)+(bcS)^2\left(\frac{r^4-2r^2at+a^2t^2}{t^2}\right.$

$$\left.+r^2-a^2+\frac{r^2a^2-r^4}{t^2}\right)$$

$$=(a^2-r^2)(r^2-b^2)(r^2-c^2)+\frac{r^2(bcS)^2(t-a)^2}{t^2}.$$

Setzen wir zur Abkürzung $(a^2-r^2)(r^2-b^2)(r^2-c^2)=Q$, $\left[\frac{rbcS(t-a)}{t}\right]^2=R$, so heißt die Grösse unter dem Wurzelzeichen in der ersten entwickelten Gleichung von $x=\text{tang.}\frac{\varphi}{2}$, nemlich $\frac{B^2}{4}-A.C=Q+R$. Um hiervon den Werth näher zu untersuchen, sei OP senkrecht auf CX, AP' senkrecht auf OP also parallel CX, so ist $OP:OX=P'P:AX$ oder $OP:t=P'P:t-a$; also $\Delta OBC:ABC=OP:P'P$ also $\Delta OBC:\Delta ABC=t:t-a$, folglich ist

$\frac{\Delta OBC(t-a)}{t}=\Delta ABC$, und da $bcS=2\Delta OBC$, so ist

$$\frac{bcS(t-a)}{t}=2\Delta OBC;$$

also $R=r^2(2\Delta ABC)^2$

Statt dieses analytischen Beweises kommt man auf synthetischem Wege zu demselben Satze. Man hat aus (a) $t=\frac{bcS}{p}$; dieses in R substituirt gibt: $R=r^2(bcS-ap)^2$. Nun ist $bcS-ap=bc(\gamma-\beta)_,-ac\gamma_,+ab\beta_,=2\Delta OBC-2\Delta OAC+2\Delta OAB=\Delta OEC+2\Delta BCE-2\Delta OEC-2\Delta OAE+2\Delta OAE+2\Delta ABE=2\Delta BCE+2\Delta ABE=2\Delta ABC$, wie behauptet ist. Wenn die Punkte B und C auf verschiedenen Seiten der Axe OA liegen und B unterhalb derselben ist, so hat man $\beta_,$ negativ, so wie der Winkel β selbst negativ ist. Es ist dann $bcS=bc(\gamma+\beta)_,=2\Delta OBC=2\Delta OCE+2\Delta OBE$, also $bcS-ap=2\Delta OCE+2\Delta OBE-2\Delta OCE-2\Delta ACE-2\Delta OBE-2\Delta ABE=-2\Delta ACE-2\Delta ABE=-2\Delta ABC$ folglich $R=r^2(bcS-ap)^2=(r^2-2\Delta ABC)^2$, wie bei der obigen Lage, da das Quadrat von $+A$ und von $-A$ gleich $+A^2$ ist.

2. Man sieht leicht, daß in der zweiten Gleichung in $y=\text{tang.}\frac{\psi}{2}$ die Grösse unter dem Wurzelzeichen gleichfalls $\frac{B^2}{4}-A.C=Q+R$ heißt, weil [*No.* 2.(ζ)]$y=\frac{a-r}{a+r}\cdot\frac{1}{x}$; wir haben

daher nur noch nöthig, die dritte Gleichung in z, nemlich $A''z^2+B''z+C''=o$ zu betrachten, um zu bestimmen, was der daselbst unter den Wurzelzeichen enthaltene Ausdruck, nemlich $\frac{B''^2}{4}-A''.C''$ für einen Werth behauptet. Setzen wir zur Abkürzung $q'-\frac{a-r}{a+r}.q''=P$, $p'-p''.\frac{a-r}{a+r}=N$, so ist [No. 2.(α'')] $A''=bc\beta_,\gamma_,-\frac{a-r}{a+r}.p''q''$, $B''=-(c\gamma_,N+b\beta_,P)$, $C''=p'q'-\frac{a-r}{a+r}.bc\beta_,\gamma_,$.

Vergleicht man diese Koeffizienten mit den Koeffizienten der Gleichung von $x=\text{tang.}\frac{\varphi}{2}$ d. h. mit A, B, C; so erhält man $A''+A=p''P$, $B''+B=-2b\beta_,P$, $C''+C=p'P$ oder $A''=p''P-A$, $B''=-B-2b\beta_,P$, $C''=p'P-C$; es ist also:

$$\frac{B''^2}{4}-A''.C''=\frac{B^2}{4}-A.C+P(Bb\beta_,+b^2\beta_,^2P+Ap'+p''C-Pp'p'')$$

$$=Q+R+P[b\beta_,(c\gamma_,p'-\frac{a-r}{a+r}.c\gamma_,p''+b\beta_,P-(b\beta_,q'-\frac{a-r}{a+r}b\beta_,q'')]$$

$$-\frac{a-r}{a+r}p'p''q''+\frac{a-r}{a+r}bc\beta_,\gamma_,p''+p'p''q'-bc\beta_,\gamma_,p'-p'p''P]$$

$$=Q+R+P(b\beta_,(c\gamma_,N+b\beta_,P-b\beta_,P)-bc\beta_,\gamma_,(p'-\frac{a-r}{a+r}.p'')$$

$$+p'p''(q'-\frac{a-r}{a+r}q'')]=Q+R+P(bc\beta_,\gamma_,N-bc\beta_,\gamma_,N$$

$+b\beta_,P-b\beta_,P+p'p''P-p'p''P)=Q+R$. Also sind die Grössen unter dem Wurzelzeichen aller drei Gleichungen in x, y, z, einander gleich.

3. Die in dieser No. ad 1. angestellten Untersuchungen geben uns ein Mittel, die Fälle, in welchen x, y, z unmögliche Werthe haben, also in welchen das vorgelegte Dreieck unmöglich ist, genau anzugeben. Da in $\frac{B^2}{4}-A.C=Q+R$ die Grösse R als Quadrat jederzeit positiv ist, so kommt es bloß auf das Zeichen von Q an, damit $\frac{B^2}{4}-A.C$ entweder positiv oder negativ sei d. h. damit x reelle oder unmögliche Werthe habe. Man sieht die Wahrheit der folgenden Behauptungen unmittelbar ein.

Es sei 1) $a>r$

und entweder $b>r$, $c>r$ oder $b<r$, $c<r$, so ist

Q positiv und folglich $Q+R=\frac{B^2}{4}-A.C=\frac{B''^2}{4}-A''.C''$ positiv, also x, y, z reell d. h. das vorgelegte Dreieck ist möglich; ist hingegen

$b<r$, $c>r$ oder $b>r$, $c<r$, so ist

Q negativ. Ist nun $Q<R$, so ist $Q+R$ positiv und das Dreieck möglich; ist aber bei der angeführten Voraussetzung $Q>R$, so ist das Dreieck unmöglich.

2) Es sei $a<r$

und zugleich $b < r,\ c > r$ oder $b > r,\ c < r$,
so ist Q positiv und $Q+R$ positiv oder x reell; ist hingegen $b > r,\ c > r$ oder $b < r,\ c < r$ so ist Q negativ; ist zugleich $Q < R$, so ist das Dreieck möglich; ist aber $Q > R$, so ist das Dreieck unmöglich.

4. Aus 1. folgt, daß $R = r^2(2\,\text{Dr.}ABC)^2$. Man kann nun R durch die Seiten des Dreiecks ausdrücken; verbinde nemlich die Punkte B und A durch die Linie e, und die Punkte C und A durch die Linie f, so hat man Dr. ABC

$$= \tfrac{1}{4}\sqrt{(d+e+f)(d+e-f)(d+f-e)(e+f-d)} \text{ also}$$

$$R = \frac{r^2}{4}(d+e+f)(d+e-f)(d+f-e)(e+f-d).$$

Auf gleiche Weise kann man auch die Koeffizienten B und A durch die Linien r, a, b, c, welche unmittelbar gegeben sind, und durch die Linien d, e, f, welche durch die erstern und durch die gegebenen Winkel mittelbar gegeben sind, ausdrücken. Man hat

$$-\frac{B}{2} = abcS - r^2(c\gamma_{,} - b\beta_{,}); \text{ also}$$

$$-\frac{B}{2} = a\left[bcS + \frac{r^2}{a^2}(ab\beta_{,} - ac\gamma_{,})\right] = 2a\left[\text{Dr.}OBC + \frac{r^2}{a^2}(\text{Dr.}OAB - \text{Dr.}OAC)\right]$$

$$\text{ferner } A = (a+r)\left[\frac{-r(2ac\gamma_2 - 2ab\beta_2)}{2a} + \frac{2r^2}{2} - \frac{2bc(\gamma-\beta)_2}{2}\right]$$

$$= \frac{a+r}{2}\left[\frac{r}{a}(f^2+b^2-e^2-c^2) + 2r^2 - b^2 - c^2 + d^2\right]$$

$$= \frac{a+r}{2a}[a(r^2-c^2) + a(r^2-b^2) + r(b^2-c^2) + r(f^2-e^2) + ad^2].$$

Bevor wir in unserer Entwickelung weiter gehen, bemerken wir, daß zur Konstruktion des gesuchten Dreiecks im Kreise hinreichend ist, Einen der Winkel, etwa φ, also $x = \text{tg.}\tfrac{1}{2}\varphi$ zu kennen; denn hat man $\varphi = AOM$, so ziehe man durch M aus A und B die beiden Linien AN, BP, wodurch das Dr. MNP gegeben ist.

№ 5.

Es sollen jetzt einige besondere Fälle der vorliegenden Aufgabe untersucht werden, und zwar in Betreff der Richtung der Geraden BC gegen den Durchmesser oder in Bezug auf die Länge von t (No. 4. 1.)

1. Es sei $t = \genfrac{}{}{0pt}{}{+r}{-r}$, oder es gehe die Gerade BC durch $\genfrac{}{}{0pt}{}{D}{D'}$, Fig. 1. dann wird $R =$

$$(bcS)^2(r \mp a)^2,\ \frac{B}{2} = bcS\frac{(r^2-at)}{t} = \pm\, bcS(r \mp a)$$

$$\text{also } x = \text{tang.}\frac{\varphi}{2} = \frac{\mp bcS(r \mp a) \pm \sqrt{(a^2-r^2)(r^2-b^2)(r^2-c^2) + (bcS)^2(r \mp a)^2}}{\frac{a+r}{2a}[a(r^2-c^2) + a(r^2-b^2) + r(b^2-c^2) + r(f^2-e^2) + ad^2]}$$

2. Es sei $t = a$ d. h. die drei gegebenen Punkte A, B, C liegen in derselben geraden

Linie. Man hat $R=o$, $\frac{B}{2}=\frac{bcS(r^2-a^2)}{a}$

$$x=\frac{bcS(a^2-r^2)\pm a\sqrt{(a^2-r^2)(r^2-b^2)(r^2-c^2)}}{\frac{a+r}{2}[a(r^2-c^2)+a(r^2-b^2)+r(b^2-c^2)+r(f^2-e^2)+ad^2]}$$

3. Sei $t=-a$, so ist $R=4r^2(bcS)^2$, $\frac{B}{2}=-\frac{bcS(r^2+a^2)}{a}$

also $x=\dfrac{bcS(r^2+a^2)\pm a\sqrt{Q+4r^2(bcS)^2}}{\frac{a+r}{2}[a(r^2-c^2)+a(r^2-b^2)+r(b^2-c^2)+r(f^2-e^2)+ad^2}$

4. Die Gerade BC sei parallel dem Durchmesser; man hat

$t=\infty=\frac{1}{0}$; $R=\left[\frac{rbcS(t-a)}{t}\right]^2=\left[rbcS\left(1-\frac{a}{t}\right)\right]^2=r^2(bcS)^2$;

$$\frac{B}{2}=bcS\left(\frac{r^2}{t}-a\right)=bcS\left(\frac{r^2.o}{1}-a\right)=-abcS$$

$$x=\frac{abcS\pm\sqrt{Q+r^2(bcS)^2}}{A}$$

5. Es sei $t=\frac{r^2}{a}$, so ist $R=\frac{(bcS)^2(r^2-a^2)^2}{r^2}$, $\frac{B}{2}=o$ also

$$x=\frac{\pm\sqrt{Q+\frac{(bcS)^2(r^2-a^2)^2}{r^2}}}{A}$$

6. Es gehe die Gerade BC durch den Mittelpunkt des Kreises d. h. es sei $t=o$; alsdann ist $R=\left[\frac{r(bcS)(t-a)}{t}\right]^2=$ (weil aus (a) $t=\frac{bcS}{p}$) $=\left[rp\left(\frac{bcS}{p}-a\right)\right]^2=$ (weil $bcS=o$, indem $\gamma=\beta$) $=(-arp)^2=(rad\beta,)^2=r^2a^2d^2\beta,^2$. Es wird in diesem Fall $R=o$, wenn $\beta=o$ d. h. wenn die 3 gegebenen Punkte A, B, C im Durchmesser liegen, und wird $=r^2a^2d^2$, wenn die Gerade BC im Mittelpunkt auf dem Durchmesser senkrecht steht.

7. Wenn nur angegeben ist, daß BC senkr. auf dem Durchmesser sein soll, ohne zu bestimmen, in welchem Punkt, so ist t unendlich vielen Bestimmungen unterworfen. Man hat [No. 4. 1.] $y=o$, folglich $A=(a+r)(r^2-bc(\gamma-\beta)^2)$

also $x=\dfrac{-\frac{2bcS(r^2-at)}{t}\pm\sqrt{Q+R}}{(a+r)(2r^2-b^2-c^2+d^2)}$

№ 6.

Die drei Gleichungen (D) No. 1. erhalten eine andere Gestalt, wenn sich eine der drei denselben zum Grunde liegenden Bedingungen ändert.

1. Zu dem Ende setzen wir, daß eine der 3 Seiten des gesuchten Dreiecks, die MN Fig. 1. anstatt durch den gegebenen Punkt A zu gehen, eine bestimmte Lage habe, welche

Bedingung sich dadurch ausdrücken läßt, daß der W. OA'M, den die Seite MN mit der grossen Axe einschließt, ein gegebener $=\alpha$ sei. Man hat aus den Dreiecken MOA', NOA' [nach dem Satz:

$$a : b = \sin.A : \sin.B]$$

$$\left.\begin{array}{l} \alpha, : (\varphi+\alpha), = \dfrac{b'^2}{a'-c'\varphi_2} : OA' \\ \alpha, : (\psi+\alpha), = \dfrac{b'^2}{a'-c'\psi_2} : OA' \end{array}\right\} : \text{daraus, wenn } \frac{c'}{a'} = d$$

durch Elimination von OA':

$$(\psi+\alpha),(1-d\varphi_2) = (\varphi+\alpha),(1-d\psi_2)$$

Nun ist bekannt, daß $\sin.A = \dfrac{2\tang.\frac{1}{2}A}{1+tg.\frac{1}{2}A^2}$, $\cos.A = \dfrac{1-tg.\frac{1}{2}A^2}{1+tg.\frac{1}{2}A^2}$

Substituirt man und setzt, wie in No. 1. $\tang.\frac{1}{2}\varphi = x$, $tg.\frac{1}{2}\psi = y$, $\tang.\frac{1}{2}\xi = z$, so kommt:

$$(2\alpha_2 y+\alpha,-\alpha,y^2)(1+x^2-d^2+dx^2) = (2\alpha_2 x+\alpha,-\alpha,x^2)(1+y^2-d+dy_2).$$

Multiplizirt man, setzt $\dfrac{1-d}{1+d} = e$, und dividirt durch $y-x$, so erhält man:

$$xy+tg.\alpha\frac{(1+e)}{2}x+tg.\alpha\frac{(1+e)}{2}y-e=o \quad . . . (d)$$

Diese Gleichung ist also an die Stelle der ersten in (D) zu setzen, wodurch man daher folgendes System erhält:

$$\left.\begin{array}{l} xy+tg.\alpha\dfrac{(1+e)}{2}x+tg.\alpha\dfrac{(1+e)}{2}y-e=o \\ xzM'-a'\beta,(x+z)+N'=o \\ yzM''-a'\gamma,(y+z)+N''=o \end{array}\right\} . . . (D'')$$

Dieß giebt die Auflösung des folgenden Problems:

„Aus zwei gegebenen Punkten *B* und C zwei gerade Linien *B*P, CP an einen Punkt P des Umfangs einer Ellipse (daher s. oben Nr. 1 auch eines Kegelschnitts im Allgemeinen) zu ziehen, so daß die Verbindungslinie MN der beiden Durchschnittspunkte M,N eine gegebene Lage habe, (oder die grosse Axe unter einem gegebenen Wink. A' schneide)."

Wenn ebenso NP, anstatt durch den Punkt C zu gehen, den W. OQP $=\gamma$ mit der großen Axe macht, so sieht man leicht, daß man, um für die zweite Linie die nemlichen Bedingungen, wie für die erste zu erhalten, zu verwechseln hat: A'OM, A'ON, φ, ψ, α nach der Reihe mit QOP, QON, $180^o-\xi$, $180^o-\psi$, γ. Da nun $\dfrac{\varphi}{2} = 90^o - \dfrac{\xi}{2}$ $\dfrac{\psi}{2} = 90^o - \dfrac{\psi}{2}$,

$\tang.\dfrac{\varphi}{2} = x = \cotg.\dfrac{\xi}{2} = \dfrac{1}{z}$, $\tang.\dfrac{\psi}{2} = y = \cotg.\dfrac{\psi}{2}$ so giebt die Gleichung (d) alsdann:

$$\cotg.\frac{\xi}{2}.\cot.\frac{\psi}{2}+\frac{1+e}{2}.tg.\gamma\cot.\frac{\xi}{2}+\frac{1+e}{2}tg.\gamma\cot.\frac{\psi}{2}-e=o$$

$$\text{oder: } yz-\frac{1+e}{2e}tg.\gamma(y+z)-\frac{1}{e}=o \quad . . . . (d')$$

Wenn man endlich annimmt, daß die Seite MP, anstatt durch den gegebenen Punkt *B* zu gehen, einen W. R mit der großen Axe $=\delta$ macht, so verwechsele man, um die dritte

Gleichung zu erhalten, W. A′OM, A′ON, φ, ψ, α nach der Reihe mit W. ROP, ROM, $180^\circ-\xi$, $180^\circ-\varphi$, δ. Die Gleichung (d) gibt alsdann (indem nemlich $\frac{\varphi}{2}=90^\circ-\frac{\xi}{2}$

$$\frac{\psi}{2}=90^\circ-\frac{\varphi}{2},\ \text{tg.}\frac{\varphi}{2}=x=\text{cotg.}\frac{\xi}{2}=\frac{1}{z},\ \text{tg.}\frac{\psi}{2}=y=\frac{1}{x})$$

$$\text{cotg.}\frac{\xi}{2}.\ \text{cot.}\frac{\varphi}{2}+\frac{1+e}{2}.\text{tg.}\delta\,\text{cotg.}\frac{\xi}{2}+\frac{1+e}{2}.\text{tg.}\delta\,\text{cotg.}\frac{\varphi}{2}-e=o$$

oder $xy-\frac{1+e}{2e}.\text{tg.}\delta(x+z)-\frac{1}{e}=o$ . . . . (d″).

Die Gleichungen (d), (d′), (d″) enthalten die Aufgabe: „in einen Kegelschnitt ein Dreieck zu beschreiben, dessen Seiten eine gegebene Lage haben.“

2. Ist die Ellipse ein Kreis, also $c=d=o$, $e=1$, so wird die Gleichung (d) folgende:

$$xy+\text{tg.a.}x+\text{tg.}\alpha.y-1=o\ .\ .\ .\ (\delta)$$

Dirse Gleichung in Verbindung mit der zweiten und dritten aus (D″) Nr. 2. nemlich mit:

$$xz(\frac{r}{b}+\beta_2)-\beta_{,}(x+z)+\frac{r}{b}-\beta_2=o$$

$$yz(\frac{r}{c}+\gamma_2)-\gamma_{,}(y+z)+\frac{r}{c}-\gamma_2=o$$

dienen zur Auflösung des Problems: „aus 2 gegebenen Punkten *B*, C Fig. 2. zwei gerade Linien *B*P, CP an einen Punkt P des Umfangs eines Kreises zu ziehen, so daß die Verbindungslinie MN der beiden Durchschnittspunkte M, N eine gegebene Lage habe (oder die Axe unter einem gegebenen W. A′ schneide).“

Anmerk. Schon Pappus (S. Klügels math. Wörterb. Art. Analys. Aufg. 5 und Art. Anwend. d. Analys. Aufg. 2) hat sich mit dieser Aufgabe beschäftigt, versteht sich, geometr. synthetisch und nicht in der Allgemeinheit, wie hier, indem er die zu bestimmende Lage der MN parallel der *B*C setzt. So ist auch eine Aufg. behandelt, bei welcher die verlängerte MN die *B*C in einem gegebenen Punkte trifft. Viel leichter giebt für die erstere Aufg. die Synthesis die Auflösung, indem nur verlangt wird, durch *B*, C′ einen Kreis zu legen, welcher den gegebenen Kreis MNP berührt (wie auch Klügel l. c. sagt.)

3. Wenn man die Gleichungen (d), (d′), (d″) nach der angegebenen Methode in solche für den Kreis umwandelt, so entstehen daraus folgende:

$$\left.\begin{array}{l} xy+\text{tg.}\alpha(x+y)-1=o \\ yz+\text{tg.}\gamma(y+z)-1=o \\ zx+\text{tg.}\delta(z+x)-1=o \end{array}\right\}$$

Gleichungen, welche zur Auflösung der Aufg. dienen: „in einen Kreis ein Dreieck zu beschreiben, dessen Seiten eine gegebene Lage haben.“

Eliminirt man aus den Gleichungen (D″) [Nr. 6, 1.] y und z, so erhält man die entwickelte Gleichung in x von folgender Form:

$$\mathfrak{A}x^2+\mathfrak{B}x+\mathfrak{C}=o$$

Es ist [indem $\cos.(A-B)=\cos.A.\cos.B+\sin.A.\sin.B$, und $\sin.(A-B)=\sin.A.\cos B-\cos.A.\sin.B$]

$$\mathfrak{A}=\frac{1}{\alpha^2}[r^2\alpha^2-bc(\gamma-\beta+\alpha)^2+r(b(\beta+\alpha)^2-c(\gamma+\alpha)^2)]$$

$$\frac{\mathfrak{B}}{2}=\frac{1}{\alpha_2}\left[r^2\alpha_{,}-bc(\gamma-\beta-\alpha)_{,}\right]$$

$$\mathfrak{C}=\frac{1}{\alpha_2}\left[-r^2\alpha_2+bc(\gamma-\beta+\alpha)_2+r(b(\beta+\alpha)_2-c(\gamma+\alpha)_2)\right].$$

4. Die Gleichung (δ) kann man auch durch unmittelbare Betrachtung des Kreises erhalten. Man hat aus den Dreiecken

MOA', NOA' Fig. 2.: $\alpha_{,}:(\varphi+\alpha)_{,}=r:OA'$; $\alpha_{,}:(\psi+\alpha)_{,}=r:OA'$,

daraus $(\psi+\alpha)_{,}=(\varphi+\alpha)_{,}$ d. h. entweder $\psi=\varphi$ oder

$\psi+\alpha=180^0-(\varphi+\alpha)$; aus dem letztern kommt: $\frac{\psi}{2}=90^0-\alpha-\frac{\varphi}{2}$

$$\text{also tang.}\frac{\psi}{2}=y=\frac{\frac{1}{\mathrm{tg}.\alpha}-\mathrm{tg}.\frac{\varphi}{2}}{1+\frac{\mathrm{tg}.\frac{\varphi}{2}}{\mathrm{tg}.\alpha}}=\frac{1-\mathrm{tg}.\alpha.x}{\mathrm{tg}.\alpha+x}\ \left(\text{wo } x=\mathrm{tg}.\frac{\varphi}{2}\right)$$

oder $y\,\mathrm{tg}.\alpha+xy=1-x.\mathrm{tg}.\alpha$, wie die Gleichung ($\delta$).

№ 7.

Wir wollen noch bei der Untersuchung der Koeffizienten der drei Hauptgleichungen in x, y, z nemlich der (α), (α'), (α'') Nr. 2. besonders die Fälle erwägen, in welchen diese Koeffizienten gleich Null, oder in welchen die Gleichungen entweder rein quadratische oder einfache Gleichungen werden. Diese Untersuchungen werden zugleich über das Wesen des Problems Licht verbreiten. 1. Die Gerade, welche durch den Punkt C geht, hat, wie bekannt, zur Gleichung: $u-c\gamma_{,}=\mu'(t-c\gamma_2)$, und die Gerade, welche durch den Punkt B geht: $u-b\beta_{,}=\nu'(t-b\beta_2)$, wo μ den Winkel bedeutet, welchen die Gerade durch C gehend mit der Axe einschließt, und ν den Winkel, welchen die Gerade durch B mit der Axe bildet, μ' aber die trigonometr. Tangente des W. μ, so wie ν' die trigonometr. Tangente des W. ν anzeigt. Setzt man in diesen Liniengleichungen $u=o$, so kommt:

$$-c\gamma_{,}=\mu'(t-c\gamma_2)\ \ldots\ldots\ (a)$$
$$-b\beta_{,}=\nu'(t-b\beta_2)\ \ldots\ldots\ (b)$$

Setzt man in (a) $t=+r$, und in (b) $t=-r$ d. h. nimmt man an, daß die Gerade, welche durch den Punkt C geht, durch D (Endpunkt des Durchmessers rechts), und die Gerade durch B durch D' (Endpunkt des Durchm. links) gehe, so hat man:

$$-c\gamma_{,}=\mu(r-c\gamma_2)\ \ldots\ldots\ (a')$$
$$-b\beta_{,}=-\nu'(r+b\beta_2)\ \ldots\ldots\ (b')$$

Multiplizirt man Gleiches mit Gleichem, so kommt: $bc\beta_{,}\gamma_{,}=-\mu'\nu'p''q'$ [Nr. 2. (ϱ)]. Nun ist in der Gleichung (α) Nr. 2, 2. Der Koeffiz. $A=-bc\beta_{,}\gamma_{,}+p''p'$, welcher Werth mit dem eben gefundenen verglichen für $A=o$ die Bedingungsgleichung gibt:

$$\mu'\nu'=-1\ \ldots\ldots\ (c)$$

Hieraus folgt: $\mu-\nu=90^0$ d. h. W. CDA $=$ W. $BD'A+90^0$, oder die Geraden des Punkts C und des Punkts B sind senkrecht auf einander, oder schneiden einander in dem Kreisumfange.

Setzt man aber in (a) $t=-r$ und in (b) $t=+r$, oder führt man die Gerade des Punkts C durch D' und des Punkts B durch D, so hat man durch Multiplik. der beiden Gleichungen: $bc\beta_{,}\gamma_{,}=-\mu'\nu'p'q''$. Setzt man hier, wie im ersten Fall, $\mu'\nu'=-1$ . . . (c'); so ist der Koeffiz. C in (α) Nr. 2, 2 gleich Null. Daraus geht der folgende Satz hervor: „Zieht man aus jedem der beiden gegebenen Punkte B und C zwei Gerade nach den beiden Endpunkten des Durchmessers D und D' (von welchen D nach der positiven Seite der Abscisse hin liegt, und D' nach der negativen Seite hin) so ist, wenn BD' senkr. auf CD, der Koeffiz. $A=o$, und wenn BD senkr. auf CD', der Koeffiz. $C=o$."

Die Gleichung (c) enthält zwei unbekannte Grössen, und gibt daher nur die Lage der beiden Geraden der Punkte B und C gegen einander an, ohne ihre beiderseitige Lage gegen den Durchmesser zu bestimmen.

Gibt man aber μ oder ν einen bestimmten Werth, so ist, vermittelst der Gl. (c), auch der andere dieser beiden Werthe gegeben. Dasselbe gilt von der Gleichung (c'). Durch das Folgende soll dem Leser dieses noch einleuchtender werden.

Wir wollen jetzt für $A=o$ untersuchen, was die Koeffizienten B und C, so wie $x=\operatorname{tang}.\frac{\varphi}{2}$ werden. Aus $A=p''q'-bc\beta_{,}\gamma_{,}=o$ kommt:

$$C=\frac{a-r}{a+r}(bc\beta_{,}\gamma_{,}-p'q'')=2r\,\frac{a-r}{a+r}(b\beta^2-c\gamma^2)$$

Ferner ist $B=b\beta_{,}\left(\frac{a-r}{a+r}q''-q'\right)+c\gamma_{,}\left(q'-\frac{a-r}{a+r}p''\right)$.

Aus (a') und (b') ist: $c\gamma_{,}=-\mu'q'$, $b\beta_{,}=\nu_{,}p''=$[nach (c)]$-\frac{p''}{\mu'}$.

Da es erlaubt ist, zu der Gleichung (c) noch eine Bedingung hinzuzufügen, um die Grösse von den Winkeln μ und ν zu bestimmen, so wollen wir als Beispiel annehmen, daß μ gleich dem Winkel sei, welchen die Verbindungslinie von B und C d. h. die Gerade BC mit der Axe macht, also W. CGO$=$W. CBR (BR ist senkr. auf CD)

$$\text{folglich } \mu_{,}=\frac{CR}{BR}=\frac{c\gamma_{,}-b\beta_{,}}{c\gamma^2-b\beta^2}\ \ .\ .\ .\ (d)$$

Setzt man in diese Gleichung die oben angezeigten Werthe von $c\gamma_{,}$ und $b\beta_{,}$, so kommt: $\mu'=\frac{\mu'q'+\frac{p''}{\mu'}}{c\gamma^2-b\beta^2}$ oder $\mu'^2=\frac{p''}{c\gamma^2-b\beta^2+q'}=\frac{p''}{p'}$, also $\mu'=\frac{\sqrt{p''}}{\sqrt{p'}}$. Dadurch wird

$$b\beta_{,}=-\sqrt{p'}\sqrt{p''},\quad c\gamma_{,}=-\frac{q'\sqrt{p''}}{\sqrt{p'}}\ \text{und}\ B=-\sqrt{p'}\sqrt{p''}\left(\frac{a+r}{a-r}q''-q'\right)$$

$$-\frac{q'\sqrt{p''}}{\sqrt{p'}}\left(p'-\frac{a-r}{a+r}p''\right)=\frac{a-r}{a+r}\frac{\sqrt{p''}}{\sqrt{p'}}(q'p''-p'q'')=2r\,\frac{a-r}{a+r}\frac{\sqrt{p''}}{\sqrt{p'}}(b\beta^2-c\gamma^2)$$

Es ist also $x = \tang.\frac{\varphi}{2} = -\frac{C}{B} = \dfrac{2r\frac{a-r}{a+r}(b\beta_2-c\gamma_2)\sqrt{p'}}{2r\frac{a-r}{a+r}\sqrt{p''}(b\beta_2-c\gamma_2)} = \dfrac{\sqrt{p'}}{\sqrt{p''}}$

$$= \frac{\sqrt{r-b\beta_2}}{\sqrt{r\,.\,b\beta_2}} = \frac{1}{\mu'}$$

Anmerk. Wenn verlangt wird, zu finden, unter welchen Bedingungen für $B=o$ auch [Nr. 2, 2 (α'')] $B=o$ werde; so hat man aus $B=o$, $c\gamma_{,}p'-b_{,}\beta_{,}q' = \frac{a-r}{a+r}(c\gamma_{,}p''-b\beta_{,}q'')$; hieraus den Werth von $c\gamma_{,}$ in $B'' = \frac{a-r}{a+r}(c\gamma_{,}p''+b\beta_{,}q'')-c\gamma_{,}p'-b\beta_{,}q'$ substituirt, kommt $B'' = 2b\beta'q'-2.\frac{a-r}{a+r}b\beta_{,}q''$. Damit also $B''=o$ werde, muß sein: $q' = \frac{a-r}{a+r}q''$. Dieses gibt nach No. 2 (ϱ) entwickelt: $c\gamma_2 = \frac{r^2}{a}$ d. h. die Verbindungslinie BC steht senkrecht auf der Axe.

2. Untersuchen wir jetzt die Fälle, in welchen die Hauptgleichung in z einfach wird, d. h. es sollen die Bedingungen aufgefunden werden, unter welchen A'' oder C'' in Nr. 2, 2. gleich Null wird. Zieht man aus den Punkten B und C nach D' (d. h. nach dem Endpunkt des Durchmessers auf der Seite der verneinten Abscisse), so geben die Gleichungen (a), (b), wenn man darin $t=-r$ setzt, $-b\beta_{,}=-\nu'(r+b\beta_2)-$ $c\gamma_{,}=-\mu'(r+c\gamma_2)$, oder

$$-b\beta_{,}=-\nu'p'' \;.\;.\;.\; (a'')$$
$$-c\gamma_{,}=-\mu'q'' \;.\;.\;.\; (b'')$$

Diese Gleichungen mit einander multiplizirt geben: $bc\beta_{,}\gamma_{,}=\mu'\nu'p''q''$. Damit nun $A''=o$ wird, hat man, weil dann $bc\beta_{,}\gamma_{,} = \frac{a-r}{a+r}p''q''$, die Bedingungsgleichung $\mu'\nu' = \frac{a-r}{a+r}$ . . (c'')

Es sei AG=DE=q, (Fig. 3) wo q eine gerade Linie von beliebiger Länge ist, es sei ferner EF=AD=a−r (AG senkr. auf der Axe, EF||AG). Im ΔAD′G ist AG:D′A =tang.AD′G : 1; im ΔD′EF ist EF : D′E=tg.EDF : 1

$$\left.\begin{array}{r}\text{oder: } q : a+r = \nu' : 1\\ a-r : q = \mu' : 1\end{array}\right\} \;.\;.\;.\;.\; (d)$$

Hieraus folgt: $a-r : a+r = \mu'\nu' : 1$ d. h. $\mu'\nu' = \frac{a-r}{a+r}$ . . . (e) wie verlangt wird.

Die Gleichung (e) enthält die beiden unbekannten μ', ν', und giebt daher nur ein Verhältniß zwischen den zu bestmmenden Winkeln μ, ν an. Wegen der Willkührlichkeit der vermittelnden Geraden q können μ und ν unendlich viele Werthe annehmen.

Wir untersuchen noch, was, wenn $A''=o$, B'' und C'' für Werthe annehmen. Aus (a′), (b′) hat man $b\beta_{,}=\nu'p''$ $c\gamma_{,}=\mu'q''$; aus (d) und (e) kommt: $\mu' = \frac{a-r}{q}$, $\nu' = \frac{q}{a+r}$, daraus

$\mu'\nu' = \frac{a-r}{a+r}$, also $bc\beta_{,}\gamma_{,} = \mu'\nu'p''q'' = \frac{a-r}{a+r}p''q''$; daraus $C'' = p'q' - \left(\frac{a-r}{a+r}\right)^2 p''q''$;

$B'' = \frac{a-r}{q} . q''(\frac{a-r}{a+r} p'' - p') - \frac{q}{a+r} p''(\frac{a-r}{a+r} q'' + q')$, wo q unendlich viele Werthe annehmen kann. Wir wollen, um doch ein Beispiel zu geben von der Bestimmung von q, annehmen, daß W. $\mu = \nu$ sei, d. h. daß die Linie BC durch D' gehe. Man hat $\mu' = \nu'$ also nach dem Obigen $\frac{a-r}{q} = \frac{q}{a+r}$ d. h. $q^2 = a^2 - r^2$, $\mu'\nu' = \mu'^2 = \frac{a-r}{a+r}$. Um den W. $\mu = \nu$ bequemer zu konstruiren, hat man $\mu'^2 = \frac{1-(2\mu)_2}{1+(2\mu)_2} = \frac{a-r}{a+r}$; entwickelt, kommt: $(2\mu)_2 = \frac{r}{a}$.

Jetzt der Fall, in welchem $C'' = o$. Damit dieß geschehe, muß sein: $p'q' = \frac{a-r}{a+r} bc\beta_{,}\gamma_{,}$. Vergleicht man diese Gleichung mit der Gleichung (a'), (b'), so kommt $\mu'\nu' = \frac{a+r}{a-r} \ldots (c''')$.

Man mache W. $B'DD' = 90^\circ - BD'D = 90^\circ - \nu$ und W. $C'DD' = 90^\circ - CD'D = 90^\circ - \mu$; so hat man $tg.(90^\circ - \mu).tg.(90^\circ - \nu) = cotg.\mu.cotg.\nu = \frac{1}{\mu'\nu'} =$ (wegen (d')) $\frac{a+r}{a-r}$, wie verlangt wird. Die Geraden BD' und B'D schneiden einander unter rechtem Winkel, also im Kreisumfange, und ebenso auch C'D und CD'. Vergleicht man dieses mit dem Vorhergehenden, so wird man ersehen, wie die gegebenen Punkte B und C ihre Lage gegen einander und gegen den Durchmesser vertauschen, damit entweder der Koeffiz. A'' oder C'' gleich Null sein könne. Setzt man (s. oben) $\mu = \nu$ oder $q = \sqrt{a^2 - r^2}$, so wird für die zwei Paare der Geraden nur ein Durchschnittspunkt im Kreisumfange Statt finden.

3. Untersuchung der allgemeinen Bedingungsgleichung, für welche der Koeffiz. $B = o$ wird, und die Hauptgleichung in x, nemlich die Gleichung (α) Nr. 2. eine rein quadratische ist. Man hat aus Nr. 7, 1.

$$-c\gamma_{,} = \mu'(t - c\gamma_2) \quad \ldots . \ (a')$$
$$-b\beta_{,} = \nu'(t - b\beta_2) \quad \ldots . \ (b')$$

Damit aber $B = o$ werde, muß sein:

$$c\gamma_{,}p' - b\beta_{,}q' + \frac{a-r}{a+r} b\beta_{,}q'' - \frac{a-r}{a+r} c\gamma_{,}p'' = o$$

Nun gibt (b) . q' — (a) . p' folgende Gleichung:

$$c\gamma_{,}p' - b\beta_{,}q' = \nu'q'(t - b\beta_2) - \mu'p'(t - c\gamma_2) \quad \ldots . \ (g)$$

$$(a) . \frac{a-r}{a+r} . p'' - (b) . \frac{a-r}{a+r} . q'' \text{ gibt:}$$

$$-\frac{a-r}{a+r} . c\gamma_{,}p'' + \frac{a-r}{a+r} b\beta_{,}q'' = \frac{a-r}{a+r} p''\mu'(t - c\gamma_2) - \frac{a-r}{a+r} q''\nu'(t - b\beta_2) \quad \ldots . \ (g')$$

(g)+(g') gleich Null gesetzt gibt die gesuchte allgemeine Bedingungsgleichung, daß $B = o$ sei, nemlich:

$$\nu'(t - b\beta_2)(q' - \frac{a-r}{a+r} q'') - \mu'(t - c\gamma_2)(p' - \frac{a-r}{a+r} p'') = o$$

Wir wollen nur des einzigen Falles erwähnen, wenn man setzt $t = \frac{r^2}{a}$; die allgemeine Bedingungsgleichung gibt: $(\nu' - \mu')(r^2 - ab\beta_2)(r^2 - ac\gamma_2) = o$. Diese Gleichung wird befriedigt, wenn $\nu'=\mu'$ d. h. wenn $\nu=\mu$, wenn die Verbindungslinie BC durch den Punkt des Durchmessers geht, für welchen $t=\frac{r^2}{a}$, wie oben Nr. 5, 5.

Damit in der Hauptgleichung in z [Nr. 2, 2 (α'')] der Koeffiz. $B''=o$ werde, und diese Gleichung eine rein quadratische sei, hat man die Gleichung zu befriedigen $B''=o=c\gamma_{,}(p'-\frac{a-r}{a+r}p'')+b\beta_{,}(q'-\frac{a-r}{a+r}q'')$. Man hat [Nr. 7, 1]

$$-c\gamma_{,}=\mu'(t-c\gamma_2)\ \ldots\ldots\ (a''')$$
$$-b\beta_{,}=\nu'(t-b\beta_2)\ \ldots\ldots\ (b''')$$

wo μ den Winkel anzeigt, welchen die Gerade durch C mit dem Durchmesser für die Abscisse $=t$ einschließt, und ν den Winkel, welchen die Gerade durch B mit dem Durchmesser für die Abscisse $=t$ bildet.

$$(a''')\,.\,-p'+(b''')\,.\,-q' \text{ gibt:}$$
$$c\gamma_{,}p'+b\beta_{,}q'=-p'\mu'(t-c\gamma_2)-q'\nu'(t-b\beta_2)\ \ldots\ldots\ (\gamma)$$
$$(a''')\,.\,\frac{a-r}{a+r}p''+(b''')\,.\,\frac{a-r}{a+r}q'' \text{ gibt:}$$
$$-\frac{a-r}{a+r}p''c\gamma_{,}-\frac{a-r}{a+r}q''b\beta_{,}=\frac{a-r}{a+r}p''\mu'(t-c\gamma_2)+\frac{a-r}{a+r}q''\nu'(t-b\beta_2)\ \ldots\ldots\ (\gamma')$$

(γ)+(γ') gleich Null gesetzt gibt die gesuchte allgemeine Bedingungsgleichung:

$$\mu'(t-c\gamma_2)(\frac{a-r}{a+r}p''-p')+\nu'(t-b\beta_2)(\frac{a-r}{a+r}q''-q')=o$$

oder entwickelt: $\mu'(t-c\gamma_2)(ab\beta_2-r^2)+\nu'(ac\gamma_2-r^2)(t-b\beta_2)=o\ \ldots\ (\delta)$

Wir wollen nur den einzigen Fall erwägen, daß die beiden Geraden durch denselben Punkt des Durchmessers gehen, dessen Abscisse $t=\frac{r^2}{a}$ ist. Die Gl. (δ) wird dafür: $(r^2-ac\gamma_2)(ab\beta_2-r^2)(\mu'+\nu')=o$. Setzt man, um diese Bedingungsgleichung zu befriedigen, $\mu'+\nu'=o$, woraus $\mu'=-\nu'$ (d. h. die Tangente des Winkels zwischen der Geraden durch C und dem Durchmesser oder des W. CEO ist gleich der Tang. des W. zwischen der Geraden durch *B* und dem Durchm. oder des W. BEO d. h. $\mu+\nu=180^\circ$; also BC senkr. auf dem Durchmesser, wie wir oben gefunden haben. (Nr. 7, 1. Anmerk.)

4. Die Koeffizienten A, B, C in der Hauptgl. von $x=\text{tang.}\,\frac{\varphi}{2}$ können noch einfacher ausgedrückt werden, als bisher geschehen ist, wenn man die gegebenen Punkte B und C, anstatt in Beziehung auf den Mittelpunkt des Kreises zu betrachten, auf die beiden Endpunkte des Halbmessers bezieht. Zugleich wird dadurch in den vorherigen Nrn. Erwiesenes bestätigt. Man ziehe von *B* sowohl als von C Fig. 4. aus Geraden nach D und D'; es sei $BD=K$, $CD=l$, $BD'=K'$, $CD'=l'$, W. $BDP=k$ W. $BD'D=\vartheta$ W. $CDD'=\lambda$ W. $CD'D=\zeta$, so ist $D'P=r+b\beta_2=p''$ $D'Q=r+c\gamma_2=q''$ $DP=r-b\beta_2=p'$ $DQ=r-c\gamma_2=q'$. Man hat ferner $b\beta_{,}=Kk_{,}-K'\vartheta$, $c\gamma_{,}=l\lambda_{,}=l'\zeta$, $p'=Kk_2$ $p''=K'\vartheta_2$ $q'=l\lambda_2$ $q''=l'\zeta_2$; daraus (durch Substitution in die Hauptgl. von x No. 2 (α))

$$A=lK'\lambda_2\vartheta_2-lK'\lambda_{,}\vartheta_{,};\ C=\frac{a-r}{a+r}(Kl'k_{,}\zeta_{,}-Kl'k_2\zeta_2)$$

$$B = Kl(\lambda_{,}k_{2} - k_{,}\lambda_{2}) + \frac{a-r}{a+r} K'l'(\vartheta_{,}\zeta_{2} - \zeta_{,}\vartheta_{2}),$$ oder

$$A = lK'(\lambda+\vartheta)_{2}; \quad C = -\frac{a-r}{a+r} Kl'(k+\zeta)_{2};$$

$$B = -Kl(k-\lambda)_{,} - \frac{a-r}{a+r} K'l'(\zeta-\vartheta)_{,}.$$

Es ist aber W. $DFD' = 180^{o} - (\lambda+\vartheta)$; $(DFD')_{2} = -(\lambda+\vartheta)_{2}$ W. $DGD' = 180^{o} - (k+\zeta)$; also $(DGD')_{2} = -(k+\zeta)_{2}$; wir nennen den W. DFD' zur Abkürzung F, und den W. DGD', G;

Es ist ferner $-\frac{B}{2} =$ Dr. $BDC + \frac{a-r}{a+r}$ Dr. $BD'C$; auch ist $\left(-\frac{B}{2}\right)^{2} = \frac{B^{2}}{4}$ immer positiv, $-A.C$ ist aber $\frac{a-r}{a+r}.F_{2}G_{2}$. Die Grösse unter dem Wurzelzeichen in dem Ausdruck für $x = \text{tang.}\frac{\varphi}{2}$ [No. 4] nemlich $\frac{B^{2}}{4} - A.C$ wird positiv sein, wenn beide Winkel F und G spitz oder stumpf sind; kann aber negativ sein, wenn von den zwei Winkeln F und G der eine spitz, der andere stumpf ist. Ist der eine dieser Winkel ein rechter, so ist sein Kosinus gleich Null oder es ist entweder A oder $C = o$, welches mit der obigen Behauptung Nr. 7, 1. übereinstimmt.

Schulnachrichten
von Ostern 1838 bis Ostern 1839.

A) Uebersicht des ertheilten Unterrichts *).

Prima.
(Ordinarius: Prediger und Prorektor Guiard.)

1) Deutsche Sprache und Philosophie 3 St. Aufsätze, freies Sprechen, Deklamiren, Lesen und Logik, nach Arnolds Grundriß der Denklehre. Direktor Arnold. Guiard.
2) Lateinisch 7 St. Horat. Od. III. 8—IV. 10. i. S. Horat. Sat. I. 1. 3. 4. 6. 7. 9. II. 1. 2. 5. 6. i. W. 2 St. Cic. pro Mil. und Phil. II. die größere Hälfte i. S. Cic. de fin. V. und III. 1—15. i. W. 3 St. Aufsätze, Exercitien, Extemporalien und Sprechen 2 St. Guiard.
3) Griechisch 4 St. Platon. Alcibiades I. i. S. Alcibiades II. und Criton i. W. 2 St. Arnold. Haupt. Homeri Ilias I—III. i. S. 4—6. i. W. 2 St. Haupt.
4) Hebräisch 2 St. Gesenius Lesebuch S. 56—76. S. 96—117. u. S. 3—11. Grammatik: Syntax i. S. Wiederholung der ganzen Formlehre nach Gesenius i. W. Guiard.
5) Französisch 2 St. Ideler's und Nolte's Handbuch poetischer Theil: Corneille und Molière i. S. Molière und Racine i. W. 1 St. Schreiben 1 St. Pfefferkorn.
6) Religion mit Sekunda verbunden 1 St. Glaubenslehre. Guiard.
7) Mathematik 3 St. Combinationslehre, binomischer Satz und höhere Gleichungen i. S. Die vorzüglichsten Eigenschaften der Kegelschnittslinien 2 St. und Anleitung zur Auflösung mathematischer Aufgaben 1 St. i. W. (Lehrbücher in dieser und in den drei folgenden Klassen: Legendre's Geometrie übers. von Crelle und Lacroix Algebra übersetzt von Grüson). Häusliche, vom Lehrer korrigirte Arbeiten, hier, wie in den übrigen Klassen. Heiligendörfer.
8) Physik nach Kries Lehrbuch §. 425—458. i. S. §. 459—472. und 31—82. i. W. 2 St. Heiligendörfer.
9) Geschichte. Allgemeine Geschichte in einem zweijährigen Kursus nach Schmidt's Grundriß der allgemein. Weltgeschichte, i. S. 3 St. i. W. 2 St. Pfefferkorn.

Sekunda.
(Ordinarius: Oberlehrer Dr. Pfefferkorn.)

1) Deutsche Sprache 2 St. Aufsätze 1 St. Freies Sprechen und Deklamiren 1 St. Arnold. Pfefferkorn.

---

*) Der Grund, weshalb bei einigen Lektionen zwei Lehrer angeführt sind, ergiebt sich aus Abschnitt C.

2) Lateinisch 8 St. Virg. Aeneis II. 567—IV. zu Ende, 2 St. Guiard. Livius XXII. i. S. Ciceronis Laelius et Cato. i. W. 4 St. Grammatik, Exercitien und Extemporalien 2 St. Haupt.
3) Griechisch 5 St. Xenoph. Memorabil. Einleitung und B. I. c. 3. — B. II. c. 1. i. S. B. II. c. 2—B. III. c. 4. i. W. 2 St. Hom. Odyss. Einleitung u. B. I. i. S. B. II. und III. i. W. 2 St. Schreiben 1 St. Pfefferkorn.
4) Hebräisch 2 St. Leseübungen und Grammatik nach Gesenius (Pronomina, regelmäßige und unregelmäßige Verba und Nomina) verbunden mit Uebersetzen aus Gesenius Lesebuch. Guiard.
5) Französisch 2 St. Ideler's und Nolte's Handbuch prosaischer Theil: Rollin und d'Aguesseau i. S. Massillon und Le Sage i. W. 1 St. Schreiben 1 St. Pfefferkorn.
6) Religion s. Prima.
7) Mathematik 3 St. Legendre 7tes und 8tes Buch; Berechnung von Dreiecken mittelst der logarithmischen Tafeln i. S. Progressionen, Logarithmen und ebene Trigonometrie i. W. Heiligendörfer.
8) Physik nach Kries Lehrbuch: §. 348—425. i. S. §. 472—545. i. W. 2 St. Heiligendörfer.
9) Geschichte 3 St. Staatengeschichte des Mittelalters und der neueren Zeit nach Günthers Abriß. Pfefferkorn.

Tertia.

(Ordinarius: Oberlehrer Dr. Haupt.)

1) Deutsche Sprache 2 St. Grammatik: die Lehre vom Satz i. S. etymol. Theil i. W. 1 St. Aufsätze, Lesen mit Erklärung, Nacherzählen und Deklamiren. 1 St. Michaelis.
2) Lateinisch 7 St. Ovid. Metamorph. L. V. i. S. L. VI. i. W. 2 St. Caes. bell. Gall. L. III. IV. i. S. 3 St. Curt. L. VI. i. W. 3 St. Schulz Grammatik nebst Exercitien und Extemporalien, 2 St. Haupt.
3) Griechisch 4 St. Xenoph. Anab. L. II. III. Buttmanns Grammatik und Schreiben. Haupt.
4) Französisch 2 St. Heckers Lesebuch Th. II. 1 St. Schreiben 1 St. Pfefferkorn.
5) Religion 2 St. Leben und Lehre Jesu nach den vier Evangelien i. S. Guiard. Michaelis. Schluß desselben und die Apostelgeschichte i. W. Michaelis.
6) Mathematik 4 St. Legendre 4tes Buch; Ausziehung der Quadrat- und Kubikwurzeln, i. S. Legendre 3tes Buch; allgemeine Proportionslehre i. W. Heiligendörfer.
7) Physik nach Kries Lehrbuch von §. 1—224. 2 St. Guiard.
8) Geschichte und Geographie 3 St. Allgemeine Geschichte in einem anderthalbjährigen Kursus nach Schmidt's Grundriß der allgem. Geschichte. Pfefferkorn.

Quarta.

(Ordinarius: Subrektor Schulz.)

1) Deutsche Sprache 3 St. Grammatik, Aufsätze, Lesen, Nacherzählen, Extemporalien und Deklamiren. Schulz.

2) Lateinisch i. S. 6. i. W. 7 St. Phaedri fabul. L. III. und IV. 1—5. nebst den Quantitätsregeln (Schulz Gramm. §. 7. 8.) 1 St. Corn. Nep. Eum. bis Hannibal c. 6. i. S. 2 St. i. W. 3 St. Grammatik nach der kleinen Schulgramm. von Schulz (Formenlehre §. 53. und 54. Syntax §. 76—80. Exercitien nach Döring und Extemporalien 3 St. Schulz.
3) Griechisch 4 St. Uebersetzen aus dem griech. Lesebuch von Jacobs 2 St. Grammatik nach Buttmann bis zu den verbis contractis. 2 St. Schulz.
4) Französisch 2 St. Lesen und Uebersetzen. Hecker's Lesebuch Th. I. Abth. III. 1—11. und Abth. IV. 6—10. Grammatik nach Franceson bis zu den unregelmäßigen Zeitwörtern incl. Schulz.
5) Religion 2 St. Kenntniß der Bibel und ihres Inhalts nach Krummachers Bibelkatechismus; i. S. das A. T., i. W. das N. T. besonders das Leben Jesu und Lesen des Evangeliums Johannis. Schulz.
6) Mathematik 4 St. Allgemeine Bruchrechnung und Decimalbrüche i. S. Die vier Species der Buchstabenrechnung i. W. 2 St. Heiligendörfer. Legendre's erstes Buch nebst dazu gehörigen Aufgaben 2 St. Bieck.
7) Naturbeschreibung 2 St. Das Pflanzenreich (kurze Terminologie, Sexualsystem, leichte natürliche Familien und Anleitung zur Anlegung eigener Sammlungen) nebst Exkursionen i. S. Thier- und Mineralreich, nach Schubert i. W. Schulz.
8) Geographie. Die mathematische und physische Geographie und Europa. Pfefferkorn. Niethe.
9) Geschichte 1 St. Brandenburg-Preußische Geschichte. Niethe.
10) Technische Fertigkeiten: a) Schreiben 1 St. b) Zeichnen nach Vorlegeblättern: Blumen, Fruchtstücke, Köpfe, Landschaften ꝛc. nebst Anleitung zur Perspektive; 2 St. Bieck.

Quinta.

(Ordinarius: Kollaborator Niethe.)

1) Deutsche Sprache 3 St. Grammatik nebst Aufsätzen, orthographischen Uebungen, Lesen, Deklamiren und Nacherzählen. Niethe.
2) Lateinisch 5 St. Formenlehre nach der kleinen Grammatik von Schulz, Uebersetzen aus Bröders kleiner Grammatik und kleine Exercitien. Niethe.
3) Französisch 2 St. Grammatik nach Arnold's Anfangsgründen der franz. Sprachlehre; Lesen und Uebersetzen in Hecker's Lesebuch Th. 1. Abschn. I. und II. Schulz.
4) Religion verbunden mit Sexta 2 St. nach Küsters bibl. Gesch. i. S. das A. T., i. W. das N. T. Michaelis.
5) Rechnen 4 St. Brüche, zusammengesetzte Regel de tri, Gesellschaftsrechnung, Zinsrechnung, Decimalbrüche, Berechnung der Flächen und Kopfrechnen. Bieck.
6) Geographie 2 St. Die außereuropäischen Erdtheile nach dem Leitfaden von Arnold und Dibelius und Uebung im Kartenzeichnen. Niethe.
7) Geschichte 2 St. nach Arnold's Hauptbegebenheiten und dessen Uebersichtsblatt der Geschichte nach den Staaten und nach der Stammverwandtschaft. Niethe.

8) Naturbeschreibung 2 St. Das Mineralreich i. S. das Thierreich i. W. nach Schubert. Niethe.
9) Technische Fertigkeiten: a) Schreiben 2 St. in den Stunden Anweisung und Durchsicht der häuslichen Uebungen. Niethe. b) Zeichnen 2 St. Anleitung zur Perspektive und Zeichnen nach der Natur und nach Vorlegeblättern. Bieck.

Sexta.

(Ordinarius: Hülfslehrer Kandidat Michaelis.)

1) Deutsche Sprache 4 St. Formenlehre, orthographische Uebungen, Lesen, Nacherzählen und Deklamiren. Michaelis.
2) Lateinisch 6 St. Leseübungen, Formenlehre nach der kleinen Grammatik von Schulz, Uebersetzen aus Bröders Lektionen §. 231—321. und schriftliche Uebungen im Dekliniren und Konjugiren. Michaelis.
3) Religion s. Quinta.
4) Rechnen. Zahlen-Lesen und Schreiben, die 4 einfachen Rechnungsarten mit benannten und unbenannten Zahlen, mit ganzen Zahlen und Brüchen, Verhältnisse und Proportionen, Regel de tri nebst Kopfrechnen. Bieck.
5) Naturbeschreibung 2 St. nach Schubert i. S. das Mineralreich, i. W. das Thierreich. Niethe.
6) Geographie 2 St. Nach der ersten Hälfte von Arnolds Leitfaden i. S. Europa und i. W. die übrigen Erdtheile. Michaelis.
7) Technische Fertigkeiten: a) Schreiben 2 St. Anleitung in den Stunden verbunden mit häuslichen Uebungen. Niethe. b) Zeichnen 2 St. Linearzeichnen und Zeichnen nach Vorlegeblättern. Niethe.

Nebenklassen für die nicht Griechisch Lernenden.

E. Nebenklasse für Prima und Sekunda:

1) Mathematik 2 St. Wiederholung der Arithmetik, Kettenbrüche und Legendre's 3tes Buch, i. S. Schwierigere praktische Rechnungsarten, z. B. Progressions- und Zins von Zins-Rechnung und Aufgaben aus der praktischen Geometrie i. W. Heiligendörfer.
2) Französisch 2 St. Hecker's Lesebuch, 2ter Cursus, poet. Theil 1 St. Schreiben 1 St. Arnold. Schulz.

Zweite Nebenklasse für Tertia und Quarta.

1) Geographie nebst Technologie, Naturbeschreibung und Geschichte nach Zachariä's Erdbeschreibung u. s. w. 2 St. i. S. Arnold. Bieck. Dafür
2) Rechnen 2 St. i. W. zusammengesetzte Regel de tri, Zins- und Rabatt-, Gesellschafts-, Mischungs- und Kettenrechnung. Bieck.
3) Aufsätze für das Geschäftsleben 1 St. Bieck.
4) Französisch 1 St. Haupt.

Außerdem ertheilt der Kantor Bieck noch wöchentlich für die drei obersten Klassen 2 Stunden Unterricht im Zeichnen, in welchen jeder Gelegenheit hat, sich in dem Theil der Kunst zu üben, der zu seinem künftigen Beruf in näherer Beziehung steht.

Der Gesangunterricht wurde, wie bisher, in zwei Abtheilungen, von denen die erste die vier ersten Klassen, die zweite die beiden letzten in sich begreift, vom Kantor Bieck gegeben.

Die Benutzung der Schüler-Bibliothek ist gegen ein halbjährliches Lesegeld von 15 Sgr. sämmtlichen Schülern der 4 ersten Klassen und den fleißigeren der fünften gestattet. Die Bücher werden wöchentlich zwei Mal ausgetheilt. Den Primanern und Sekundanern werden überdieß auch Bücher aus der Lehrer-Bibliothek gereicht, um sie bei ihren Privatstudien benutzen zu können.

Die körperlichen Uebungen, welche im vorigen Jahre eingeführt worden sind, wurden auch in dem verflossenen Schuljahre unter der Leitung des Kandidaten Michaelis fortgesetzt. Im Sommer ward Mittwochs und Sonnabends, jedes Mal zwei Stunden, geturnt. Im Winter fanden an eben diesen Tagen Fechtübungen statt.

B. Verfügungen der hohen Behörden.

1) Verfügung Eines Königl. Hochverordneten Schul-Kollegiums vom 2. April 1838, daß auch den Lehrern der Mathematik und der Naturwissenschaften das Klassen-Ordinariat übertragen werden kann, und daß in jedem einzelnen Falle bei dem Königl. Ministerium auf die Ertheilung des Prädikats eines Oberlehrers für einzelne Klassen-Ordinarien angetragen werden muß.

2) Verfügung derselben hohen Behörde vom 30. April 1838, betreffend den Religions-Unterricht auf Gymnasien. Es soll besonders darauf gesehen werden, daß die Schüler in den unteren Klassen mit dem Katechismus und der Reihenfolge und dem Hauptinhalt sämmtlicher Bücher der Bibel bekannt werden, auch die Bibelsprüche, aus welchen die Hauptwahrheiten der christlichen Religion herzuleiten sind, und die vorzüglichsten und gangbarsten Kirchenlieder auswendig lernen. In den oberen Klassen ist dafür zu sorgen, daß das Erlernte nicht wieder verloren gehe, und die Bekanntschaft mit der Bibel erweitert werde.

3) Verfügung derselben hohen Behörde vom 17. September 1838, in welcher angezeigt wird, daß die Fürstlich Schwarzburg-Sondershausen'sche Regierung sich erboten hat, gegen den Empfang der Programme von den Königl. Preuß. Gymnasien die Programme ihrer gelehrten Schulen den zuerst gedachten Anstalten mitzutheilen.

4) Verfügung derselben hohen Behörde vom 22. Januar 1839, welche die von nun an am Schlusse jedes Halbjahrs einzureichenden Frequenzlisten betrifft.

C. Chronik des Gymnasiums.

1) Am 28. und 29. Mai v. J. besuchte der Herr Regierungs- und Schulrath Lange die Klassen des Gymnasiums, um sie zu revidiren.

2) Am 29. Mai v. J. verließ uns der Vorsteher unserer Anstalt, Herr Direktor und Professor Arnold, um mit Bewilligung der höchsten und hohen vorgesetzten Behörden der Aufforderung zur interimistischen Uebernahme wichtiger Geschäfte in Berlin zu folgen. Für die Zeit der Abwesenheit ward die Direktion des Gymnasiums dem Herrn Superintendent Schultze und dem unterzeichneten Prorektor übertragen, und zwar so, daß Ersterem namentlich die Korrespondenz mit den Behörden, Letzterem aber besonders die Leitung der inneren Angelegenheiten obliegen sollte. Da indeß Herr Superintendent Schultze später durch Krankheit verhindert ward, sich diesen Geschäften ferner zu unterziehen; so ist seit dem 1sten December v. J. der Prorektor allein mit der gesammten Direktion beauftragt. Für den Unterricht wurde die einstweilige Abwesenheit des Direktors minder fühlbar, weil es sich möglich machen ließ, die Stunden desselben, ohne eine besondere Veränderung, des Lehrplans in die Hände solcher Lehrer zu legen, zu deren Fach der von ihnen übernommene Gegenstand gehört, und die denselben auch früher schon in derselben Klasse vorgetragen haben. Um dies möglich zu machen, bedurfte es nur, daß der Prorektor die beiden Religionsstunden in Tertia dem Kandidaten Michaelis, der sie schon früher längere Zeit ertheilt hat, überließ, und der Oberlehrer Dr. Pfefferkorn die beiden geographischen Stunden in Quarta an den Kollaborator Riethe abtrat.

3) Am 27. October v. J. führte Herr Schulrath Schulz als Königl. Prüfungs-Kommissarius den Vorsitz bei der Maturitäts-Prüfung des Immatrikulanden Daniel Friedrich Gäde aus Soldin, welcher vor länger als zwei Jahren aus Prima unseres Gymnasiums abgegangen war, um sich der Oekonomie zu widmen, und später sich wiederum entschlossen hat, Cameralia zu studiren. Es ist demselben das Zeugniß der Reife ertheilt worden.

4) An eben diesem Tage wurde das Sommersemester auf die gewöhnliche Weise mit einer öffentlichen Rede- und Declamations-Uebung, welche Herr Schulrath Schulz mit seiner Gegenwart beehrte, geschlossen.

5) Am 2. Februar d. J. verloren wir einen unserer hoffnungsvollsten Zöglinge nach einer Krankheit von drittehalb Tagen durch den Tod, nämlich den Primaner Carl Friedrich Wilhelm Schmidt, Sohn des hiesigen Herrn Kreis-Steuer-Kassen-Rendanten Schmidt. Am Mittwoch den 6. Februar fand deshalb vor der Beerdigung im großen Hörsaale eine angemessene Feierlichkeit Statt.

Seit dem Ende Januars sind nicht wenige unserer Schüler an den Masern, die sich in diesem Winter hier, doch sehr gutartig, verbreitet hatten, erkrankt und dadurch in ihrem Schulbesuch unterbrochen worden.

6) Das gesammte Lehrer-Collegium, in welchem im Laufe des Schuljahres keine Veränderungen vorgefallen sind, erfreute sich einer fortwährenden Gesundheit.

7) Dem Wohlwollen der uns vorgesetzten Behörden verdankt die Bibliothek des Gymnasiums wiederum mehre Geschenke an Büchern, nämlich: Rheinisches Museum für Philologie, 5ter Jahrgang. — Das veranschaulichte Weltsystem von Dr. Schulze. — Ein hundert Choräle für Schulen von Fischer, 1—3. Heft. — Einige Theile von Hegels Werken.

Aus ihrem eigenen Fonds wurde die Bibliothek besonders durch die Fortsetzungen bedeutender Werke bereichert, deren frühere Theile schon angeschafft waren.

D. Statistische Uebersicht.

An Schülern zählte die Anstalt:

Im Sommerhalbjahre.		Im Winterhalbjahre.	
In Prima	7	In Prima	9
In Secunda	20	In Secunda	20
In Tertia	25	In Tertia	24
In Quarta	40	In Quarta	38
In Quinta	42	In Quinta	43
In Sexta	31	In Sexta	28
In allen Klassen	165	In allen Klassen	162

Aufgenommen sind im Jahre 1838 35 Schüler.

Zu Michaelis v. J. hatte sich kein Abiturient gemeldet. Jetzt haben sich der Prüfung unterzogen:

1) Herrmann Carl Otto **Pfefferkorn**, aus Königsberg i. d. N., evangelischer Confession, $19\frac{1}{2}$ Jahr alt, 11 Jahre auf dem Gymnasium und 2 Jahre in Prima.
2) Johann Friedrich **Zimmermann**, aus Bärwalde i. d. N., $19\frac{1}{2}$ Jahr alt, 8 Jahre auf dem Gymnasium und 2 Jahre in Prima,

und werden mit dem Zeugniß der Reife entlassen, Ersterer, um in Berlin Philologie und Geschichte, Letzterer, um in Halle Theologie und Philologie zu studiren.

E. Oeffentliche Prüfung.

Die öffentliche Prüfung, welche alle Freunde der Jugendbildung, besonders die Eltern und Angehörigen unserer Zöglinge, mit ihrer Gegenwart zu beehren, ergebenst eingeladen werden, wird am Donnerstag, den 21sten März, in folgender Ordnung statt finden:

Vormittag.

Gesang.

Von 8—9 Uhr. **Quarta:**
Latein. Subrektor **Schulz**.
Geometrie. Kantor und erster Collaborator **Bieck**.

Von 9—10 Uhr. **Tertia.**
Griechisch. Oberlehrer Dr. **Haupt**.
Mathematik. Oberlehrer **Heiligendörfer**.

Von 10—11 Uhr. **Sekunda:**
Latein. Oberlehrer Dr. **Haupt**.

Mathematik. Oberlehrer Heiligendörfer.
Französisch. Oberlehrer Dr. Pfefferkorn.
Von 11—12 Uhr. Prima:
Latein. Guiard.
Geschichte. Oberlehrer Dr. Pfefferkorn.
Physik. Oberlehrer Heiligendörfer.
Gesang.

Nachmittag.

Gesang.
Von 2—$2\frac{3}{4}$ Uhr: Quinta:
Geographie. Kollaborator Niethe.
Rechnen. Kantor und erster Kollaborator Vieck.
Von $2\frac{3}{4}$—$3\frac{1}{2}$ Uhr. Sexta:
Latein. Kandidat Michaelis.
Geographie. Derselbe.
Reden der Abiturienten und die Erwiederungsrede im Namen der Zurückbleibenden.
Gesang.
Entlassung der Abiturienten.
Gesang.

Freitag, den 22. März, wird das Wintersemester mit der Censur sämmtlicher Klassen geschlossen. — Montag, den 7. April, wird der Unterricht, der nach dem bisherigen Plane, mit Beibehaltung der Nebenklassen zum Besten der Nichtstudirenden, auch ferner ertheilt werden wird, wiederum beginnen. Die Prüfung der aufzunehmenden Zöglinge kann in den Ferien zu jeder Zeit von dem Unterzeichneten geschehen.

Guiard.