Programm

für die

öffentliche Prüfung

im

Königlichen Gymnasium zu Rastenburg

den 28sten und 29sten September 1831

auf welche die Entlassung der Abiturienten folgt,

enthaltend

Nachrichten, das Gymnasium betreffend,

im Schuljahr $18\frac{30}{31}$,

gegeben

durch den Director Krüger,

welcher im Namen der Anstalt zur Prüfung

einladet.

Diesen folgt

eine Abhandlung des Oberlehrers Herrn Klupsz.

Rastenburg, 1831.

Gedruckt bei August Haberland.

Bericht über das Königl. Gymnasium zu Rastenburg im Schuljahre $18\frac{50}{51}$.

Lehrer waren

Director **Krüger**.
Oberlehrer **Heinicke**, Ordinarius von Prima.
Oberlehrer Dr. **Dumas**, Ordinarius von Secunda.
Oberlehrer **Klupsz**, Ordinarius von Tertia.
Gymnasienlehrer **Weyl**, Ordinarius von Quarta.
Gymnasienlehrer Dr. **Brillowski**.
Gymnasienlehrer Dr. **Lewitz**, Ordinarius von Quinta.
Hülfslehrer **Dopatka**, Ordinarius von Sexta.
Gesanglehrer Cantor **Küsell**.
Zeichen- und Schreibe-Lehrer **Thiem**.

Folgende Gegenstände und folgende Theile derselben wurden gelehrt.

Religion.

In Prima. Director Krüger 2 St. wöchentlich. Aus der christlichen Sittenlehre die Pflichten gegen Gott und gegen seinen Nebenmenschen. Gelesen wurden außer den biblischen Stellen, in denen diese Pflichten gelehrt werden, der Brief an die Hebräer und der Brief Jacobi.

In Secunda. Oberlehrer Heinicke 2 St. Die Lehre des Christenthums von der Bestimmung des Menschen und von der Unsterblichkeit, aus Stellen des N. T. entwickelt. Gelesen wurde Ev. Matth. vom 21sten Kapitel bis zu Ende und aus dem Ev. Johannis Kap. 1 bis 3.

In Tertia. Director Krüger 2 St. Die Lehre von der Sünde, von der Gnadenordnung, von den Gnadenmitteln, von den Verheifsungen und Hoffnungen des Christenthums für dieses und das zukünftige Leben. Es wurde auch der Anfang gemacht, die Entstehung der christlichen Kirche darzulegen; zu dem Ende wurden die ersten Kapitel der Apostelgeschichte gelesen.

In Quarta. Dr. Brillowski 2 St. Die Lehre von dem Dasein und den Eigenschaften Gottes, von der Erlösung und Heiligung und von der Unsterblichkeit. Schriftstellen, welche davon handeln, wurden angeführt und erklärt.

In Quinta. Herr Dopatka 2 St. Die Lehre von Gott nach der Lehre Jesu und über die Entstehung der von ihm gestifteten Kirche. Gelesen wurde die Apostelgeschichte.

In Sexta. Dr. Brillowski 2 St. Die biblische Geschichte des alten Testaments und zum Theil nach des neuen Testaments.

Sprachen.

1. hebräische.

Abtheil. 1. Director Krüger 2 St. Die prosaischen und poetischen Stellen in Gesenius Lesebuch wurden übersetzt und grammatisch erklärt, auch die wichtigsten Kapitel aus dem 2ten und einige aus dem 5ten Buche Mosis.

Abtheil. 2. Oberlehrer Heinicke 2 St. Die Formenlehre der Grammatik nach Gesenius, und Uebersetzung und Erklärung der ersten Kapitel der Genesis.

2. griechische.

In Prima. Oberlehrer Heinicke im Ganzen 6 St., davon
3 St. Xenoph. Hellenica 1, 7 — fin l. II. III. — Plat. Crito.

2 St. Sophocl. Ajax. Hom. Il. 1.

1 St. Grammatic vollständige Syntax nach Buttmanns gröſserer Schul-Grammatic bis § 142.

Dabei wurde wöchentlich ein Exercitium gearbeitet und Uebungen im schriftlichen Interpretiren angestellt.

Privatim haben alle Primaner gelesen die in der Schule nicht gelesenen Rhapsodien der Ilias, einige auch Bücher aus dem Herodotus und einzelne Tragödien des Sophocles, einige Xenophons Apologie.

In Secunda. Oberlehrer Heinicke 7 St., davon

3 St. Xenoph. Memor. Socr. l. IV. Cyropaed. l. 1.

2 St. Hom. Il. VIII. IX.

1 St. Grammatic Syntax nach Buttmanns gröſserer Schul-Grammatic bis § 142.

1 St. Uebungen in der Prosodie und Verskunst. Wiederholung des etymologischen Theils der Grammatic. Uebungen im Retrovertiren.

Wöchentlich wurde ein Exercitium gemacht.

Privatim haben alle Secundaner gelesen die in der Schule nicht gelesenen Rhapsodien der Odyſsee, einige auch Bücher aus Xenoph. Anabasis.

In Tertia. Herr Weyl 6 St., davon

2 St. Xenoph. Anab. l. 1. c. 4. l. III. c. 4.

1 St. aus Jacobs gr. Lesebuche die mythologischen Gespräche, ein Theil der Länder- und Völker-Kunde, denn noch von p. 63 bis 114.

2 St Hom. Odyſs. IV. IX. XI. 1 — 234. XII. 1 — 278.

2 St. Etymologie nach Buttmanns kleiner Schul-Grammatic bis § 120.

In Quarta. Herr Weyl 5 St., davon

3 St. Grammatic-Etymologie. Die erste Abtheilung bis § 105, die zweite bis 77 incl.

2 St. Jacobs Lesebuch 1ſter Cursus: Adjectivum bis gemischte Beispiele der Zeitwörter, 2tes Stück.

3. lateinische.

In Prima. Oberlehrer Dr. Dumas 6 St., davon

3 St. Cic. de natura Deorum I, 1 — 30. l. II.

1 St. Tacitus hist. l. 1, 50 — 80. l. II.

2 St. Horat. Carm. III, 19 ad f. Ars poetica.

Monatlich eine freie Arbeit, wöchentlich ein Exercitium.

1 St. Oberlehrer Heinicke. Uebungen im freien Sprechen; in mündlicher Interpretation, im Disputiren über Homer. und Horaz. Parallelstellen.

Privatim wurde gelesen: Térent. Adelphi, Heautontim. Liv. II, VII, VIII. Cic. de nat. Deorum l. I, 30 ad f. Taciti hist. l. I, cap. 80 ad fin.

In Secunda. Oberlehrer Dr. Dumas 4 St., davon

2 St. Cic. orat. pro rege Dejotaro, pro M. Marcello, in Catil. III et IV.

2 St. Livius lib. II.

Director Krüger 2 St. Virg. Aeneid. l. III.

Dabei wurde wöchentlich ein Exercitium gemacht und corrigirt.

Privatim wurde gelesen: Virg. Aen. VI. VII. — Aus Ovids Metamorph. nach Seidels Auszug wurden gelesen einzelne Stücke aus l. XIV; dann Cic. in Catilinam I und II und Sallust de bello Catilinario.

In Tertia. Dr. Brillowski 7 St., davon

2 St. Syntax mit Uebersetzungen aus dem Deutschen ins Lateinische nach August.

1 St. Wiederholung der Etymologie und extemporalia.

2 St. Justin, die ersten 5 Bücher, doch so, daſs im ersten Buche Einiges ausgelaſsen und bloſs der Inhalt angegeben wurde.

2 St. Ovid. Metamorph. l. 12 von 580. l. 13 und 14.

In Quarta. Dr. Brillowski bis Ostern 7 St., davon

1 St. Wiederholung und Vervollständigung der Etymologie.

3 St. Syntax § 69 bis 76 incl. nach der kleineren Schulzschen Gramma-

tic, auch Uebersezten aus dem Deutschen ins Lateinische nach Schulz Anleitung.

3 St. Vellejus Paterculus lib. I. und die ersten Kapitel aus dem IIten.

Von Ostern 4 St., davon

1 St. Etymologie, welche ganz beendigt ist.

3 St. Aurelius Victor de viris illustr. Die 40 ersten Kapitel.

Herr Dr. Lewitz hat von Ostern die 3 übrigen Stunden übernommen. Er verwandte:

1 St. zu Exercitien mit schriftl. Correctur.

2 St. zur Syntax nach Schulz kl. Grammatic § 76 — 89, mit mündlicher Uebersetzung von Beispielen aus Schulz Uebungsbuch.

In Quinta. Dr. Lewitz 7 St. in 2 Abtheilungen.

2 St. Grammatic kleinere Schulzsche, § 14 — 67.

1 St. Grammatische Uebungen im Decliniren und Conjugiren und in der Bildung einfacher Sätze.

2 St. Schulz Uebungsbuch mit der ersten Abtheilung Seite 1 — 34, zweite Abtheilung Seite 1 — 17.

2 St. Jacobs Uebungsbuch mit der ersten Abtheilung, Seite 1 — 12 und Tab. 1 — 13.

2 St. Jacobs Uebungsbuch mit der zweiten Abth., Seite 1 — 10.

In Sexta. Herr Dopatka 7 St. Aufser den nöthigen Leseübungen die regelmäfsige Declination und Conjugation, nach der kleinen Schulzschen Grammatic. Aus Bröders elementarischem Lesebuch werden Vocabeln gelernt und einzelne Sätze übersetzt, um die regelmäfsige Declination und Conjugation befser einzuüben.

4. die deutsche.

In Prima. Dr. Brillowski 3 St., davon

1 St. Literaturgeschichte von Gottsched und Bodmer bis auf die neuste Zeit.

1 St. Lectüre und Erklärung wichtiger Stücke aus den Schriftstellern des 18ten und 19ten Jahrhunderts.

1 St. Uebung im freien Vortrag.

Die beiden lezten Stunden wurden, so oft es nöthig war, verwandt um Belehrungen und Verbefserungen über die eingelieferten Arbeiten zu geben, so wie die Anweisung, sie anzufertigen.

In Secunda. Dr. Lewitz 3 St., davon

1 St. im ersten Halbjahr die Lehre vom Stil nach Herling; im zweiten Halbjahr Poetic.

In diesen Stunden wurden auch die monatlichen Aufsätze behandelt.

1 St. Literatur bis in die Zeit der Hohenstaufen: lyrische und epische Poesie nach Koberstein. Auch einige altdeutsche Gedichte wurden gelesen und erklärt.

1 St. freie mündliche Vorträge und Lectüre der Mefsiade von Klopstock. Gesang 1 — 3.

In Tertia. Dr. Lewitz bis Ostern 3 St., davon

1 St. Grammatic nach Herling § 1 — 28 und zum Theil Correctur der schriftlichen Arbeiten, die alle 14 Tage gemacht wurden.

1 St. Prosodie nach Heyse.

1 St. mündliche Vorträge.

Dr. Brillowski von Ostern ab:

1 St. Beschlufs der Metric nach Heyse Grammatic, dann nach derselben die ersten 8 Abschnitte.

1 St. wurde über die Aufsätze der Schüler gesprochen.

1 St. wurde zu freien Vorträgen und Declamationsübungen verwandt.

In Quarta. Dr. Lewitz 4 St., davon

1 St. Grammatic nach Herling, § 64 — 125.

1 St. grammatische Uebungen, Constructionen, Wortbildung, Zusammensetzung.

1 St. mündlicher Vortrag dictirter Gedichte.

1 St. leichte Synonyme als Denkübung, zuweilen Briefe und andere kleine Aufsätze.

In Quinta. Dr. Lewitz 4 St., davon

1 St. Grammatic und zwar die Lehre von den Wortarten und die Syntax des einfachen Satzes.

1 St. Orthographie.

1 St. Uebung im Declamiren.

Grammatische Uebungen, Constructionen etc. Uebungen im Erzählen.

In Sexta. Bis Ostern Herr Dopatka, von Ostern Director Krüger 4 St.

Leseübungen, Kenntniſs der Wortarten, Beugung des nom. subst., Adjectivum und Pronomen, Rection der Präpositionen, einige Uebung in der Orthographie und im mündlichen Vortrage.

5. französische.

Abtheil. 1. Dr. Dumas 2 St.

Der grammatische Cursus nach Franceson wurde fortgesetzt und wöchentlich eine Uebersetzung ins Französische gemacht. Aus dem Französischen wurde übersetzt: Numa Pompilius von Florian. Buch I — IV; das Vte wurde angefangen.

Abtheil. 2. Oberlehrer Heinicke 2 St.

Lehrsätze des theoretischen Theils der Grammatic und Lectüre des Numa Pompilius, Buch V und VI.

Abtheil. 3. Herr Weyl 2 St.

Uebung im Lesen und Etymologie nach Francesons Grammatic.

Wissenschaften.

a. Mathematic.

In Prima. Oberlehrer Klupsz 5 St., davon

3 St. analytische Geometrie und sphärische Trigonometrie.
2 St. höhere Gleichungen.

In Secunda. Oberlehrer Klupsz 5 St., davon
3 St. Stereometrie, Kreisfunctionslehre und ebene Trigonometrie.
2 St. Algebra bis incl. Gleichungen des 2ten Grades mit mehren unbekannten Gröfsen, Logarithmen.

In Tertia. Oberlehrer Klupsz 5 St., davon
3 St. Planimetrie nach dem gröfseren Lehrbuche von Kries.
2 St. Arithmetic, bürgerliche Rechnungsarten, Elemente der Potenzen und Logarithmen, Buchstabenrechnung.

In Quarta. Herr Dopatka 4 St., davon
2 St. Arithmetic und zwar die Lehre von den entgegengesetzten Gröfsen, Buchstabenrechnung, allgemeine Theorie der Potenzen, Decimal-Brüche und Ausziehung der Quadrat. Wurzel.
2 St. Geometrie und zwar die 3 ersten Abschnitte, nach Kries Lehrbuch der reinen Mathematic, bis zur Aehnlichkeit der Dreiecke.

In Quinta. Herr Dopatka 4 St., davon
4 St. Arithmetic und zwar Wiederholung der Bruchrechnung, die allgemeine Theorie der arithmetischen und geometrischen Proportion, leztere in ihrer Anwendung auf einfache und zusammengesetzte Verhältnifsrechnungen, unter welchen die Kettenregel und die Alligationsrechnung den Beschlufs machten.
1 St. Geometrie, nämlich den 1sten Abschnitt von Ottemanns Lehrbuch der Geometrie, welcher die einleitenden Erklärungen zur Geometrie enthält.

In Sexta. Herr Dopatka 4 St.
Die vier Fundamental-Rechnungen mit ganzen und in der 1sten Abtheilung der Schüler, auch mit gebrochenen Zahlen, das grofse Einmal eins, auch Kopfrechnen.

b. in der Naturlehre.

In Prima. Oberlehrer Klupsz 2 St. Optic, Meteorologie und Electricitäts-Lehre, auch mathematische Geographie.

In Secunda. Oberlehrer Klupsz 2 St. Elemente der Chemie.

In Tertia. Oberlehrer Klupsz 1 St. die allgemeinen Eigenschaften der Körper.

c. Naturgeschichte.

In Tertia. Herr Weyl 2 St. Mineralogie.

In Quarta. Herr Weyl 2 St. Botanic, nämlich botanische Terminologie nach Dietrich und preusische Pflanzen.

In Quinta. Herr Weyl 2 St. Säugethiere, Insecten, Amphibien und einige Klassen der Vögel.

In Sexta. Herr Weyl 2 St. Beschreibung einiger Thiere.

d. Geographie.

In Prima und Secunda ist diese Wissenschaft dem Privat-Fleiſse überlassen, von dem der Lehrer der Geschichte sich von Zeit zu Zeit, Beweise geben läſst.

In Tertia. Herr Weyl 2 St. Europa, das asiatische Ruſsland, die asiatische Türkei und Ostindien.

In Quarta. Herr Weyl 2 St. die auſsereuropäischen Länder.

In Quarta. Herr Weyl 2 St. Europa.

In Sexta. Dr. Lewitz 2 St. Uebersicht der ganzen Erde und dann von Michaeli v. J. bis Ostern d. J. Europa.

Von Ostern bis Michael d. J. die vier anderen Erdtheile.

e. Geschichte.

In Prima. Oberlehrer Dr. Dumas 3 St. Das Mittelalter bis zu den Kreuzzügen incl.

In Secunda. Oberlehrer Dr. Dumas 3 St. Die allgemeine Geschichte von den Perserkriegen und die Geschichte Roms von der Vertreibung der Könige, bis zu Ende der alten Geschichte.

In Tertia. Dr. Brillowski 2 St. Germanische Geschichte bis zu den Kreuzzügen incl. und preusische Geschichte bis auf die neueste Zeit.

In Quarta. Dr. Brillowski 2 St. Die Geschichte der merkwürdigsten Völker des alten Asiens und Africas und griechische Geschichte.

In Quinta. Herr Dopatka 2 St. Die alte und die mittlere Geschichte bis Carl den Grofsen.

f. Propädeutic zur Philosophie.

In Prima. Oberlehrer Heinicke 1 St. Theile der empirischen Psychologie (Gefühls- und Bestrebungs-Vermögen) Gesetzlehre des Denkens (Lehre von den Begriffen.)

Kunstfertigkeiten.

a. Singen.

In Prima und Secunda. Herr Cantor Küsell 2 St. Männerchöre.

In Tertia. Herr Cantor Küsell 2 St. Vierstimmige Choräle.

In Quarta. Herr Cantor Küsell 2 St. 1, 2 und 3ſtimmige Lieder und Canons.

In Quinta. Herr Cantor Küsell 2 St. 1, 2 und 3ſtimmige Lieder und Canons.

In Sexta. Herr Cantor Küsell 2 St. Die Anfangsgründe.

b. Zeichnen.

Den Unterricht ertheilt Herr Thiem in allen Klassen. Jede Klasse, Prima ausgenommen, erhält 2 St. wöchentlich den Unterricht im Zeichnen; Schade nur, daſs der Klage über Mangel an Vorlegeblättern noch immer nicht abgeholfen werden kann, der einem stufenweise fortschreitenden Unterrichte so hinderlich ist.

c. Schreiben.

Ein Unterricht, den gleichfalls Herr Thiem ertheilt, hat in Sexta in vier, in Quinta und Quarta in zwei St. wöchentlich.

Verordnungen der hohen Schulbehörden.

Unterm 19ten Februar wurde dem Gymnasium die Verordnung E. Königl. Ministerii zugesandt, in welcher Folgendes bestimmt wird.

1. Alle jungen Leute, die entweder von einer gemischten oder wissenschaftlichen Prüfungs-Commission bei ihrer ersten Prüfung das Zeugniſs der Untüchtigkeit oder Nro. III. erhalten haben, und sich in einer nochmaligen Prüfung ein beſseres Zeugniſs verschaffen wollen, müſsen sich innerhalb 18 Monaten, vom Tage ihrer Immatriculation angerechnet, bei einer Königl. wissenschaftlichen Prüfungs-Commission wieder zur Prüfung stellen. Nach Ablauf dieser Frist soll keine Commission sie weiter zur Prüfung annehmen.

2. Wenn sie auch bei dieser zweiten Prüfung das Zeugniſs der Untüchtigkeit oder Nro. III. erhalten, so soll ihnen nicht gestattet sein, sich weiterhin zu einer nochmaligen Prüfung pro immatriculatione zu melden. Ausnahmen hievon können nur in einzelnen auſserordentli-

chen Fällen und nach einer zuvor einziehenden Erlaubnifs des Ministeriums Statt finden.

Unterm 25sten Februar erwiederte E. Königl. Provincial-Schul-Collegium auf die Anfrage, wie es mit den Schülern jüdischer Eltern gehalten werden solle, welche in den Sonnabenden das Gymnasium nicht besuchten Folgendes:

Auf Ihre Anfrage vom 18ten d. M. eröffnen wir Ihnen, dafs diejenigen jüdischen Knaben, welche sich weigern am Sonnabende das Gymnasium zu besuchen, dasselbe mit dem Begin des neuen Halbjahres zu verlassen haben um ihre Fortbildung in einer Elementar-Schule zu suchen, wo Unterbrechungen dieser Art weniger störend sind. Das werden Sie den betheiligten Eltern eröffnen und bei der Aufnahme jüdischer Knaben in Zukunft nach diesem Grundsatze verfahren. Da die jüdische Gemeinde in Rastenburg erklärt hat, sich den christlichen Schulen anschliefsen zu wollen, so kann auch die Unterlassung des Schreibens am Sonnabende nur bei sehr jungen Knaben, wo auch das Vorurtheil noch einer zarten Behandlung bedarf, und bei sonstigen ganz eigenthümlichen Verhältnissen geduldet werden.

Unterm 16ten Mai wurde von E. Königl. Provincial-Schul-Collegium der Anstalt einen Lehrplan für den Unterricht im Zeichnen zugesandt, der von der Königl. Academie der Künste revidirt ist und der, nach der Verordnung E. Königl. Ministerii in den Gymnasien ausgeführt werden soll.

Unterm 9ten Juni wurde dem Gymnasium die Eröffnung E. Königl. Ministerii mitgetheilt, dafs das bei der Universität in Bonn seit mehren Jahren bestehende Seminar für die gesammten Natur-Wissenschaften bisher fast nur von Studirenden aus den rheinisch-westphälischen Provinzen betucht worden ist und daher noch nicht den ausgedehnten Wirkungskreis erlangt hat, welcher bei Gründung der Anstalt beabsichtigt ist. Das Königl. Ministerium wünscht nun den Wirkungskreis desselben auch auf die übrigen Provinzen ausgedehnt zu sehen und läfst die Directoren der Gymnasien auffordern, Schüler, welche durch Anlage, Neigung und Vorkenntnisse eine vorzügliche Bestimmung zum Studium der Naturwissenschaften zu haben scheinen, bei ihrem Abgange von der Schule auf das naturwissenschaftliche Seminar in Bonn aufmerksam zu machen und ihnen die Theilnahme an derselben besonders zu empfehlen.

Unterm 11ten Juni wurde die Ausgabe der kleinen Geographie von Stein durch Dr. Hörschelmann.

Unterm 21sten August wurde, auf Veranlassung des Königl. Ministerii, die kleine Schrift des Prof. Heinsius: „Die Bildung zur deutschen Beredsamkeit" empfohlen.

Chronic des Gymnasii.

Feierlichkeiten.

Mit dem Anfange des Schuljahres wurde Herr Dr. Lewitz öffentlich eingeführt und sprach, nachdem die Einführung vollendet war, über die Hindernisse des öffentlichen Unterrichts.

Den durch das Hippelsche Vermächtniss gestifteten jährlichen Schul-Actus am Charfreitage leitete der Oberlehrer Heinicke, welcher über den Satz sprach: „Die stille Feier des Todes Jesu heiligt unser Leben." Ein Schüler der ersten Klasse trug eine von ihm ausgearbeitete Rede, „von der Grösse Jesu in seinem Tode" handelnd, und ein Schüler der zweiten Klasse ein dem Gegenstande des Tages angemessenes Gedicht vor.

Den zweiten Hippelschen Redeact am 19ten Mai, eröffnete und leitete Dr. Brillowski. Nach ihm traten folgende Schüler auf.

1. Der Primaner Werner. Dieser schilderte den Zustand Preussens vor der Ankunft des Ordens.

2. Der Secundaner Tyrol, welcher die altpreussische Todtenklage von Heinel vortrug.

3. Der Secundaner Preufs sprach von der Eroberung unseres Vaterlandes durch den deutschen Orden.
4. Der Tertianer Brinkmann, welcher ein zweites Gedicht von Heinel declamirte: der lezte Preufse.
5. Der Primaner Kleist, welcher die Verdienste des deutschen Ordens um Preufsen schilderte.
6. Der Tertianer Heinicke beschlofs den Redeact mit der Declamation des Gedichts von Heinel: der deutsche Orden.

Am 3ten August, dem Geburtsfeste Sr. Majestät des Königes hielt Oberlehrer Dr. Dumas die Festrede; sie handelte von der Character-Festigkeit. Sodann sprachen zwei Schüler; ein Schüler der ersten Klasse versuchte die Rechtfertigung des Grafen Adam von Schwarzenberg nach Kosmar, ein Schüler der zweiten Klasse sprach über den Kurfürsten Friedrich Wilhelm den Grofsen.

Alle diese Schulfeierlichkeiten waren mit Musik begleitet, welche Herr Cantor Küsell leitete.

Zuwachs zu den Unterrichtsmitteln durch Geschenke und Ankauf.

Von E. Königl. Ministerium hat die hiesige Anstalt folgende Bücher zum Geschenk erhalten:

1. Die Fortsetzung der Staatsveränderung unter Ludwig XVI., oder die Geschichte der neueren Philosophie in Frankreich.
2. Schölls Geschichte der griechischen Literatur, Band III.
3. Chrestomathie Mandchou par Klaproth.
4. Die vom Herrn Prof. Fischer herausgegebene Schrift über Gesang und Gesang-Unterricht.
5. Eine Sammlung von Charten der alten Welt.

Sonst sind die Fonds des Gymnasii, die zur Vermehrung der Bücher-Sammlung und Lehrmittel bestimmt sind, dazu verwandt.

Unterstützung haben folgende Schüler erhalten.

1. Aus dem academischen Fonds für polnische Gymnasiasten: 1. Jablonowski. 2. Hahnrieder. 3. Sadowski. 4. Kiel. 5. v. Oelsnitz. 6. Skopnick. 7. Flöfs. 8. Scheimann. 9. Heinicke.

2. Aus dem Fonds des Gymnasii: 1. Dietrich. 2. Neumann. 3. Jonas. 4. Skupch. 5. Claufsen, welche bereits zur Universität entlassen sind. 6. Bürth. 7. Kendziorra. 8. Möller. 9. Bolle. 10. v. Ziegler. 11. Schulz. 12. Ehlert. 13. Preufs. 14. Dorien.

Statistische Uebersicht.

Am Ende des vorigen Schuljahres befanden sich in allen 6 Klassen der Anstalt 272 Schüler. Inscribirt wurden im Laufe des Schuljahres $18\frac{30}{31}$ 50 Schüler. = 322.

Von diesen aber gingen ab:

a. Zur Universität

I. In Michael 1831: 1. Otto Hofmann.
2. Heinrich Rutkowski.
3. Herrmann Hopner.
4. Carl Duddeck.

II. In Ostern d. J. 5. Rudolph Dietrich.
6. Wilhelm Neumann.
7. Carl Jonas.

8. Christoph Skupch.
9. Carl Stanislaus v. Borowitz.
10. Leopold Gregorovius.
11. Ludwig Peters.
12. Wilhelm Claufsen.

Alle mit dem Zeugnifse der 2ten Numer.

b. Zu andern Bestimmungen 36, so dafs die Zahl der Schüler überhaupt beträgt: 274. Von diesen befinden sich

in Prima - - -	27,
in Secunda - -	44,
in Tertia - - -	56,
in Quarta - - -	64,
in Quinta - - -	52,
in Sexta - - -	31.

Die öffentliche Jahresprüfung, welche ich hiedurch ankündige, wird den 28ften und 29ften d. M. gehalten werden, und ich lade im Namen sämmtlicher Lehrer die Eltern, Vormünder, Pfleger unsrer Schüler, so wie die Freunde des Schulunterrichts ein, derselben gefälligst beizuwohnen.

Am ersten Tage werden die untern, und am zweiten die der oberen Klassen geprüft. Freitag, den 30ften werden die vierteljährigen Zeugnifse ausgetheilt und die Versetzung wird bekannt gemacht. Es sollten dann die 14tägigen Michaels-Ferien folgen, die aber dieses Jahr auf eine günstigere Zeit verschoben werden. Die Cholera herrscht nämlich an mehren Orten, wo unsere Schüler zu Hause sind; es ist also besser, sie bleiben hier, wohin sich, Gott sei Dank, die Seuche noch nicht verbreitet hat. — Zur Anschaffung der nöthigen Bücher und zum Besuch bei den Eltern, die ganz in der Nähe des Orts wohnen, werden 2 Ferien-Tage gegeben; Sonnabend und Montag. Dienstag, den 4ten October fängt der neue Cursus an, und die Eltern oder Vormünder, welche ihre Kinder oder Mündel inscribiren lassen wollen, werden ersucht sie mir Montag, den 3ten d. M., vorzustellen; für Tertia und Quarta aber können noch keine neue Schüler aufgenommen werden, da die Zahl der Schüler in diesen Klassen sonst zu groſs werden würde.

Zur Universisät sind, da die Zeitumstände es erforderten, vor der öffentlichen Prüfung folgende Abiturienten mit dem Zeugniſse der zweiten Numer entlassen worden:

1. Johann Friedrich Wilhelm Bürth aus Rastenburg.
2. Carl Bogislav Reichert aus Rastenburg.
3. Wilhelm Sommer aus Bartenstein.
4. Samuel Jablonowski aus Niedenau bei Soldau.
5. Gustav Bergau aus Rastenburg.
6. Wilhelm Bernhard Friedrich Brachvogel aus Friedrichshof bei Ortelsburg.

Alle mit dem Zeugniſse der 2ten Numer.

Uebersicht der statistischen Verhältnisse des Königl. Gymnasii zu Rastenburg im Schuljahre $18\frac{30}{31}$.

1. Lehrer-Collegium.	2. Allgemeiner Lehrplan. Fächer.	Klassen und Stunden. I.	II.	III.	IV.	V.	VI.	Summa.	Verhältnise der Schüler. 1830 waren	abgegangen	inscribirt	jezt	Abiturienten. Univ. und Nummer d. Zeugnisses.	Fach, das sie studiren
Director Krüger.	Religion	2	2	2	2	2	2	12	242	48	50	274	Alle in Königsberg. Alle mit No. 2.	Theologie.
	Hebräisch	2	2	—	—	—	—	4						
Oberl. Heinicke.	Griechisch	6	7	7	5	—	—	25						
	Latein	7	6	7	7	7	7	41						
Oberl. Dumas.	Deutsch	3	3	3	4	4	4	21						
	Französisch	2	2	2	—	—	—	6						
Oberl. Klupsz.	Mathematic	5	5	5	4	5	4	28						
Herr Weyl.	Physic	2	2	1	—	—	—	5						
Hr. Dr. Brillowski.	Naturgeschichte	—	—	2	2	2	2	8						
Herr Dr. Lewitz.	Geographie	—	—	2	2	2	2	8						
	Geschichte	3	3	2	2	2	—	12						
Herr Dopatka.	Propädeutic	1	—	—	—	—	—	1						
Herr Cant. Küsell.	Gesang	2	2	2	2	2	3	11						
	Zeichnen	2	2	2	2	2	2	12						
Herr Thiem.	Schreiben	—	—	—	2	4	5	11						

Theorie

der

Gleichungen des 3ten und 4ten Grades,

als

Leitfaden

zum Vortrage

auf dem

Gymnasium zu Rastenburg

von

J. M. Klupsz.

Die Gleichungen des 3ten und 4ten Grades sollen auf den Königl. Preufs. Gymnasien (nach den Instructionen fürs Gymnasium im engern Sinne) vorgetragen werden und ich habe, um meinen jetzigen Schülern einen Leitfaden unentgeldlich in die Hände zu geben, dieselben zum Gegenstande der Abhandlung des diesjährigen Programms gemacht. Es sind, aufser der gewöhnlichen Anzahl Exemplare, noch einige hundert abgedruckt worden; so dafs den neu hinzukommenden Schülern, so wie Jedem, der davon Gebrauch machen will, diese Abhandlung für 4 Sgr., um die Druckkosten zu decken, geliefert werden kann.

Rastenburg, den 1sten September 1831.

Klupsz.

Vorbereitungssätze.

Die Gleichung des ersten Grades mit einer unbekannten Gröſse kann immer auf die Form: $x + a = o$ oder $x = - a$ gebracht werden, und ebenso n Gleichungen mit n unbekannten Gröſsen vom ersten Grade leicht auf dieselbe Form; es hat daher die unbekannte Gröſse in diesen Fällen nur einen, stets möglichen, Werth.

Die Gleichung des 2ten Grades mit einer unbekannten Gröſse wird bekanntlich leicht auf die Form:

$x^2 + ax + b = o$ gebracht, und wenn man $x = y - \frac{a}{2}$ setzt, so erhält

man: $$\left.\begin{array}{r} y^2 - ay + \frac{a^2}{4} \\ + ay - \frac{a^2}{2} \\ + b \end{array}\right\} = o$$

oder $y^2 - \frac{a^2}{4} + b = o$

oder $y^2 = + \frac{a^2}{4} - b$,

also $y = \pm \sqrt{\frac{a^2}{4} - b}$ und folglich:

$x = \pm \sqrt{\frac{a^2}{4} - b} - \frac{a}{2}$; es hat demnach jede Gleichung des zweiten Grades zwei Wurzeln der Gleichung:

1stens $x = - \frac{a}{2} + \sqrt{\frac{a^2}{4} - b}$

und 2tens $x = - \frac{a}{2} - \sqrt{\frac{a^2}{4} - b}$, welche entweder beide möglich sind: 1stens wenn b negativ und 2tens wenn b positiv und $\frac{a^2}{4} > b$ ist; dagegen beide unmöglich für b positiv und $\frac{a^2}{4} < b$.

Dafs auch die Gleichungen des 3ten, 4ten u. s. w. Grades beziehungsweise 3, 4 u. s. w. Wurzeln haben, wird am leichtesten aus dem allgemeinen Satze erhellen, dafs jede Gleichung vom n^{ten} Grade n Wurzeln hat. Die allgemeinste Form für rationale Gleichungen des n^{ten} Grades ist:

1., $x^n + A x^{n-1} + B x^{n-2} + C x^{n-3} \ldots\ldots\ldots N = o$. Man setze $x = (x-z) + z$, indem man $x - z$ als den 1sten und z als den 2ten Theil des Binoms betrachtet, so hat man:

$$o = \left\{\begin{array}{l}
(x-z)^n + n(x-z)^{n-1} \cdot z + n\frac{n-1}{1.2} \cdot (x-z)^{n-2} \cdot z^2 + \frac{n(n-1)}{1.2}\frac{(n-2)}{3} \\
\qquad (x-z)^{n-3} \cdot z^3 \ldots\ldots n(x-z)z^{n-1} + z^n \\
+ A(x-z)^{n-1} + (n-1)A(x-z)^{n-2} z + \frac{(n-1)(n-2)}{1.2} A(x-z)^{n-3} . z^2 \\
\qquad \ldots\ldots (n-1)A(x-z)z^{n-2} + Az^{n-1} \\
B(x-z)^{n-2} + (n-2)B(x-z)^{n-3} . z \ldots\ldots (n-2)B(x-z)z^{n-3} \\
\qquad + Bz^{n-2} \\
+ C(x-z)^{n-3} \ldots\ldots (n-3)C(x-z)z^{n-4} + Cz^{n-3} \\
\qquad \vdots \qquad\qquad \vdots \\
\qquad\qquad\qquad N
\end{array}\right.$$

Da nun für z jede willkürliche Gröfse gesetzt werden kann, indem immer $x = x - z + z$ ist, so kann man in Gedanken auch für z jede noch unbekannte Wurzel substituiren und da man unter der Wurzel der Gleichung jeden Werth versteht, welcher der Gleichung genügt, so sind die Glieder:

$$z^{n} + Az^{n-1} + Bz^{n-2} + Cz^{n-3} + Dz^{n-4} \ldots N = 0$$

und können daher weggelassen werden und die übrigen Glieder enthalten ohne Ausnahme den Factor $[x-z]$ und es erhält demnach die Gleichung die Form:

$$2.,\qquad [x-z]\left\{\begin{array}{l}(x-z)^{n-1} + (nz+A)(x-z)^{n-2} \\ + \left\{n\frac{(n-1)}{1.2}z^{2} + (n-1)Az + B\right\}(x-z)^{n-3} \\ \quad\text{etc.} \qquad \text{etc.} \qquad \text{etc.}\end{array}\right\} = 0$$

Es sei nun eine Wurzel der Gleichung $= \alpha$ d. h. $z = \alpha$ so wird die Gleichung:

$$3.,\qquad [x-\alpha]\left\{\begin{array}{l}(x-\alpha)^{n-1} + (n\alpha+A)(x-\alpha)^{n-2} \\ + \left\{n\frac{(n-1)}{1.2}\alpha^{2} + (n-1)A\alpha + B\right\}(x-\alpha)^{n-3} \ldots\end{array}\right\} = 0$$

Die Parenthese ist offenbar ein, nach den Potenzen von x fortschreitendes, Polynom und die höchste Potenz von x die $(n-1)^{te}$; ich will demnach der Gleichung (3), der Kürze halber, die Form:

$$[x-\alpha]\left\{x^{n-1} + A'x^{n-2} + B'x^{n-2} + C'x^{n-3} \ldots\ldots\right\} = 0$$

geben, welche sie erhält, wenn die Binome $(x-\alpha)^{n-1}$, $(x-\alpha)^{n-2}$ u. s. w. entwickelt und die Reihe nach den Potenzen von x geordnet werden.

Es ist nun ~~$x - \alpha = 0$ und folglich~~ auch:

$$4.,\qquad x^{n-1} + A'x^{n-2} + B'x^{n-2} + C'x^{n-3} \ldots\ldots = 0$$

und da nun für die Gleichung (4) dasselbe Raisonement gilt, was wir bei der Gleichung (1) anwendeten, so läfst sich auch die Gleichung (4) in die Form:

$$5.,\qquad [x-\beta]\left\{x^{n-2} + A''x^{n-3} + B''x^{n-4} \quad \text{etc.}\right\} = 0$$

bringen, wo β eine Wurzel der Gleichung (4) bezeichnet. Hier ist die Parenthese in Bezug auf x um eine Potenz niedriger, und wenn wir auf diesem Wege fortgehen, so erhalten wir nacheinander aus der Gleichung (5):

$$6., \quad [x-\gamma]\left\{x^{n-3}+A'''x^{n-4}+B'''x^{n-5} \text{ etc.}\right\}=0$$

und hieraus:

$$7., \quad [x-\delta]\left\{x^{n-4}+A''''x^{n-5}+\text{ etc. etc.}\right\}=0$$

und zuletzt nach der n^{ten} Zersetzung:

$[x-v]\ A^{(n)}$, wo $A^{(n)}$ eine von x unabhängige oder constante Gröſse bezeichnet, und es ist offenbar, wenn wir in der Gleichung (1) für die Parenthese ihre Werthe setzen:

Die Gleichung (1) $= (x-\alpha)\ (x-\beta)\ (x-\gamma)\ (x-\delta) \ldots\ldots (x-\nu)\ A^{(n)}$, wo A^n aber nothwendig $= 1$ ist, weil hier die höchste Potenz von x, $A^{(n)}x^n$ wird, wofür das entsprechende Glied der Gleichung (1) nur x^n ist. Folglich:

$$8., \quad (x-\alpha)\ (x-\beta)\ (x-\gamma)\ (x-\delta) \ldots\ (x-\nu)=0$$

Hat man nun eine Wurzel der Gleichung $(1)=\alpha$ gefunden, so läſs sich die Gleichung (1) durch $(x-\alpha)$ ohne Rest dividiren und somit die Gleichung (1) auf den $(n-1)$ Grad reduziren. So kann auf gleiche Weise durch die Entdeckung der 2ten, 3ten Wurzel der Grad der Gleichung respectiv um 1, 2 erniedrigt werden.

Theorie der rein kubishen Gleichungen oder der Gleichung:

9., - - - - - $x^3 + A = 0.$

Hier ist $x = \sqrt[3]{-A}$, weil $\sqrt[3]{-A}$, diejenige Gröſse ist, welche zur dritten Potenz erhoben $-A$ giebt: es ist nämlich $x^3 = (\sqrt[3]{-A})^3 = -A$ und folglich $x^3 + A = -A + A = 0$. Es ist demnach nach der Gleichung (8) $x^3 + A$ durch $x - \sqrt[3]{-A}$ ohne Rest theilbar. Es giebt die Division den Quotienten $= x^2 + x\sqrt[3]{-A} + (\sqrt[3]{-A})^2$.

Es ist folglich:

$$x^2 + x\sqrt[3]{-A} + (\sqrt[3]{-A})^2 = 0 \text{ und folglich:}$$

$$x = -\tfrac{1}{2}\sqrt[3]{-A} \pm \sqrt{-(\sqrt[3]{-A})^2 + \tfrac{1}{4}(\sqrt[3]{-A})^2}$$

$$= -\tfrac{1}{2}\sqrt[3]{-A} \pm \sqrt{-\tfrac{3}{4}(\sqrt[3]{-A})^2}$$

$$= -\tfrac{1}{2}\sqrt[3]{-A} \pm \sqrt[3]{-A}\,\sqrt{-\tfrac{3}{4}}$$

$$= + \sqrt[3]{-A}\left(\frac{-1 \pm \sqrt{-3}}{2}\right)$$

Man setze der Kürze halber die unmögliche Gröſse

$\frac{-1 + \sqrt{-3}}{2} = J$ und $\frac{-1 - \sqrt{-3}}{2} = J'$, so ist:

$$10., \; - - - \begin{cases} 1., \; x = \sqrt[3]{-A} & \text{stets möglich.} \\ 2., \; x = J. \; \sqrt[3]{-A} & \text{stets unmöglich.} \\ 3., \; x = J' \sqrt[3]{-A}. & \end{cases}$$

Anmerk. Wenn man in die Gleichung (9) entweder $x = J\sqrt[3]{-A}$ oder $= J'\sqrt[3]{-A}$ setzt, so wird derselben wirklich genügt. Es ist nämlich:

$$x^3 = J^3 (\sqrt[3]{-A})^3 = \left(\frac{-1+\sqrt{-3}}{2}\right)^3 . [-A]$$

$$= \left(\frac{-1+3\sqrt{-3}-3(\sqrt{-3})^2+(\sqrt{-3})^3}{8}\right) . [-A]$$

$$= \left(\frac{-1+3\sqrt{-3}+9-3\sqrt{-3}}{8}\right) . [-A]$$

$= -A$ und folglich:

$x^3 + A = -A + A = 0.$

Ebenso giebt $x = J'\sqrt[3]{-A} = \frac{-1-\sqrt{-3}}{2} . \sqrt[3]{-A}$

$$x^3 = \left(\frac{-1-\sqrt{-3}}{2}\right)^3 (\sqrt[3]{-A})^3$$

$$= \left(\frac{-1-3\sqrt{-3}+9+3\sqrt{-3}}{8}\right) [-A] = -A$$

Es sei z. B. $x^3 + 27 = 0$

so ist: 1., $x = -3$

2., $x = -3\left(\frac{-1+\sqrt{-3}}{2}\right)$

3., $x = -3\left(\frac{-1-\sqrt{-3}}{2}\right)$

Theorie der gemischt kubischen Gleichungen oder der Gleichung:

11., - - - - - - $x^3 + Ax^2 + Bx + C = 0$

Man setze $x = y - \frac{A}{3}$ so ist:

$$x^3 = y^3 - \tfrac{3}{3} A y^2 + \tfrac{3}{9} A^2 y - \frac{A^3}{27}$$
$$A x^2 = A y^2 - \tfrac{2}{3} y A^2 + \frac{A^3}{9}$$
$$B x = B y - \frac{BA}{3}$$
$$C = C$$

$$o = y^3 - \tfrac{1}{3} y A^2 + By + \tfrac{2}{27} A^3 - \frac{AB}{3} + C$$
$$= y^3 + y\,(B - \tfrac{1}{3} A^2) + \tfrac{2}{27} A^3 - \frac{AB}{3} + C$$

Man gebe der Kürze halber dieser Gleichung die Form:

12., - - - - $o = y^3 + ay + b$

Man setze ferner $y = y - z + z$, wo man für z jede willkürliche Gröſse setzen kann und mache $y - z$ zum 1sten Theil und z zum zweiten Theil des Binoms, so wird:

$$y^3 = (y-z)^3 + 3\,(y-z)^2 z + 3\,(y-z)\,z^2 + z^3$$
$$ay = \qquad a\,(y-z) \quad + \quad az$$
$$b = \qquad b$$

$$o = (y-z)^3 + 3\,(y-z)^2 z + (y-z)\,[3z^2 + a] + z^3 + az + b$$

Da nun für z jede willkürliche Gröſse gesetzt werden kann, so kann man sich auch unter z diejenige mögliche oder unmögliche Gröſse denken, welche die Glieder: $(y-z)^3 + z^3 + b$ auf Null reduzirt.

Wir haben demnach:

13., - - - - $(y-z)^3 + z^3 + b = o$ und folglich auch:

14., - - - - $3\,(y-z)^2 z + (y-z).\ [3z^2 + a] + az = o.$

Wir haben demnach 2 Gleichungen (13) und (14), und 2 unbekannte Gröſsen $(y-z)$ und z. Die Gleichung 14 ausgeführt giebt:

$3y^2 z - 6yz^2 + 3z^3 + 3yz^2 - 3z^3 + ay - az + az = 3y^2 z - 3yz^2 + ay = 3yz - 3z^2 + a = 3z\,(y-z) + a = o$ und folglich:

15., $y - z = \frac{-a}{3z}$. Dieser Werth in die Gleichung (13) gesetzt giebt: $\frac{-a^3}{27z^3} + z^3 + b = 0$ oder: $\frac{-a^3}{27} + z^6 + bz^3 = 0$ und diese in Bezug auf z^3 quadratische Gleichung: $z^6 + bz^3 - \frac{a^3}{27} = 0$ giebt:

$z^3 = -\frac{b}{2} \pm \sqrt{\frac{a^3}{27} + \frac{b^2}{4}}$ und folglich nach der Gleichung 10:

$$16., \quad \begin{cases} 1., & z = \sqrt[3]{-\frac{b}{2} \pm \sqrt{\frac{a^3}{27} + \frac{b^2}{4}}} \\ 2., & z = J.\sqrt[3]{-\frac{b}{2} \pm \sqrt{\frac{a^3}{27} + \frac{b^2}{4}}} \\ 3., & z = J'\sqrt[3]{-\frac{b}{2} \pm \sqrt{\frac{a^3}{27} + \frac{b^2}{4}}} \end{cases}$$

Wird nun in der Gleichung (15) für z der Werth gesetzt, so ist:

$$17., \quad \begin{cases} 1., & y - z = \dfrac{-a}{3\sqrt[3]{-\frac{b}{2} \pm \sqrt{\frac{a^3}{27} + \frac{b^2}{4}}}} \\ 2., & y - z = \dfrac{-a}{3J.\sqrt[3]{-\frac{b}{2} \pm \sqrt{\frac{a^3}{27} + \frac{b^2}{4}}}} \\ 3., & y - z = \dfrac{-a}{3J'\sqrt[3]{-\frac{b}{2} \pm \sqrt{\frac{a^3}{27} + \frac{b^2}{4}}}} \end{cases}$$

Nun war $J = \frac{-1+\sqrt{-3}}{2}$ und $J' = \frac{-1-\sqrt{-3}}{2}$

folglich: $JJ' = \frac{+1+3}{4} = 1$ und folglich:

18., - - - - - $J = \frac{1}{J'}$ und $J' = \frac{1}{J}$

Es ist ferner: $\sqrt[3]{-\frac{b}{2}+\sqrt{\frac{a^3}{27}+\frac{b^2}{4}}}\;\sqrt[3]{-\frac{b}{2}-\sqrt{\frac{a^3}{27}+\frac{b^2}{4}}} =$

$= \sqrt[3]{\frac{b^2}{4}-\frac{a^3}{27}-\frac{b^2}{4}} = -\frac{a}{3}$ und folglich in die Gleichung (17) $\frac{1}{J} = J'$

und $\frac{1}{J'} = J$ und $-\frac{a}{3} = \sqrt[3]{-\frac{b}{2}+\sqrt{\frac{a^3}{27}+\frac{b^2}{4}}}\;\sqrt[3]{-\frac{b}{2}-\sqrt{\frac{a^3}{27}+\frac{b^2}{4}}}$

gesetzt, giebt: 1. $y-z = \frac{\sqrt[3]{-\frac{b}{2}+\sqrt{\frac{a^3}{27}+\frac{b^2}{4}}}\;\sqrt[3]{-\frac{b}{2}-\sqrt{\frac{a^3}{27}+\frac{b^2}{4}}}}{\sqrt[3]{-\frac{b}{2}\pm\sqrt{\frac{a^3}{27}+\frac{b^2}{4}}}}$ oder:

$$19., \; - - - - \begin{cases} 1., \; y-z = \sqrt[3]{-\frac{b}{2}\mp\sqrt{\frac{a^3}{27}+\frac{b^2}{4}}} \text{ und ebens} \\ 2., \; y-z = J'.\sqrt[3]{-\frac{b}{2}\mp\sqrt{\frac{a^3}{27}+\frac{b^2}{4}}} \\ 3., \; y-z = J.\sqrt[3]{-\frac{b}{2}\mp\sqrt{\frac{a^3}{27}+\frac{b^2}{4}}} \end{cases}$$

und folglich die Gleichungen (19) und (16) addirt:

$$20., \begin{cases} 1., \; y = \sqrt[3]{-\frac{b}{2} \pm \sqrt{\frac{a^3}{27} + \frac{b^2}{4}}} + \sqrt[3]{-\frac{b}{2} \mp \sqrt{\frac{a^3}{27} + \frac{b^2}{4}}} \\ 2., \; y = J.\sqrt[3]{-\frac{b}{2} \pm \sqrt{\frac{a^3}{27} + \frac{b^2}{4}}} + J'.\sqrt[3]{-\frac{b^2}{2} \mp \sqrt{\frac{a^3}{27} + \frac{b^2}{4}}} \\ 3, \; y = J'.\sqrt[3]{-\frac{b}{2} \pm \sqrt{\frac{a^3}{27} + \frac{b^2}{4}}} \dagger J.\sqrt[3]{-\frac{b}{2} \mp \sqrt{\frac{a^3}{27} + \frac{b^2}{4}}} \end{cases}$$

In diesen 3 Werthen für y sind entweder die beiden obern oder die beiden untern Zeichen zu nehmen. Wir haben demnach sechs Werthe für y, wovon aber je 2 einander gleich sind:

Es ist nämlich, wenn ich $\sqrt{\frac{a^3}{27} + \frac{b^2}{4}} = \nu$ setze, das 1ste y entweder:

$$\text{I.,} \; = \sqrt[3]{-\frac{b}{2} + \nu} + \sqrt[3]{-\frac{b}{2} - \nu} \quad \text{oder}$$

$$\text{II.,} \; = \sqrt[3]{-\frac{b}{2} - \nu} + \sqrt[3]{-\frac{b}{2} \dagger \nu}$$

die offenbar einander gleich sind. Ebenso zerfällt das 2te und 3te y in zwei Werthe und wir haben:

$$\text{III.,} \; y = J \sqrt[3]{-\frac{b}{2} \dagger \nu} + J'.\sqrt[3]{-\frac{b}{2} - \nu}$$

$$\text{IV.,} \; y = J. \sqrt[3]{-\frac{b}{2} - \nu} + J'.\sqrt[3]{-\frac{b}{2} \dagger \nu}$$

$$\text{V.,} \; y = J' \sqrt[3]{-\frac{b}{2} \dagger \nu} + J.\sqrt[3]{-\frac{b}{2} - \nu}$$

$$\text{VI.,} \; y = J' \sqrt[3]{-\frac{b}{2} - \nu} + J.\sqrt[3]{-\frac{b}{2} \dagger \nu}$$

und es ist offenbar der Werth III mit VI und IV mit V identisch, und es fallen demnach unsere 6 Werthe für y in folgende 3 zusammen:

$$21., \quad \cdots \quad \begin{cases} 1., \ y = \sqrt[3]{-\frac{b}{2} + \nu} + \sqrt[3]{-\frac{b}{2} - \nu} \\ 2., \ y = J\sqrt[3]{-\frac{b}{2} + \nu} + J'\sqrt[3]{-\frac{b}{2} - \nu} \\ 3., \ y = J'\sqrt[3]{-\frac{b}{2} + \nu} + J\sqrt[3]{-\frac{b}{2} - \nu} \end{cases} \quad (*)$$

Es ist nun noch die Brauchbarkeit der Formeln zu untersuchen. Es ist $\nu = \sqrt{\frac{a^3}{27} + \frac{b^2}{4}}$ möglich: 1stens wenn a positiv und 2tens wenn a negativ

---

(*) Die erste dieser 3 Formeln führt mit Unrecht den Namen der Cardanischen; denn sie wurde nicht zuerst von Cardan, sondern 1505 von Scipio Ferreo zu Bologna entwickelt. Er entdeckte diese Auflösung einem seiner Schüler Florido, unter der Bedingung, sie keinem andern mitzutheilen. Dieser unterhielt mit Tartalea aus Brescia im Auflösen verschiedener, sich gegenseitig mitgetheilter, Aufgaben einen Wettstreit, und Tartalea, welcher 1530 eine Auflösung für die Gleichung $x^3 + ax^2 + b = 0$ gefunden hatten, fand auf die Herausforderung des Florido nun auch eine Auflösung für die Gleichung: $y^3 + ay + b = 0$. Hieronymus Cardan aus Mailand erhielt diese Auflösung von Tartalea unter der Bedingung, sie nicht bekannt zu machen. Er machte sie aber 1545 in seinem Werke: „Artis magnae sive de regulis Algebrae liber unus. Mediol. 1545“ bekannt. Es entstanden nun Zänkereien zwischen Tartalea und Cardan, welche ersterer in seinem 9ten Buche seiner: „Quaesiti et Inventioni diverse Venedig 1546“ erzählt. Hieraus ergiebt sich, daſs Cardan nur die Beweise zu der ihm mitgetheilten Formel gefunden und die Theorie der kubischen Gleichungen ins Publikum gebracht habe. Es gebührt folglich Ferreo und Tartalea gleichmäſsig der Ruhm der Entdekkung. Fast bei allen wichtigen Erweiterungen der Mathematik treten mehrere Erfinder auf, was bei einem gleichzeitigen Streben vieler denkenden Köpfe, nach einem und demselben Ziele, nicht auffallend ist.

und $\frac{a^3}{27} < \frac{b^2}{4}$ oder $\frac{a}{3}\sqrt{\left(\frac{a}{3}\right)} < \frac{b}{2}$ ist. Und da die Kubikwurzel, aus jeder positiven und negativen möglichen Gröſse, möglich ist, so ist das 1ſte y möglich.

Man setze hier $\sqrt[3]{-\frac{b}{2}+\nu}=\lambda$ und $\sqrt[3]{-\frac{b}{2}-\nu}=\mu$, so wird:

$$1., \quad y=\lambda+\mu$$

$$2., \quad y=-\left\{\frac{\lambda+\mu}{2}\right\}+\frac{i\sqrt{3}}{2}(\lambda-\mu)$$

$$3. \quad y=-\left\{\frac{\lambda+\mu}{2}\right\}-\frac{i\sqrt{3}}{2}(\lambda-\mu)$$

oder der Kürze halber:

22., $\begin{cases} 1., \ y = p \\ 2., \ y = -\frac{p}{2} + q.i \\ 3., \ y = -\frac{p}{2} - qi, \text{ wo } p = \lambda+\mu \text{ und } q = \frac{\sqrt{3}}{2}(\lambda-\mu); \end{cases}$ es hat also in diesem Falle y stets einen möglichen und zwei unmöglichen Werthe.

Ist aber a negativ $\frac{a^3}{27} > \frac{b^2}{4}$ oder $\frac{a}{3}\sqrt{\left(\frac{a}{3}\right)} > \frac{b}{2}$, so ist $\sqrt{\frac{a^3}{27}+\frac{b^2}{4}}$ unmöglich und es besteht das 1ſte y aus 2 unmöglichen Theilen, dessenungeachtet ist keins der drei y unmöglich; denn es sei $\nu = \sqrt{-m} = \sqrt{-1}.\sqrt{m} = i\sqrt{m}$, so ist nach dem binomischen Lehrsatz:

$$\sqrt[3]{-\frac{b}{2}+\nu} = \left\{-\frac{b}{2}+i\sqrt{m}\right\}^{\frac{1}{3}} = \left\{-\frac{b}{2}\right\}^{\frac{1}{3}} + \frac{1}{3}\left\{-\frac{b}{2}\right\}^{-\frac{2}{3}} i\sqrt{m}$$

$$+\frac{\frac{1}{3}\left(-\frac{2}{3}\right)}{1.2}\left\{-\frac{b}{2}\right\}^{-\frac{5}{3}} i^2 m + \frac{\frac{1}{3}\left(-\frac{2}{3}\right)\left(-\frac{5}{3}\right)}{1.2.3}\left\{-\frac{b}{2}\right\}^{-\frac{8}{3}} i^3 m\sqrt{m} \text{ etc. etc.}$$

$$\sqrt[3]{-\frac{b}{2}-\nu}=\left\{-\frac{b}{2}-i\sqrt{m}\right\}^{\frac{1}{3}}=\left\{-\frac{b}{2}\right\}^{\frac{1}{3}}-\tfrac{1}{3}\left\{-\frac{b}{2}\right\}^{-\frac{2}{3}}i.\sqrt{m}$$

$$+\frac{\frac{1}{3}(-\frac{2}{3})}{1.2}(-{}^{b})^{-\frac{5}{3}}i^2\,m-\frac{\frac{1}{3}(-\frac{2}{3})(-\frac{5}{3})}{1.2.3}\left\{-\frac{b}{2}\right\}^{-\frac{8}{3}}i^3\sqrt{m}\text{ etc. etc.}$$

und folglich: $\sqrt[3]{-\frac{b}{2}+\nu}+\sqrt[3]{-\frac{b}{2}-\nu}=2\left\{(-\frac{b}{2})^{\frac{1}{3}}+\frac{\frac{1}{3}(-\frac{2}{3}).}{1.2}\right.$

$$\left.(-\tfrac{b}{2})^{-\frac{5}{3}}i^2m+\frac{\frac{1}{3}(-\frac{2}{3})(-\frac{5}{3})(-\frac{8}{3}).}{1.2.3.4}(-\tfrac{b}{2})^{-\frac{11}{3}}i^4\,m^2\text{ etc.}\right\}$$

und da nun $i^2=-1$; $i^4=+1$; $i^6=-1$ ist, so wird:

$$1.,\ y=2\left((-\tfrac{b}{2})^{\frac{1}{3}}+\frac{\frac{1}{3}.\frac{2}{3}.}{1.2}(-\tfrac{b}{2})^{-\frac{5}{3}}m-\frac{\frac{1}{3}.\frac{2}{3}.\frac{5}{3}.\frac{8}{3}}{1.2.3.4}(-\tfrac{b}{2})^{-\frac{11}{3}}m^2\text{ etc.}\right)\text{ oder:}$$

$$23.,\ 1.,\ y=2(-\tfrac{b}{2})^{\frac{1}{3}}\left(1+\tfrac{\frac{1}{3}}{1}.\tfrac{\frac{2}{3}}{2}.\frac{m}{\left(\frac{b^2}{4}\right)}-\tfrac{\frac{1}{3}}{1}.\tfrac{\frac{2}{3}}{2}.\tfrac{\frac{5}{3}}{3}.\tfrac{\frac{8}{3}}{4}\left\{\frac{m}{\left(\frac{b^2}{4}\right)}\right\}^2+\text{ etc. etc.}\right)$$

Diese unendliche Reihe besteht aus lauter möglichen Gröſsen, und convergirt offenbar, wenn $\frac{m}{\left(-\frac{b}{2}\right)^2}=\frac{m}{\left(\frac{b^2}{4}\right)}<1$ ist; denn die übrigen Faktoren $\frac{\frac{1}{3}}{1}, \frac{\frac{2}{3}}{2}, \frac{\frac{5}{3}}{3}, \frac{\frac{8}{3}}{4}$ sind lauter eigentliche Brüche. Nun ist $m=\frac{-a^3}{27}+\frac{b^2}{4}$, wo a positiv genommen ist. Es muſs also:

$\frac{-a^3}{27}+\frac{b^2}{4}<\frac{b^2}{4}$ sein, d. h. das negative Glied $\frac{-a^3}{27}<+\frac{2b^2}{4}$.

Man setze die Gleichung [23]:

$$y=2\left\{-\frac{b}{2}\right\}^{\frac{1}{3}}\left(1+\tfrac{\frac{1}{3}}{1}.\tfrac{\frac{2}{3}}{2}.\frac{m}{\left(\frac{b^2}{4}\right)}-\tfrac{\frac{1}{3}}{1}.\tfrac{\frac{2}{3}}{2}.\tfrac{\frac{5}{3}}{3}.\tfrac{\frac{8}{3}}{4}.\left\{\frac{m}{\left(\frac{b^2}{4}\right)}\right\}^2+\text{ etc.}\right)=\alpha.$$

Das 2te y wird $= \left(\frac{-1+i\sqrt{3}}{2}\right) \cdot \left\{ \left(-\frac{b}{2}\right)^{\frac{1}{3}} - \frac{1}{3} \cdot \left(-\frac{b}{2}\right)^{-\frac{2}{3}} \cdot i\sqrt{m}\right.$

$$+ \frac{\frac{1}{3}(-\frac{2}{3})}{1 \cdot 2} \cdot \left(-\frac{b}{2}\right)^{-\frac{5}{3}} i^2 m - \frac{\frac{1}{3} \cdot (-\frac{2}{3}) \cdot (-\frac{5}{3}) \cdot}{1 \quad 2 \quad 3} \left(-\frac{b}{2}\right)^{-\frac{8}{3}} i^3 m \sqrt{m} \text{ etc.} \Big\}$$

$$+ \left(\frac{-1-i\sqrt{3}}{2}\right) \left\{ \left(-\frac{b}{2}\right)^{\frac{1}{3}} + \frac{1}{3} \left(-\frac{b}{2}\right)^{-\frac{2}{3}} i\sqrt{m} + \frac{\frac{1}{3}(-\frac{2}{3}) \cdot}{1 \cdot 2} \left(-\frac{b}{2}\right)^{-\frac{5}{3}} \cdot \right.$$

$$\left. i^2 . m + \text{etc.} \right\}$$

$$= -\tfrac{1}{2}\alpha - \frac{i\sqrt{3}}{2} \left(\tfrac{1}{3}(-\tfrac{b}{2})^{-\frac{2}{3}} i\sqrt{m} + \frac{\frac{1}{3}}{1} \cdot \frac{(-\frac{2}{3})}{2} \cdot \frac{(-\frac{5}{3})}{3} (-\tfrac{b}{2})^{-\frac{8}{3}} i^3 m \sqrt{m} \text{ etc.} \right)$$

$$= -\tfrac{1}{2}\alpha - \frac{\sqrt{3}}{2} \left(\tfrac{1}{3}(-\tfrac{b}{2})^{-\frac{2}{3}} i^2 \sqrt{m} + \frac{\frac{1}{3}}{1} \cdot \frac{\frac{2}{3}}{2} \cdot \frac{\frac{5}{3}}{3} (-\tfrac{b}{2})^{-\frac{8}{3}} i^4 m \sqrt{m} + \text{etc.} \right)$$

$$= -\tfrac{1}{2}\alpha + \frac{\sqrt{3}}{2} \left(\tfrac{1}{3}(-\tfrac{b}{2})^{-\frac{2}{3}} \sqrt{m} - \frac{\frac{1}{3}}{1} \cdot \frac{\frac{2}{3}}{2} \cdot \frac{\frac{5}{3}}{3} (-\tfrac{b}{2})^{-\frac{8}{3}} m \sqrt{m} + \text{etc.} \right)$$

$$= -\tfrac{1}{2}\alpha + \tfrac{1}{3} \cdot \frac{\sqrt{3}}{2} (-\tfrac{b}{2})^{-\frac{2}{3}} \cdot \sqrt{m} \left(1 - \frac{\frac{2}{3}}{2} \cdot \frac{\frac{5}{3} \cdot m}{3 \left(\frac{b^2}{4}\right)} + \frac{\frac{2}{3}}{2} \cdot \frac{\frac{5}{3}}{3} \cdot \frac{\frac{8}{3}}{4} \cdot \frac{\frac{11}{3}}{5} \cdot \left\{ \frac{m}{\left(\frac{b^2}{4}\right)} \right\}^2 \text{ etc.} \right)$$

Auch diese Reihe convergirt für $m < \frac{b^2}{4}$ und divergirt für $m > \frac{b^2}{4}$ und besteht aus lauter möglichen Gliedern.

Man setze: $\tfrac{1}{3} \cdot \frac{\sqrt{3}}{2} (-\tfrac{b}{2})^{-\frac{2}{3}} \cdot \sqrt{m} \left\{ 1 - \frac{\frac{2}{3}}{2} \cdot \frac{\frac{5}{3}}{3} + \text{etc.} \right\} = k$, so ist:

$$\left.\begin{array}{l} 1., \; y = \alpha \\ 2., \; y = -\frac{\alpha}{2} + k \\ 3., \; y = -\frac{\alpha}{2} - k \end{array}\right\} \text{ stets möglich.}$$

Wenn die Reihe k divergirt, so sind die Formeln (21) gar nicht, und wenn k convergirt, nur bedingt anwendbar: nämlich, wenn sie so stark convergirt, daſs nur wenige Glieder derselben berechnet werden dürfen. Für beide Fälle ist folgende Methode zu empfehlen:

Es ist bekanntlich $\sin 3\varphi = 3\sin\varphi - 4\sin^3\varphi$: (*)

Oder: $\sin^3\varphi - \frac{3}{4}\sin\varphi + \frac{1}{4}\sin 3\varphi = 0.$

Man setze nun in die Gleichung: $y^3 + ay + b = 0$,

$y = t\sin\varphi$, so wird:

$t^3\sin^3\varphi + at\sin\varphi + b = 0$ oder:

$$\sin^3\varphi + \frac{a\sin\varphi}{t^2} + \frac{b}{t^3} = 0$$

Diese Formel verglichen mit: $\sin^3\varphi - \frac{3}{4}\sin\varphi + \frac{1}{4}\sin 3\varphi = 0$

giebt: $\frac{a}{t^2} = -\frac{3}{4}$ und $\frac{b}{t^3} = \frac{1}{4}\sin 3\varphi$ oder:

24., - - - - $t^2 = -\frac{4a}{3}$ und $\sin 3\varphi = \frac{4b}{t^3}$

und folglich: $t = \sqrt{-\frac{4}{3}a} = 2\sqrt{-\frac{a}{3}}$ und $t^3 = -\frac{8a}{3}\sqrt{-\frac{a}{3}}$;

$\frac{b}{t^3} = -\frac{b}{\frac{8a}{3}\sqrt{-\frac{a}{3}}} = \frac{1}{4}\sin 3\varphi$ und folglich: $\sin 3\varphi = \frac{-\frac{b}{2}}{\frac{a}{3}\cdot\sqrt{-\frac{a}{3}}}.$

Wo offenbar t nur möglich wird, wenn a negativ und eben so $\sin 3\varphi$,

---

(*) Nämlich: $\sin(\varphi + \psi) = \sin\varphi.\cos\psi + \cos\varphi.\sin\psi$ und $\cos(\varphi + \psi) = \cos\varphi.\cos\psi - \sin\varphi.\sin\psi$ und folglich: $\sin 2\varphi = 2\sin\varphi.\cos\varphi$ und $\cos 2\varphi = \cos^2\varphi - \sin^2\varphi = 1 - 2\sin^2\varphi$ und $\sin(2\varphi + \varphi) = \sin 2\varphi.\cos\varphi + \cos 2\varphi.\sin\varphi = 2\sin\varphi.\cos^2\varphi + (\cos^2\varphi - \sin^2\varphi).\sin\varphi = 3\sin\varphi.\cos^2\varphi - \sin^3\varphi = 3\sin\varphi(1 - \sin^2\varphi) - \sin^3\varphi$ also $\sin 3\varphi = 3\sin\varphi - 4\sin^3\varphi.$

wenn a negativ und $\frac{b}{2} < \frac{a}{3}\sqrt{-\frac{a}{3}}$ ist. Dieses ist eben derselbe Fall, welcher oben die Formel (21) unbrauchbar machte.

Da nun $\sin 3\varphi = \sin(180^\circ - 3\varphi) = \sin(360^\circ + 3\varphi) = \sin(540^\circ - 3\varphi) = \sin(720^\circ + 3\varphi) = \sin(900^\circ - 3\varphi) = \sin(1080^\circ + 3\varphi)$ u. s. w. ist, so kann man auch aus der Gleichung für $\sin 3\varphi$, anstatt des aus den Kreisfunctionstafeln genommenen spitzen Winkels 3φ, die stumpfen Winkel $180^\circ - 3\varphi$, $360^\circ + 3\varphi$, u. s. w. nehmen. Der Sinus aller dieser Winkel ist $= \sin 3\varphi$; es geben aber die analogen Werthe für φ, nämlich: φ, $60^\circ - \varphi$, $120^\circ + \varphi$, $180^\circ - \varphi$, $240^\circ + \varphi$, $300^\circ - \varphi$, $360^\circ + \varphi$ etc. etc. in der Formel $y = t \sin\varphi$ verschiedene Werthe für $\sin\varphi$ und demnach auch für y.

Es wird nämlich:

1., $y = t \sin\varphi$
2., $y = t \sin(60^\circ - \varphi)$
3., $y = t \sin(180^\circ - \varphi) = t \sin\varphi$
4., $y = t \sin(240^\circ + \varphi) = - t \sin(60^\circ + \varphi)$
5., $y = t \sin(300^\circ - \varphi) = - t \sin(60^\circ + \varphi)$
6., $y = t \sin(360^\circ + \varphi) = t \sin\varphi$.

Von hier ab kehren alle Werthe für y, der Reihe nach, wieder und unter den 6 angeführten Fällen sind nur 1, 2 und 4 von einander verschieden, und wir haben demnach nicht mehr und nicht weniger als 3 Wurzeln der Gleichung:

$$25., \quad - - - \quad \begin{cases} 1., \ y = t \sin\varphi \\ 2., \ y = t \sin(60^\circ - \varphi) \\ 3., \ y = - t \sin(60^\circ + \varphi) \end{cases}$$

wo wir für φ den, in den Kreisfunctionstafeln stehenden, spitzen Winkel zu nehmen haben.

Anmerkung. Es hat eigentlich t zwei Werthe, nämlich: $\pm\sqrt{-\frac{4a}{3}}$; das untere Zeichen giebt aber t und auch t^3 negativ und da $\sin 3\varphi = \frac{4b}{t^3}$, so verändert auch das, negativ genommene, t die Qualität des sin 3φ und eben so die Qualität der Winkel 3φ, $180° - 3\varphi$, $360° + 3\varphi$ etc. etc. und gleichzeitig die der analogen Winkel φ, $60° - \varphi$ u. s. w. und demnach auch die der Sinus dieser Winkel und da $y = t \sin \varphi$ ist, wo φ alle obige Werthe φ, $60° - \varphi$ u. s. w. in sich faſst, so verändert $t = -\sqrt{-\frac{4a}{5}}$ die Qualität des y nicht.

Es folgen am Schluſse Beispiele:

1., für a positiv.

2., für a negativ und $\frac{a^3}{27} < \frac{b^2}{4}$

3., - - - - $\frac{a^3}{27} = \frac{b^2}{4}$

4., - - - - $\frac{a^3}{27} > \frac{b^2}{4}$

$$\left.\begin{array}{ll} \text{a.,} & \frac{a^3}{27} > \frac{2b^2}{4} = \frac{b^2}{2} \\ \text{b.,} & \frac{a^3}{27} < \frac{2b^2}{4} = \frac{b^2}{2} \end{array}\right\}$$ ohne und mit der sogenannten Trisektion des Winkels durchgeführt.

Theorie der biquadratischen Gleichungen oder der Gleichung:

26., - - - - $x^4 + A x^3 + B x^2 + C x + D = o.$

Man setze $x = y - \frac{A}{4}$ giebt:

$$\begin{aligned}
x^4 &= y^4 - \frac{4Ay^3}{4} + 6y^2\frac{A^2}{16} - 4y\frac{A^3}{64} + \frac{A^4}{256}\\
Ax^3 &= + Ay^3 - 3y^2\frac{A^2}{4} + 3y\frac{A^3}{16} - \frac{A^4}{64}\\
Bx^2 &= \qquad + By^2 - 2yB\frac{A}{4} + B\frac{A^2}{16}\\
Cx &= \qquad\qquad + Cy - \frac{CA}{4}\\
D &= \qquad\qquad\qquad + D
\end{aligned}$$

$$o = y^4 + y^2\left(B - \tfrac{3}{8}A^2\right) + y\left(\tfrac{1}{8}A^3 - \tfrac{1}{2}AB + C\right) - \tfrac{3}{256}A^4 + \tfrac{1}{16}A^2 B - \tfrac{1}{4}AC + D.$$

Diese Geichung ist von der Form:

27., - - - - $o = y^4 + ay^2 + by + c$, welche nun gelöſst werden soll.

Es giebt verschiedene Methoden diese Gleichung aufzulösen, ich gebe der Eulerschen den Vorzug. Man setze:

28., - - - $y = \sqrt{\alpha} + \sqrt{\beta} + \sqrt{\gamma}$ folglich:

$y^2 = \alpha + \beta + \gamma + 2\sqrt{\alpha\beta} + 2\sqrt{\alpha\gamma} + 2\sqrt{\beta\gamma}$

und um eine Gleichung des 4ten Grades zu erhalten, schaffe man zuerst die rationalen Glieder $\alpha + \beta + \gamma$ auf die linke Seite und erhebe beide Seiten der Gleichung zum Quadrat, und setze der Kürze halber $\alpha + \beta + \gamma = f$, so haben wir:

$$(y^2 - f)^2 = y^4 - 2y^2 f + f^2 = 4\left(\alpha\beta + \alpha\gamma + \beta\gamma + 2\sqrt{\alpha^2\beta\gamma} + 2\sqrt{\alpha\beta^2\gamma} + 2\sqrt{\alpha\beta\gamma^2}\right)$$

Man setze ferner: $\alpha\beta + \alpha\gamma + \beta\gamma = g$ und $\alpha\beta\gamma = h$, so wird:

$y^4 - 2y^2 f + f^2 = 4g + 8\sqrt{h}\,(\sqrt{\alpha} + \sqrt{\beta} + \sqrt{\gamma})$ oder:

$y^4 - 2y^2 f + f^2 = 4g + 8\sqrt{h} \cdot y$ oder die Gleichung geordnet

29, - - - - $y^4 - 2y^2 f - 8\sqrt{h} \cdot y + f^2 - 4g = 0$.

Diese Gleichung verglichen mit der Gleichung (27): $y^4 + ay^2 + by + c = 0$ giebt:

$$30., \quad \begin{cases} -2f = a; \\ -8\sqrt{h} = b; \\ f^2 - 4g = c \end{cases} \quad \text{oder:} \quad \begin{cases} f = -\frac{a}{2} \\ \sqrt{h} = -\frac{b}{8} \\ g = \frac{a^2}{16} - \frac{c}{4} \end{cases}$$

Da nun $f = \alpha + \beta + \gamma$

$g = \alpha\beta + \alpha\gamma + \beta\gamma$

$h = \alpha\beta\gamma$

und da $(z-\alpha)(z-\beta)(z-\gamma) = z^3 - z^2(\alpha + \beta + \gamma) +$
$+ z(\alpha\beta + \alpha\gamma + \beta\gamma) - \alpha\beta\gamma$,

so haben wir eine kubische Gleichung:

31., - - - - $z^3 - fz^2 + gz - h = 0$, in welcher die 3 Wurzeln der Gleichung α, β und γ gefunden werden können.

Wir finden demnach, aus der Gleichung 30, die Coefficienten der kubischen Gleichung f, g, h und folglich die kubische Gleichung $z^3 - fz^2 + gz - h = 0$ selbst, und daraus nach der Theorie der kubischen Gleichungen die Wurzeln α, β, γ und folglich auch (s. Gl. 28) $y = \sqrt{\alpha} + \sqrt{\beta} + \sqrt{\gamma}$.

Da nun vor $\sqrt{\alpha}, \sqrt{\beta}, \sqrt{\gamma}$ $\pm$ gesetzt werden kann, so ist: $y = \pm\sqrt{\alpha} \pm \sqrt{\beta} \pm \sqrt{\gamma}$, und da wir von jeder Wurzel nur ein Vorzeichen nehmen können, so haben wir folgende 8 Variationen als Wurzeln der biquadratischen Gleichung:

1., $y = +\sqrt{\alpha} + \sqrt{\beta} + \sqrt{\gamma}$
2., $y = +\sqrt{\alpha} + \sqrt{\beta} - \sqrt{\gamma}$
3., $y = +\sqrt{\alpha} - \sqrt{\beta} + \sqrt{\gamma}$
4., $y = +\sqrt{\alpha} - \sqrt{\beta} - \sqrt{\gamma}$

$5., \; y = -\sqrt{\alpha} + \sqrt{\beta} + \sqrt{\gamma}$
$6., \; y = -\sqrt{\alpha} + \sqrt{\beta} - \sqrt{\gamma}$
$7., \; y = -\sqrt{\alpha} - \sqrt{\beta} + \sqrt{\gamma}$
$8., \; y = -\sqrt{\alpha} - \sqrt{\beta} - \sqrt{\gamma}$

Da aber jede biquadratische Gleichung nicht 8, sondern nur 4 Wurzeln haben kann, so ist zu entscheiden, welche von diesen 4 Wurzeln wegfallen.

Es ist $\sqrt{h} = -\frac{b}{8}$ (s. Gl. 30) und $\sqrt{h} = \sqrt{\alpha} \,.\, \sqrt{\beta} \,.\, \sqrt{\gamma}$, wo jede Wurzel $\pm$ genommen werden kann, so kann für b positiv, $\sqrt{\alpha} \,.\, \sqrt{\beta} \,.\, \sqrt{\gamma}$ nur negativ sein; es müssen demnach entweder nur ein oder alle drei Factoren negativ sein, und es ist demnach für b positiv:

$1., \; y = \sqrt{\alpha} + \sqrt{\beta} - \sqrt{\gamma}$
$2., \; y = \sqrt{\alpha} - \sqrt{\beta} + \sqrt{\gamma}$
$3., \; y = -\sqrt{\alpha} + \sqrt{\beta} + \sqrt{\gamma}$
$4., \; y = -\sqrt{\alpha} - \sqrt{\beta} - \sqrt{\gamma}$

Ist aber b negativ, so ist $\sqrt{h} = \sqrt{\alpha} \,.\, \sqrt{\beta} \,.\, \sqrt{\gamma}$ positiv und folglich entweder ein Factor oder alle drei positiv zu nehmen und folglich:

$1., \; y = \sqrt{\alpha} - \sqrt{\beta} - \sqrt{\gamma}$
$2., \; y = -\sqrt{\alpha} + \sqrt{\beta} - \sqrt{\gamma}$
$3., \; y = -\sqrt{\alpha} - \sqrt{\beta} + \sqrt{\gamma}$
$4., \; y = +\sqrt{\alpha} + \sqrt{\beta} + \sqrt{\gamma}$

Der Fall, in welchem b positiv ist, kann in folgende 2 Formeln zusammengefaſst werden:

$$32., \quad - - - - - \quad \begin{cases} 1., \; y = +\sqrt{\alpha} \pm \sqrt{\beta} \mp \sqrt{\gamma} \\ 2., \; y = -\sqrt{\alpha} \pm \sqrt{\beta} \pm \sqrt{\gamma} \end{cases}$$

wo aber entweder nur beide obere oder beide untere Zeichen gelten.

Eben so wird für b negativ:

$$33., \quad - - - - - \quad \begin{cases} 1., \; y = +\sqrt{\alpha} \pm \sqrt{\beta} \pm \sqrt{\gamma} \\ 2., \; y = -\sqrt{\alpha} \pm \sqrt{\beta} \mp \sqrt{\gamma} \end{cases}$$

wo gleichfalls entweder nur die beiden obern oder beiden untern Zeichen zugleich gelten.

Aus den Wurzeln der kubischen Gleichung läſst sich entscheiden, ob die Wurzeln der biquadratischen Gleichung möglich oder unmöglich sind. Es können hier folgende Fälle eintreten:

Es sind in der kubischen Gleichung:

1., Entweder alle Wurzeln positiv.
2., Zwei positiv und eine negativ.
3., Eine positiv und zwei negativ.
4., Alle drei negativ.
5., Eine negativ und zwei unmöglich.
6., Eine positiv und zwei unmöglich.

Eine unmögliche und zwei mögliche Wurzeln giebt es nicht; denn es sind (s. 22, 24, 25) entweder alle drei Wurzeln möglich, oder eine möglich und zwei unmöglich.

Ad 1. In diesem Falle sind alle vier Wurzeln der biquadratischen Gleichung möglich; weil sie aus Quadratwurzeln von lauter positiven Gröſsen zusammengesetzt sind. (s. 28.)

Ad 2. Hier sind offenbar immer alle vier Wurzeln unmöglich.

Ad 3. Hier können die Wurzeln entweder alle vier unmöglich oder zwei unmöglich und zwei möglich sein.

Es sei nämlich die Wurzel α positiv, β und γ negativ, so sind alle vier Wurzeln der biquadratischen Gleichung unmöglich, wenn β und γ ungleich sind; ist aber $\beta = \gamma$, so ist $\pm \sqrt{\beta} \mp \sqrt{\gamma} = 0$, wo nur die obern oder untern Vorzeichen zugleich zu nehmen sind.

Es sind demnach die Wurzeln der biquadratischen Gl, entweder:

$$\left.\begin{array}{l} 1., \; y = + \sqrt{\alpha} \\ 2., \; y = + \sqrt{\alpha} \end{array}\right\} \text{möglich}$$

$$\left.\begin{array}{l} 3., \; y = - \sqrt{\alpha} + 2\sqrt{\beta} \\ 4., \; y = - \sqrt{\alpha} - 2\sqrt{\beta} \end{array}\right\} \text{unmöglich.}$$

oder: $\left.\begin{array}{l} 1.,\ y = + \sqrt{\alpha} + 2\sqrt{\beta} \\ 2.,\ y = + \sqrt{\alpha} - 2\sqrt{\beta} \end{array}\right\}$ unmöglich

$\left.\begin{array}{l} 3.,\ y = - \sqrt{\alpha} \\ 4.,\ y = - \sqrt{\alpha} \end{array}\right\}$ möglich

je nachdem b positiv oder negativ ist. (s. 32 und 33.)

Ad 4. Dieser Fall kann nicht vorkommen, wenn der Coefficient b möglich sein soll; denn es ist $\sqrt{h} = \sqrt{\alpha \cdot \beta \cdot \gamma} = - \frac{b}{8}$ (s. Gl 30) also eine unmögliche Gröſse einer möglichen gleich, was widersinnig ist.

Ad 5. Dieser Fall fällt auch weg; denn es waren die Wurzeln der kubischen Gleichung $y^3 + ay + b = o$ (12):

$$\left.\begin{array}{l} 1.,\ y = p \\ 2.,\ y = - \frac{p}{2} + q.i \\ 3.,\ y = - \frac{p}{2} + q.i \end{array}\right\} \text{(s. Gl. 22)}$$

und folglich die der Gleichung (31) $z^3 - fz^2 + gz - h = o$:

$$1.,\ z = p + \frac{f}{3} = \alpha$$

$$2.,\ z = - \frac{p}{2} + qi + \frac{f}{3} = \beta$$

$$3.,\ z = - \frac{p}{2} - qi + \frac{f}{3} = \gamma,$$

welche ich, der Kürze halber, die Form

$$\begin{array}{l} 1.,\ z = \alpha \\ 2.,\ z = p' + qi \\ 3.,\ z = p' - qi \end{array}$$

geben will, wo α, p' und q mögliche Gröſsen vorstellen. Es ist demnach $h = \alpha . (p' + qi) . (p' - qi) = \alpha (p'^2 + q^2) = \frac{b^2}{64}$ stets positiv und weil der Factor $(p'^2 + q^2)$ stets positiv ist, p' und q mag positiv oder negativ sein, so muſs auch α positiv sein.

Ad 6. Hier sind die vier Wurzeln der biquadratischen Gleichung entweder: $y = \sqrt{\alpha} \pm \sqrt{(p' + qi)} \pm \sqrt{(p' - qi)}$ und $y = -\sqrt{\alpha} \pm \sqrt{(p' + qi)} = \sqrt{(p' + qi)}$ . . s. (33.) oder: $y = \sqrt{\alpha} \pm \sqrt{(p' + qi)} \mp \sqrt{(p' - qi)}$ und $y = -\sqrt{\alpha} \pm \sqrt{(p' + qi)} \pm \sqrt{(p' - qi)}$ . . s. (32.) Hier entscheidet der Coefficient b der biquadratischen Gleichung $y^4 + ay^2 + by + c = 0$ nicht immer, ob die Gleichungen 33 oder 32 angewendet werden sollen. Denn es ist $\sqrt{h} = \sqrt{\alpha . \beta . \gamma} = -\frac{b}{8}$ und folglich muſs zwar $\sqrt{\alpha} . \sqrt{\beta} . \sqrt{\gamma}$ negativ sein, wenn b positiv ist und umgekehrt; aber $\sqrt{\alpha}\ \sqrt{(p' + qi)}\ \sqrt{(p' - qi)}$ ist nicht immer negativ, wenn entweder alle drei Vorzeichen vor den Quadratwurzelzeichen negativ, oder wenn das eine negativ und die beiden andern positiv genommen werden. Eben so wenig ist das Produkt $\sqrt{\alpha}\ \sqrt{(p' + qi)}\ \sqrt{(p' - qi)}$ *immer* positiv, wenn entweder alle drei Vorzeichen positiv, oder das eine positiv und die beiden andern negativ sind. Es ist nämlich $\sqrt{(p' + qi)}\ \sqrt{(p' - qi)} = \pm \sqrt{(p'^2 + q^2)}$, je nachdem p′ positiv oder negativ ist: es sei z. B. $p' = -1$, so ist $\sqrt{(p' + qi)}\ \sqrt{(p' - qi)} = \sqrt{(-1 + qi)}\ \sqrt{(-1 - qi)} = i^2 \sqrt{(1 + qi)}\ \sqrt{(1 - qi)} = i^2 \sqrt{(1^2 + q^2)} = -\sqrt{(1^2 + q^2)}$. Wenn demnach p′ positiv ist, so bleiben die obigen Regeln S. 22. unverändert; für p′ negativ aber gelten umgekehrt die Formeln 32 für b negativ, und die Formeln 33 für b positiv. *)

---

*) Diese Beschränkung der obigen Regel ist in allen, mir zu Gesicht gekommenen Werken, welche die Eulersche Methode vortragen, namentlich in Crelles Lehrbuch der Arithmetik und Algebra §. 293, in Umpfenbachs Lehrbuch der Algebra pag. 495 et seq., im mathematischen Wörterbuch von Klügel, 2ter Th., pag. 409. u. m. a. nicht angegeben. Dasselbe gilt von dem Falle ad 3., in welchem zwei Wurzeln der kubischen Gl. negativ und die eine positiv ist. Denn es seien die drei Wurzeln α, -1 und $-1'$, so ist ebenfalls $\sqrt{\alpha} . \sqrt{\beta} . \sqrt{\gamma} = i^2 \sqrt{(\alpha . 1 . 1')} = -\sqrt{(\alpha 1 1')}$. Es müssen demnach auch hier die Formeln 32 und 33 verwechselt werden. Ist $-1 = -1'$, so fällt dieser Fall mit dem obigen zusammen, wenn $p' = -1$ und $q = 0$ gesetzt wird.

Der Ausdruck $+\sqrt{(p'+qi)}+\sqrt{(p'-qi)}$ nimmt die Form
$\sqrt{(+\sqrt{(p'+qi)}+\sqrt{(p'-qi)})^2}=\sqrt{(2p'+2\sqrt{(p'^2+q^2)})}$ .... 34 an,
wenn p' positiv ist; eben so wird $\sqrt{(\sqrt{(p'+qi)}+\sqrt{(p'-qi)})^2}$
$=\sqrt{(i\sqrt{(l+qi)}+i\sqrt{(l-qi)})^2}=\sqrt{(-2l-2\sqrt{(l^2+q^2)})}$ ... 35,
wenn $p'=-l$ ist. Auf gleiche Weise wird $\sqrt{(p'+qi)}-\sqrt{(p'-qi)}=$
$\sqrt{(2p'-2\sqrt{(p'^2+q^2)})}$ ... 36 für p' positiv und $\sqrt{(p'+qi)}-\sqrt{(p'-qi)}=$
$\sqrt{(\sqrt{(-l+qi)}-\sqrt{(-l-qi)})^2}=\sqrt{(-2l+2\sqrt{(p'^2+q^2)})}$ ... 37
wenn $p'=-l$ ist.

Es sind nun 1stens, für b und p' positiv, die vier Wurzeln:

$$\left.\begin{array}{l}
y=+\sqrt{\alpha}\pm\sqrt{\beta}\mp\sqrt{\gamma}=+\sqrt{\alpha}\pm\sqrt{(2p'-2\sqrt{(p'^2+q^2)})}\ \text{unmöglich}\\
y=-\sqrt{\alpha}\pm\sqrt{\beta}\pm\sqrt{\gamma}=-\sqrt{\alpha}\pm\sqrt{(2p'+2\sqrt{(p'^2+q^2)})}\ \text{möglich}\\
\quad\text{2tens für b positiv und p' negativ:}\\
y=+\sqrt{\alpha}\pm\sqrt{\beta}\pm\sqrt{\gamma}=\sqrt{\alpha}\pm\sqrt{(2p'-2\sqrt{(p'^2+q^2)})}\ \text{unmöglich}\\
y=-\sqrt{\alpha}\pm\sqrt{\beta}\mp\sqrt{\gamma}=-\sqrt{\alpha}\pm\sqrt{(2p'+2\sqrt{(p'^2+q^2)})}\ \text{möglich}\\
\quad\text{3tens für b negativ und p' positiv:}\\
y=+\sqrt{\alpha}\pm\sqrt{\beta}\pm\sqrt{\gamma}=\sqrt{\alpha}\pm\sqrt{(2p'+2\sqrt{(p'^2+q^2)})}\ \text{möglich}\\
y=-\sqrt{\alpha}\pm\sqrt{\beta}\mp\sqrt{\gamma}=-\sqrt{\alpha}\pm\sqrt{(2p'-2\sqrt{(p'^2+q^2)})}\ \text{unmöglich}\\
\quad\text{4tens für b und p' negativ:}\\
y=+\sqrt{\alpha}\pm\sqrt{\beta}\mp\sqrt{\gamma}=\sqrt{\alpha}\pm\sqrt{(2p'+2\sqrt{(p'^2+q^2)})}\ \text{möglich}\\
y=-\sqrt{\alpha}\pm\sqrt{\beta}\pm\sqrt{\gamma}=-\sqrt{\alpha}\pm\sqrt{(2p'-2\sqrt{(p'+q^2)})}\ \text{unmöglich.}
\end{array}\right\}\ldots 38.$$

Beispiele:

1. B. Es sei $x^3 - 4x^2 + 11x - 14 = 0$, so ist $A = -4$, $B = 11$ und $C = -14$ (s. Gl. 11.); also $x = y - \frac{A}{3} = y + \frac{4}{3}$ und folglich die Coefficienten der Gleichung 12: $a = B - \frac{1}{3}A^2 = 11 - \frac{16}{3} = \frac{17}{3}$, $b = \frac{2}{27}A^3 - \frac{AB}{3} + C = -\frac{128}{27} + \frac{44}{3} - 14 = -\frac{110}{27}$, und die Gleichung 12 selbst: $y^3 + \frac{17}{3}y - \frac{110}{27} = 0$. Die Wurzeln dieser Gl. (s. 21) sind:

$$1.) = \sqrt[3]{-\frac{b}{2} + \sqrt{\frac{a^3}{27} + \frac{b^2}{4}}} + \sqrt[3]{-\frac{b}{2} - \sqrt{\frac{a^3}{27} + \frac{b^2}{4}}}$$

$$= \sqrt[3]{\frac{55}{27} + \frac{\sqrt{4913 + 3025}}{27}}$$

$$+ \sqrt[3]{\frac{55}{27} - \frac{\sqrt{4913 + 3025}}{27}} = \frac{1}{3}\left(\sqrt[3]{55 + \sqrt{7938}}\right.$$

$$\left. + \sqrt[3]{55 - \sqrt{7938}}\right)$$

$$= \frac{1}{3}\left\{\sqrt[3]{55 + 89{,}09546\ldots} + \sqrt[3]{55 - 89{,}09546\ldots}\right\} = \frac{1}{3}\left\{\sqrt[3]{144{,}09546\ldots}\right.$$

$$\left. + \sqrt[3]{-34{,}09546}\right\}$$

$$= \frac{1}{3}\left\{5{,}24264\ldots - 3{,}24264\ldots\right\} = \frac{2}{3}.$$

$\sqrt{7938}$ | 89,09546..
64
169 | 1538
1521
17809 | 170000
160281
17818. | 9719..
8909
810
713
97

$\sqrt[3]{144,09546.}$ | 5,24264
125
75 | 19095
150
608
8112 | 348746.
32448
2496
6.
326982.
82373. | 21764....
16475..
6...
16481
8244 | 5283......
4946
337
330
7

156
16
936
156
2496

156
52
312
780
8112

1572
524
7860
3144
629.
82373.

1572
4
6...

15726
5242
7863.
315
63
5
8244

$\sqrt[3]{-34,09546.}$ | −3,24264
27
27 | 7095
54
368
3072 | 132746.
12288
1536
6.
124422.
31493 | 8324....
6299
4
6303
3153 | 2021......
1892
129
126

96
32
192
288
3072

96
16
576
96
1536

972
324
2916
1944
389.
31493.

972
4
4....

9726
3242
2917.
195
39
2
3153

Der Ausdruck $y = \frac{1}{3}\left\{\sqrt[3]{55+\sqrt{7938}}+\sqrt[3]{55-\sqrt{7938}}\right\}$ läſst sich bequemer durch Logarithmen berechnen:

Log. 7938 ... 3,8997111
Log. $\sqrt{7938}$ = 1,9498555.5
533
22
20
2.5

$\sqrt{7938}$ = 89,09545.. | − 89,09545
55 = 55 | + 55
144,09545 | − 34,09545
Log. dazu 2,1586338 | 1,5326907n
151 | 51
14 | 6
2,1586503 | 1,5326964n

$$\text{Log. } \sqrt[3]{144{,}09547} = 0{,}7195501 \qquad \text{Log. } \sqrt[3]{-34{,}09547} = 0{,}5108988\,\text{n}$$

$$\frac{467}{34} \qquad\qquad \frac{34}{54}$$

$$\sqrt[3]{144{,}09547} = 5{,}24264. \quad \sqrt[3]{-34{,}09..} = -3{,}24264.$$

und folglich $y = \dfrac{5{,}24264. - 3{,}24264.}{3} = \dfrac{2}{3}.$

Das 2te und 3te y findet man nun am leichtesten, wenn man die Gleichung $y^3 + \dfrac{17}{3}y - \dfrac{110}{27} = 0$ durch $y - \frac{2}{3}$ dividirt:

$$
\begin{array}{l|l|l}
y - \frac{2}{3} & y^3 + \frac{17}{3}\,y - \frac{110}{27} & y^2 + \frac{2}{3}y + \frac{55}{9} = 0. \text{ uud folglich} \\
 & \underline{y^3 - \frac{2}{3}y^2} & y = -\frac{1}{3} \pm \sqrt{-\frac{55}{9} + \frac{1}{9}} \\
 & \frac{2}{3}y^2 + \frac{17}{3}y & \quad = -\frac{1}{3} \pm \sqrt{-\frac{54}{9}} = -\frac{1}{3} \pm \sqrt{-6}. \\
 & \underline{\frac{2}{3}y^2 - \frac{4}{9}y} & \\
 & \quad + \frac{55}{9}y - \frac{110}{27} & \\
 & \quad + \frac{55}{9}y - \frac{110}{27} &
\end{array}
$$

uud folglich das 2te $y = -\frac{1}{3} + \sqrt{-6}$ und das 3te $y = -\frac{1}{3} - \sqrt{-6}.$

Die beiden Formeln
$$\left.\begin{aligned} y &= J\sqrt[3]{-\tfrac{b}{2} + \nu} + J'\sqrt[3]{-\tfrac{b}{2} - \nu} \\ y &= J'\sqrt[3]{-\tfrac{b}{2} + \nu} + J\sqrt[3]{-\tfrac{b}{2} - \nu} \end{aligned}\right\} \text{ s. Gl. 21.}$$

geben: das 2te
$$y = \left\{\frac{-1 + \sqrt{-3}}{2}\right\}\left\{\frac{5{,}24264}{3}\right\} +$$
$$+ \left\{\frac{-1 - \sqrt{-3}}{2}\right\} \cdot \left\{\frac{-3{,}24264.}{3}\right\} \text{ (vergl. Gl. 22.)}$$
$$= -\frac{1}{3} + \frac{\sqrt{-3.}}{6}\,8{,}48528 = -\frac{1}{3} + \sqrt{-3.}\,1{,}41421$$
$$= -\frac{1}{3} + \sqrt{-3.}\,\sqrt{2} = -\frac{1}{3} + \sqrt{-6}; \text{ denn } \sqrt{2} = 1{,}41421...$$

und das 3te $y = \left\{\frac{-1-\sqrt{-3}}{6}\right\} 5{,}24264 + \left\{\frac{-1+\sqrt{-3}}{6}\right\} (-3{,}24264)$

$$= -\tfrac{1}{3} - \frac{\sqrt{-3}}{6} \cdot 8{,}48528 = -\tfrac{1}{3} - \sqrt{-6}.$$

Nun ist $x = y - \frac{A}{3} = y + \frac{4}{3}$ und folglich die drei entsprechenden Werthe für x:

1., $x = \frac{2}{3} + \frac{4}{3} = 2$

2., $x = -\frac{1}{3} + \sqrt{-6} + \frac{4}{3} = 1 + \sqrt{-6}$

3., $x = -\frac{1}{3} - \sqrt{-6} + \frac{4}{3} = 1 - \sqrt{-6}$

Diese Werthe für x genügen der gegebenen Gleichung $x^3 - 4x^2 + 11x - 14 = 0$ in der That:

$$1.\ \left\{\begin{array}{l} +8-16 \\ \underline{+22-14} \\ +30-30=0 \end{array}\right. \qquad 2.\ \left\{\begin{array}{l} +1+3\sqrt{-6} \\ -18-6\sqrt{-6} \\ -4-8\sqrt{-6} \\ +24 \\ +11+11\sqrt{-6} \\ \underline{-14} \\ 0+0=0. \end{array}\right. \qquad 3.\ \left\{\begin{array}{l} +1-3\sqrt{-6} \\ -18+6\sqrt{-6} \\ -4+8\sqrt{-6} \\ +24 \\ +11-11\sqrt{-6} \\ \underline{-14} \\ 0+0=0. \end{array}\right.$$

2. B. $x^3 + 4x^2 + 11x + 14 = 0$ giebt: $a = 11 - \frac{16}{3} = \frac{17}{3}$, $b = \frac{128}{27} + \frac{44}{3} + 14 = \frac{110}{27}$, $x = y - \frac{4}{3}$ und die Gl. $12 = y^3 + \frac{17}{3}y + \frac{110}{27} = 0$. Die Wurzeln sind:

$$1.,\ y = \sqrt[3]{\frac{-55+\sqrt{7938}}{27}} + \sqrt[3]{\frac{-55-\sqrt{7938}}{27}}$$

$$= \tfrac{1}{3}\left\{\sqrt[3]{34{,}09546..} + \sqrt[3]{-144{,}09546..}\right\}$$

$$= \tfrac{1}{3}(3{,}24264.. - 5{,}24264..) = -\tfrac{2}{3}.$$

2., $y = \frac{1}{3} + 1\,\frac{\sqrt{-3}}{2}\,8{,}48528.. = \frac{1}{3} + \sqrt{-6}$ (s. das vorige B. u. Gl. 22)

3., $= \frac{1}{3} - \sqrt{-6}$. und folglich die entsprechenden Werthe für x:

1., $x = -2$, 2., $x = -1 + \sqrt{-6}$ und 3., $x = -1 - \sqrt{-6}$.

3. B. $x^3 + 3x^2 + 4x + 12 = 0$. Hier wird $x = y - 1$, $a = 4 - \frac{9}{3} = 1$, $b = \frac{2 \cdot}{27}\,27 - \frac{3.4}{3} + 12 = 10$. (s. Gl. 11 und 12) und $y^3 + y + 10 = 0$

und folglich:

$$1.,\ y = \sqrt[3]{-5 + \sqrt{\tfrac{1}{27} + 25}} + \sqrt[3]{-5 - \sqrt{\tfrac{1}{27} + 25}}$$

$$= \sqrt[3]{-5 + \sqrt{\tfrac{676}{27}}} + \sqrt[3]{-5 - \sqrt{\tfrac{676}{27}}}.$$

Log. 676	.. 2,8299467	
Compl. Log. 27	... 8,5686362	
	1,3985829	
	0,6992914.5	
Die Zahl dazu	... 5,003702	$-$ 5,003702
	$-$ 5	$-$ 5
	0,003702	$-$ 10,003702
Log. dazu	= 7,5684364	1,0001608n
Log. $\sqrt[3]{\ldots}$	... 9,1894788	0,3333869.n
	622	868
	166	
$\sqrt[3]{\ldots}$	= 0,154670	$-$ 2,154670.

folglich 1stes $y = -2$

und $\frac{y^3 + y + 10}{y + 2} =$
$y^2 - 2y + 5 = 0$.
und 2tes $y = 1 + \sqrt{-4}$
3tes $y = 1 - \sqrt{-4}$
und folglich die entsprechenden Werthe für x:
1., $x = -2 - 1 = -3$
2., $x = 1 + \sqrt{-4} - 2 = -1 + \sqrt{-4}$.
3, $x = 1 - \sqrt{-4} - 2 = -1 - \sqrt{-4}$.

4. B. $x^3 - 5x + 7x + 13 = 0$. Hier wird $x = y + \frac{5}{3}$, $a = 7 - \frac{25}{3} = -\frac{4}{3}$

$b = -\frac{250}{27} + \frac{35}{3} + 13 = \frac{416}{27}$ und $y^3 - \frac{4}{3}y + \frac{416}{27} = 0$. Es ist a negativ, $\frac{a^3}{27} = -\frac{64}{27.27}$ und $\frac{b^2}{4} = \left(\frac{208}{27}\right)^2 = \frac{43264}{27.27}$ und folglich $\frac{a^3}{27} < \frac{b^2}{4}$ und

$$1\text{stes } y = \frac{\sqrt[3]{-208 + \sqrt{43200}}}{3} + \frac{\sqrt[3]{-208 - \sqrt{43200}}}{3}$$

$$= \tfrac{1}{3}\left(\sqrt[3]{-208 + \sqrt{43200}} + \sqrt[3]{-208 - \sqrt{43200}}\right)$$

Log. 43200 … 4,6354837	
Log. $\sqrt{43200}$ … 2,3177418.5	
291	
127	
$\sqrt{43200}$ = 207,84612	−207,84612
−208	−208,
−0,15388	−415,84612
Log. dazu = 9,1871822n	2,6189263n
	63
	2,6189326n
Log. $\sqrt[3]{\ldots}$ … 9,7290607n	0,8729775n
594	− 7,46412
$\sqrt[3]{\ldots}$ = − 0,535872	

1stes $y = -\frac{8}{3}$ und $\frac{y^3 - \frac{4}{3}y + \frac{416}{27}}{y + \frac{8}{3}} = y^2 - \frac{8}{3}y + \frac{52}{9} = 0$. und folglich 2tes $y = +\frac{4}{3} + \sqrt{\frac{-36}{9}} = \frac{4}{3} + \sqrt{-4}$ 3tes $y = \frac{4}{3} - \sqrt{-4}$, und 1stes $x = -\frac{8}{3} + \frac{5}{3} = -1$ 2tes $x = \frac{4}{3} + \sqrt{-4} + \frac{5}{3} = 3 + \sqrt{-4}$ 3tes $x = \frac{4}{3} - \sqrt{-4} + \frac{5}{3} = 3 - \sqrt{-4}$.

Wenn a negativ und $\frac{a^3}{27} < \frac{b^2}{4}$ ist, so läfst sich die Formel

$$y = \sqrt[3]{-\frac{b}{2} + \sqrt{\frac{a^3}{27} + \frac{b^2}{4}}} + \sqrt[3]{-\frac{b}{2} - \sqrt{\frac{a^3}{27} + \frac{b^2}{4}}}$$ auch auf folgende Weise zu einer logarithmischen Rechnung geeignet machen:

$$y = \sqrt[3]{-\frac{b}{2} + \frac{b}{2}\sqrt{1 - \frac{a^3.}{27.}\frac{4}{b^2}}} + \sqrt[3]{-\frac{b}{2} - \frac{b}{2}\sqrt{1 - \frac{a^3.}{27.}\frac{4}{b^2}}},$$

wenn für das negative a, — a gesetzt wird. Man setze nun $\frac{a^3}{27}.\frac{4}{b^2} = \text{Sin.}^2\varphi$, was hier angeht, weil $\frac{a^3}{27}.\frac{4}{b^2} < 1$ ist, und wir haben:

$$y = \sqrt[3]{-\frac{b}{2}\left(1-\sqrt{1-\text{Sin.}^2\varphi}\right)} + \sqrt[3]{-\frac{b}{2}\left(1+\sqrt{1-\text{Sin.}^2\varphi}\right)}$$

$$= \sqrt[3]{-\frac{b}{2}(1-\text{Cos.}\,\varphi)} + \sqrt[3]{-\frac{b}{2}(1+\text{Cos.}\,\varphi)}$$

$$= \sqrt[3]{-\frac{b}{2}.\,2\,\text{Sin.}^2\frac{\varphi}{2}} + \sqrt[3]{-\frac{b}{2}.\,2\,\text{Cos.}^2\frac{\varphi}{2}} = \sqrt[3]{-b}\left(\text{Sin.}^{\frac{2}{3}}\frac{\varphi}{2} + \text{Cos.}^{\frac{2}{3}}\frac{\varphi}{2}\right).$$

$$\text{Sin.}^2\varphi = \frac{a^3}{27}.\frac{4}{b^2} = \frac{4^3.}{27^2}\,\frac{27^2}{208^2} = \frac{4^3}{208^2} = \frac{8^2}{208^2} = \frac{1}{26^2} \text{ und Sin.}\,\varphi = \frac{1}{26}$$

$$\begin{array}{llr}
\text{Log. Sin. }\varphi \ldots & 8{,}5850267 & \\
 & \underline{\quad 47411} & \\
 & 547\,|\,2856\,|\,5{,}''22 & \\
 & \quad\;\; \underline{2735} & \\
 & \quad\;\; 121 & \\
 & \quad\;\; \underline{109} &
\end{array}
\qquad
\begin{array}{l}
\varphi = 2^\circ\, 12'\, 15{,}''22 \\
\frac{\varphi}{2} = 1^\circ\, 6'\, 7{,}''61
\end{array}$$

$$\begin{array}{lr}
\text{Log. Cos. }\frac{\varphi}{2} \cdots & 9{,}9999197 \\
\frac{2}{3} & 9\,9998394 \\
\text{Log. Cos.}^{\frac{2}{3}}\,\frac{\varphi}{2} \ldots & 9{,}9999464 \\
 & \underline{35} \\
 & 29 \\
\text{Cos.}^{\frac{2}{3}}\,\frac{\varphi}{2} \ldots & 0{,}999877. \\
\text{Sin.}^{\frac{2}{3}}\,\frac{\varphi}{2} \ldots & 0\,071788. \\
 & \overline{1{,}071665}
\end{array}
\qquad
\begin{array}{lr}
\text{Sin }\frac{\varphi}{2} \ldots & 8{,}2832434 \\
 & \underline{8334} \\
 & 8{,}2840768 \\
 & 6{,}5681536 \\
 & 8{,}8560512 \\
 & \underline{458} \\
\text{Sin.}^{\frac{2}{3}}\,\frac{\varphi}{2} \ldots & 0{,}0717879.
\end{array}
\qquad
\begin{array}{r}
1095{,}2 \\
\underline{7{,}61} \\
7666{,}4 \\
657{,}1 \\
\underline{10{,}9} \\
8334.
\end{array}$$

Log. dazu ...	$0{,}0300327$	Log. — 416....	$2{,}6190933n$
	243	Com. 27	$8{,}5686362$
	20		$1{,}1877295n$
	$0{,}0300590$	Log. $\sqrt[3]{-b}$ ...	$0{,}3959098n$
Log. $\sqrt[3]{-b}$	$0{,}3959098n$		
Log. y ...	$0{,}4259688n$		
	579		
	109		
	97		

$y = -2{,}666667 = -\frac{8}{3}$, wie früher.

5. B. $y^3 - 5y - 12 = 0$. Hier ist a negativ, $\frac{a^3}{27} = \frac{-125}{27}$ und $\frac{b^2}{4} = 36$, folglich $\frac{a^3}{27} < \frac{b^2}{4}$ und $\nu = \sqrt{\left(\frac{a^3}{27} + \frac{b^2}{4}\right)} = \sqrt{\left(\frac{-125}{27} + 36\right)}$ möglich und es wird 1stes $y = 3$, 2tes $y = \frac{-3 + \sqrt{-7}}{2}$ und 3tes $y = \frac{-3 - \sqrt{-7}}{2}$.

6. B. $y^3 - 49y - 120 = 0$. Hier ist a negativ, $\frac{a^3}{27} = -\frac{117649}{27}$, $\frac{b^2}{4} = 3600$ und folglich $\nu = \sqrt{\left(\frac{a^3}{27} + \frac{b^2}{4}\right)}$ $= \sqrt{\left(\frac{-117649 + 97200}{27}\right)} = \sqrt{\left(\frac{-20449}{27}\right)}$ unmöglich: es können also die Formeln 21 nicht in Anwendung kommen; wohl aber die Formeln 25 und, weil $m = \frac{20449}{27}$ und $\frac{m^3}{\left(\frac{b^2}{4}\right)} = 0{,}210381$ ist, so convergirt die Reihe 33 und ist hier ebenfalls brauchbar. Sie heifst:

$$y = 2\left\{-\frac{b}{2}\right\}^{\frac{1}{5}}\left(1 + \frac{1}{5}\cdot\frac{1}{5}\,\frac{m}{\left(\frac{b^2}{4}\right)} - \frac{1}{5}\cdot\frac{1}{5}\,\frac{5}{9}\cdot\frac{8}{12}\left\{\frac{m}{\left(\frac{b^2}{4}\right)}\right\}^2\right.$$

$$\left. + \frac{1}{5}\cdot\frac{1}{5}\cdot\frac{5}{9}\cdot\frac{8}{12}\cdot\frac{11}{15}\cdot\frac{14}{18}\cdot\left\{\frac{m}{\left(\frac{b^2}{4}\right)}\right\}^3 - \text{etc. etc.}\right).$$

Die Parenthese läſst sich bequem durch's abgekürzte Multipliciren und Dividiren, $\left(-\frac{b}{2}\right)^{\frac{1}{5}} = (60)^{\frac{1}{5}}$ bequemer durch Logarithmen berechnen:

```
97200|20449,00|0,210381.. = m/(b²/4)      0,0018121        0,000383
     |1944    |0,0233756.                 0,21038..        0,570...
      1009      4208                         364               191
       972       631                          18                27
      3700        63                           1          0,000218
      2916        16                      0,000383·11/15·7/9
       784    0,004918·10/27 = 0,0018121
       778       27                       135|77,0|0,570..
         6       221                         |67 5|
                 216                           9 50
                  58                           9 45
                  54                              5

   0,000218          0,000046     0,000031              0,000006
   0,210...          0, 674..     0,21....              0,73....
      44                   28     0,000006·21/27·11/15  0,000004
       2                    3
   0,000046·17/21·5/6  0,000031   405|299,0|0,73..
                                     |283 5|
   126|85,0|0,674..                   15 5
      |75 6|
       9 40
       8 82
         58
```

+ 1
0,0233756.
0,000218
0,000004
———
+ 1,023598
— 0,001852
———
+ 1,021746.

— 0,001821.
0,000031
———
— 0,001852

Log. 1,021746 ... 0,0093234
170
25
Log. 2 ... 0,3010300
Log. $60^{\frac{1}{3}}$ ... 0,5929171
———
Log. y ... 0,9030900
y ... 8.

$\frac{y^3 - 49y - 120}{y - 8} = y^2 + 8y + 15 = 0$. und folglich 2tes $y = -4 + \sqrt{-15 + 16} = -4 + 1 = -3$ und 3tes $y = -4 - 1 = -5$.

Noch bequemer wird die Rechnung nach den Formeln 25: 1stes $y = t\,\text{Sin.}\,\varphi$, 2tes $y = t\,\text{Sin.}\,(60 - \varphi)$ und 3tes $y = -t\,\text{Sin.}\,(60 + \varphi)$, wo $t = 2\sqrt{-\frac{a}{3}}$ und $\text{Sin.}\,3\varphi = \frac{4b}{t^3}$ (s. Gl. 24). Es ist nämlich:

Log. 49 ... 1,6901961
C. Log. 3 ... 9,5228787
———
1,2130748
Log. $\sqrt{-\frac{a}{3}}$ ... 0,6065374
Log. 2 ... 0,3010300
———
Log. t ... 0,9075674
Log. t^3 ... 2,7227022

Log. 4 ... 0,6020600
Log. b ... 2,0791812n
C. Log. t^3 ... 7,2772978
———
Log. Sin. 3φ ... 9,9585390n
030
———
360

$3\varphi = -65°\,21'\,37,''27$
$\varphi = -21°\,47'\,12,''42$

$60° - \varphi = 81°\,47'\,12,''42$
$60 + \varphi = 38°\,12'\,47,''58$

9,66 | 360,0 | 37,''27.
289 8
———
702 0
676 2
———
258
193
———
65

Log. t ... 0 9075674
Log. Sin. φ ... 9,5694883n
654
———
0,4771211n
1stes $y = -3$.

52,67
12,41
———
526,7
105 3
21 1
6
———
654

Log. t ... 0,9075674
Log. Sin. $(60 - \varphi)$ ... 9,9955188
38
———
0,9030900
2tes $y = 8$

5,04
12,42
———
50,4
6 1
1 5
———
58

Log. — t ... 0,9075674n
Log. Sin. $(60 + \varphi)$ ... 9,7912754
1273
———
0,6989701n
3tes $y = -5$.

26,75
47,58
———
1070,0
187 3
15 4
2,1
———
1273

7. B. $y^3 - 27y + 44 = 0$. Hier ist $\frac{a^3}{27} = -27^2 = -729$ und $\left(\frac{b}{2}\right)^2 = 484$ und folglich $v = \sqrt{\frac{a^3}{27} + \frac{b^2}{4}} = \sqrt{-245}$ unmöglich. Es ist ferner $m = 245$ und $\frac{m}{\left(\frac{b}{2}\right)^2} = \frac{245}{484} < 1$; man kann demnach diese Aufgabe eben so, wie die vorige, behandeln und findet auf beiden Wegen 1stes $y = 4$, 2tes $y = -2 + \sqrt{15}$ und 3tes $y = -2 - \sqrt{15}$.

8. B. $y^3 - 12y - 9 = 0$. folglich $\frac{a^3}{27} = -64$ und $\frac{b^2}{4} = \frac{81}{4}$ und $v = \sqrt{-175}$ unmöglich und $\frac{m}{\left(\frac{b^2}{4}\right)} = \frac{175}{\left(\frac{81}{4}\right)} = \frac{700}{81} > 1$ und folglich weder die Formeln 21, noch die unendliche Reihe 23 u. s. w., sondern nur die Formeln 25 anwendbar:

$\sqrt{-\frac{a}{3}} = 2$ und $t = 4$

$$
\begin{array}{rl}
\text{Log.}\,t \ldots & 0{,}6020600 \\
\text{Log.}\,t^3 \ldots & 1{,}8061800 \\
\text{C. Log.}\,t^3 \ldots & 8{,}1938200 \\
\text{Log.}\,4\,b \ldots & 1{,}5563025n \\
\hline
\text{Log. Sin.}\,3\varphi \ldots & 9{,}7501225n \\
 & 499866 \\
\hline
 & 1359
\end{array}
$$

$30{,}95 \mid 1359{,}0 \mid 43{,}''91$; 12380; 12100; 9285; 2815; 2785; 30

$60 - \varphi = 71^\circ\,24'\,34'',64$
$60 + \varphi = 48^\circ\,35'\,25'',36$

$$
\begin{array}{rl}
\text{Log.}\,t \ldots & 0{,}6020600 \\
\text{Log.Sin.}\,\varphi \ldots & 9{,}2959129n \\
 & 3615 \\
\hline
 & 9{,}8983344n \\
 & 02 \\
\hline
 & 42
\end{array}
$$

$104{,}36$; $31{,}64$; $3130{,}8$; $417{,}4$; 626; 42; 3615.

$y = -0{,}791288.$

$3\varphi = -34^\circ\,13'\,43'',91$
$\varphi = -11^\circ\,24'\,34'',64$

$$
\begin{array}{rl}
\text{Log.}\,t \ldots & 0{,}6020600 \\
\text{Log. Sin.}\,(60-\varphi) \ldots & 9{,}9767022 \\
 & 245 \\
\hline
 & 0{,}5787867
\end{array}
$$

$7{,}03$; $34{,}64$; $212{,}1$; $28\;3$; $4\;2$; 3; 245

$y = 3{,}791288\ldots$

$$
\begin{array}{rl}
\text{Log.}\,(-t) \ldots & 0{,}6020600n \\
\text{Log.Sin.}\,(60+\varphi) \ldots & 9{,}8750142 \\
 & 471 \\
\hline
 & 0{,}4771213n
\end{array}
$$

$18{,}97$; $25{,}36$; $871{,}4$; $92\;9$; $5\;6$; $1\;1$; 471

$y = -3.$

Anmerkung. $y = -3$ giebt die beiden andern irrationalen y ganz genau, nämlich:

$$\frac{y^3 - 12y - 9}{y + 3} = y^2 - 3y - 3 = 0 \text{ und folglich } y = \frac{3 \pm \sqrt{21}}{2}.$$

Es ist Log. $21 = 1{,}3222193$ und Log. $\sqrt{21} = 0{,}6611096.5$
25

und $\sqrt{21} = 4{,}582576..$ und y entweder $= \frac{7{,}582576..}{2} = 3{,}791288..$

oder $= -\frac{1{,}582576}{2} = -0{,}791288..$, wie früher.

9. B. $y^3 - 27y + 54 = 0$. Hier ist $\frac{a^3}{27} = -729$ und $\left(\frac{b}{2}\right)^2 = 729$ und folglich $v = \sqrt{-729 + 729} = 0$, 1stes $y = 2\sqrt[3]{-27} = -6$, 2tes $y = -3\,J - 3\,J' = +3$ und auch das 3te $y = -3\,J' - 3\,J = +3$.

10. B. $y^3 - 3y + 2 = 0$ giebt $\frac{a^3}{27} = -1$ und $\left(\frac{b}{2}\right)^2 = 1$ und folglich $v = 0$ und 1stes $y = 2\sqrt[3]{-1} = -2$, das 2te und 3te $y = 1$.

Beispiele zur Theorie der biquadratischen Gleichung.

11. B. Es sei $x^4 - x^3 - 11x^2 + 9x + 18 = 0.$, so ist (s. Gl. 26) $A = -1$, $B = -11$, $C = 9$, $D = 18$ und folglich die Coefficienten der Gleichung 27: $a = B - \frac{3}{8}A^2 = -11 - \frac{3}{8} = -\frac{91}{8}$, $b = \frac{1}{8}A^3 - \frac{1}{2}AB + C = -\frac{1}{8} - \frac{11}{2} + 9 = \frac{27}{8}$, $c = -\frac{3}{256}A^4 + \frac{1}{16}A^2B - \frac{1}{4}AC + D = -\frac{3}{256} - \frac{11}{16} + \frac{9}{4} + 18 = \frac{5005}{256}$ und folglich $y^4 - \frac{91}{8}y^2 + \frac{27}{8}y + \frac{5005}{256} = 0$. Die Gleichungen 30 geben nun:

$$f = -\frac{a}{2} = \frac{91}{16},\quad g = \frac{a^2}{16} - \frac{c}{4} = \frac{8281 - 5005}{1024} = \frac{3276}{1024} = \frac{819}{256},$$

$k = \frac{b^2}{64} = \frac{729}{4096}$ und folglich die Gl. 31 $= 0 = z^3 - \frac{91}{16} z^2 + \frac{819}{256} z - \frac{729}{4096}$.

Die Coefficienten der Gl. 12 sind nun: $a = \frac{819}{256} - \frac{1}{3}\left(\frac{91}{16}\right)^2 = \frac{2457 - 8281}{3.256}$

$$= -\frac{5824}{3.256} = -\frac{91}{12},$$

$$b = -\frac{2}{27}\left(\frac{91}{16}\right)^3 + \tfrac{1}{3}\cdot\tfrac{91}{16}\cdot\tfrac{819}{256} - \tfrac{729}{4096}$$

$$= -\frac{1}{27.16^3}\,(2.91^3 - 81.91^2 + 27.729)$$

$$= -\frac{856064}{27.16^3} = -\frac{209}{27}.$$

91	8281	729	209
91	81	27	209
91	8281	5103	1881
819	66248	1458	418
8281	670761	+ 19683	43681
91		+ 1507142	16
8281		+ 1526825	262086
74529		− 670761	43681
753571		4096 | 856064 | 209	698896
2		8192	
1507142		36864	
		36864	

Die Gleichung 12 ist nun $y^3 - \frac{91}{12} y - \frac{209}{27} = 0$. Hier ist a negativ und $\frac{a^3}{27} > \frac{b^2}{4}$, nämlich $\frac{a^3}{27} = -\frac{753571}{27^2.4^3}$

und $\frac{b^2}{4} = \frac{209^2}{27^2.4} = \frac{698896}{27^2.4^3}$ und $m = \frac{54675}{698896}$.

Es kann demnach die kardanische Formel keine Anwendung finden, sondern nur entweder die Reihe 23, welche hier sehr stark convergirt, oder die Formeln 25. Es geben die letzteren:

$$t = \sqrt{\left(-\frac{4a}{3}\right)} = \sqrt{\left(\frac{91}{9}\right)},\quad \text{Sin. } 3\varphi = \frac{4.\ b}{t^3} = -\frac{4.209}{t^3}$$

$$\begin{array}{lrl}
\text{Log.} & 91 \ldots & 1{,}9590414 \\
\text{Log.} & 9 \ldots & 0{,}9542425 \\
\hline
 & & 1{,}0047989 \\
\text{Log.} & t \ldots & 0{,}5023994.5 \\
\text{Log.} & t^3 \ldots & 1{,}5071983.5
\end{array}$$

$$\begin{array}{lrl}
\text{Log.} & 4 \ldots & 0{,}6020600 \\
\text{Log.} & -209 \ldots & 2{,}3201463\text{n} \\
\text{C. Log.} & 27 \ldots & 8{,}5686362 \\
\text{C. Log.} & t^3 \ldots & 8{,}4978016.5 \\
\hline
\text{Log. Sin. } 3\varphi & \ldots & 9{,}9836441.5\text{n} \\
 & & 290 \\
\hline
 & & 151.
\end{array}
\qquad
\begin{array}{r|r|l}
6{,}89 & 151{,}5 & 26{,}74 \\
 & 117\ 8 & \\
\hline
 & 3370 & \\
 & 2915 & \\
\hline
 & 426 & \\
 & 418 &
\end{array}$$

$$3\varphi = -74^\circ\, 22'\, 25{,}''72$$

$$\varphi = -24^\circ\, 47'\, 28{,}''57$$

$$\begin{array}{lrl}
\text{Sin } \varphi & \ldots & 9{,}6224088\text{n} \\
 & & 1302 \\
t & \ldots & 0{,}5023994.5 \\
\hline
 & & 0{,}1249384.5\text{n} \\
 & & 279 \\
\hline
 & & 105
\end{array}
\qquad
\begin{array}{r}
45{,}59 \\
28{,}57 \\
\hline
911{,}8 \\
364\ 7 \\
22\ 8 \\
3\ 1 \\
\hline
1302
\end{array}$$

$$\begin{array}{lrl}
\text{Sin. } (60^\circ - \varphi) & \ldots & 9{,}9981974 \\
 & & 54.3 \\
t & \ldots & 0{,}5023994.5 \\
\hline
 & & 0{,}5006022.8 \\
 & & 5932 \\
\hline
 & & 90.
\end{array}
\qquad
\begin{array}{r}
28{,}57 \\
1{,}9 \\
\hline
28{,}6 \\
25{,}7 \\
\hline
54\ 5
\end{array}$$

$$1\text{stes } y = -1{,}33333.. = -\frac{4}{3}. \qquad 2\text{tes } y = 3{,}166666.. = \frac{19}{6}$$

$$\begin{array}{lrl}
\text{Sin. } 60^\circ + \varphi & \ldots & 9{,}7607483 \\
 & & 938 \\
-\ t & \ldots & 0{,}5023994.5\text{n} \\
\hline
 & & 0{,}2632415.5\text{n} \\
 & & 335 \\
\hline
 & & 80
\end{array}
\qquad
\begin{array}{r}
29{,}84 \\
31{,}43 \\
\hline
896{,}2 \\
129\ 8 \\
11\ 9 \\
9 \\
\hline
958
\end{array}$$

$$3\text{tes } y = -1{,}83333.. = -\frac{11}{6}$$

Da nun $z = y - \frac{f}{3} = y + \frac{91}{48}$, so sind die drei entsprechenden Werthe für z:

$$1\text{stes } z = -\frac{4}{3} + \frac{91}{48} = -\frac{64 + 91}{48} = \frac{27}{48} = \frac{9}{16} = \alpha$$

$$2\text{tes } z = + \frac{19}{6} + \frac{91}{48} = \frac{152 + 91}{48} = \frac{243}{48} = \frac{81}{16} = \beta$$

$$3\text{tes } z = - \frac{11}{6} + \frac{91}{48} = \frac{-88 + 91}{48} = \frac{3}{48} = \frac{1}{16} = \gamma.$$

Da nun der Coefficient b der Gleichung 27, oder der Gleichung $y^4 - \frac{91}{8} y^2 + \frac{27}{8} y + \frac{5005}{256}$, positiv ist, nämlich $b = \frac{27}{8}$, so sind die Wurzeln der biquadratischen Gleichung:

$$\left.\begin{array}{l} 1\text{stes } y = + \sqrt{\alpha} + \sqrt{\beta} - \sqrt{\gamma} = \frac{3}{4} + \frac{9}{4} - \frac{1}{4} = \frac{11}{4} \\ 2\text{tes } y = + \sqrt{\alpha} - \sqrt{\beta} + \sqrt{\gamma} = \frac{3}{4} - \frac{9}{4} + \frac{1}{4} = - \frac{5}{4} \\ 3\text{tes } y = - \sqrt{\alpha} + \sqrt{\beta} + \sqrt{\gamma} = - \frac{3}{4} + \frac{9}{4} + \frac{1}{4} = \frac{7}{4} \\ 4\text{tes } y = - \sqrt{\alpha} - \sqrt{\beta} - \sqrt{\gamma} = - \frac{3}{4} - \frac{9}{4} - \frac{1}{4} = - \frac{13}{4} \end{array}\right\} \text{Gl. 32.}$$

Die entsprechenden 4 Werthe der ursprünglichen Gleichung $x^4 - x^3 - 11x^2 + 9x + 18 = 0$ sind nun:

1stes $x = \frac{11}{4} + \frac{1}{4} = 3$, 2tes $x = -\frac{5}{4} + \frac{1}{4} = -1$, 3tes $x = \frac{7}{4} + \frac{1}{4} = 2$ und 4tes $x = -\frac{13}{4} + \frac{1}{4} = -3$.

12. B. $y^4 - 14y^2 + 32y - 39 = 0$, also $a = -14$, $b = 32$, $c = -39$ (s. Gl. 27) und folglich $f = 7$, $g = \frac{196}{16} + \frac{39}{4} = \frac{352}{16} = 22$, $h = 16$ (s. Gleichung 30) und die kubische Gl. 31 wird $z^3 - 7z^2 + 22z - 16 = 0$. Die Coefficienten der Gl. 12 sind nun $a = 22 - \frac{49}{3} = \frac{17}{3}$,

$$b = - \frac{2 \cdot 343}{27} + \frac{7 \cdot 22}{3} - 16 = \frac{-686 + 1386 - 432}{27} = \frac{268}{27};$$

folglich $y^3 + \frac{17}{3} y + \frac{268}{27} = 0$ und

$$1\text{stes } y = \sqrt[3]{\left(\frac{-134 + \sqrt{17^3 + 134^2}}{27}\right)} + \sqrt[3]{\left(\frac{134 - \sqrt{17^3 + 134^2}}{27}\right)}$$

$$= \tfrac{1}{3}\left\{\sqrt[3]{-134 + \sqrt{22869}} + \sqrt[3]{-134 - \sqrt{22869}}\right\}$$

$$\begin{array}{rlcl}
\text{Log. } 22869 & \ldots\ 4{,}3592472 & & \\
\text{Log. } \sqrt{22869} & \ldots\ 2{,}1796236 & & \\
 & \quad\ \ 092 & & \\
 & \quad\ \ 144 & & \\
\sqrt{22869} = & 151{,}22500.. & & -151{,}22500.. \\
 & -134 & & -134 \\
 & 17{,}22500.. & & -285{,}22500.. \\
\text{Log. dazu } \ldots & 1{,}2361592 & & \\
 & & & 2{,}4551300n \\
\text{Log. } \sqrt[3]{\ldots} \ldots & 0{,}4120531 & & 76 \\
 & 403 & & 2{,}4551876n \\
 & 128 & & 6{,}8183959^n \\
 & 118 & & 09 \\
 & 100 & & 50 \\
 & & & 46 \\
\sqrt[3]{\ldots} \ldots & 2{,}582576. & & -6{,}582576. \\
 & -6{,}582576. & & \\
 & -4 & &
\end{array}$$

also 1stes $y = -\frac{4}{3}$ und folglich 1stes $z = -\frac{4}{3} + \frac{7}{3} = 1 = \alpha$

und $\dfrac{z^3 - 7z + 22z - 16}{z - 1} = z^2 - 6z + 16 = 0$ und 2tes $z = 3 + \sqrt{-7} = \beta$

und 3tes $z = 3 - \sqrt{-7} = \gamma$.

Da nun b (der Coefficient der biquadratischen Gl.) positiv ist, nämlich $= 32$, so sind die 4 Wurzeln unserer Gl.:

$$\left.\begin{array}{l}
1\text{stes } y = +\sqrt{\alpha} + \sqrt{\beta} - \sqrt{\gamma} = \ \ 1 + \sqrt{3 + \sqrt{-7}} - \sqrt{3 - \sqrt{-7}} \\
2\text{tes } y = +\sqrt{\alpha} - \sqrt{\beta} + \sqrt{\gamma} = \ \ 1 - \sqrt{3 + \sqrt{-7}} + \sqrt{3 - \sqrt{-7}} \\
3\text{tes } y = -\sqrt{\alpha} + \sqrt{\beta} + \sqrt{\gamma} = -1 + \sqrt{3 + \sqrt{-7}} + \sqrt{3 - \sqrt{-7}} \\
4\text{tes } y = -\sqrt{\alpha} - \sqrt{\beta} - \sqrt{\gamma} = -1 - \sqrt{3 + \sqrt{-7}} - \sqrt{3 - \sqrt{-7}}
\end{array}\right\} = 32.$$

oder:

$$\left.\begin{array}{l}
1., y = \sqrt{\alpha} + \sqrt{2p' - 2\sqrt{p'^2 + q^2}} = 1 + \sqrt{6 - 2\sqrt{16}} = 1 + \sqrt{-2} \\
2., y = \sqrt{\alpha} - \sqrt{2p' - 2\sqrt{p'^2 + q^2}} = 1 - \sqrt{6 - 2\sqrt{16}} = 1 - \sqrt{-2} \\
3., y = -\sqrt{\alpha} + \sqrt{2p' + 2\sqrt{p'^2 + q^2}} = -1 + \sqrt{6 + 2\sqrt{16}} = -1 + \sqrt{14} \\
4., y = -\sqrt{\alpha} - \sqrt{2p' + 2\sqrt{p'^2 + q^2}} = -1 - \sqrt{6 + 2\sqrt{16}} = -1 - \sqrt{14}
\end{array}\right\} \text{s. 38.}$$

Diese Werthe für y genügen der gegebenen Gl. in der That: denn 1ſtes $y = 1 + \sqrt{-2}$ giebt $y^2 = -1 + 2\sqrt{-2}$, $y^4 = 1 - 4\sqrt{-2} - 8 = -7 - 4\sqrt{-2}$ und $y^4 - 14y^2 + 32y - 39 = -7 - 4\sqrt{-2} + 14 - 28\sqrt{-2} + 32 + 32\sqrt{-2} - 39 = 0.$

2tes $y = 1 - \sqrt{-2}$ giebt $y^2 = -1 - 2\sqrt{-2}$, $y^4 = 1 + 4\sqrt{-2} - 8 = -7 + 4\sqrt{-2}$ und $y^4 - 14y^2 + 32y - 39 = -7 + 4\sqrt{-2} + 14 + 28\sqrt{-2} + 32 - 32\sqrt{-2} - 39 = 0.$

3tes $y = -1 + \sqrt{14}$ giebt $y^2 = 15 - 2\sqrt{14}$, $y^4 = 225 - 60\sqrt{14} + 56 = 281 - 60\sqrt{14}$ und $y^4 - 14y^2 + 32y - 39 = 281 - 60\sqrt{14} - 210 + 28\sqrt{14} - 32 + 32\sqrt{14} - 39 = 0.$

4tes $y = -1 - \sqrt{14}$ giebt $y^2 = 15 + 2\sqrt{14}$, $y^4 = 225 + 60\sqrt{14} + 56 = 281 + 60\sqrt{14}$ und $y^4 - 14y^2 + 32y - 39 = 281 + 60\sqrt{14} - 210 - 28\sqrt{14} - 32 - 32\sqrt{14} - 39 = 0.$

13. B. $y^4 - 14y^2 - 32y - 39 = 0.$ Da diese Gleichung mit der vorhergehenden bis auf die Qualität des Coefficienten b übereinstimmt, und da die Qualität des b auf die Coefficienten der kubischen Gl. 31, nämlich auf f, g und h, keinen Einfluſs hat, so giebt unsere Gleichung dieselben Werthe für z, nämlich: 1ſtes $z = \alpha = 1$, 2tes $z = \beta = 3 + \sqrt{-7}$ und 3tes $z = \gamma = 3 - \sqrt{-7}$. Aber die vier Wurzeln der biquadratischen Gleichung sind jetzt:

$$\left.\begin{array}{l}
\text{1stes } y = \sqrt{\alpha} + \sqrt{\beta} + \sqrt{\gamma} = 1 + \sqrt{3 + \sqrt{-7}} + \sqrt{3 - \sqrt{-7}} \\
\text{2tes } y = \sqrt{\alpha} - \sqrt{\beta} - \sqrt{\gamma} = 1 - \sqrt{3 + \sqrt{-7}} - \sqrt{3 - \sqrt{-7}} \\
\text{3tes } y = - \sqrt{\alpha} + \sqrt{\beta} - \sqrt{\gamma} = -1 + \sqrt{3 + \sqrt{-7}} - \sqrt{3 - \sqrt{-7}} \\
\text{4tes } y = - \sqrt{\alpha} - \sqrt{\beta} + \sqrt{\gamma} = -1 - \sqrt{3 + \sqrt{-7}} + \sqrt{3 - \sqrt{-7}}
\end{array}\right\} \text{s. 33.}$$

oder:

$$\left.\begin{array}{l}
\text{1stes } y = \sqrt{\alpha} + \sqrt{2p' + 2\sqrt{p'^2 + q^2}} = 1 + \sqrt{6 + 2\sqrt{16}} = 1 + \sqrt{14} \\
\text{2tes } y = \sqrt{\alpha} - \sqrt{2p' + 2\sqrt{p'^2 + q^2}} = 1 - \sqrt{6 + 2\sqrt{16}} = 1 - \sqrt{14} \\
\text{3tes } y = - \sqrt{\alpha} + \sqrt{2p' - 2\sqrt{p'^2 + q^2}} = -1 + \sqrt{6 - 2\sqrt{16}} = -1 + \sqrt{-2} \\
\text{4tes } y = - \sqrt{\alpha} - \sqrt{2p' - 2\sqrt{p'^2 + q^2}} = -1 - \sqrt{6 - 2\sqrt{16}} = -1 - \sqrt{-2}
\end{array}\right\} \text{s. 38.}$$

14. B. $y^4 + 2y^2 + 24y + 37 = 0$. Diese Gl. giebt $f = -1$, $g = \frac{1}{4} - \frac{37}{4} = -9$, $h = 9$ (s. Gl. 30) und folglich $z^3 + z^2 - 9z - 9 = 0$. (s. 31.) Die Coefficienten der Gl. 12 werden nun: $a = -9 - \frac{1}{3} = -\frac{28}{3}$ und $b = \frac{2}{27} + 3 - 9 = \frac{-160}{27}$ und folglich die Gl. 12 $y^3 - \frac{28}{3}y - \frac{160}{27} = 0$.

Es ist hier $t = 2\sqrt{\frac{28}{9}} = \frac{2}{3}\sqrt{28}$ und $\sin 3\varphi = \frac{4b}{t^3} = -\frac{640}{27 \cdot t^3}$ (s. Gl. 24)

Log. 2 ... 0,3010300	
C. Log. 3 ... 9,5228787	
Log. $\sqrt{28}$ ... 0,7235790	
Log. t ... 0,5474877	
Log. t^3 ... 1,6424631.	
Log. — 640 ... 2,8061800n	
C. Log. 27 ... 8,5686362	
C. Log. t^3 ... 8,3575369	
Log. Sin. 3φ ... 9,7323531n	$3\varphi = -32^\circ\ 40'\ 48,''\ 71$
1932	$\varphi = -10^\circ\ 53\ 36,''\ 24$

Nebenrechnung:

32,83	1599,0	48,''71
	1313 2	
	285 8	
	262 6	
	23 2	
	23 0	

$60 - \varphi = 70^\circ\ 53'\ 36,''24$
$60 + \varphi = 49^\circ\ 6'\ 23,''76.$

C. Sin. φ ... 9,2760245n	109,44
3966	36,24
Log. t ... 0,5474877	3285,2
9,8239088n	656 6
44	21 9
	4 4
	3966

1stes $y = -0,666666.. = -\frac{2}{3}$

L. Sin. $(60-\varphi)$... 9,9753646	7,501
265	36,24
Log. t ... 0,5474877	219,0
0,5228788	45 8
	1 8
	265.

2tes $y = 3,33333... = \frac{10}{3}$

Log. Sin. $(60 + \varphi)$ ... 9,8784376
433
Log. $-$ t ... 0,5474877n
0,4259686n
579

3tes $y = -2,66666... = -\frac{8}{3}.$

Die drei entsprechenden Werthe für z sind: 1stes $z = -\frac{2}{3} - \frac{1}{3} = -1 = \alpha$, 2tes $z = \frac{10}{3} - \frac{1}{3} = 3 = \beta$, und 3tes $z = -\frac{8}{3} - \frac{1}{3} = -3 = \gamma$.

Die vier Wurzeln der biquadratischen Gl. sind nun:

$$\left.\begin{array}{l}
\text{1stes } y = \sqrt{\alpha} + \sqrt{\beta} + \sqrt{\gamma} = \sqrt{-1} + \sqrt{3} + \sqrt{-3} \\
\text{2tes } y = \sqrt{\alpha} - \sqrt{\beta} - \sqrt{\gamma} = \sqrt{-1} - \sqrt{3} - \sqrt{-3} \\
\text{3tes } y = -\sqrt{\alpha} + \sqrt{\beta} - \sqrt{\gamma} = -\sqrt{-1} + \sqrt{3} - \sqrt{-3} \\
\text{4tes } y = -\sqrt{\alpha} - \sqrt{\beta} + \sqrt{\gamma} = -\sqrt{-1} - \sqrt{3} + \sqrt{-3}
\end{array}\right\}$$

unmöglich s. Gl. 33 und Anm. ad 3. u. 6.

Diese Werthe genügen der gegebenen Gleichung: denn

1stes $y = \sqrt{-1} + \sqrt{3} + \sqrt{-3}$ giebt $y^2 = -1 + 3 - 3 + 2\sqrt{-3} - 2\sqrt{3} + 6\sqrt{-1}$

$$= -1 + 2\sqrt{-3} + 2\sqrt{3} + 6\sqrt{-1},$$

$$y^4 = 1 - 12 + 12 - 36 - 4\sqrt{-3} + 4\sqrt{3} - 12\sqrt{-1} + 24\sqrt{-1} + 24\sqrt{3}$$
$$+ 24\sqrt{-3} = -35 + 36\sqrt{-1} + 20\sqrt{3} + 28\sqrt{-3}$$

$$\text{und } y^4 + 2y^2 + 24y + 37 = \left\{\begin{array}{l}
-35 + 36\sqrt{-1} + 20\sqrt{3} + 28\sqrt{-3} \\
-\ \ 2 + 12\sqrt{-1} - 4\sqrt{3} + 4\sqrt{-3} \\
+37 + 24\sqrt{-1} + 24\sqrt{3} + 24\sqrt{-3}
\end{array}\right\} = 0.$$

Eben so genügen die übrigen drei Werthe für y.

Beispiele zur Uebung.

1., $x^4 + 10x^3 + 16x^2 - 90x - 225 = 0$.
2., $x^4 - 10x^3 + 16x^2 + 90x - 225 = 0$.
3., $x^4 + 12x^2 - 80x + 96 = 0$.
4., $x^4 + 12x^2 + 80x + 96 = 0$.
5., $x^4 - 2x^3 + 6x^2 - 18x - 27 = 0$.
6., $x^4 + 2x^3 + 6x^2 + 18x - 27 = 0$.

Druckfehler.

S. 5. Z. 1. v. oben, anstatt: da nur l. da nun.

S. 5. Z. 9. v. o. $+\left\{\frac{n(n-1)}{1.2} - z^2 + (n-1)\,Az + B\right\}(x-z)^{n-3}$

l. $+\left\{\frac{n(n-1)}{1.2} \cdot z^2 + (n-1)\,Az + B\right\}(x-z)^{n-3}$

S. 5. Z. 13. $+\left\{\frac{n(n-1)}{1.2}\,\alpha^2 + (n-1)\,A\alpha + B\right\}(x-\alpha)^{n-3}$

l. $\left\{\frac{n(n-1)}{1 \cdot 2} \cdot \alpha^2 + (n-1)\,A\alpha + B\right\}(x-\alpha)^{n-3}$

S. 5. Z. 3. v. u. anstatt: Raisonement l. Raisonnement.

S. 7. Z. 1. v. o. kubishen l. kubischen.

S. 11. Z. 2. v. o. anstatt folglich: $.\,J' =$ l. folglich $J.\,J' = 1$

S. 13. Z. 2. v. u. anstatt: nach einen l. nach einem.

S. 14. Z. 7. v. u. anstatt: zwei unmöglichen l. zwei unmögliche.

S. 15. Z. 3 und 4. v. o. anstatt: $\frac{+\frac{1}{3}(-\frac{2}{2})(-\frac{1}{2})}{1 \quad 2 \quad 3}\, i^2 m$ l. $\frac{\frac{1}{3}(-\frac{2}{3})(-\frac{6}{2})}{1.2.3}\, i^2\, m.$

S. 15. Z. 7. und überall anstatt $\frac{m}{\frac{b^2}{4}}$ l. $\frac{m}{\left(\frac{b^2}{4}\right)}$ oder $\frac{4m}{b^2}$.

S. 16. Z. 4. v. u. anstatt: $1 - \frac{2}{2} \cdot \frac{5}{3} + \text{etc.}$ l. $1 - \frac{2}{2} \cdot \frac{5}{3} \cdot \frac{m}{\left(\frac{b^2}{4}\right)} + \text{etc.}$

S. 16. Z. 1. v. u. anstatt: 3tes $y = -\frac{\alpha}{2} = k$ l. 3tes $y = -\frac{\alpha}{2} - k$.

S. 17. 18. und 19 anstatt: φ l. überall φ.

~~S. 21. Z. 1. v. o. anstatt: $+8\sqrt{h}$. l. $8\sqrt{h} - y$~~

S. 22. Z. 10. v. u. 3tes $y = -\sqrt{\alpha} - \sqrt{\beta} - \sqrt{\gamma}$ l. $-\sqrt{\alpha} - \sqrt{\beta} + \sqrt{\gamma}$.

S. 22. Z. 11. v. u. 2tes $y = -\sqrt{\alpha} + \sqrt{\beta} + \sqrt{\gamma}$ l. $-\sqrt{\alpha} + \sqrt{\beta} - \sqrt{\gamma}$.

S. 23 Mufs die Anmerk. ad 2 so heifsen, wie die ad 4. S. 24.

S. 24. Z. 8. v. u. anstatt: welche ich l. welcher ich.

~~S. 25. Z. 3. v. o. anstatt: $\sqrt{a} \pm \sqrt{p' \dagger pi}$ l. $\sqrt{a} \pm \sqrt{p' \dagger qi}$~~

S. 24. Z. 5. v. o. anstatt: positiv oder negativ l. negativ oder positiv.

S. 27. Z. 7. v. o. anstatt: $\sqrt{\frac{a^2}{27} \dagger \frac{b^2}{4}}$ l. $\sqrt{\left(\frac{a^3}{27} \dagger \frac{b^2}{4}\right)}$

S. 30. Z. 3. v. u. anst.: 1ſtes $y = \sqrt[3]{\frac{-55+\sqrt{7938}}{27}} + \sqrt[5]{\frac{-55-\sqrt{7938}}{27}}$

$$\text{l. } \sqrt[3]{\left\{\frac{-55+\sqrt{7938}}{27}\right\}} + \sqrt[5]{\left\{\frac{-55-\sqrt{7938}}{27}\right\}}$$

S. 37. Z. 10. v. o. anst.: $\sqrt{\frac{a}{5}}$ l. $\sqrt{-\frac{a.}{3}}$

S. 45. Z. 2, 3, 4, 5 und 6 v. u. anstatt: $\sqrt{}$ l. $\sqrt{}$.