Ueber die Principien der höhern Analysis

von Herrn Oberlehrer Dr. Wilde.

Womit

und dem Jahresberichte

des

Königl. und Gröningschen Stadt-Gymnasiums

zu Stargard

zu der öffentlichen Prüfung

welche Mittwoch den 28sten September

Vormittags von $8\frac{1}{2}$ und Nachmittags von 2 Uhr ab

in dem großen Hörsaale des Gymnasiums

veranstaltet werden wird

die hiesigen Behörden Gönner und Freunde

des öffentlichen Unterrichts

gehorsamst und ergebenst einladet

G. S. Falbe,

Königl. Schulrath, Professor und Director des Gymnasiums.

Stargard, 1836.

Gedruckt bei Ferdinand Hendeß.

Es ist unstreitig eine auffallende Erscheinung, daß gerade auf dem Gebiete der Mathematik, also derjenigen Wissenschaft, welche auf die größte Bestimmtheit ihrer Forschungen Ansprüche macht, dennoch eine so große Verschiedenheit der Ansichten über ihre Grundbegriffe Statt findet. Wie abweichend, ja häufig sogar widersprechend sind nicht allein schon, wenn wir bloß bei der Arithmetik stehen bleiben, die verschiedenen Ansichten, die man in den besten Lehrbüchern von der Zahl, dem Verhältnisse, der Potenz, von den entgegengesetzten Größen, Logarithmen und andern hierher gehörigen Gegenständen findet. Bald soll die Zahl eine Größe sein, welche die Menge mehrerer gleichen oder gleichbetrachteten Größen angiebt, bald der Ausdruck des Verhältnisses zweier gleichartigen Größen zu einander, bald soll sie nichts weniger, als eine Größe, sondern nur der Ausdruck für eine bestimmte Regel, bald endlich eine bloße Vorstellung sein. Nicht viel übereinstimmender sind zum Theil die Definitionen der übrigen oben genannten arithmetischen Begriffe und namentlich sind über die Begriffe des Positiven und Negativen, auf denen der größte und wichtigste Theil der Mathematik beruht, noch so viele abweichende Ansichten verbreitet, daß man sich noch nicht einmal darüber hat einigen könuen, ob es überhaupt entgegengesetzte Größen in dem gewöhnlichen Sinne gebe oder nicht. Wenn aber schon auf dem Felde der Elementarmathematik noch so viele schwankende Meinungen über die wesentlichsten Grundbegriffe obwalten, wenn sogar noch nicht einmal der Begriff der Zahl, auf dem das ganze wissenschaftliche Gebäude der reinen Arithmetik beruht, auf eine übereinstimmende und allgemein befriedigende Weise festgestellt ist: so darf man sich in der That nicht darüber wundern, wenn in den höheren Theilen der Mathematik eine nicht minder verschiedene Auffassungsweise der Grundbegriffe angetroffen wird. Dies ist aber namentlich der Fall bei dem Differential, diesem ersten und wesentlichsten Grundbegriffe der höheren Analysis, so daß der Streit über denselben seit der Erfindung des höheren Calcüls bis auf unsere Zeit, also seit anderthalb Jahrhunderten, noch zu keiner sichern Entscheidung geführt hat, obgleich man der Rechnung mit Differentialen schon längst die wichtigsten Aufschlüsse und Bereicherungen im ganzen Gebiete der Mathematik verdankt.

So wenig sich nun auf der einen Seite leugnen läßt, daß diese Verschiedenheit der Ansichten über die mathematischen Grundbegriffe etwas Mangelhaftes sei, dessen Beseitigung höchst wünschenswerth bleibt, so würde man doch auf der anderen Seite zu weit gehen, wenn man daraus die Folgerung ziehen wollte, daß es mit der gepriesenen Gründlichkeit und Evidenz, welche die Mathematiker ihren Forschungen beilegen, überhaupt nicht so ganz seine Richtigkeit haben könne. Denn zunächst ist dabei nicht zu übersehen, daß wohl keine der verschiedenen Bestimmungen eines und desselben Grundbegriffs, die man in guten Lehrbüchern findet, in ihrem ganzen Umfange unrichtig ist, sondern daß vielmehr diese Verschiedenheit nur aus der mehr oder minder vollendeten Deutlichkeit herrührt, mit welcher ein Jeder sich des aus dem Wesen des Vorstellungsvermögens erzeugten Begriffes bewußt geworden ist. Ob dieser letztere anfänglich nur von einer Seite, oder sogleich in seinem weitesten Umfange, ob er abgesondert von allem bloß Zufälligen, was sich demselben unvermerkt beimischt, oder mit Rücksicht auf gewisse Modificationen, denen er bei der Anwendung auf einzelne Fälle unterliegt, aufgefaßt wird: dieses und Ähnliches kann natürlich bei seiner Bestimmung nicht ohne wesentlichen Einfluß bleiben, so daß mehrere, sich sogar widersprechende Ansichten über denselben Grundbegriff aufgestellt werden können, ohne daß sich gerade nachweisen läßt, daß eine von allen vollkommen falsch oder vollkommen richtig sei. Weil also bei jeder Begriffsbestimmung die ursprünglich reine Idee, die dem Begriffe zu Grunde liegt, dem Bewußtsein jederzeit, nur nicht in allen Fällen in gleicher Klarheit vorschwebt und sich bei der Darstellung der daraus abgeleiteten Gesetze unabweisbar geltend macht, so läßt sich leicht einsehen, wie auch bei einer minder scharfen Auffassung der Grundbegriffe die darauf gebauten Untersuchungen zu Resultaten führen können, deren Richtigkeit durch die Übereinstimmung aller denkenden Köpfe verbürgt wird. So unabänderlich fest die Gesetze stehen, nach denen die Wirkungen des Lichts in der Natur erfolgen, obgleich noch Niemand eine alle Zweifel und Einwürfe hebende Erklärung von dem Wesen des Lichts gegeben hat, eben so unabänderlich fest sind auch die sich aus bestimmten dem Menscheu inwohnenden Grundvorstellungen ergebenden Gesetze der reinen Zahlenlenlehre und des höheren Calcüls, selbst wenn es auch Niemanden gelingen sollte, die Begriffe der Zahl und des Differentials ohne alle Beimischung von Ungehörigem in ihrer vollendeten Reinheit aufzufassen und darzustellen. Wenn also eine vollkommen deutliche Erkenntniß der Grundbegriffe zum Aufbau und zur Erweiterung einer Wissenschaft gerade nicht unumgänglich nothwendig ist, so ist doch einleuchtend, daß nicht allein die feste Grundlage, sondern auch die ganze Behandlungsweise derselben mit den an die Spitze gestellten Grundbegriffen und Definitionen in der innigsten Verbindung stehen werden. Die richtige Anordnung des Stoffes, der innere Zusammenhang der neben einander gestellten Sätze, die Leichtigkeit, mit der sich die einzelnen Wahrheiten aus einander entwickeln lassen, und die daraus hervorgehende Verständlichkeit und Übersichtlichkeit des ganzen Systems werden fast allein oder doch größtentheils nur eine Folge der eigenthümlichen Auffassungsweise der zur Basis dienenden Begriffe sein, so daß es bei dem Mangel an Übereinstimmung in den wesentlichsten mathematischen Begriffen leicht erklärlich wird, wie so viele Lehrer der Mathematik, wenn ihnen aufgegeben wird, ein bestimmtes Lehrbuch ihrem Unterrichte zu Grunde zu legen, dieser Forderung mit der dem Unkundigen freilich wunderlich klingenden und doch auf begründeter Überzeugung beruhenden Klage entgegenkommen, daß sie keins der vorhandenen zahlreichen mathematischen Lehrbücher, obgleich alle im Allgemeinen dieselben Wahrheiten beweisen, zu dem vorliegenden Zwecke als unbedingt brauchbar in Vorschlag zu bringen wüßten. Es ist daher in der That höchst wünschenswerth, daß sachkundige Männer, und besonders diejenigen, denen der Unterricht in den Elementen obliegt, den mathematischen Grundbegriffen und Definitionen die größte Aufmerksamkeit zuwenden und die darüber gewonnenen Ansichten der Prüfung anderer anheim geben möchten. Denn nur erst dann, wenn man sich über die wesentlichsten hierher gehörigen Begriffe und die damit zusamhängende Auffassungsweise der einzelnen mathematischen Disciplinen einigermaßen geeinigt haben wird, läßt sich die gegründete Hoffnung fassen, daß endlich ein mathematisches Lehrbuch ins Leben treten werde, welches den gerechten Anforderungen, die man nach dem gegenwärtigen Standpunkt der Wissenschaft in methodischer Beziehung an ein solches machen darf, genügen und sich des Beifalls, wenn auch nicht aller, doch der meisten Kenner zu erfreuen haben werde.

Nach diesen vorläufigen Bemerkungen, zu denen ich mich bei dieser nicht unpassenden Gelegenheit aus mehreren Gründen veranlaßt fand, wende ich mich zu dem von mir gewählten eigentlichen Gegenstande dieser Abhandlung, nämlich zur näheren Betrachtung der Principien der höheren Analysis. Es ist bekannt, daß Leibnitz, der eine der beiden Erfinder der Differentialrechnung, durch geometrische Betrachtungen auf diese überaus wichtige Erfindung geführt und durch diese Vermischung der Geometrie mit der Analysis verhindert wurde, das eigentliche Wesen des Differentials, als eines rein analytischen Begriffes, in reiner Schärfe aufzufassen. Er äußert sich daher auch über dasselbe nur in unbestimmten Ausdrücken, die man indessen so gedeutet hat, daß er die Differentiale für unendlichkleine Quantitäten gehalten habe. Weit entschiedener hat Newton, der den Ruhm der Erfindung der höheren Analysis mit Leibnitz theilt, seine Ansichten über die Grundbegriffe derselben in seiner Fluxionentheorie niedergelegt, sich jedoch dabei eben so wenig wie Leibnitz, auf dem Gebiete der reinen Analysis gehalten, indem er die derselben ganz fremden Begriffe *) der Bewegung und Geschwindigkeit seiner Darstellung zu Grunde legt. Nach diesen beiden berühmten Männern sind nun zahlreiche und zum Theil höchst scharfsinnige Theorien von den größten Analysten zur festeren Begründung der höheren Analysis aufgestellt worden, und der Streit über die wahren Principien derselben wäre gewiß längst geschlichtet, wenn der unklare Begriff des Unendlichkleinen nicht immer wieder seine Anhänger gefunden und jenen aufs neue angeregt hätte. Alle bis jetzt aufgestellten Theorien über die Principien der Differentialrechnung lassen sich nämlich, so verschieden sie auch sein mögen, unter folgende drei Abtheilungen bringen. Man ging entweder unmitt.lbar von dem Begriff des Unendlichkleinen in dem weiterhin angegebenen Sinne aus, oder behielt blos den Ausdruck, jedoch in einer sehr bestimmten, nämlich mit Null völlig gleichen Bedeutung bei, oder suchte die höhere Analysis endlich drittens durch die gewöhnlichen schon in der gemeinen Analysis vorkommenden Rechnungsoperationen zu begründen. Es ist zunächst nöthig, die Versuche der ersten und zweiten Art, die sich, obgleich wesentlich von einander verschieden, doch in gewisser Beziehung nahe stehen, näher zu beleuchten, wenn gleich der mir zu Gebote stehende Raum nur einige Andeutungen und keine ausführliche Erörterung dieses wichtigen Gegenstandes erlauben wird.

Unter den Schulmännern der neusten Zeit hat keiner sich mehr Mühe gegeben, den Begriff des Unendlichkleinen aufzuklären und die unabweisbare Nothwendigkeit desselben zur Begründung der höheren Analysis nachzuweisen, als der vor wenigen Jahren in Berlin verstorbene und um die Verbesserung der mathematischen Methode hochver-

---

*) Daß der Begriff der Bewegung der Analysis fremd sei, wird Niemand bestreiten wollen, aber wohl gehört derselbe, wenn man dabei nicht an Kräfte denkt, in die Geometrie.

diente Professor Ernst Gottfr. Fischer. Es hat nämlich dieser Gelehrte über jenen Gegenstand nicht allein ein eigenes Werk *) geschrieben, sondern er kommt auch in den Anmerkungen seiner später herausgegebenen und weit verbreiteten mathem. Schulbücher so häufig auf denselben zurück, daß ich bei diesem Gegenstande vorzugsweise die Untersuchungen dieses allgemein verehrten Mannes berücksichtigen zu müssen glaube. Nach Fischer und denen, die seine Ansicht über die Principien der Differentialrechnung theilen, ist nun das Unendlichkleine eine Größe, welche kleiner ist, als Alles, was gegeben werden kann. Also doch eine Größe, nicht Null selbst, sondern gleichsam der letzte Schritt, den eine stetig abnehmende Größe thut, ehe sie in Null übergeht **). So wenig sich bei dieser Begriffsbestimmung an etwas Bestimmtes denken läßt und so mißlich es deshalb schon scheint, ein solches zweideutiges Princip der wichtigsten mathematischen Theorie zu Grunde zu legen, so muß sich doch in der That der Verstand jedes denkenden Kopfes dagegen sträuben, wenn man ferner belehrt wird, daß die unendlichkleinen Quantitäten bald als wirkliche Größen, bald im strengsten Sinne als Nullen betrachtet werden könnten und müßten, und weiter, daß sie eine unendliche Reihe verschiedener Ordnungen bildeten, in welcher das Unendlichkleine jeder höheren Ordnung gegen das der vorhergehenden verschwindet. Nun räumen die Vertheidiger des Unendlichkleinen zwar ein, daß dieser Begriff vielen Schwierigkeiten unterworfen sei und durchaus derjenigen Klarheit ermangele, welche man sonst von mathemat. Begriffen gewohnt sei, doch ist Fischer der Überzeugung, daß derselbe sich nicht allein in der höheren Analysis, sondern auch schon in den Elementen so unausweichlich aufdringe, daß nichts weiter übrig bleibe, als durch wiederholtes Nachdenken sich denselben zu einem möglichst klaren Bewußtsein zu bringen. Und wie dieser Mann — seine Schriften bezeugen es — bis an seines Lebens Ende unablässig bemüht gewesen ist, diesen ihm

*) Untersuchung über den eigentlichen Sinn der höhern Analysis. Berlin. 1808.

**) Fischer bleibt sich in seinen Erörterungen über die Entfernung zweier unendlich nahen Punkte nicht gleich. Bald betrachtet er sie als in einander fallend, also sich vollkommen deckend (z. B. Elementar-Mathem. III. Anmerk. S. 127; IV. Anmerk. S. 41.), bald als sich nur berührend (z. B. Elem.-Math. I. Anm. S. 118 — 121; V. Anm. S. 56.); doch ist einleuchtend, daß diese letztere Vorstellungsart allein zulässig ist, wenn das Unendlichkleine nicht im strengsten Sinne nur eine andere Benennung für Null sein soll.

hochwichtigen Begriff, dem es nach seiner Meinung nicht an Deutlichkeit und Schärfe, sondern nur an unmittelbarer Anschaulichkeit fehle, sich selbst klar zu machen: so hoffte er auch durch die Darlegung seiner Ansichten Anderen dazu behülflich gewesen zu sein. Um so mehr bedauert der Verfasser dieser Zeilen, der Fischers Verdienste in anderer Beziehung vollkommen anerkennt, offen gestehen zu müssen, daß ihm durch dessen Untersuchungen weder die Nothwendigkeit des Unendlichkleinen zur Begründung der höheren Analysis einleuchtend, noch überhaupt eine bestimmte (wenn auch nicht anschauliche) Auffassung desselben möglich geworden sei. Was nämlich das Erste betrifft, so stützen sich Fischers Nachweisungen von der Unentbehrlichkeit des Unendlichkleinen nur allein auf die Stetigkeit des Raumes, so wie denn auch die Fälle, wo er die Realität des Unendlichkleinen darlegen zu können glaubt, sämmtlich aus der Raumlehre entnommen sind. Daraus aber, daß man vielleicht auf dem Gebiete der Geometrie zu der Vorstellung des Unendlichkleinen sich gezwungen sieht, folgt noch keineswegs, daß nun auch in der Arithmetik und Analysis dieser Begriff zugelassen werden müsse, da bekanntlich die Vorstellung der Veränderlichkeit, als eines stetigen Wachsens oder Abnehmens bei der Zahl überhaupt nicht in dem Sinne, wie bei räumlichen Größen gestattet ist. Nun ist zwar Fischer der Meinung, daß Analysis und höhere Geometrie sich wechselseitig voraussetzten und daher auch im Vortrage nicht gänzlich von einander geschieden werden könnten. So wahr diese Bemerkung in gewisser Beziehung ist, so läßt sich doch auf der anderen Seite auch nicht leugnen, daß die Rechnung mit Differentialen eine rein arithmetische Operation sei und daß es folglich möglich sein müsse, ja sogar, um die Grenzen zwischen Arithmetik und Geometrie aufrecht zu erhalten, nothwendig werde, das Differential als einen rein analytischen Ausdruck aufzufassen und zu bestimmen. Eben so wenig wie man zugeben wird, daß der Begriff der reinen Zahl mit Rücksicht darauf, daß sie in der Regel mit bestimmten Dingen verbunden, d. h. als benannte Zahl gedacht wird, oder mit Rücksicht darauf, daß eine strenge Trennung der Arithmetik und Geometrie in der Ausführung unmöglich ist, festgestellt werden müsse; eben so wenig darf es gestattet sein, den Begriff des Differentials mit Rücksicht auf jene innige Verbindung der Analysis mit der höheren Geometrie und namentlich mit Rücksicht darauf, daß die Vorstellung eines stetigen Wachsthums erst bei Bewegungen im Raume zu einer vollkommenen Klarheit gelangen kann, festzustellen. Mit Unrecht hält daher Fischer die Versuche des Lagrange und Anderer, das Unendlichkleine in der Analysis entbehrlich zu machen, aus dem Grunde für mißlungen, weil man bei der Anwendung der Differentialrechnung auf Gegenstände der Geometrie und Mechanik doch der Betrachtung unendlichkleiner Größen nicht entgehen könne, obgleich ich auch das Letztere keineswegs zugeben kann, wofern man nicht etwa unendlichklein als identisch mit Null betrachten will. Um nun die Realität des Unendlichkleinen in wirklich vorkommenden Fällen nachzuweisen, beruft sich Fischer zunächst auf den 16ten Satz des 3ten Buchs der Euklidischen Elemente, nach welchem der Winkel eines Kreisbogens mit seiner Tangente kleiner, als jeder spitze Winkel, und doch bis ins Unendliche theilbar, d. h. also unendlichklein sei. Es ist aber einleuchtend und oft genug bereits von Anderen gesagt worden, daß hier ein Irrthum obwalte, indem von einem Winkel eines Kreisbogens mit der Tangente gar nicht die Rede sein kann, wenn man nicht den unklaren Begriff des Unendlichkleinen schon als erwiesen annimmt. Denn man mag sich in einem Bogen zwei Punkte so dicht neben einander vorstellen, als man immer wolle, so darf der dazwischen liegende Theil des Bogens im strengsten Sinne nie als gerade betrachtet werden, wofern nicht ein Widerspruch gegen den Begriff des Krummen entstehen soll, daher denn nichts weiter übrig bleibt, als zwischen zwei neben einander fallenden Punkten gar keine Dimension, d. h. sie als in einander fallend anzunehmen. Hiermit stimmt auch die noch von Niemandem, auch von Fischer *) nicht, in Zweifel gezogene Wahrheit überein, daß durch Nebeneinandersetzen auch noch so vieler Punkte nie eine Linie entstehen kann, was doch der Fall sein müßte, wenn der unmittelbar über dem Berührungspunkte in dem Bogen liegende Punkt von jenem verschieden gedacht, also zwischen beiden eine Linie angenommen würde. Nur unter der Bedingung kann diese Vorstellung Raum finden, wenn man Linien, welche trotz dem, daß sie wirkliche Linien sind, doch in Vergleich mit anderen als Null betrachtet werden müssen, d. h. also den auf solche Widersprüche führenden Begriff des Unendlichkleinen bereits zuläßt.

Dasselbe läßt sich aber auch von allem Anderen, was Fischer sonst noch in seinen Schriften zur näheren Aufklärung des Unendlichkleinen beibringt, zeigen. Die gesteckten Grenzen dieser Abhandlung gestatten mir jedoch nur noch zwei der wesentlichsten Punkte, auf die sich hauptsächlich seine Ansicht von der Natur des Unendlichkleinen stützt, hier kürzlich in Erwägung zu ziehen. Fischer geht in seiner Schrift: „Über den Sinn der höhern Analysis“ von geometrischen Betrachtungen aus, zeigt, daß die Fläche sich

*) S. Element-Math. III. Anmerkung S. 127.

als Differential eines Körpers, die Linie als Differential einer Fläche, der Punkt als Differential einer Linie darstelle und daß es demnach nicht widersprechend sei, eine Reihe von Größen, nämlich Körper, Fläche, Linie, Punkt zu denken, von denen jede folgende gegen die vorhergehende verschwindet oder unendlichklein, und daher umgekehrt jede vorhergehende gegen die folgende unendlich groß ist. Doch abgesehen davon, daß von dem Differential eines Körpers, einer Fläche oder Linie, genau genommen, gar nicht die Rede sein kann, und daß folglich, wie schon oben bemerkt wurde, für das Wesen des Differentials, als eines reinen Zahlenausdrucks, durch jene Schlüsse, auch wenn sie richtig wären, nichts gewonnen wird: so ist es ein Irrthum, wenn Fischer ungleichartige Raumgrößen, z. B. eine Fläche und Linie, neben einander stellt und die letztere als unendlichklein oder Null in Vergleich mit der ersteren betrachtet. Geht eine Fläche durch stetiges Abnehmen in eine Linie über, so ist sie weder eine unendlich schmale Fläche, noch auch Null, sondern eben eine Linie geworden, die sich mit einer Fläche gar nicht vergleichen, also auch nicht als eine Fläche mit einer verschwundenen Dimension betrachten läßt, weil in dieser Ausdrucksweise schon ein Widerspruch liegt. Doch Fischer selbst räumt nachher ein, daß jene geometrische Betrachtungen eigentlich gar nicht das Differential, sondern den Differentialquotienten angehen und daß daher durch sie noch nicht der Widerspruch gehoben sei, welcher entsteht, wenn man die Differentialzeichen dy, dx bald als Nullen, bald als wirkliche Größen behandelt. Um diesen dunklen Punkt befriedigend aufzuklären, nimmt er seine Zuflucht zu dem Begriff intensiver Verhältnisse, durch welche außer Zweifel gesetzt werden soll, daß zweien Größen, die zu gleicher Zeit verschwinden, in gewissen Fällen doch ein ganz bestimmtes Verhältniß beigelegt werden müsse. Um jedoch zu zeigen, daß gebrochene Functionen von der Form $\frac{f(x)(x'-x)}{x'-x}$ für den Fall, daß $x'=x$ gesetzt wird, die scheinbar unbestimmte Form $\frac{0}{0}$ annehmen und dabei doch einen sehr bestimmten Werth haben, bedarf es bekanntlich der Annahme eines intensiven Verhältnisses *) nicht; nur ist nicht einzusehen, wie dadurch

---

*) Zwar hat Fischer die Nothwendigkeit, den Differentialen ein intensives Verhältniß beizulegen, auch aus dem Grundsatze abgeleitet, daß gleiche Functionen auch gleiche Differentiale haben müssen, doch dabei den Fehler begangen, daß er die Endgrenzen zweier Körper geradezu für deren Differentiale nimmt, während jene nach seiner eigenen früheren Erklärung in der Construction nur den Differentialquotienten entsprechen. Um übrigens zu begreifen, wie in seinem gewählten Beispiele das Ver-

Fischers Ansicht von der Bedeutung der Differentiale dy, dx als unendlichkleiner Quantitäten bestätigt werden soll. Denn wenn zugegeben werden muß, daß das Verhältniß $\frac{dy}{dx}$, auch wenn es in $\frac{0}{0}$ übergeht, unter gewissen Bedingungen noch einen ganz bestimmten Werth behält, so folgt daraus doch keineswegs, daß dy und dx nach Belieben als Nullen oder als wirkliche, beständige oder veränderliche, Größen betrachtet werden könnten, indem nie vergessen werden darf, daß der Bruch $\frac{0}{0}$ nur unter der Voraussetzung eine bestimmte Bedeutung hat, daß Zähler und Nenner einen gemeinschaftlichen Factor von der Form $x - a$ enthielten, der für $x = a$ beide zu Null machte. *)

Aus den vorstehenden Bemerkungen scheint mir hervorzugehen, daß auch Fischer, obgleich er den Begriff des Unendlichkleinen mit seiner ganzen Denkweise dermaßen verschmolzen hatte, daß er ihn mit vollkommener Klarheit erfaßt zu haben glaubte, sich vergeblich bemüht hat, denselben von den Widersprüchen zu befreien, auf welche er unfehlbar bei jeder Anwendung führt. Daher ist auch Fischers Definition des Differentials, welche er zur Vermeidung des schwankenden Begriffs einer unendlichkleinen Veränderung giebt, nichts weniger als unzweideutig, obgleich sie Fischer für vollkommen bestimmt und schulgerecht hält. Nach ihm soll nämlich das Differential einer Function die Endgrenze derselben sein, symbolisch vorgestellt als ein verschwindender Endtheil. Nun sind diese letzten Worte entweder ein bedeutungsloser Zusatz, also das Differential geradezu die Endgrenze der Function, oder es muß das Differential immer als ver-

---

hältniß $\frac{dy}{dx}$ für jeden Werth von dx, also auch für $dx = 0$, den Werth b haben könne, ist die Vorstellung eines intensiven Verhältnisses keineswegs so unbedingt nothwendig, als Fischer glaubt, da sich schon aus den Grundregeln der Arithmetik auf's deutlichste nachweisen läßt, daß das Verhältniß $\frac{0}{0}$ völlig bestimmt sei, sobald die Entstehung desselben näher bekannt ist.

*) Es sei z. B. $u = ax^2$; es gehe x in $x + dx$ und dadurch u in u′ über, so hat man $u' = a\,(x + dx)^2$, folglich $u' - u$ oder $du = a\,(x + dx)^2 - ax^2$ und $\frac{du}{dx} = \frac{a(x + dx)^2 - ax^2}{dx}$. Setzt man nun $dx = 0$, so erscheint $\frac{du}{dx}$ unter der unbestimmten Form $\frac{0}{0}$; schafft man aber den gleichen Facor dx, der den Bruch $\frac{a(x+dx)^2 - ax^2}{dx}$ zu $\frac{0}{0}$ macht, aus dem Zähler und Nenner fort, indem man $\frac{a(x+dx)^2 - ax^2}{dx} = \frac{ax^2 + 2ax\,dx + adx^2 - ax^2}{dx} = 2ax + adx$ setzt, so ergiebt sich für $dx = 0$ der bestimmte Werth $2ax$, der also unter der Form $\frac{0}{0}$ verborgen war.

schwindender Endtheil gedacht werden. Im ersten Falle wäre die Definition ganz falsch, weil dann der wesentliche Unterschied zwischen Differential und Differenzialquotient ganz aufhören, also die Differentialzeichen dx, dy ohne alle Bedeutung sein würden, was offenbar zu den größten Irrthümern führen müßte. *) Im anderen Falle ist der Ausdruck „verschwindender Endtheil" eben so schwankend, als der Ausdruck „unendlichkleiner Endtheil", so daß dann die ganze Definition keinen andern Sinn, als die Leibnitzische Ansicht einer unendlichkleinen Veränderung hätte. Aus diesem Grunde ist denn auch die Ableitung der Grundregeln der Differentialrechnung aus dem Begriffe der Endgrenze, als eines verschwindenden Endtheils, nicht befriedigender ausgefallen, als dies bei dem Unendlichkleinen der Fall ist. Warum das Differential oder die Endgrenze einer beständigen Größe jederzeit, die Endgrenze einer veränderlichen Größe dagegen nur in gewissen **) Fällen $=0$ gesetzt werden müsse, warum ferner in dem Verhältnisse $\frac{dy}{dx}$ beim Aufsteigen zu höheren Differentialen die eine Endgrenze dy als veränderlich, die andere dx als beständig betrachtet werden müsse, und nicht bloß, wie Fischer nachweist, betrachtet werden dürfe; über diese und ähnliche Fragen giebt jene Theorie der Endgrenzen eben so wenig genügenden Aufschluß, als die Theorie des Unendlichkleinen.

Wenn also die bisherigen Versuche, die höhere Analysis durch das Unendlichkleine auf eine befriedigende Weise zu begründen, mißlungen sind, so fragt sich, ob denn eine der anderen aufgestellten Theorien die Schwierigkeiten zu beseitigen im Stande gewesen sei, denen der Begriff des Unendlichkleinen unterliegt. Unter den Mathematikern des vorigen Jahrhunderts, welche diesen paradoxen Begriff verwarfen, verdient vor allen einer der größten Analysten, die gelebt haben, der unsterbliche Euler ***), genannt

---

*) Auch Fischer hat, wie schon oben bemerkt wurde, das Differential gewöhnlich geradezu für die Endgrenze genommen und ist dadurch zu mehreren Fehlschlüssen verleitet worden.

**) So wird z. B. in der Verbindung $(x+dx)\,dx$ der Summand dx im strengsten Sinne $=0$, aber der Factor dx nicht $=0$ gesetzt, ohne daß sich irgend ein haltbarer Grund für diese Willkürlichkeit angeben läßt.

***) Wohl nur aus Versehen zählt Fischer (Sinn der höheren Anal. S. 130.) auch Euler zu denen, welche das Unendlichkleine der Analysis unverhüllt zu Grunde gelegt hätten, da Euler schon zu werden, der die Differentialrechnung in ihrem rein analytischen Gewande auffaßte und schon aus diesem Grunde das Unendlichkleine, das nur in der Geometrie eine scheinbare Stütze findet, nicht beibehalten konnte. Euler erklärt die Differentiale geradezu für Nullen und begegnet dem Einwurfe, warum man sie denn nicht beständig mit dem Zeichen 0 bezeichne, sondern dazu die besonderen Zeichen dx, dy gebrauche, mit der Erklärung, daß die höhere Analysis sich nicht sowohl mit diesen Nullen selbst, als vielmehr mit der Erforschung des Verhältnisses, welches sie zu einander haben, beschäftige. Das Bild $\frac{0}{0}$ sei das Bild des völlig Unbestimmten und könne jeden möglichen Werth haben; die Differentialrechnung habe es damit zu thun, den bestimmten Werth, den der Bruch $\frac{0}{0}$ unter bestimmten Voraussetzungen annehme, zu finden und deshalb seien, um nicht in Verwirrung zu gerathen, für diese Nullen auch verschiedene Zeichen nothwendig, da ihr Verhältniß bei verschiedenen Aufgaben auch verschiedene Werthe habe. Man hat dieser Theorie nicht selten den Vorwurf gemacht, daß sie auf eine bloße Rechnung mit Nullen, also auf eine Art von Spielerei hinauslaufe, wodurch die höhere Analysis dem Gespötte Preis gegeben würde, da sich nicht gut begreifen lasse, wie durch eine Rechnung mit Nullen irgend welche, geschweige denn so erstaunenswerthe Resultate gewonnen werden könnten, als sie die Analysis darbietet. Der Verf. dieser Zeilen gesteht offen, daß er es sich doch viel lieber gefallen lassen wolle, wenn man die Differentialrechnung für eine Nullenrechnung erklärt, als wenn man sie in das mystische Dunkel des Unendlichkleinen verhüllt, indem sich dort doch etwas ganz Bestimmtes, hier aber gar nichts Bestimmtes denken läßt. Nach jener Vorstellungsart, welche Johann Schulz *) am consequentesten durchgeführt hat, sind nämlich die Differentiale absolute Nullen, die Differentialzeichen folglich an sich bedeutungslose Formen, mit denen man aber nach gewissen sinnreich erdachten Gesetzen eine richtige Rechnung führen kann, und ich wüßte nicht, was sich anderes dieser von allen Dunkelheiten freien und jedem leicht begreiflichen Ansicht entgegensetzen ließe, als daß

---

sogar in der Vorrede seines Werkes (Leonh. Eulers vollständige Anleitung zur Differentialrechnung, übers. von Michelsen, Berl. 1790) und dann weiter im dritten und vierten Kapitel sich aufs bestimmteste dahin erklärt, daß zwischen dem Unendlichkleinen und der absoluten Null durchaus kein Unterschied Statt finden könne.

*) Entwickelung einiger mathem. Theorien. Königsberg 1803.

durch sie die höhere Analysis in eine bloße Künstelei (heuristische Fiction, wie Schulz sich ausdrückt) verwandelt wird, zu welcher Ansicht sich allerdings Niemand entschließen wird, so lange es noch andere Auffassungsweisen giebt, durch welche sie als eine wirkliche Rechnung gerechtfertigt werden kann. Mit Unrecht hat man aber den großen Euler beschuldigt, daß auch er die Differentialrechnung zu einer Nullenrechnung gemacht habe, da er, wie bereits oben angeführt wurde, ausdrücklich erklärt, daß die Regeln der Differentialrechnung zwar gewöhnlich so vorgetragen würden, als ob man dabei die Bestimmung der zu Null gewordenen Differentiale zur Absicht habe, daß aber aus ihnen an sich genommen nie, sondern allemal nur aus ihren Verhältnissen zu einander geschlossen werde. Es ist aber etwas ganz Anderes, mit Nullen rechnen und den wahren Werth des unbestimmt scheinenden Ausdrucks $\frac{0}{0}$ bestimmen. Es wäre in der That eine ganz unnütze Mühe, wenn ich hier näher darthun wollte, wie sich aus den ersten Grundsätzen der Arithmetik mit der größten Evidenz nachweisen lasse, daß gebrochene Ausdrücke, welche im Zähler und Nenner einen gemeinschaftlichen Factor haben, für den Fall, daß dieser letztere $= 0$ gesetzt wird, zwar die unbestimmte Form $\frac{0}{0}$ annehmen, dessen ungeachtet aber unter der angenommenen Voraussetzung einen völlig bestimmten Werth haben. Denn es ist dieser Gegenstand nicht allein aus den Lehrbüchern der Analysis bekannt genug, sondern es hat auch vor vielen Jahren bereits Langsdorf in einer besonderen Schrift *) sehr befriedigend gezeigt, wie diese Theorie der unbestimmt scheinenden Brüche mit der Differentialrechnung auf eine Weise in Verbindung gebracht werden könne, daß auch der geringste Zweifel gegen die Richtigkeit der daraus abgeleiteten Principien der Analysis verschwinden muß. Wenn also Euler den Zweck der Differentialrechnung ebenfalls in die Bestimmung des wahren Werthes der unter gewissen Voraussetzungen in die Form $\frac{0}{0}$ übergehenden Ausdrücke setzt, so hat er meines Erachtens ein keinem Angriffe unterliegendes Princip aufgestellt, uud nur darin gefehlt, daß er theils nicht genügend nachweist, wie das Verhältniß $\frac{0}{0}$ durch die Fortschaffung des im Zähler und Nenner gemeinschaftlichen und $= 0$ gesetzten Factors eben erst zu einem bestimmten werde, theils den Begriff des Differentials beibehält, während er in seinem ganzen Werke nur von Differentialverhältnissen oder was dasselbe sagt, von Differential-

---

*) Neue und gründlichere Darstellung der Principien der Differentialrechnung von K. Chr. Langsdorf. Heidelb. 1807.

quotienten hätte reden sollen. Denn wenn das Wesen der höheren Analysis allein in der Bestimmung des Differentialquotienten $\frac{dy}{dx}$ für den Fall besteht, daß er in $\frac{0}{0}$ übergeht, so erscheint es nicht nur unnöthig, sondern muß auch zu mannigfachen Mißverständnissen und Dunkelheiten verleiten, wenn man die in Null übergegangenen Differenzen aus der Verbindung $\frac{dy}{dx}$, in der sie allein Bedeutung haben und Gegenstand einer mathematischen Untersuchung sein können, herausreißt und abgesondert in die gewöhnlichen Rechnungen einführt, als wenn sie wirkliche Zahlausdrücke wären.

Aus dem Vorstehenden wird der Leser entnommen haben, daß die Theorie der unbestimmt scheinenden Brüche nach meinem Dafürhalten allerdings vollkommen geeignet sei, bei consequenter Durchführung die höhere Analysis mit aller mathematischen Strenge zu begründen. Es hat aber diese Vorstellungsart nicht allein, wie oben gezeigt wurde, zum Theil schon Euler, und deutlicher Langsdorf seinen Ansichten zu Grunde gelegt, sondern es beruht im Wesentlichen darauf auch die sogenannte Methode der Grenzverhältnisse, deren sich schon Newton bediente und die besonders in der neuesten Zeit so viele Anhänger gefunden hat. Die gemeinschaftlichen Schlüsse, welche allen diesen Ansichten zu Grunde liegen, sind folgende. Es sei $u = f(x)$, $u' = f(x + \Delta x)$, worin Δx ein unbestimmter Zuwachs von x ist, so wird $u' - u$ oder
$\Delta u = f(x + \Delta x) - f(x)$, folglich $\frac{\Delta u}{\Delta x} = \frac{f(x + \Delta x) - f(x)}{\Delta x}$. Setzt man nun $\Delta x = 0$, so geht das Verhältniß $\frac{\Delta u}{\Delta x}$, welches man für diesen Fall durch $\frac{du}{dx}$ bezeichnet, in $\frac{0}{0}$ über. Der bestimmte Werth nun, den der Ausdruck $\frac{0}{0}$ für jene Annahme hat und der sich durch die Theorie der Reihen jederzeit finden läßt, wird Differentialquotient der Function u und die Rechnung mit solchen Differentialquotienten die Differentialrechnung genannt. Da gegen die Evidenz dieses Verfahrens meines Wissens noch Niemand etwas Gegründetes hat einwenden können, *) sich überdies aus der Grenzenmethode die Operationen der höheren Analysis auf eine sehr einfache Art ableiten lassen, so scheint es

*) Fischer hat (Sinn der höhern Analysis S. 133.) gegen die Theorie der Grenzverhältnisse folgende vier Einwürfe aufgestellt. 1) Es bleibt dunkel, wie zwei strenge Nullen ein bestimmtes Verhältniß haben können. — Wird widerlegt durch die Theorie der unbestimmt scheinenden Brüche, aber auch schon von Fischer selbst durch seine später entwickelte Ansicht von der Intensität des Verhältnisses $\frac{0}{0}$. 2) Die Grenzenmethode giebt keinen Aufschluß darüber, wie man berechtigt sei, beim Aufsteigen zu

auffallend, daß dieselbe dessenungeachtet noch nicht eine allgemeine Billigung gefunden hat, sondern die Stimmen über die wahren Principien der Differentialrechnung noch immer vielfach getheilt sind. Der Grund hiervon ist aber darin zu suchen, daß die Theorie der Grenzverhältnisse, obgleich an sich keinen Bedenklichkeiten unterworfen, doch als Basis des höheren Calcüls gewählt, in einigen Punkten nicht vollkommene Befriedigung gewährt, die nach meiner Ansicht folgende sind:

1. Die Theorie der Grenzverhältnisse setzt den Zweck der Differentialrechnung in die Auffindung des bestimmten Werthes, den der Ausdruck $\frac{0}{0}$ unter bestimmten Voraussetzungen hat. Nun läßt sich zwar auch schon dem mit der gemeinen Analysis vertrauten Anfänger die Möglichkeit sehr leicht nachweisen, wie der Quotient $\frac{0}{0}$ nach Verschiedenheit seiner Entstehungsart auch verschiedene Werthe haben könne; doch ist nicht in Abrede zu stellen, daß es demjenigen, der noch nicht das ganze Feld des höheren Calcüls überschaut, immer Anstoß erregen muß, wenn er hört, daß jene dem Anschein nach ziemlich unwichtige Bemerkung die Basis der erfolgreichsten mathematischen Forschungen sei.

---

höheren Differentialquotienten das eine Differentialzeichen dy als veränderlich, das andere dx als beständig zu betrachten. — Der Einwurf fällt weg, wenn die Grenzenmethode consequent durchgeführt wird, weil dann die höheren Differentialquotienten eben so, wie der erste, bloße Zeichen für die verschiedenen unter dem Ausdrucke $\frac{0}{0}$ verborgenen Verhältnißwerthe sind. 3) Jene Theorie setzt voraus, daß jede Function in eine Reihe verwandelt werden könne, deren Glieder nach Potenzen irgend einer in der Function enthaltenen Größe fortschreiten; zur Ueberzeugung von der allgemeinen Richtigkeit dieses Satzes kann man erst durch die höhere Analysis gelangen. — Hierauf läßt sich erwiedern, daß theils schon die Theorie der unbestimmten Coefficienten die zur Bestimmung der Differentialquotienten erforderlichen Reihenentwickelungen möglich macht, theils aber nach des Verf. eigener Aeußerung (s. S. 184. Anmerk. unter dem Texte) es nicht nöthig ist, jenen Satz gleich Anfangs in seiner ganzen Allgemeinheit vorauszusetzen. Hierzu kommt, daß man bei der Bestimmung der Differentialquotienten in vielen Fällen, namentlich bei den transcendenten Functionen, jene Reihenentwickelung ganz umgehen kann, da es nur darauf ankommt, den Werth des Ausdrucks $\frac{0}{0}$ für einen vorliegenden Fall zu bestimmen, folglich auch der Weg ganz gleichgiltig ist, auf welchem man zu diesem Werthe gelangt. 4) Die Grenzenmethode zwingt, wie jede andere, bei ihrer Anwendung auf Gegenstände der Geometrie und Mechanik zur Annahme des Unendlichkleinen. — Der Einwurf fällt fort, sobald man zwischen dem Unendlichkleinen und Null keinen Unterschied macht.

2. Hierzu kommt, daß man den Nutzen, den die Erforschung der Differentialquotienten gewährt, im Anfange gar nicht einleuchtend machen, sondern sich in dieser Beziehung nur auf die Resultate beziehen kann, die weiterhin aus denselben entwickelt werden. Dieser Umstand läßt aber unwillkührlich den Gedanken aufkommen, daß der Zusammenhang der Grenzverhältnisse mit der höheren Analysis nicht im Wesen der letzteren selbst begründet sein könne, wodurch der Wunsch erzeugt wird, ein anderes Fundament zu besitzen, von dem aus wenigstens im Allgemeinen sich sogleich die ganze Wichtigkeit der darauf gebauten Theorie übersehen läßt.

3. Es ist schon oben bei Erwähnung der Eulerschen Ansicht von mir bemerkt worden, daß man bei Anwendung der Grenzverhältnisse den Begriff des Differentials ganz aufgeben muß, wenn man sich nicht dem Vorwurfe aussetzen will, die wichtigsten Untersuchungen durch eine Rechnung mit bloßen Nullen anstellen zu wollen. Weil aber mit Zuziehung dieses Begriffes die meisten Gegenstände, welche in der höheren Analysis abgehandelt werden, nicht bloß kürzer dargestellt, sondern auch mehrere Schwierigkeiten leichter beseitigt werden können, so ist meines Wissens noch kein Werk über höhere Analysis vorhanden, in welchem die Grenzenmethode ganz consequent angewandt worden wäre. Hierdurch muß aber ebenfalls der Verdacht entstehen, daß jene Methode wohl nicht als die wahre und völlig zureichende Grundlage der Differentialrechnung betrachtet werden dürfte.

Aus dieser Unzugänglichkeit der Grenzverhältnisse als alleiniger Basis der höheren Analysis erklärt es sich, warum bis auf die gegenwärtige Zeit noch immer neue Versuche zur Auffindung der wahren Principien derselben ins Leben getreten sind. Die scharfsinnigste und am consequentesten durchgeführte Theorie in dieser Beziehung verdankt die Wissenschaft bekanntlich dem berühmten Lagrange *), welcher zeigt, daß die Differentiale bestimmte Functionen seien, die von der ursprünglich gegebenen Function nach einem und demselben Gesetze durch gewöhnliche analytische Entwickelungen abgeleitet werden können. Der Vortheil, den die Rechnung mit diesen abgeleiteten

*) Théorie des fonctions analytiques. Par. 1797. — Aus dem Französischen übersetzt von Grüson. Berl. 1798.

Functionen in Stelle der gegebenen gewährt, wird sogleich bei der Darstellung des Gesetzes, nach welchem sie aus einander abgeleitet werden, einleuchtend, indem dadurch das Taylorsche Theorem gewonnen wird, vom dem sich sogleich die fruchtbarsten Anwendungen machen lassen. So befriedigt Lagrange's Theorie der analytischen Functionen alle Anforderungen, die man hinsichtlich der Principien der höheren Analysis machen kann, und wenn dessenungeachtet auch sie nicht allen neueren Werken zu Grunde gelegt, sondern bald die Methode der Grenzverhältnisse, bald eine andere Vorstellungsart gewählt worden ist, so läßt sich dies nur daraus erklären, daß jene Theorie allerdings weitläuftige Reihenentwickelungen erfordert, die den darin nicht geübten Anfänger nur langsam fortschreiten lassen und ihm anfänglich die Einsicht in das ganze System erschweren. Aus diesem Grunde eignet sich die Lagrangesche Darstellung nicht für den ersten Unterricht, weshalb der Verf. dieser Abhandlung, der vor mehreren Jahren häufig Gelegenheit hatte, in den Anfangsgründen der höheren Analysis zu unterrichten und die Lagrangesche Begründungsart derselben als die allein befriedigende erkannte, den Versuch machte, mit Festhaltung der Grundansichten jenes berühmten Analysten sich einen neuen Weg zu bahnen, auf dem er seinen Schülern das Verständniß einer der großartigsten Erfindungen des menschlichen Geistes zugänglicher machen und sie in die bewundernswürdigen Tiefen der mathematischen Speculation einführen könnte, ohne einen zu großen Zeitaufwand, noch andere Vorkenntnisse bei ihnen in Anspruch nehmen zu dürfen, als eine allgemeine Kenntniß derjenigen Reihenentwickelungen, welche sich schon durch gewöhnliche Division bewerkstelligen lassen. So entstand ein vollständiges Heft über die Anfangsgründe der höheren Analysis und ihrer Anwendung auf die Geometrie, aus welchem ein Abschnitt, nämlich die Entwickelung der höheren Differentiale, welche in der Regel viele Schwierigkeiten macht, als Probe der ganzen Darstellungsweise hier eine Stelle finden möge. Es ist, wie man sehen wird, derselben die Lehre von den Differenzen zu Grunde gelegt, die der Anfänger zum Theil schon aus der Elementarmathematik kennt und aus der sich, wie ich dargethan zu haben glaube, sämmtliche Grundregeln der Differentialrechnung nicht bloß mit Leichtigkeit, sondern auch mit vollkommener Strenge ableiten lassen. Des Zusammenhanges wegen will ich zuerst die wenigen Sätze, welche zur Definition des Differentials erforderlich sind, vorausschicken und dann die Entwickelung der höheren Differentiale mit so ausführlichen Beweisen, als ich sie für den Anfänger für nothwendig erachtete, folgen lassen.

1. **Erklärung.** Stellt man sich vor, daß eine veränderliche Größe während des Wachsens von einem bestimmten Punkte ab um ein beliebig großes Stück (Increment) zunimmt, so wird dadurch auch die von jener veränderlichen Größe abhängige Function in einen anderen Zustand übergehen, sei es, daß sie ebenfalls zu- oder abnimmt. Der Unterschied zwischen diesem neuen und dem ursprünglichen Zustande der Function wird die **Differenz** derselben genannt.

Ist also $u = f(x)$ d. h. irgend eine Function von x, und bezeichnet man die Zunahme von x durch Dx *), den dadurch bewirkten neuen Zustand von u durch u', so ist $u' = f(x + Dx)$, also wenn man die Differenz der Function mit Du bezeichnet, $u' - u$ oder $Du = f(x + Dx) - f(x)$.

Zusatz. Wenn man daher x selbst als eine Function betrachtet, so ist Dx die Differenz derselben, denn wenn $u = x$ ist, so wird $u' = x + Dx$, also $u' - u$ oder $Du = Dx$.

2. **Lehrsatz.** Wenn die Differenz einer Function in eine Reihe entwickelt ist, die nach ganzen positiven Potenzen von Dx fortschreitet, so muß die Form dieser Reihe, sie sei endlich oder unendlich, folgende sein:

$$Du = P\,Dx + Q\,Dx^2 + R\,Dx^3 + \ldots.$$

wobei die Coefficienten P, Q, R 2c. im Allgemeinen Functionen von x sind, in besonderen Fällen aber einige von ihnen auch beständige Größen oder Null sein können.

Beweis. Es sei $u = f(x)$, also $u' = f(x + Dx)$. Entwickelt man nun u' oder $f(x + Dx)$ in eine Reihe, die nach ganzen positiven Potenzen von Dx fortschreitet, so können in dieser Reihe nur Glieder vorkommen, die entweder gar nicht in Dx oder in die 1te, 2te, überhaupt in ganze positive Potenzen von Dx multiplicirt sind. Es sei also $u' = M + P\,Dx + Q\,Dx^2 + R\,Dx^3 + \ldots$, so muß diese Gleichung, da Dx eine ganz beliebige Zunahme von x bezeichnet, richtig bleiben für jeden Werth von Dx, also auch, wenn man $Dx = 0$ setzt. Für diesen Fall bleibt aber von der ganzen Reihe nur das erste Glied M, während u' in den ursprünglichen Zustand u zurückgeht, woraus sich $u = M$ ergiebt. Da also M stets $= u$ sein muß, so hat man $u' = u + P\,Dx + Q\,Dx^2 + \ldots$, folglich $u' - u$ oder $Du = P\,Dx + Q\,Dx^2 + \ldots$, was zu beweisen war. Was aber die Coefficienten P, Q, R 2c. betrifft, so werden sie, da Du offenbar außer von Dx auch von x abhängt, im Allgemeinen Functionen von x sein, einige derselben können aber auch Null oder constant werden, da in der ursprünglichen Function außer x auch noch constante Größen vorkommen, folglich einige der Coefficienten P, Q 2c. bloß von diesen abhängen können. —

Zusatz. Wenn also u irgend eine Function von x, u' aber den Werth derselben bezeichnet,

*) Statt der sonst gebräuchlichen Zeichen Δu und Δx sind von jetzt ab durchgehends die Zeichen Du und Dx gebraucht worden.

den man erhält, wenn man $x+Dx$ statt x setzt, so muß jederzeit $u' = u + P\,Dx + Q\,Dx^2 + \ldots$ werden, wofern u' in eine Reihe nach Potenzen von Dx aufgelöst wird.

Der Zusatz ergiebt sich aus dem Beweis des vorigen Lehrsatzes.

3. Anmerkung. Im vorstehenden Lehrsatze ist zwar die Form der Reihe bestimmt, unter welcher die nach Potenzen von Dx entwickelte Differenz jeder Function erscheinen muß, keinesweges aber dargethan, wie diese Reihenentwickelung in jedem einzelnen Falle bewerkstelligt werden könne. Da indessen der Werth des Du offenbar nur von x und Dx abhängen kann, so leuchtet die Möglichkeit einer solchen Reihenentwickelung im Allgemeinen ein; die Bestimmung der Coefficienten P, Q, R rc. in jedem besonderen Falle aber ist eben eine Aufgabe der Differentialrechnung und wird daher im Folgenden weiter erörtert werden.

4. Erklärungen. Der nur in die erste Potenz von Dx multiplicirte Theil der Differenz, d. h. also das erste Glied *) der nach steigenden Potenzen von Dx geordneten Differenz, wird das Differential der Function genannt.

Bezeichnet man die gegebene Function mit u, so wird das Differential derselben mit du und dann der Gleichförmigkeit wegen auch die Zunahme von x, nicht wie bei der Differenz mit Dx, sondern mit dx bezeichnet, so daß die Zeichen Dx und dx nicht in ihrer Bedeutung, sondern nur in der Art ihres Gebrauches verschieden sind, indem jenes bei der Differenz, dieses bei dem Differential gesetzt wird.

Hiernach ist, da nach Nr. 2. die entwickelte Differenz $Du = P\,Dx + Q\,Dx^2 + R\,Dx^3 + \ldots$, das Differential $du = P\,dx$, wo nun P eine bestimmte Function von x, in besonderen Fällen auch constant oder Null, überhaupt jede beliebige Größe sein kann.

Eine Größe differentiiren heißt ihr Differential suchen.

Alles ist leicht an Beispielen zu erläutern.

5. Zusatz. Aus den vorstehenden Sätzen ergiebt sich im Allgemeinen das Verfahren, wie das Differential jeder Function mit einer veränderlichen Größe x gefunden wird. Man setzt nämlich $x+Dx$ statt x, entwickelt den dadurch erhaltenen Ausdruck in eine Reihe nach Potenzen von Dx, läßt das erste Glied dieser Reihe, welches nach Nr. 2 stets der ursprünglich gegebenen Function gleich ist, fort, so ist von den noch übrigen Gliedern das erste in Dx multiplicirte Glied das Differential der Function, in welchem man nun noch statt D das Differentialzeichen d setzen muß.

---

*) Warum gerade das erste Glied der entwickelten Differenz den Namen Differential erhält, bedarf keiner Rechtfertigung, da es ganz willkürlich ist, wie man irgend ein Glied einer Reihe nennen will; doch wird weiter unten in Nr. 13. gezeigt werden, welche Vortheile die Erforschungen des 1sten Gliedes der Differenz der Analysis gewähre.

6. Zusatz. Bei jeder Function, deren nach Potenzen von Dx entwickelte Differenz nur aus einem einzelnen Gliede besteht, ist das Differential der Differenz gleich, außer daß die Zunahme von x bei dieser durch Dx, bei jenem durch dx bezeichnet wird. Fragt man daher nach dem Differential von x, so ist dieses dx, da die Differenz von x gleich Dx ist. (vergl. Nr. 1. Zus.)

7. Zusatz. Das Differential jeder constanten Größe ist gleich Null, weil diese weder wachsen, noch abnehmen, folglich auch keine Differenz, ebenso wenig also ein Differential haben kann.

8. Zusatz. Zwei gleiche Functionen haben auch gleiche Differenzen und gleiche Differentiale, aber nicht umgekehrt.

Da die Differenz und das Differential jeder Function stets nach einer und derselben feststehenden Regel gefunden werden, gleiche Größen aber, wenn man mit ihnen dieselben Rechnungen vornimmt, auch gleiche Resultate geben müssen, so werden gleiche Functionen nothwendig auch gleiche Differenzen und Differentiale haben. Keineswegs aber ist der aufgestellte Satz umgekehrt allgemein richtig, wie man sich überzeugen kann, wenn man z. B. die Differentiale von ax und $ax+b$ sucht, wo man in beiden Fällen adx findet, daher man aus der Gleichheit zweier Differentiale nicht auf die Gleichheit der zugehörigen Functionen schließen darf.

Aus den vorstehenden Sätzen lassen sich nun sämmtliche Regeln ableiten, nach denen das Differential jeder algebraischen Function, d. h. einer solchen, in welcher die einzelnen Größen nur durch die sechs algebraischen Rechnungsarten mit einander verbunbunden sein dürfen, gefunden werden kann. Da das dabei einzuschlagende Verfahren sich aus der aufgestellten Definition des Differentials hinlänglich übersehen läßt, so wende ich mich nun sogleich zu den höheren Differentialen.

9. Erklärungen. Nimmt man an, daß eine veränderliche Größe x von einem gewissen Punkte ab nach und nach um ein beliebiges, aber stets gleich großes Stück Dx zunimmt, d. h. also nach und nach in
$x+Dx$, $x+2Dx$, $x+3Dx$ ꝛc. übergeht, so wird dadurch auch die von x abhängige Function u nach und nach in neue Zustände übergehen, welche mit u', u'', u''' ꝛc. bezeichnet werden mögen. Die Differenzen $u'-u$, $u''-u'$, $u'''-u''$ ꝛc. jeder zweier solcher auf einander folgender Zustände der Function werden bezüglich die 1sten Differenzen von u, u', u'' ꝛc. oder Differenzen der 1sten Ordnung, alle zusammen auch wohl die 1ste Differenzenreihe genannt und mit Du, Du', Du'' ꝛc. bezeichnet.

Im Falle die ersten Differenzen ungleich sind, lassen sich dadurch, daß man jede derselben von der nächst folgenden abzieht, neue Differenzen bilden, die in Bezug auf die verschiedenen Werthe u, u', u'' ꝛc. der gegebenen Function die 2ten Differenzen (Differenzen der 2ten Ordnung) genannt und bezüglich mit DDu, DDu', DDu'' ꝛc. bezeichnet werden, wofür man auch D^2u, D^2u', D^2u'' ꝛc. setzt.

Auf gleiche Weise lassen sich, wenn die 2ten Differenzen ungleich sind, noch 3te Differenzen (Differenzen der 3ten Ordnung), die man bezüglich mit D^3u, D^3u' ꝛc. bezeichnet, überhaupt so lange höhere Differenzen bilden bis man auf eine beständige Differenzreihe kommt, deren Differenzen alle einander gleich sind.

Alle diese Begriffe sind bereits aus der Lehre von den Reihen bekannt, lassen sich aber auch leicht an einem Beispiele erläutern. Es sei z. B. $u = x^3$, so ist:

$$\begin{aligned}
u &= x^3 \\
u' &= (x + Dx)^3 = x^3 + 3x^2Dx + 3xDx^2 + Dx^3 \\
u'' &= (x + 2Dx)^3 = x^3 + 6x^2Dx + 12xDx^2 + 8Dx^3 \\
u''' &= (x + 3Dx)^3 = x^3 + 9x^2Dx + 27xDx^2 + 27Dx^3 \\
u'''' &= (x + 4Dx)^3 = x^3 + 12x^2Dx + 48xDx^2 + 64Dx^3
\end{aligned}$$

1ste Differenzen.	2te Differenzen.	3te Differenzen.
$Du = 3x^2Dx + 3xDx^2 + Dx^3$	$D^2u = 6xDx^2 + 6Dx^3$	$D^3u = 6Dx^3$
$Du' = 3x^2Dx + 9xDx^2 + 7Dx^3$	$D^2u' = 6xDx^2 + 12Dx^3$	$D^3u' = 6Dx^3$
$Du'' = 3x^2Dx + 15xDx^2 + 19Dx^3$	$D^2u'' = 6xDx^2 + 18Dx^2$	
$Du''' = 3x^2Dx + 21xDx^2 + 37Dx^3$		

u. s. w.

Hier sind die dritten Differenzen einander gleich, alle höheren folglich Null. Es hängt aber, wie man leicht einsieht, jederzeit von der Natur der gegebenen Function ab, wie viel Differenzreihen sich bilden lassen, auch leuchtet ein, daß es Functionen geben könne, bei denen man nie auf eine beständige Differenzreihe kommt, also ohne Ende immer höhere Differenzen suchen kann.

10. Zusatz. Wenn man sämmtliche höheren Differenzen Du, D^2u, D^3u ꝛc. einer gegebenen Function u kennt, so kann man alle Differenzreihen und die Reihe der Werthe der Function selbst so weit berechnen, als man will.

Ist leicht zu erläutern an dem Beispiel zu Nr. 9.

11. Zusatz. Da jeder folgende Werth der Function u aus dem nächst vorhergehenden entsteht, wenn man für x den Werth $x + Dx$ setzt, so werden auch die Differenzen einer jeden Ordnung auf dieselbe Art aus einander entstehen, so daß man in irgend einer Differenz nur $x + Dx$ statt x setzen darf, um die nächst folgende derselben Ordnung zu erhalten.

Um daher die Differenzen Du, D^2u, D^3u ꝛc. einer Funtion u zu finden, ist es nicht nöthig, die Reihe der Werthe von u weiter fortzusetzen. Denn so wie man die 1ste Differenz Du

findet, wenn man in u statt x den Werth $x + Dx$ setzt, und von dem dadurch erhaltenen u' die gegebene Function u abzieht, so erhält man die zweite D^2u, wenn man in der ersten Du den Werth $x + Dx$ statt x setzt, und dann Du von dem dadurch gefundenen Du' abzieht. Auf dieselbe Weise kann man aus der 2ten Differenz die 3te D^3u und überhaupt alle übrigen Differenzen bestimmen, indem jede folgende aus der nächst vorhergehenden ebenso gefunden wird, wie die 1ste aus der ursprünglichen Function, nämlich dadurch, daß man $x + Dx$ statt x setzt und von dem so gefundenen Werthe den vorigen abzieht.

Nur der erste Absatz des Zus. bedarf einer Erläuterung, der zweite ist eine unmittelbare Folge des ersten. Nach Nr. 9 ist

$$Du = u' - u$$
$$Du' = u'' - u'$$
$$Du'' = u''' - u'' \text{ ꝛc.}$$

Nun entsteht ebenfalls nach Nr. 9. jeder folgende Werth von u aus dem vorhergehenden, wenn man in diesem $x + Dx$ statt x setzt, also geht sowohl jeder der Minuenden u', u'', u''', als auch jeder der Subtrahenden u, u', u'' in den nächst folgender über, wenn man in jedem $x + Dx$ statt x setzt. Hieraus folgt, daß die ersten Differenzen $u' - u$, $u'' - u'$ ꝛc. selbst der Reihe nach aus einander entstehen, wenn man in jeder $x + Dx$ statt x setzt. Da ferner die zweiten Differenzen nichts anderes als die Differenzen der ersten Differenzen sind, von den letzteren aber so eben gezeigt ist, daß sie auf dieselbe Art aus einander entstehen, wie die Werthe der Function selbst, so müssen auch die zweiten Differenzen eben so aus einander entstehen, wie die ersten, nämlich dadurch, daß man in jeder $x + Dx$ statt x setzt. Man sieht, wie diese Schlüsse sich weiter auf die dritten und alle folgende Differenzen ausdehnen lassen. — Übrigens kann man die Richtigkeit des Zus. an den Differenzen des zu Nr 9. gegebenen Beispiels durch Versuche prüfen. Setzt man z. B. in $Du = 3x^2 Dx + 3xDx^2 + Dx^3$ statt x den Werth $x + Dx$, so erhält man

$$3(x + Dx)^2 Dx + 3(x + Dx) Dx^2 + Dx^3 = 3x^2 Dx + 9xDx^2 + 7Dx^3,$$

also den Werth, den Du' in Nr. 9. hat.

12. Lehrsatz. Wenn die Differenzen aller Ordnungen in Reihen nach ganzen steigenden Potenzen von Dx entwickelt werden, so ist erweislich, daß

a. alle ersten Differenzen die Form $PDx + QDx^2 + RDx^3 + \ldots$

b. alle zweiten Differenzen die Form $PDx^2 + QDx^3 + RDx^4 + \ldots$

c. alle dritten Differenzen die Form $PDx^3 + QDx^4 + RDx^5 + \ldots$, überhaupt alle nten Differenzen die Form $PDx^n + QDx^{n+1} + \ldots$ annehmen müssen, wobei die Coefficienten P, Q, R ꝛc. mit Allgemeinen Functionen von x bezeichnen, bei den verschiedenen Differenzen aber verschiedene Werthe haben können, mit Ausnahme des ersten Coefficienten P, der in allen Differenzen einer und derselben Ordnung auch dieselbe Function von x ist.

Wir schicken dem Beweise des Satzes folgende Bemerkungen voraus. Es sind in dem Lehrsatze die Coefficienten in den verschiedenen Reihen alle durch dieselben Buchstaben P, Q, R bezeichnet, dies ist jedoch nur deshalb geschehen, weil es an der nöthigen Anzahl verschiedener Buchstaben gefehlt hätte, keineswegs aber um damit anzudeuten, daß ein und derselbe Buchstabe in den verschiedenen Reihen immer dieselbe Function von x sei. Es dürfen vielmehr die Coefficienten P, Q, R ꝛc. weder in den Differenzen verschiedener Ordnungen, noch selbst, wenn man den ersten Coefficienten P ausnimmt, in den Differenzen einer und derselben Ordnung denselben Werth haben, wie sich dies schon an den in Nr. 9 nach Potenzen von Dx geordneten Differenzen der Function x^3 erkennen läßt.

Beweis a. Denkt man sich zuerst die verschiedenen Werthe der Function, die wir mit u', u'' u''' rc. bezeichnet haben, in Reihen nach Potenzen von Dx aufgelöst, so ist klar, daß diese Reihen sämmtlich die Form $u+PDx+QDx^2+\ldots$, also alle zu ihrem ersten Gliede die ursprüngliche Function u haben müssen, weil nämlich, wenn man $Dx=0$ setzt, jeder der Werthe u', u'', u''' rc., also auch jede der für diese Werthe entwickelten Reihen in u zurückgehen muß. Zieht man nun, um die ersten Differenzen zu erhalten, jede dieser Reihen von der nächst folgenden ab, so wird das erste Glied u, da dieses bei allen dasselbe ist, gänzlich verschwinden, folglich für jede erste Differenz eine Reihe von der Form $PDx+QDx^2+\ldots$ bleiben, was zu beweisen war.

b. Es läßt sich zunächst darthun, daß das erste Glied PDx in allen Reihen für die ersten Differenzen Du, Du' rc. stets dasselbe sein müsse. Nach Nr. 11. erhält man Du' aus Du, wenn man in diesem $x+Dx$ statt x setzt. Da nun Du eine Reihe von der Form $PDx+QDx^2+RDx^3+\ldots$ ist, wo P, Q, R Functionen von x sind, so muß man in P, Q, R rc. statt x den Werth $x+Dx$ setzen, um von Du zu Du' zu gelangen. Nun ist bereits Nr. 1. Zus. gezeigt worden, daß wenn man in irgend einer Function von x, die wir jetzt mit Z. bezeichnen wollen, $x+Dx$ statt x setzt, dieselbe in $Z+MDx+NDx^2+\ldots$ übergehe *), also wird Du oder $PDx+QDx^2+\ldots$, wenn man in P, Q rc. statt x den Werth $x+Dx$ setzt, übergehen in

$$(P+MDx+NDx^2+\ldots)Dx+(Q+M'Dx+N'Dx^2+\ldots)Dx^2+\ldots$$

$$=\left.\begin{array}{l}PDx+MDx^2+NDx^3+\ldots)\\ +QDx^2+M'Dx^3+\ldots)\end{array}\right\}=Du'$$

wodurch bewiesen ist, daß das erste (d. h. in die 1ste Potenz von Dx multiplicirte) Glied des Du' dem ersten Glieder PDx des Du gleich sein müsse. Da ferner die Reihe Du' der Form nach von der für Du durchaus nicht verschieden ist, so muß auch das erste Glied von Du'' dem ersten Gliede von Du' gleich, also wiederum PDx mit demselben Werthe für P sein, und man sieht, wie dieses bei allen ersten Differenzen Statt finden müsse. Daraus folgt denn unmittelbar, daß wenn man, um die zweiten Differenzen zu erhalten, jede erste Differenz von der nächst folgenden abzieht, das erste Glied PDx, welches bei allen dasselbe ist, verschwinden, für jede 2te Differenz folglich eine Reihe von der Form $PDx^2+QDx^3+\ldots$ bleiben müsse.

c. Auf ganz ähnliche Art, wie in b. läßt sich von den zweiten Differenzen zeigen, daß das erste Glied PDx^2 bei allen dasselbe sein müsse, woraus denn für alle dritten Differenzen sich die Form $PDx^3+QDx^4+\ldots$ ergiebt, und da diese Schlüsse sich auch auf alle folgenden Differenzen anwenden lassen, so ist der aufgestellte Lehrsatz ganz allgemein richtig.

13. Zusatz. Da nach Nr. 12. das erste in die niedrigste Potenz von Dx multiplicirte Glied aller Differenzen derselben Ordnung stets dieselbe Function von x bleibt, so giebt es in jeder der Differenzen Du, D^2u, D^3u rc. einer Function u einen gewissen Theil, der den gleichnamigen Differenzen aller verschiedenen Zustände der Function u', u'', u''' rc. gemeinschaftlich, also von diesen verschiedenen Zuständen der Function ganz unabhängig ist.

Diese Bemerkung ist für die Analysis von der höchsten Wichtigkeit. Alle Untersuchungen derselben unterscheiden sich nämlich von denen der gemeinen Arithmetik dadurch, daß sie nicht, wie diese, einen einzelnen bestimmten Werth einer Function, sondern alle nur möglichen Zustände derselben umfassen. Weil aber die Function selbst während der Rechnung doch immer nur in einem ihrer verschie-

*) Die Coefficienten dieser Reihe sind, um Verwirrung zu vermeiden, absichtlich mit M und N, und nicht wie in Nr. 1. Zus. mit P und Q bezeichnet, da die Buchstaben P und Q schon in der Reihe für Du vorkommen.

denen Zustände u, u′, u″ ꝛc. gedacht werden kann, so lassen sich solche Untersuchungen nur erst dann in unumschränkter Allgemeinheit anstellen, wenn man in die Stelle der Function etwas setzen kann, was sie in allen ihren verschiedenen Zuständen vertritt. Hierzu bieten sich nur sehr passend jene ersten Glieder ihrer Differenzen dar, da sie durch eine einfache, sich stets gleich bleibende Operation von jeder Function abgeleitet werden können, und es läßt sich schon im voraus schließen, daß ihre Einführung in die Rechnung zur Auflösung von Aufgaben führen müsse, welche die Elementarmathematik entweder gar nicht, oder wenigstens auf eine sehr mühsame und doch häufig nicht genügende Weise lösen kann.

14. **Erklärung.** Wenn die verschiedenen Differenzen Du, D^2u ꝛc. einer Function von x in Reihen nach Potenzen von Dx entwickelt sind, so werden die ersten Glieder dieser Reihen die **Differentiale** der Function genannt und bezüglich mit du, d^2u, d^3u ꝛc. so wie alsdann der Gleichförmigkeit wegen auch die Zunahme von x nicht mit Dx, sondern mit dx bezeichnet wird.

Aus Nr. 12. folgt, daß das erste Differential du die Form Pdx, das zweite d^2u die Form $P'dx^2$, das dritte d^3u die Form $P''dx^3$ ꝛc. haben müsse, wo die Coefficienten P, P', P'' ꝛc. Functionen von x sind, in einzelnen Fällen aber auch constante Größen oder Null sein können.

Der Theil der Analysis, der die Differentiale jeder gegebenen Function finden und die Natur der letzteren mit Hülfe ihrer Differentiale erforschen lehrt, heißt die **Differentialrechnung.**

Die Gründe, aus denen die Rechnung mit Differentialen vor der Rechnung mit den Functionen selbst sehr wichtige Vortheile verspricht, sind in der vorigen Nr. auseinander gesetzt und durch die ansehnlichen Bereicherungen, welche alle Theile der Mathematik seit Erfindung der Differentialrechnung mit Hülfe derselben gewonnen haben, aufs vollkommenste gerechtfertigt worden. — Da es in vielen Fällen erforderlich ist, von den Differentialen auf die zugehörigen Functionen zurückzuschließen, so leuchtet ein, daß die höhere Analysis außer der Differenzialrechnung noch einen zweiten Theil haben müsse, welcher sich mit der Methode beschäftigt, zu bekannten Differentialen die entsprechenden Functionen zu finden, und dieses ist die **Integralrechnung.** Das Integriren ist also die indirecte Rechnungsart vom Differentiiren, kann folglich auch erst begriffen werden, nachdem die Grundregeln des Differentiirens bereits festgestellt sind.

15. **Zusatz.** Die Anzahl der höheren Differentiale einer Function ist stets der Anzahl ihrer höheren Differenzen gleich; bei allen Functionen also, von denen sich ohne Ende höhere Differenzen bilden lassen, bricht auch die Reihe der höheren Differentiale niemals ab und umgekehrt.

16. **Zusatz.** Da in Nr. 9. bei der Betrachtung der verschiedenen Zustände der Function die Zunahme von x oder Dx zwar **beliebig**, aber **stets gleich groß** angenommen wurde, folglich auch die aus Nr. 9. später gefolgerten Eigenschaften der Differenzen Du, D^2u, D^3u ꝛc. nur unter dieser Voraussetzung Statt finden, so muß auch die Größe dx, obgleich man derselben im

ersten Differential jeden beliebigen Werth beilegen kann, in allen höheren Differentialen denselben Werth behalten, also als beständig betrachtet werden, sobald man von dem ersten Differential zu den höheren übergeht.

Nach Nr. 13. bietet die Rechnung mit Differentialen nur aus dem Grunde Vortheile dar, weil sie von den verschiedenen Zuständen der Function völlig unabhängig sind. Dieses Letztere findet aber nicht mehr Statt, sobald man den Zuwachs Dx nicht als eine beständige Größe betrachtet, sondern z. B. annimmt, daß x nach und nach in $x+Dx$, $x+Dx+Dx'$, $x+Dx+Dx'+Dx''$ rc. übergehn. In diesem Falle würden nämlich die ersten Glieder der ersten Differenzen nicht sämmtlich PDx, sondern der Reihe nach PDx, PDx′, PDx″ rc. werden, also von den verschiedenen Zuständen der Function abhängen, wie man sich an irgend einem Beispiele, etwa $u=ax^2$ leicht überzeugen kann. Dasselbe würde bei den ersten Gliedern der 2ten und aller höheren Differenzen der Fall sein, also die in Nr. 13. erwähnten Vortheile bei der Rechnung mit diesen ersten Gliedern wegfallen.

17. Aufgabe. Die höheren Differentiale einer Function von x zu finden, vorausgesetzt, daß man ihr erstes Differential zu finden im Stande sei.

Auflösung. Man betrachte das gefundene erste Differential der Function als eine neue Function von x und suche nach denselben Regeln, nach denen man das erste Differential von der ursprünglich gegebenen Function abgeleitet hat, das Differential des ersten Differentials, indem man dx als constant betrachtet, so erhält man auf diese Weise das zweite Differential der gegebenen Function. Eben so findet man das dritte Differential derselben, wenn man das Differential des zweiten Differentials sucht, wobei dx ebenfalls wieder als constant zu betrachten ist, und auf dieselbe Weise findet man aus dem 3ten Differential das vierte und so auch alle folgenden.

Beweis. Nach Nr. 11. wird die 2te Differenz eben so aus der ersten gefunden, wie diese aus der ursprünglichen Function. Um also zur zweiten Differenz zu gelangen, muß man die Differenz der ersten Differenz $PDx+QDx^2+RDx^3+\ldots$, also da jeder der Coefficienten P, Q, R rc. eine Function von x ist, die Differenzen der einzelnen Glieder PDx, QDx^2 rc. suchen und sie sodann addiren. Da nun das Glied PDx unter allen Gliedern der ersten Differenz in die niedrigste Potenz von Dx multiplicirt ist, so ist klar, daß, wenn man die Differenz nur von dem Gliede PDx sucht, das erste Glied derselben zugleich auch das erste (in die niedrigste Potenz von Dx multiplicirte) Glied der ganzen zweiten Differenz, d. h. daß das Differential des ersten Differentials zugleich das zweite Differential der ursprünglichen Function sein werde. Auf ähnliche Art kann man sich überzeugen, daß das dritte Differential nichts anderes, als das Differential des zweiten, überhaupt jedes höhere Differential das Differential des nächst niedrigeren sei. Hat man daher gewisse Regeln, nach denen man das erste Differential von der gegebenen Function ableiten kann, so wird man nach denselben Regeln aus dem ersten Differential das zweite, aus diesem das dritte und so alle folgenden finden, wenn man nach Nr. 16. die Größe dx als constant betrachtet.

Wie der Verf. bei seiner Auffassungsweise des Differentials und in ähnlicher elementarer Darstellung die größeren Schwierigkeiten zu heben versucht habe, welche die Differentiation der transcendenten Functionen und die Anwendung der Differentialrechnung auf die Geometrie darbieten, muß er sich vorbehalten, vielleicht einmal bei einer anderen Gelegenheit mitzutheilen.

Jahresbericht des Gymnasiums.

I. Allgemeine Lehrverfassung

für das Schuljahr von Michaelis 1835 bis dahin 1836.

Erste Classe.

Classenordinarius Prorector Freese.

1. Sprachen.

Lateinisch wöchentlich 9 Stunden, davon 2 zum Horaz (2tes und 4tes Buch der Oden 2 zum Tacitus (anal. 1 und 2) der Director. 2 Stunden zum Cicero (Tuscul. 1) 2 Stunden zu Stilübungen, 1 St. zu Sprechübungen. Prorector Freese.

Griechisch 6 Stunden, davon 3 zum Lesen der Dichter (Sophocl. Oedip. Colon. und Homers Ilias 8. und 9. B. wechselnd.) Pror. Freese. 2 zum Lesen eines Prosaikers (anfangs im Winter Herodot 1. B. Freese und nachher im Sommer Platons Krito, beide Alkibiades, der Director, der in 1 St. im Sommer die Übungen im griechischen Exercitien leitete, welche im Winter der Prorector gehabt hatte.

Deutsch 3 Stunden, davon 1 St. zum Vortrage der deutschen Literatur (6te und 7te. Periode) und Metrik, 1 St. zur Beurtheilung der gelieferten deutschen Aufsätze und 1 St. zu freien mündlichen Vorträgen bestimmt war. Pror. Freese.

Hebräisch 2 Stunden zur Grammatik (Syntax) und zum Lesen und Erklären der ersten Hälfte der Genesis und ausgewählter Psalmen. Prorect. Freese.

Französisch 2 Stunden theils zum Lesen von De Lavigne Louis XI. und nachher Idelers Handbuch 3 Th. theils zu Extemporalien und freien Aufsätzen. Reichhelm.

2. Wissenschaften.

Religion 2 Stunden. Über das Wesen der Religion, insbesondere der christlichen. Begriff und Bedürfniß einer göttlichen Offenbarung, Verhältniß des alten und neuen Testaments; Übernatürlichkeit der Offenbarung; innere und äußere Kriterien für dieselbe; Wunder, Weissagungen, Inspiration der heiligen Schrift; Verhältniß der Vernunft zur Offenbarung; die Lehre von Gott und seinen Eigenschaften. Dr. Wilde.

Geschichte 2 Stunden. Die neuste Zeit von 1786 bis 1815 und von 1500 bis 1660 Dr. Teske.

Mathematik 3 Stunden die Lehre von den Combinationen, den binomischen Lehrsatz, arithmetische und geometrische Reihen, Logarithmen und die Lehre von den Kegelschnitten. Dr. Wilde.

Physik 2 St. die optischen Wissenschaften. Dr. Wilde.

Philosophische Propädeutik 1 St. in der die Psychologie beendigt und die Logik angefangen wurde. Dr. Schirlitz.

Hodegetische Lection für die Abiturienten. Der Director.

Zweite Classe

Classenordinarius Dr. Wilde.

1. Sprachen.

Lateinisch 10 Stunden. Davon 2 St. zu Virgils Äneide 2tes und 3tes Buch 2 zum Sallust. Catilin. u. Jugurtha Dr. Schirlitz. 2 St. Grammatik und Sprechübungen. Prorect. Freese. 2 St. Cicero de senect. paradoxa und orat. pro Archia poeta und 2 St. zu Exercitien und Extemporalien. Dr. Teske

Griechisch 6 Stunden. Davon 2 St. zu Homers Odyssee (3. 4 Ges.) 3 St. zu Xenophons Cyropädie (6. 7. 8. B.) der Director und 1 St. Grammatik und Exercitien. Pror. Freese.

Deutsch 2 Stunden Poetik und deutsche Aufsätze und Declamiren. Dr. Schirlitz.

Hebräisch 2 St. Grammatik (Etymologie) und Genesis. Pror. Freese.

Französisch 2 St. Theils Charles douze nach Voltaire, theils nachher Idelers Handbuch. 1 Th. Reichhelm.

2. Wissenschaften.

Religion 2 St. Es wurde der Brief des Apostels Paulus an die Römer in der Luther. Übersetzung gelesen und daran der Unterricht in der christlichen Religion geknüpft. Dr. Wilde.

Geschichte (2 St.) des Mittelalters von der Völkerwanderung bis zum Ende der Kreuzzüge. Dr. Teske.

Mathematik 4 St. Im Winter 2 St. zur ebenen Trigonometrie und 2 St. zur Algebra bis zu den quadratischen Gleichungen inclusive. Im Sommer 2 St. zur Repetition der in den früheren Classen vorgetragenen Abschnitte der Planimetrie und Beendigung derselben, und 2 St. zur Buchstabenrechnung und Lehre von den Potenzen nach Wiederholung der frühern Abschnitte der Arithmetik nach Fischers Lehrbuch der Elementarmathematik. Dr. Wilde.

Physik 2 St. Im Winter die Lehre von der Wärme; im Sommer die Lehre von den ausdehnsamen Flüssigkeiten nach Fischers Lehrbuch der mechanischen Naturlehre. Dr. Wilde.

Dritte Classe.

Classenordinarius Dr. Teske.

1. Sprachen.

Lateinisch 8 St. Davon 3 St. zum Jul. Cäsar (bell. gall. 5 6.) 1 zu Exercitien und Extemporalien, 2 St. zur Grammatik Zumpt § 76—83 Dr. Teske. 2 St. zu Ovids Metamorphosen, ausgewählte Stücke aus lib. VIII. XIII. XIV. XV. III. V. Dr. Schirlitz.

Griechisch 5 St davon 3 zu Jakobs Elementarbuch, 2ter Cursus und 2 zur Grammatik und Exercitien. Dr. Schirlitz.

Deutsch 2 St. Grammatische Übungen, Aufsätze und Declamiren. Dr. Schirlitz.

Französisch 2 St. Numa Pompilius von Florian u. Ahns Frz. Lesebuch 3 Buch. Grammatik nach Hirzel und Exercitien. Reichhelm.

2. Wissenschaften.

Religion 2 St. Die Apostelgeschichte und andere Bücher des N. T. gelesen und erklärt. Dr. Schirlitz.

Geschichte 2 St. im Winter, der Römer, bis zur Theilung des Reichs. Im Sommer Geschichte des Morgenlandes bis Alexander dem Gr. Dr. Teske.

Geographie von Europa 2 St. Dr. Teske.

Mathematik in 4 St. Im Winter Planimetrie nach Fischers Lehrbuch, Abschnitt 3—11. Im Sommer Arithmetik nach Fischer Abschnitt 1—7. Schmidt.

Praktisches Rechnen 2 St. Im Winter Interessenrechnung, Rabatt- Gesellschafts- Alligations-Rechnung und Kettenregel. Im Sommer Regel de tri und zusammengesetzte Proportionsrechnung. Schmidt.

Botanik 1 St. im Sommer das Linneesche System. Dr. Wilde.

Gesanglehre mit Prima und Secunda zusammen. Cantor Bach.

Zeichnen 2 St.

Vierte Classe.

Classenordinarius Dr. Groke.

1. Sprache.

Lateinisch 7 St. Davon 3 St. zum Cornelius Nepos (Eumenes, Phocion, Aristides, Timoleon, de regibus, Hamilkar, Pausanius, Hannibal, Cimon.) 1 St. zur Grammatik von Otto Schulz und 1 St. zu Exercitien aus der Aufgabensammlung von Otto Schulz. Dr. Wilde. 2 St. zum Phädrus. lib. V. app. 1 und 11. Dr. Groke.

Griechisch 4 St. Davon 2 St. zum Einüben der etymologischen Formen und 2 St. zum Übersetzen aus Jacobs Elementarb. 1. Curs. Dr. Groke.

Deutsch in 3 St. in 1 St. deutsche Grammatik nach Heyse, 1 St. zur Beurtheilung und Rückgabe der corrigirten Aufsätze. Dr. Groke. 1 St. zum Declamiren oder Vorlesen ausgewählter Stücke. Dr. Wilde.

Französisch 2 St. Wiederholung der Formenlehre und die irregulären Verba. Die französischen Stücke in Hirzels Grammatik und Ahns französischem Lesebuch wurden mündlich und schriftlich übersetzt. Reichhelm.

2. Wissenschaften.

Religion 2 St. Mit Grundlegung des Luther. Katechismus die Glaubens- und die Sittenlehre. Dr. Groke.

Geographie (2 St.) von Europa nach Volgers Schulgeographie 2. Curs. Deutschland und den Preußischen Staat. Dr. Groke.

Geschichte der Deutschen nach Liebler im Winter; im Sommer Preußisch Brandenburgische Geschichte nach Atzerodt 2 St. Dr. Groke.

Mineralogie 1 St. im Winter die Kieselfossilien nach Meinecke's Lehrbuch der Mineralogie. Dr. Wilde.

Mathematik 2 St. Im Winter Planimetrie nach Fischers Lehrbuch, Abschnitt 1 bis 3. Im Sommer Arithmetik nach Fischer Abschnitt 1—3. Schmidt.

Rechnen 2 St. Die Lehre von den Brüchen und Regel de tri. Schmidt.
Schönschreiben 3 St. Sy.
Gesanglehre 2 St. Cantor Bach.
Zeichnen 2 St.

Fünfte Classe.

Classenordinarius Lehrer Reichhelm.

1. Sprachen.

Lateinisch 5 St. Davon 2 St. zur Grammatik, 2 St. zum Übersetzen aus Jacobs und Dörings Lesebuch, 1 St. zum Übersetzen ins Lateinische nach Otto Schulz Dr Groke.

Deutsch 4 St. orthographische und syntaktische Übungen der deutschen Grammatik, Declamirübungen und Lesen. Reichelm.

Französisch 2 St. Leseübungen, Formenlehre bis zu den unregelmäßigen Zeitwörtern. Übersetzung der ersten Deutschen Stücke aus Hirzels Grammatik. Reichhelm.

2. Wissenschaften und Kunstfertigkeiten.

Religion 2 St. Biblische Geschichte nach Küster, Erklärung des Luth. Kathechismus

Geschichte 2 St. nach Volgers Leitfaden: von der Reformation bis auf die neuste Zeit. Dr. Groke.

Geographie 2 St. nach Volgers Schulgeographie Europa und zwar Deutschland, die Schweiz, Belgien, Holland, Frankreich rc. Dr. Groke.

Naturbeschreibung 2 St. die Amphibien, Fische und wirbellosen Thiere. Schmidt.
Rechnen 4 St. Bruchrechnung mündlich und auf der Tafel eingeübt. Reichhelm.
Schönschreiben 4 St. Sy.
Gesanglehre 2 St. Cantor Bach.
Zeichnen 2 St.

Sechste Classe.

Classenordinarius Lehrer Schmidt.

1. Sprachen.

Lateinisch 5 St. Mit der ersten Abtheilung Einübung der Formen bis zu den unregelmäßigen Zeitwörtern nach Schulze's Grammatik in 2 St. Übersetzung der einfachen Sätze aus dem Lesebuch von Jacobs und Döring in 2 St. Einübung der Genusregeln durch kleine Formeln nach Schulze's Übungsaufgaben in 1 St. Mit der zweiten Abtheilung Einübung der Formen bis zur ersten Conjugation. Schmidt.

Deutsch 5 St. Davon 2 St. zur Einübung der Regeln der Orthographie verbunden mit grammatischer Übung und 1 St. Declamiren Reichhelm. In 2 St. wurden Übungen im Lesen angestellt von Dr. Schirlitz.

2. Wissenschaften und Kunstfertigkeiten.

Religion 2 St. Biblische Erzählungen nach Küster und Erklärung des kl. Luther. Katechismus verbunden mit dem Auswendiglernen der betreffenden Bibelstellen. Schmidt.

Geschichte 2 St. Älteste Geschichte der Babylonier, Phönizier, Ägypter und Griechen und Anfang der Römer nach Volgers Leitfaden 1r Cursus. Schmidt.

Naturbeschreibung 2 St. Die Vögel und Säugethiere. Schmidt.

Rechnen 4 St. Erste Abtheilung die 4 einfachen Rechnungsarteu mit ungleichbenannten Zahlen; zweite Abtheilung die 4 einfachen Rechnungsarten mit gleichbenannten Zahlen. Sy.

Schönschreiben 4 St. Sy.

Gesanglehre 2 St. Cantor Bach.

Zeichnen 2 St.

Verordnungen und Bekanntmachungen der hohen Königlichen Behörden.

1. Nach einer Verfügung des Königl. Hohen Ministeriums der Geistlichen- und Unterrichts-Angelegenheiten, von dem Königl. Consistorium unterm 3ten März dem hiesigen Gymnasium mitgetheilt, soll folgende Notiz unter die Abiturienten-Zeugnisse gesetzt werden: „Nach der Allerhöchsten Bekanntmachung vom 5ten December v. J. (Gesetzsammlung vom Jahre 1835 N. 28 S. 287—289) sind alle Studirende verbunden, sich innerhalb zweier Tage nach ihrer Ankunft anf der Universität bei der für die Immatriculation ernannten Commission unter Vorlegung der vorschriftsmäßigen Zeugnisse zu melden.

Die Immatriculation wird verweigert, wenn der Studirende sich zu spät meldet, die erforderlichen Zeugnisse nicht vorlegen kann, wenn der Ankommende von einer Universität verwiesen worden, und wenn sich gegen ihn der Verdacht ergiebt, daß er einer verbotenen Verbindung angehört, und sich von demselben nicht auf befriedigende Weise zu reinigen vermag.

Zugleich sollen die Abiturienten in Kenntniß gesetzt werden, daß die Vorlesungen des Sommersemesters bei den Universitäten in Berlin, Bonn, Breslau, Greifswald und Halle und bei der akademischen Lehranstalt in Münster am ersten Montage nach dem Sonntage Jubilate, bei der Universität in Königsberg aber am ersten Montage nach dem Sonntage misericordias Domini, und die Vorlesungen des Wintersemesters bei sämmtlichen Universitäten und der akademischen Lehranstalt in Münster am ersten Montage nach dem 18ten October eines jeden Jahres vorschriftsmäßig ihren Anfang nehmen.

2. Auf Veranlassung des Königlichen Hohen Ministeriums der Geistlichen 2c. Angelegenheiten macht das Königl. Hochw. Consistorium den Director auf die Schrift des Professers Peter Schmidt zu Berlin: „Plan wie Peter Schmids Zeichenmethode in allen Schulen mit Er-

folg und fast ohne Umstände einzuführen ist," aufmerksam mit der Aufforderung den Unterricht im Zeichnen nach dieser sehr zweckmäßigen Methode einzurichten.

3. Auf höhere Veranlassung forderte das Königl. Hochw. Consistorium den Director unterm 26sten März 1836 auf, nicht allein sein Gutachten über den von Herrn Medicinalrath Lorinser durch den Druck bekannt gemachten Aufsatz: „zum Schutz der Gesundheit in den Schnlen" abzugeben, sondern auch die Erklärung des Lehrer Collegiums zu erfordern und solche einzureichen. Herr Lorinser hatte die Ausbildung des jugendlichen Körpers und Geistes, wie sie nach seiner Voraussetzung in den meisten deutschen Gymnasien betrieben wird, vom Standpunkt der Medicin aus betrachtet und annehmen zu können geglaubt, daß es im allgemeinen mit der Gesundheit der Schüler in den Gymnasien mißlicher als jemals bestellt sei und den Grund davon in der Menge der Unterrichtsgegenstände, der Menge der Lehrstunden und der Privatarbeiten gesucht, ohne jedoch darauf Rücksicht zu nehmen, was durch häusliche Erziehung, Verweichlichung und Verwöhnung geschadet und in die Schulen hineingebracht werde, daß die von den meisten Eltern genährte Vergnügunssucht der Kinder durch übermäßiges Tanzen und andre ähnliche Lustbarkeiten den Geist und Körper der Kinder früh abstumpfe und von ernsten Beschäftigungen abhalten und ihnen einen Eckel daran erzeugen. Es konnte daher der Director, der seit 43 Jahren theils als Lehrer theils als Vorsteher einer gelehrten Anstalt auch ein Urtheil über den fraglichen Gegenstand zu haben glaubte, nicht in Herrn Lorinsers Klagen einstimmen und noch weniger die von ihm vorgeschlagenen Mittel gut heißen, da er in seiner langen Amtsführruug weder an sich, noch an seinen Schülern bemerkt, daß ein angestrengtes Studiren schädlich sei, daß sich hundert Schüler eher durch Ausschweifungen zu Grunde richten, ehe nur einer dem Studiren erliegt. Er hatte bemerkt, daß die fleißigsten und gesittetsten Schüler auch die gesundesten waren. Sollten andre Lehrer und Vorsteher von gelehrten Anstalten anderer Meinung sein, so würde er die seinige deshalb nicht zurücknehmen und glauben, daß Herr Lorinser die Sache hier sehr einseitig selbst aus dem Standpunkt der Medicin betrachtet habe.

3. Auf Befehl des Herrn Staatsministers und Generalpostmeisters von Nagler soll in den Zeugnissen der zum Postfach übergehenden Schüler genau der Grad ihrer Kenntnisse im allgemeinen und besonders auch in denen, welche ihnen im Postdienst vorzüglich wichtig sind, wozu unter andern Rechnen, Geographie und Geschichte gehören, angegeben werden.

5. Auf Befehl des Königlichen hohen Justiz-Ministeriums sollen bei der großen Anzahl der sich zum Justizdienste meldenden, die jungen Leute auf Schulen, welche sich ohne hinreichendes Vermögen oder vorzügliche Anlagen dem Studium der Rechtswissenschaft widmen, bei Zeiten durch angemessene Warnungen zurück gehalten werden. Ein gleiches soll auch den die Theologie und Medicin Studirenden eingeschärft werden.

2. Chronik des Gymnasiums.

Eröffnung des neuen Lehrcursus für den Winter geschah Montag den 12ten October 1835 im großen Hörsaale des Gymnasiums mit Gesang, Gebet und der Bekanntmachung der Gesetze und sonstigen Verordnungen, da die Censur bereits am Schluß des vorigen Semesters gehalten war, damit die Eltern und Angehörigen unserer Zöglinge die Censurzeugnisse noch in den Ferien erhalten und unterschreiben könnten. Der Lehrcursus für das Sommersemester wurde mit dem 11ten April 1836 auf ähnliche Art eröffnet und Nachmittags desselben Tages der Unterricht gleich angefaugen.

Die Feier des Gröningschen Sterbetags fand nach gewöhnlicher Art am 12ten Februar statt, an welchem dem Director über Erziehung in und außer dem Hause auf eine zeitgemäße Art sprach und zum Schluß die Prämien aus der Gröningschen Stiftung vertheilte.

Die feierliche Entlassung der Abiturienten des Wintersemesters geschah durch den Director am 23sten März in Gegenwart sämmtlicher Classen, der Lehrer und des Scholarchats.

Zur Revision des Gymnasiums erschien der damit beauftragte Herr Consistorialrath Koch am 11ten November 1835 und beschäftigte sich damit vom 12ten bis 18ten November. Durch den häufigen Besuch der Classen war er zu einigen Veränderungen im Lectionsplan veranlaßt worden, die in den mit den Lehrern und dem Scholarchat gehaltenen Conferenzen besprochen und bald darauf ausgeführt wurden. Bei der zweiten Anwesenheit des Herrn Revisors wurden diese Veränderungen im ganzen bestätigt oder mit einzelnen Abänderungen, wie sie der gegenwärtige Lectionsplan zeigt, fortgesetzt.

Den 3ten Julius gingen Lehrer und Schüler zum heiligen Abendmahl in der Marienkirche.

Veränderungen im Lehrerpersonale sind in diesem Jahre nicht vorgefallen.

3. Statistische Uebersicht.

Stand des Lehrapparats. Das Gymnasium erhielt an Geschenken 1. vom Königliichen Hohen Ministerium die Fortsetzung von Ledeburs Archiv für die Geschichte des Preußischen Staats, die von dem geographischen Kupferstecher Eduard Wiebel in Berlin herausgegebene Carte von Latium, den 3ten Theil der von dem Professor Berndt zu Bonn herausgegebenen Schriftenkunde der Wappenwissenschaft, den 3ten Theil von Freitags arabisch-lateinischem

Wörterbuch, Suidae Lexicon ed. Bernhardy vol. I. fasc. 2 und vol II. fasc. 1· und 2; Ermans Reisen um die Erde 2ter Bd. nebst einem Verzeichniß der Thiere und Pflanzen, welche auf dieser Reise gesammelt wurden, 3ter Band der Flora regni Borussici von Dietrich, die 21ste Lieferung der Chorstimmen classischer Werke älterer und neuerer Kirchenmusik enthaltend den Psalm von Händel. Rheinisches Museum von Welker und Näcke 3ter Jahrgang und 1ster Supplementband. Crelle's Journal der reinen und angewandten Mathematik.

2. Die Universität zu Greifswald übersandte für jedes Semester die Verzeichnisse ihrer zu haltenden Vorträge lateinisch und deutsch. 3. An Progammen erhielt das Gymnasium durch das Königliche Consistorium zugesandt 148. 4. An andern Geschenken empfangen: vom Herrn Buchhändler Morin in Stettin Giesebrechts Lehrbuch der mittleren Geschichte. Von der Easlin-schen Buchhandlung zu Berlin Grüsons Auflösungen der Aufgaben in der Hirsch'schen Sammlung, Schubarts Vorschule der Geschichte. Vom Buchhändler Herrn Carl Flemming zu Glogau mehrere in seinem Verlage erschienene Unterrichtsbücher, vom Herrn Oberlehrer Scheibert zu Stettin seine Schrift: das Gymnasium und die höhere Bürgerschule. Von Herrn Pastor Georgi zu Collin 74 Bände nämlich:

1. 2. Winkelmanns alte Denkmäler der Kunst übersetzt von Brunn. Berlin 1804 2 Bde.
3. Geschichte des Krieges in Rußland. Wien 1789.
4. Wielands Oberon 1780.
5-7. Herders zerstreute Blätter. Gotha 1787.
8-10. — — Ideen zur Philosophie der Geschichte der Menschheit. Riga 1785.
11. Griesbachs synopsis. Halle 1776.
12. Knapps Psalmen. Halle 1782.
13. Vaters Commentar über den Pentateuch. Halle 1812.
14. Cube's Hiob übersetzt. Berlin 1769.
15-19. Lanzi histoire de la peinture. Paris 1824.
20. Rußlands Triumpf oder das befreite Europa Berlin 1813.
21. Briefe über den Feldzug 1794. Frankfurt 1795.
22. Schulz über den Revolutionskrieg. Berlin 1797.
23. Auszug aus den Preußischen Landesgesetzen. Berlin 1794.
24. Geheime Briefe über die Preußische Staatsverfassung. Utrecht 1787.
25. Schmidt praktischer Unterricht in hebräischer Sprache. Lemgo 1789.
26. Genesis hebräisch. Lemgo 1792.
27. Güte Anfangsgründe der hebräischen Sprache. Halle 1782.
28. Schröders hebräisches Übungsbuch. Leipzig 1822.
29. Hasse praktisches Handbuch der hebräischen Sprache. Jena 1787.
30. Das neue Teutschland. Berlin 1813.
31. Eine russische Feldpredigt. 1813.
32. Ortmanns Predigt. Berlin 1763.
33. Meier über die göttliche Vorsehung. Halle 1763.
34. Bahrdt über das Theologische Studium auf Universitäten. Berlin 1785.
35. Pischon über Trennung der Lutheraner und Reformirten. 1821.
36. Ist es rathsam Missethäter vorzubereiten? Berlin 1769.

37. Fürst Ernst Wolfgang von Dessau von Krummacher. 1820.
38. Wisselinks Predigt. Elbing 1806.
39. Succo's Predigt auf Friedrich den Großen. Stargard 1786.
40. über Liturgie. 1824.
41. über Ursprung und Inhalt der neuen Kirchenagende. 1823.
42. Stumpfs Predigt über die Kuhpocken. Stargard 1802.
43. Vogts Synodalpredigt. Stettin 1802.
44. Golz über Einführung einer neuen Agende. 1824.
45. Krause Versuch einer Kirchenagende für alle Kirchenpartheien. 1788.
46. Dünkel Leichenpredigten. Lemgo 1750.
47. Schmidts merkwürdige Geschichten der Bibel. 1717.
48. 49. Fest über die Vortheile der Leiden. Leipzig 1787.
50-62. Stapfers Grundlegung zur wahren Religon. Zürich 1753.
63. 64. Lardners Glaubwürdigkeit der evangel. Geschichte.
65. Neuste Hochzeitreden. Tübingen 1759.
66. Nitsch Einleitung in das Studium der alten Kunstwerke. Leipzig 1792.
67. Eberhards Theorie der schönen Wissenschaften. 1786.
68. Hillers Anleitung zum Violinspielen. Leipzig 1778.
69. Hillers Anleitung zum Singen. Leipzig 1774.
70. Stryk vom Rechte des Sabbats. Frankfurt 1703 (selten)
71. Mel Salems Tempel. Frankfurt 1726.
72. Bericht an den König von Schweden. 1813.
73. Anleitung wie Kirchenbücher zu führen. Leipzig 1790.
74. Pommersche Kirchenordnung von Bugenhagen. 1690.

Hierzu kommen 50 Bände von Herrn Landrath v. der Marwitz der Bibliothek geschenkt, nämlich:

4 Bände von Tafels Lehrbüchern der griechischen, französischen, italienischen und englischen Sprache.
Deutsche Aufsätze die französische Sprache in Ausübung zu bringen.
Angenehme Unterhaltngen zum Übersetzen ins Französische von Meidinger.
Büschings Staatsverfassung.
Kaufmanns Erdbeschreibung.
Fabri's Handbuch der Geographie. 4 Thle.
Müllers Geographie.
Hilmar Curas Universalhistorie.
Schröckhs Weltgeschichte 8 Bde.
Histoire universelle de Diodore de Sicile traduite par Terrasson.
Histoire des revolutions de le republique Romaine par Vertot t. 2 u. 3.
Correspondance politique sur les affaires de la Hollande.
Venturinis Chronik des 19 Jahrh. 16ter Bd.
Menzels Taschenbuch der neusten Geschichte 1ster Jahrg. (1829). Politisches Rundgemälde der Jahre 1828. 29. 30. 31.
Frankreich im Juli 1830.
Die Revolution in Belgien 1830.
Die Geschichte unsrer Tage von Freimund. 1stes Heft.
Lebensgeschichte Hüblers.
Leben und Schicksale P. Lange's.
Wolffs Anfangsgründe der mathematischen Wissenschaften 5 Bde.
Busse's Rechenbuch.

Lavaters Aussichten in die Ewigkeit 3 Bde.
Zimmerman über die Einsamkeit 4 Bde.
Livre de cent et un. t. 1.

Mögen diese zum Theil so reichlichen Gaben auch andre Wohlthäter ermuntern, ein und das andere Buch, welches sie vielleicht selbst nicht benutzen können, der Bibliothek des Gymnasiums zu zuwenden, wo es von allgemeiner Brauchbarkeit sein kann, da ich gern erbötig bin, den Freunden der Literatur, die Werke aus unserer Bibliothek mitzutheilen und dazu Sonnabends von 2 bis 3 Uhr bestimmt ist, besonders wenn es mir vorher angezeigt wird, um nicht vergebens zu warten. Auf auswärtige Versendungen jedoch kann ich mich weniger einlassen, da schon mehre Empfänger der Bücher dahin gestorben sind und ich dann viel Mühe gehabt habe, der Bibliothek das Ihrige zu gewinnen. Wenn jedoch von einem hiesigen, dem Director bekannten Mann, dafür Bürgschaft geleistet wird, so kann auch dies, wie bisher der Fall gewesen, geschehen. Auch aus ihren bestimmten Fonds hat die Gymnasialbibliothek jährliche nicht unbedeutende Vermehrungen erhalten, von denen ich nur die Fortsetzungen der bedeutendsten Werke erwähnen will, nämlich Ersch und Grubers Encyklopädie, die Sammlung der Scriptores historiae Byzantinae, Heerens und Uckerts Europäische Staatengeschichte, Goldfuß naturhistor. Atlas nebst Erklärung, und zum Theil noch die Ergänzungen der officinellen Pflanzen, Henrici Stephani thesaurus graecae linguae, Seebode und Jahns Jahrbücher der Literatur und kritische Bibliothek, Okens Naturgeschichte, Graffs hochdeutscher Sprachschatz, Ludens Geschichte der Deutschen, von Hammers Geschichte des osmanischen Reichs und andre.

Die übrigen statistischen Verhältnisse des Gymnasiums sind in der am Ende folgenden Tabelle enthalten. Es werden daher nur noch die in diesem Jahr von hier zur Universität abgegangenen Gymnasiasten erwähnt:

Zu Ostern gingen mit dem Zeugniß der Reife zur Universität, nachdem sie unter der Leitung des Königl. Prüfungscommissarius Herrn Consistorialraths Dr. Koch vorschriftsmäßig waren geprüft worden:

1. Franz Heinrich Joachim Strecker aus Fritzow bei Cammin, hatte $5\frac{3}{4}$ Jahr das Gymnasium besucht und davon 2 Jahr die erste Klasse desselben, studirt Theologie in Berlin.
2. Theodor Ludwig Wendell aus Stargard war 10 Jahr auf dem Gymnasium und 2 Jahr in Prima, studirt Theologie in Berlin.
3. Isaak Wertheim aus Berlinchen, war 7 Jahr auf dem Gymnasium und 2 Jahr in Prima, studirt Medicin in Berlin.
4. Carl Theodor Eduard Kirschbaum geb. zu Groß-Ziethen bei Berlin, 10 Jahr auf dem Gymnasium, davon 2 Jahr in Prima, studirt Jura und Cameralia in Berlin.
5. August George Plaster geb. zu Sandow bei Arnswalde, war $7\frac{1}{2}$ Jahr auf dem Gymnasium und davon 2 Jahr in Prima, ging auf die Pepiniere zu Berlin.
6. August Hermann Theodor Kypke aus Wopersnow bei Schievelbein, $5\frac{1}{2}$ Jahr auf dem Gymnasium und davon 2 Jahr in Prima, studirt Theologie in Greifswald.

7. Emil Friedrich Gustav Weiland geb. zu Butterfelde bei Königsberg i. d. N. M., 6½ Jahr auf dem Gymnasium und davon 2 Jahr in Prima, studirt Theologie in Breslau.

8. Herrmann Otto Mittelstädt aus Schneidemühl, 3 Jahr auf dem Gymnasium und davon 2 Jahr in Prima, studirt Jura und Cameralia zu Bonn.

Jetzt sind nach vorgegangenem schriftlichen Examen unter dem Vorsitz des Königl. Prüfungscommissarius Herr Consistorialraths Dr. Koch folgende Primaner den 26 September geprüft und werden deren Zeugnisse künftig benannt werden:

1. Emil Theodor Haßlinger geboren zu Pyritz, 10 Jahr auf dem Gymnasium und davon 2½ Jahr in der 1sten Classe desselben, will Jura und Philosophie in Berlin studiren.
2. Carl Friedrich Strübing aus Pyritz, 7½ Jahr auf dem Gymnasium und 2½ Jahr in Prima, will Medicin studiren in Halle.
3. Hermann Arnold Schüler aus Stargard, 7½ Jahr auf dem Gymnasium und 2 Jahr in Prima, studirt Jura in Berlin.
4. Carl August Ludwig Schultze aus Stargard, 10 Jahr auf dem Gymnasium, 2 Jahr in Prima studirt Medicin in Berlin.
5. August Ernst von Schöning geboren zu Sallenthin, 7 Jahr auf dem Gymnasium und 1 Jahr in Prima studirt Jura in Berlin.
6. Anton Friedrich Pretzel geboren zu Mühlendorf bei Labes, 6½ auf dem Gymnasium, 2 Jahr Prima, geht nach Berlin um Jura und Cameralia zu studiren.
7. Carl Theodor Schmidt aus Stargard, 9 Jahr auf dem Gymnasium und 2 Jahr in Prima, wird Theologie und Philologie in Halle studiren.
8. Wilhelm Heinrich August Höft aus Plathe, 2 Jahr 2 Monat auf dem Gymnasium und 2 Jahr in Prima, studirt Theologie in Greifswald.
9. Johann Heinrich August Zapp aus Damm, 2½ Jahr auf dem Gymnasium und 2 Jahr in Prima, wird Theologie in Berlin studiren.
10. Gustav Adolph Düsing geboren zu Berlin, 10 Jahr auf dem Gymnasium u. 2 Jahr in Prima, studirt Theologie in Berlin.

IV. Die öffentliche Prüfung wird am 28sten September Vormittags von ½9 und Nachmittags von 2 Uhr ab auf folgende Art gehalten werden:

Anfang: Choral für 4 Männerstimmen mit vollem Orchester von J. Bach.

2. Fünfstimmiger Männergesang mit 2. Solostimmen von Bierey.
3. Choral mit Männerstimmen von J. D. Bach.

Gebet. Dritte Classe Geschichte (Teske) und Griechisch (Schirlitz). Rede des Secundaners Pudor: über den Einfluß des Landlebens auf Geist und Gemüth.

Zweite Classe. Deutsch (Schirlitz) Mathematik (Wilde). Rede des Primaners Strübing: de Ptolemaeorum in literas Graecas meritis. Erste Classe. Deutsche Literaturgeschichte (Freese) Lateinisch (Horaz) Falbe.

Vor der nun folgenden Entlassung der Abiturienten durch den Direktor wird noch vorgetragen Cavatine für Tenor mit Chor von Wallank.

Dann folgen die Reden zweier Primaner:

Schmidt: quaenam pericula in studio philologiae sint effugienda.

Höft: über Vossens Einfluß auf die vaterländische Literatur.

Zum Schluß des Vormittags das Volkslied: dem König Heil rc. mit voller Orchester-Begleitung von J. D. Bach.

Beim Schluß der Prüfung jeder Classe werden die für dieselbe bestimmten Prämien aus der Stahlkopfschen Stiftung vertheilt werden.

Nachmittags die vierte Classe nach vorhergegangenen Declamationen: Lateinisch (Wilde) Geographie (Groke). Declamation. Die fünfte Classe: Französisch (Reichhelm) Geschichte (Groke). Declamation. Die sechste Classe: Lateinisch (Schmidt) Naturgeschichte (Schmidt). Zum Schluß zwei- drei- und vierstimmiger Gesang der Quartaner nebst theoretischer Prüfung in demselben.

Vertheilung der Prämien wie Vormittags. Donnerstag den 29sten Vormittags Censur. Dann folgen die Versetzungsexamina. Hierauf vom 2ten bis 8ten October die gewöhnlichen Ferien, die diesmal vielleicht noch um einige Tage wegen der am Gymnasium vorzunehmenden Bauten ausgedehnt werden möchten.

Falbe.

Uebersicht

der statistischen Verhältnisse des Gymnasiums zu Stargard von Michaelis 1835 bis dahin 1836.

Allgemeiner Lehrplan.

Lehrer.	Lehrfächer.	Classen u. Stunden wöchentlich. I	II	III	IV	V	VI	Summa.
Direktor Falbe	Lateinisch . . .	9	10	8	7	5	5	44
Prorektor Dr. Freese	Griechisch . . .	6	6	5	4	—	—	21
Oberlehrer Dr. Wilde.	Hebräisch . . .	2	2	—	—	—	—	4
Oberlehrer Dr. Teske	Deutsch	3	2	2	3	4	4	18
Oberlehrer Dr. Schirlitz	Philos. Propädeutik	1	—	—	—	—	—	1
Dr. Groke	Französisch . . .	2	2	2	2	2	—	10
Lehrer Reichhelm	Religion . . .	2	2	2	2	2	2	12
Lehrer Schmidt	Geschichte . . .	2	2	2	2	2	2	12
Cantor Bach	Geographie . .	—	—	2	2	2	2	8
Schreiblehrer Sy	Mathematik . .	3	4	4	2	—	—	13
Zeichenlehrer	Physik	2	2	—	—	—	—	4
	Naturgeschichte .			1	1	2	2	6
	Prakt. Rechnen .	—	—	2	2	4	4	12
	Schreiben . . .	—	—	—	3	4	5	12
	Zeichnen	—	—	2	2	2	2	8
	Gesanglehre . .	‿	2	‿	2	2	2	8

Zahl der Schüler.

In	waren	aufgenommen	versetzt	abgegangen	gegenwärtig
I	30	1	5	14	22
II	33	1	25	11	42
III	56	7	20	6	52
IV	66	8	30	19	65
V	51	9	27	5	52
VI	59	31	0	0	44
	275	57	107	55	277

Abiturienten.

Reif	Unreif	Summa	Universität.	Facultät.
12	0	12	7 in Berlin, 2 in Greifsw. 1 in Breslau, 1 in Bonn, 1 in Halle.	7 Theologen, 2 Mediziner, 2 Juristen.

Bemerkungen.

Die Zahl der Schüler ist so angegeben, wie sie zu Johannis 1836 war und sind also die zu Michaelis abgehenden nicht mitgerechnet.

φ.