Jahresbericht

über das

Königl. Gymnasium zu Rastenburg

für das Schuljahr von Michaelis 1841 bis dahin 1842

womit zur

öffentlichen Prüfung

der Schüler

am 26. und 27. September

und zur

feierlichen Entlassung der Abiturienten

am 27. September Nachmittags 4 Uhr

die Eltern und Pfleger der Schüler und die Freunde des Schulwesens

ergebenst einladet

Johann Wilhelm Gottlob Meinicke, Director.

Inhalt: 1.) Potenzlehre. (Fortsetzung.) Vom Oberlehrer Professor Johann Martin Klupß. 2.) Schulnachrichten. Vom Director.

Rastenburg 1842.
Gedruckt bei August Haberland.

Schulnachrichten.

I. Lehrverfassung.

Ordinarien waren in Cl. I. Herr Oberlehrer Professor Fabian, in Cl. II. Herr Oberlehrer Dr. Janson, in Cl. III. Herr Oberlehrer Dr. Brillowski, in Cl. IV. Herr Oberlehrer Weyl, in Cl. V. Herr Gymnasial-Lehrer Claussen, in Cl. VI. der wissenschaftliche Hülfs-Lehrer Herr Marotski.

1. Vorgetragene Lehrgegenstände.

Griechische Sprache: in Cl. I. 6 St. Hom. Ilias XIII. 487 — XVI. 100. 2 St. — Demosth. orat. Olynth. I — III. de pace, Philipp. I — IV. ins Deutsche und Lateinische übersetzt; Grammatik: Wiederholung der Casus-Lehre, Negationen, einfacher und zusammengesetzter Satz; vierzehntägiges Exercitium. 4 St. — Cl. II. 6 St. Xenoph. Cyrop. I — III. ins Latein. übersetzt; Grammatik (Buttmann): Wiederholung der Etymologie, Lehre von den Präpositionen, von den Casus, vom einfachen und zusammengesetzten Satze; vierzehntägiges Exercitium. — Cl. III. 6 St. Xenoph. Anab. I 4 — III 3. 2 St. Hom. Odyss. IV — 604. VII. VIII — 234. IX. X. zur Hälfte. 2 St. Grammatik (Buttmann) Etymologie und darauf bezügliche Exercitia. 2 St. — Cl. IV. 6 St. Jacobs Lesebuch 1ster Cursus IX. 6. 1. bis zu Ende des Cursus. VI — VIII (regelmäßige Zeitwörter.) Passiv. 6tes Stück. Grammatik (Buttmann): regelmäßige Etymologie bis zu den Verben in $\mu\iota$.

Lateinische Sprache: I. 8 St. Horat. od. III. 25. — IV. 2 St. Sallust. b. Ingurth. theilweise. Im W. Cic. de rep. I. II. VI. Im S. Cic de off. Tacit. Agric. Disputationen, Extemporatien, sechswöchentlicher Aufsatz, wöchentliches Exercitium. 6 St. — II 10 St. Cic in Verr. act. 2. bis III, 25 — II, 47. Virg. Aeneis lib. VIII. IX X. zur Hälfte. Liv. epit. XI. — XX. XXI — XXII. 30. Zumpt's Grammatik K. 81. von den Participien bis zu Ende der Grammatik, (mit Auslassung des Abschnittes über die zusammengesetzten Metra.) Dann K. 1. — 23. wöchentliches Exercitium, vierteljähriger Aufsatz der 1sten Abth. — III. 10 St. In W. Caes. b. civ. III. 3 St. Ovid. trist. 15 Elegieen; Anfangsgründe der Metrik. 2 St. Zumpt's Grammatik. K. 69 — 75. Im S. Caes. b. gall. I. 2 St. Ovid. Metam. (Seidels Auszug) III — V. 3 St. Zumpt's Grammatik. K. 76 — 83. Wiederholung der Etymologie; wöchentliches Exercitium und Uebungen im Uebersetzen in der Schule bei Erklärung der Regeln. — Uebungen im Memoriren classischer Stellen aus Cic., zweier Elegien aus Ovid. 1 St. — IV. 10 St. Corn. Nep. Eum. Epamin. Pelop. Milt. — Phaedr. fab. 31 — 80. (Sammlung von Brillowski.) Grammatik: Wiederholung der Etymologie, Rection der Casus. Uebungen im Uebersetzen aus dem Deutschen, nach O. Schulz Aufgaben, 1ster Cursus und Anhang; 2ter Cursus, ausgewählte Stücke; Memorirüb. classischer Stellen aus Cic, Liv, Seneca; wöchentliches Exercitium. — V. 10 St. Jacobs Lesebuch, Länder- und Völkerkunde S. 93 — 122. Wiederholung der Etymologie, Syntax nach O. Schulz; mündliche und schriftliche Uebungen, größtentheils aus Stellen des Cicero, die zugleich memorirt wurden. — VI. 10 St. Formenlehre, 1ster Cursus nach O. Schulz, stets mit mündlichen Uebungen in der Deklination, Conjugation, und regelmäßigen Comparation. O. Schulz] Uebungs-Aufg. Reg. 1 — VIII. Jacobs Elementarbuch, der einfache Satz. Beispiele 1 — 242. Im S. derselbe Cursus und Wiederholung.

Deutsche Sprache: I. 2 St. Literatur-Geschichte, 4ter und 5ter Zeitraum nach Pischon's Handbuch. Lektüre der Iphigenia von Göthe, mit Commentar von Pudor und Weber; Lektüre des Tell, mit Commentar von Weber und Hoffmeister. Disputatorien; monatlicher Aufsatz. — II. 2 St. Historisch-biographische Uebersicht der Literatur-Geschichte vom J. 1770 bis auf Schiller und Göthe, nach Pischon's Handb.; freie Vorträge, monatlicher Aufsatz. III. 2 St. Horn's Grammatik § 1 — 310. Declamiren; vierzehntägiger Aufsatz. — IV. 2 St. Einfacher und zusammengesetzter Satz; Declamationen, dreiwöchentlicher Aufsatz. — V. 4 St. Das Grammatische, namentlich das Verbum, der zusammengezogene Satz, wurde zunächst an die Lektüre der Stücke in Hüllstett's Lesebuch angeknüpft. Orthographie und Stilübungen nach vorgelesenen längeren Lesestücken; Declamiren. 1 St. — VI. 4 St. Der reine einfache Satz; Kenntniß der Redetheile; Conjugation, Declination des Substantiv; das Wichtigste vom Pronomen und den Präpositionen; Vorkenntnisse zur Wortbildung, schriftliche orthographische Uebungen; andere schriftliche Uebungen zum Durchdenken des Erklärten. Declamiren 1 St. mit Cl. V.

Französische Sprache: I. 2 St. Mehrere Stücke aus Ideler und Nolte Handbuch der franz. Sprache und Literatur (pros. Theil) Voltaire, Henriade. I. 1 — 4. 1 St. Grammatik nach Hirzel 1 St. Syntax in Verbindung mit wöchentlichen Uebungen. — II. 2 St. Voltaire, Charles XII. 1 St. Grammatik nach Hirzel 1 St. Etymologie der Irregularen, Syntax des Artikels, Adjectiv und Pronomen mit wöchentlichen Exercitien. III. 2 St. Grammatik, regelm. und unregelm. Etymologie., Uebersetzen aus Hecker's Lesebuche; erste Uebersetzungs-Uebungen aus dem Deutschen ins Französische; Leseübungen mit den Anfängern.

Hebräische Sprache: I. 2 St. Wiederholung der gesammten Etymologie, nach Gesenius Grammatik, Lektüre der Genesis. II Die Formenlehre, Gesenius Grammatik; Lehre vom Nomen, bis zur VI. Cl. der Nomina; Lehre vom regelmäßigen und unregelmäßigen Verbum; mündliche Einübung der Formenlehre sowohl des starken Stammes als der schwachen Stämme nach Maurer's praktischem Cursus; schriftliche Uebungen über die schwachen Verba; Uebersetzung einiger Kapitel aus der Genesis mit den Geübtern.

Religionslehre: I. 2 St. Geschichte der christlichen Religion und Kirche; Lektüre des Römerbriefes im grichischen Texte. — II 2 St. Einleitung in die biblischen Schriften des Alten und Neuen Testaments. Fortgesetzte Lektüre des Evangelium Lucas im griechischen Texte. — III Im W. Die Lehre von Gott, nach dem ersten Artikel. Im S. Die Lehre von Christus, nach dem zweiten Artikel; viele Stücke aus den Propheten wurden gelesen; die wichtigsten Aussprüche Jesu wurden gelesen, erklärt und zum Theil von den Schülern auswendig gelernt. — IV. 2 St. Im W. Die Lehre vom göttlichen Gesetz; Erklärung des ersten Hauptstückes; Ausarbeitungen; Spruchlernen. Im S. Erklärung des Wichtigsten aus dem jüdischen Ceremonien-Gesetze; Erklärung der Reden Jesu gegen die Pharisäer; Erklärung der Bergpredigt, woraus ein großer Theil von den Schülern memorirt wurde die Gleichnisse Jesu vom Himmelreiche. — V. VI. 2 St. im W. biblische Geschichten des Alten Testaments; die wichtigsten Wahrheiten der Religion nach geordneten Bibelsprüchen; der kleine Katechismus auswendig gelernt. Im S. Biblische Geschicht. des Alten Testaments; Fortsetzung der Unterhaltungen über die wichtigsten Wahrheiten der Religion nach Bibelsprüchen.

Mathematik: I. 4 St. Wiederholung der Kreisfunctionslehre; Trigonometrie; Polygonometrie; Stereometrie; quadratische Gleichungen mit mehreren unbekannten Größen; Logarithmen-Theorie durch Reihen; Combinationslehre; Porgressionen; Uebungen im Behandeln trigonometrischer Aufgaben und deren geometrischer Construction. In Prima selecta Differentialrechnung, und aus der analytischen Geometrie die Ellipse nach Brandes. — II. 4 St. Wiederholung der Planimetrie; niedere Arithmetik; Kreisfunctionslehre und ebene Trigonometrie; Gleichungen des ersten Grades. - III 3 St. Planimetrie, nach Tellkampf's Vorschule der Mathematik; Anfangsgründe der Arithmetik und Algebra. — IV. 3 St. Die drei ersten Abschnitte der Geometrie nach Tellkampf's Vorschule; Bruchlehre und bürgerliche Rechnungsarten. — V. 4 St. Im W. einfache und zusammengesetzte Verhältnißrechnung; Kettenrechnung. Im S. Bruchrechnung. — Geometrische Anschauungslehre: Linie, Winkel, ebene Figuren, Ausmessung regelmäßiger Flächen und Prismen. — VI. 4 St. Im W. die vier Species in benannten und unbenannten Zahlen und Brüchen. Im S. derselbe Cursus und Wiederholung.

Physik: I. 2 St. Mathematische Geographie und allgemeine Physik — II. 1 St Die Elemente der Chemie und allgemeine Physik.

Geschichte und Geographie: I. 2 St Neuere Geschichte; Im W. Schluß der Geschichte des 18ten Jahrhunderts; Wiederholung der alten Geschichte und Geographie. Im S. Geschichte des 16ten Jahrhunderts; Wiederholung der mittlern Geschichte und der neuern Geographie. — II. 2 St. Im W. mittlere Geschichte bis zu den Kreuzzügen. Im S. Fortsetzung der mittlern Geschichte bis 1500. — III. 3 St. in W. Geographie der außereuropäischen Staaten; mathematische und physische Geographie. Im S. Uebersicht der alten Geschichte und Geographie. — IV. 2 St. in W. Geschichte des Alterthums, besonders Griechenlands bis auf Alexander. In S. Geographie der außereuropäischen Länder, besonders Amerikas. V. 3 St. Im ersten und dritten Quartale Geographie von Preußen, Deutschland. Wiederholung der natürlichen Geographie; Geschichte nach Bredov's Handbuche § 27 — 43. — VI. 3 St. Geographie nach dem Leitfaden von Weiß § 11 Inseln, bis § 38 Deutschland.

Naturgeschichte. III. 2 St. Im W. Anthropologie. Im S. Minoralogie; Wiederholung einiger Theile der Zoologie. — IV. 2 St. Im W. botanische Terminologie. Im S. Botanik. — V. 2 St. Säugethiere, Reptilien, Schmetterlinge. — VI. 2 St. Einiges aus der Zoologie.

Propädeutik zur Philosophie. I. 2 St. Psychologie.

Technische Fertigkeiten. 1. Gesang in III. 2 St. Vierstimmige Chöre; Hymnen, Motetten. — IV. 2 St. Zweistimmige Chöre, erste und zweite Stimme. V. 2 St. VI. 2 St. Vorübungen; ein und zweistimmige Gesänge. 2. Zeichnen in IV. 2 St. Uebung im Baumschlag; Landschaften u. s. w. in schwarzer Kreide. Privatim wurden von Schülern oberer Classen Landschaften in Kreide und Deckfarben, Köpfe u. s. w. gezeichnet. V. 2 St. VI. 2 St. Uebungen des Striches in allen Lagen und Richtungen, Zusammensetzungen geradliniger Figuren, Schattirübungen und Zeichnen von geometrischen Körpern. — 3. Schreiben IV. 1 St. V. 3 St. VI. 3 St.

---

2. Die gymnastischen Uebungen, welche der technische Hülfslehrer Herr Küsell seit Pfingsten vorigen Jahres leitet, wurden in allen sechs Classen fortgesetzt und nach Anschaffung neuen Apparates erweitert.

3. Die Arbeitstage innerhalb der Lehranstalt, (die Lehrstunden sind Aufsichtsstunden,) fanden monatlich in der Classe I. und II. statt.

4. Nebst den in der lateinischen Sprache angestellten grammatikalisch-methodischen Memorirübungen traten auch Uebungen gleicher Art in der griechischen Sprache in Classe IV. und III. unter Leitung des Oberlehrers Herrn Weyl ein.

II. Verordnungen der Königl. hohen Schulbehörden.

1. Vom 6. November 1841. Mittheilung der Allerhöchsten Kabinets-Ordre vom 12. Mai 1841 und des Auszuges aus der Verordnung vom 28. Februar 1806. § 8 und 10, das Verhältniß der Beamten ihren Gläubigern gegenüber betreffend.

2. Vom 12. November. Genehmigung des Lehrplanes für das Schul-Jahr Michaelis 1841 bis dahin 1842.

3. Verfügung des Königl. hohen Ministeriums der Unterrichts-Angelegenheiten vom 14. October an das Königl. Provinzial-Schul-Collegium in Berlin, durch Reskript des Königl. Provinzial-Schul-Collegium in Königsberg vom 29. October mitgetheilt, die Ausfüllung der zweiten Rubrik in den Schul-Abgangszeugnissen betreffend, mit Hinweisung auf § 31 des Reglements vom 4. Juni 1834.

4. Vom 6. December. Anzeige von dem Erbieten der Buchhandlung der Gebrüder Bornträger in Königsberg, Voigt's Handbuch der Preußischen Geschichte zum Besten wenig bemittelter Schüler in Partieen den Band zu dem Preise von 1 Rℓ. 20 Sgr. zu liefern.

5. Verfügung des Königl. Ministeriums vom 21. Dezember 1841 an sämmtliche wissenschaftliche Prüfungs-Commissionen, die Prüfung der Kandidaten des höhern Schul-Amts betreffend, mitgetheilt durch Reskript des Königl. Provinzial-Schul-Collegiums vom 5. Januar 1842.

6. Vom 6. Januar und 21. Juli 1842. Bescheid der wissenschaftlichen Prüfungs-Commission über die Abiturienten-Arbeiten Michaelis 1841 und Ostern 1842.

7. Vom 6. August 1841. Mittheilung eines Lehrplans des Religions-Unterrichtes.

8. Empfehlung der lateinischen Synonymik des Dr. Schultz in Arnsberg, Circular-Verfügung des Königl. Ministeriums vom 19. December 1841 mitgetheilt durch Reskript des Königl. Provinzial-Schul-Collegiums vom 4. Januar 1842.

9. Vom 18. Januar 1842. Empfehlung der akustischen Apparate des Instrumentenmachers Ferdinand Lange in Berlin, Behufs des physikalischen Unterrichtes.

10. Vom 1. Februar. Schrift des Profess. Hiecke „der deutsche Unterricht auf deutschen Gymnasien" zu näherer Prüfung und Beachtung empfohlen.

11. Erlaß des Königl. Ministeriums vom 7. Mai, nach Allerhöchster Ordre vom 7. Februar, mitgetheilt durch Reskript des Königl. Provinzial-Schul-Collegiums vom 18. Mai. Den Staatsbeamten, welche der Graf v. Schulenburgschen allgemeinen Wittwen-Pensions- und Unterstützungs-Anstalt beitreten, ist für die beizubringenden Aufnahme-Atteste die Stempelfreiheit bewilligt, wie solche den Interessenten der Königl. Wittwen-Verpflegungs-Anstalt nach § 15 des Reglements zugestanden ist.

12. Vom 28. April. Die Königl. Ministerial-Verfügung vom 24. September 1826 ergänzende Bestimmungen, nach Königl. Ministerial-Erlaß, die ersprießliche Beschäftigung der Schul-Amts-Kandidaten während ihres Probejahres betreffend.

13. Vom 9. August. Anzeige von einer beabsichtigten Herausgabe eines wissenschaftlichen Repertoriums aller mit den Preuß. Gymnasial-Programmen vom Jahre 1825 bis 1840 erschienenen wissenschaftlichen Abhandlungen. (Von Seiten des hiesigen Gymnasiums ist auf 4 Exemplare unterzeichnet worden.)

14. Unter dem 30. März 1842. Erlaß des Königl. hochverordneten Provinzial-Schul-Collegiums in Königsberg an den unterzeichneten Director, worin die hohe Behörde ein ihn erfreuendes Anerkenntniß seiner Amtswirksamkeit mit den Worten ausdrückt:

„Ew. Wohlgeboren eröffnen wir, daß wir mit Wohlgefallen die große „Sorgfalt ersehen haben, welche Sie auf die vorliegende hochwichtige „Angelegenheit gewendet haben, wofür wir Ihnen unsern Beifall hiermit aussprechen."

III. Chronik der Lehr-Anstalt.

A. Im Lehrerpersonale ist im abgewichenen Schuljahre keine Veränderung eingetreten.

Dem unterzeichneten Direktor, welcher von Gründung des Gymnasiums an den 7ten Juni 1817 sein Amt als Oberlehrer antrat und seit seiner Berufung 25 Jahre hindurch an dieser Lehranstalt thätig war, und den ein halbes Jahr nach Eröffnung der Lehranstalt vocirten Lehrern, Oberlehrer Herrn Weyl und Cantor Herrn Küsell, gaben am 7ten Juni dieses Jahres die Mitglieder des Lehrer-Collegiums und die Schüler der Anstalt ihre Glückwünsche zu dem unter Gottes Schutze zurückgelegten Lebenswege zu erkennen. Freunde des Schulwesens knüpften die Theilnahme, welche sie an dem Bestehen und Gedeihen des Gymnasiums nehmen, an diese persönlichen Verhältnisse und vereinigten sich mit dem Lehrer-Collegium zu einem Festmahle. Der wissenschaftliche Hülfslehrer Herr Marotzky sprach die Theilnahme des Lehrer-Collegiums in einer Dichtung aus.

B. Lehrapparat: 1. Die Gymnasial-Bibliothek gewann durch Geschenke des Königl. hohen Ministeriums folgenden Zuwachs:

1. Welcker, 3ter Supplement Band des VI. Jahrgangs des Rheinischen Museums für Philologie. (Rescript vom 25. October 1841.) 2. Nees v. Esenbeck, genera plantar. florae. Germ. fasc. XXI. (Rescript vom 2. November.) 3. A. Erman, Reise um die Erde, 2te Abtheilung des 2ten Bandes. (Rescript vom 10. November.) 4. Uhlemann, Anleitung zum Uebersetzen aus dem Deutschen ins Hebräische, 1. und 2. Cursus. (Rescript vom 16. November.) 5. Bernd, allgemeine Schriftenkunde der gesammten Wap-

penwissenschaft, 4ter Theil. (Rescript vom 4. December.) 6. Hegel, 7ter Band der Werke, Vorlesungen über die Natur-Philosophie. (Rescript vom 27. Januar 1842.) 7. Wandkarte der östlichen und westlichen Hemisphäre, aus dem Kunstverlag von Kortmann in Berlin. (Rescript vom 1. Februar.) 8. W. Stolze, Lehrbuch der Stenographie. (Rescript vom 7. Februar.) 9. Trendelenburg, elementa logic. Aristotel. 2te Auflage. (Rescript vom 12. Februar.) 10. Von der Hagen, Sammlung altdeutscher lyrischer Dichter des 12ten bis 14ten Jahrhunderts; Geschenk Sr. Majestät des Königs. (Rescript vom 6. April) 11. Trendelenburg, Erläuterung zu seinen Elementen der Aristotelischen Logik. (Rescript vom 20. Juli.) 12. Herr Geheimer Regierungsrath, Professor Voigt schenkte unter dem 30. April c. der Lehr-Anstalt den von ihm herausgegebenen und auf Kosten des Staats gedruckten Codex diplomaticus Prussicus T. I. II. 13. Die Buchhandlung Albert Baumann in Marienweder übersandte unter dem 31. Juli als Geschenk das „Gesangbuch für Schulen," herausgegeben von J. A. Lehmann. 14. Hr. Prediger Voigdt an der Kirche im Sackheim in Königsberg schenkte in freundlichem Andenken an unsere Lehr-Anstalt seine Schrift: „Erinnerungen an Herbart" Königsberg, bei Theile. 1841.

Aus dem Bibliothekfonds der Lehranstalt wurden angekauft: 1. C. Venturini, neue historische Schrifte, 4ter Band. 2. Leo, Lehrbuch der Universalgeschichte, 5ter Band. 3. Drumann, Geschichte Roms, 5ter Theil. 4. Ilgen, Zeitschrtft für historische Theologie 1841, 1. — 3. Heft. 5. Scriptor. Byzant. Ioann Zonaras T. 1. — Theophanes Vol. II. — Leo Grammatikus — Eustathius. 6. Ersch und Gruber, allgemeine Encyclopädie Sect. I. 35. II. 19. III. 15. 7. Crelle, Journal für Mathematik, Band XXII. 4. XXIII. XXIV. 1. 8. Lévizac, grammaire française. 9. Girault Duvivier, grammaire des grammaires T. I. II. 10. Le Roux Laserre, methodische Grammatik der französischen Sprache, 11. Meineke, fragm. comic graec. T. IV. comoedia nova. 12. Lüdde, Zeitschrift für vergleichende Erdkunde, 1. — 5. Heft. 13. Zimmermann, Zeitschrift für Alterthums-Wissenschaft 1842. 14. Poggendorf, Annalen der Physik LIII. 6. 7. 8. LIV. LV. 1. — 6. 15. Henr. Stephanus, thesaur. graec. ling. Vol. V. F. 1. VI. F. 1.

2. Zur Lesebibliothek kamen neu hinzu. 1. G. H. v. Schubert, Altes und Neues, aus dem Gebiete der innern Seelenkunde, 4 Bände. 2. Desselben, Reise ins Morgenland, 3 Bände. 3. Chr. Fr. Dan. Schubart, sämmtliche Gedichte, 3 Bände. 4. v. Platen, der romantische Oedipus, die verhängnißvolle Gabel. 5. Immerman, dramatische Werke, 3ter und 4ter Theil. 6. Original-Beiträge der deutschen Schaubühne, I. 7. Mahler Müllers Werke, 3 Bände. 8. E. v. Bülow, Simplicissimus. 9. Salis, Gedichte, 10. H. v. Collin, sämmtliche Werke, 6 Bände. 11 Ramler, poetische Werke, 2 Theile. 12. A. W. v. Schlegel, Gedichte, 2 Bände. 13. Alex. Jung, Vorlesungen über die moderne Liter. der Deutschen. 14. Steub, Bilder aus Griechenl. 15. v. Chamisso, Peter Schlemihl.

3. Die mathematisch-physikalische Sammlung wurde durch einen electrogalvanischen Apparat vermehrt.

C. Schulfeierlichkeiten: 1. Den 14. October 1841 wurde das neue Schuljahr eröffnet. Der Director las den versammelten obern Classen die Schulordnung vor. 2. Den 15. October feierte die Lehranstalt den Geburtstag Sr. Majestät, des Königs. Herr Oberlehrer Dr. Janson entwickelte in seiner Festrede den Satz: „die griechische und römische Geschichte zeigt den beglückenden Einfluß der Königsherrschaft auf." 3. Den 16. October wurden unter Vorsitz des Königl. Commissarius Herrn Provinzial-Schulrath Dr. Lucas sechs Abiturienten geprüft. (S. E.) 4. Den 19. October entließ der Director die genannten Zöglinge in einem öffentlichen Redeacte zur Universität und führte in seiner Entlassungs-Rede den Gedanken aus: „das ist die rechte Erkenntniß, die das Herz bessert." Der Primaner Jonas wünschte mit der Ausführung des Satzes, ubi patria, ibi bene, den Scheidenden im Namen der zurückbleibenden Mitschüler Glück. 5. Die öffentliche Schulfeierlichkeit am Charfreitag, den 25. März 1842, vollzog der Director durch einen Redeact, in welchem er die Wahrheit entwickelte: „der Tod des Erlösers lehrt die Verklärung der Menschen-Natur im Gottesreiche." 6. Den 2. April wurden drei Schüler vor der Prüfungs-Commission unter Vorsitz des Königl. Commissarius mündlich geprüft, welche der Director den 5. April in einem öffentlichen Schulacte zur Universität entließ, indem er zu ihnen von dem wohlthätigen Einflusse sprach, den der Rückblick auf die durchlebte Schulzeit auf das Gemüth des studirenden Jünglings hat. Der Primaner Schlick wünschte den Abgehenden im Namen seiner Mitschüler Glück. 7. Den durch die Hippelsche Stiftung gegründeten Redeact am 19. Mai leitete Herr Gymnasial-Lehrer Claussen ein, in dem er einige Worte über eine planmäßige Lektüre Deutscher Classiker in Schulen sprach. Hierauf hielt der Primaner Schoulz einen Vortrag: „Beurtheilung des letzten Ritters von Anastasius Grün;" der Sekundaner Maschke sprach über „Schillers Jungfrau von Orleans," nach Anleitung Hofmeisters zu Schillers Leben. Hierauf recitirten folgende Schüler Dichtungen meist neuerer Dichter: Die Tertianer Löffler, Lottermoser, Collin, Ueberson; die Quartaner Kahlbeck, Julius Schrempf, Kah, Schenk; die Quintaner Wilhelm Berger, Rathke, Friedrich Neumann, Brosch, Julius Lottermoser, Maroska; die Sextaner Franz Hildebrandt, Brillowski, Modricker, Kühnast. 8.) den 31. Juli feierte die Lehr-Anstalt das heilige Abendmahl mit den Communicanten der Gemeinde.

D. Unterstützungs-Fonds: 1. Aus dem Königl. Stipendien-Fonds des Gymnasiums genossen Unterstützung die Primaner Jonas, Schoulz, Schulz, Neide; die Secundaner Buzello, Matthes, Jandrzeycik, Küsell, Maschke, Böttcher, Minde; die Tertianer Dumas, Wendland, Löffler, Lipka.

2. Aus dem Fonds des Collegium Albertinum wurden die Primaner Krieger und Kalwa unterstützt. Mit dem Schlusse dieses Schuljahres fallen die letzten Stipendienraten an die Universität Königsberg zurück. Nach der laut Allerhöchster Kabinets-Ordre vom 7. November 1821 und laut eines Königl. Ministerial-Erlasses vom 11. No-

vember erfolgten Reform des mit dem Collegium Albertinum in Königsberg früher verbundenen Pädagogiums, waren dem hiesigen Königl. Gymnasium 10 Stipendienraten, jede zu 40 Rℓ, (früher auch in Portionen zu 60 Rℓ) jährlich zugewiesen worden, welche Schüler bis zum 19. Lebensjahre genießen sollten, die aus polnisch sprechenden Gemeinden Ostpreußens mit Einschluß Litthauens gebürtig, für wissenschaftliche Studien befähigt, wären, durch Fleiß und Wohlverhalten sich auszeichneten, und zu Predigt- und Lehr-Aemtern in polnischen Gemeinden sich vorbereiten wollten. Dieses von dem hochlöblichen Universitäts-Curatorium beaufsichtigte und von dem Königl. akademischen Senate der Universität Königsberg durch einen Commissarius verwaltete Institut wurde, nach Erfüllung des temporären Bedürfnisses, durch Königl. Kabinets-Ordre vom 17. Februar 1840 in seinem frühern Bestehen geändert, doch mit der Maßgabe, daß diejenigen Schüler des Gymnasiums, welche bereits ein Stipendium zugesichert erhalten hatten, in dem Fortgenusse desselben bis zur Beendigung der Collationszeit belassen werden sollten (nach einer Mittheilung, die Seitens des akademischen Senats an Unterzeichneten unter dem 4. April 1840 erging. S. Programm 1840. II. 20.) Mehreren der Percipienten nach geänderter Fundation wurde bis zu ihrer Entlassung zur Universität das polnische Stipendium verlängert. In dem Zeitraume von 20 Jahren (von 1822 bis 1842.) haben 39 Schüler des hiesigen Gymnasiums das polnische Stipendium genossen.

E. Michaelis 1841 wurden folgende Schüler mit dem Zeugnisse der Reife zur Universität entlassen:

1.) Ernst Frenzel, aus Willenberg gebürtig, Sohn des Pfarrers daselbst, $17\frac{1}{2}$ Jahr alt, $4\frac{1}{4}$ Jahr im Gymnasium, 2 Jahre in Prima, studirt Cameralia in Berlin.

2.) Friedrich Krawielicki, aus Jeßiorken bei Rhein, Sohn eines Landmannes daselbst, $21\frac{1}{2}$ Jahr alt, 9 Jahr im Gymnasium, 2 Jahr in Prima, studirt Theologie in Königsberg.

3.) Wilhelm Schröter, aus Breslau, Sohn des Königl. Kreis-Kassen-Rendanten in Rössel, $20\frac{1}{4}$ Jahr alt, 5 Jahr auf dem Gymnasium, 2 Jahr in Prima, studirt Medicin in Berlin.

4.) Gustav Eduard Arndt, aus Rössel, Sohn des Rectors in Wartenburg, $20\frac{1}{2}$ Jahr alt, $8\frac{1}{4}$ Jahr im Gymnasium, 2 Jahr in Prima, studirt Theologie in Königsberg.

5.) Louis Neumann, aus Pierrau bei Sorquitten, Sohn des verstorbenen Gutsbesitzers, Amtmanns auf Dürwangen, 19 Jahr alt, 12 Jahr im Gymnasium, 2 Jahr in Pri ma, studirt Jura in Königsberg.

6.) Carl Rudolph Gottschall, aus Breslau, Sohn des Königl. Artillerie-Hauptmanns **Gottschall** a. D., jetzt in Königsberg, 18 Jahr alt, 2 Jahr im hiesigen Gymnasium, studirt Jura in Königsberg.

Ostern dieses Jahres wurden mit dem Zeugnisse der Reife zur Universität entlassen:

1.) **Friedrich Augar**, aus Klein Salpkeim bei Rhein, Sohn des Krugbesitzers daselbst, 23 Jahr alt, 12 Jahr im Gymnasium, $2\frac{1}{2}$ Jahr in Prima, studirt Theologie in Königsberg.

2.) **Leo Jonas**, aus Labiau, Sohn des Kantors daselbst, 18 Jahr alt, $3\frac{1}{2}$ Jahr im Gymnasium, 2 Jahr in Prima, studirt Theologie in Königsberg.

3.) **Wilhelm Neumann**, Sohn des Pfarrers in Langheim bei Rastenburg, 21 Jahr alt, $10\frac{1}{2}$ Jahr im Gymnasium, 2 Jahr in Prima, studirt Theologie in Königsberg.

Alle sind evangelischer Confession.

F. Uebersicht der statistischen Verhältnisse.

1. **Lehrer-Collegium und Unterrichts-Gegenstände:** 1. **J. W. G. Heinicke**, Director, in Prima Latein 2 St., Griechisch 2., Hebräisch 2., Propädeutik zur Philosophie 2., Religion 2. — In Secunda Religion 2 St.

2. **J. M. Klupß**, erster Oberlehrer, Professor, Mathematik in I. 4 St., in II. 4., in III. 3., in IV. 3. Physik in I. 2., II. 1. Naturgeschichte, in V. 2.

3. **W. F. Fabian**, zweiter Oberlehrer, Professor, Latein in I. 6 St., in II. 10. Geographie in VI. 3.

4. **A. H. J. Brillowski** Dr., dritter Oberlehrer, Geschichte in I. 2 St., in II. 3., in III. 3. Latein in III. 10. Deutsch in III. 2.

5. **C. F. Weyl**, Oberlehrer, Französisch in I. 2 St., in II. 2., in III. 2. Griechisch in III. 6., in IV. 6. Naturgeschichte in III. 2., in IV. 2., in VI. 2.

6. **G. L. Janson** Dr., Oberlehrer, Griechisch in I. 4 St., in II. 6. Deutsch in II. 2., in IV. 2. Latein in V. 9.

7. **C. W. Claussen**, Gymnasial-Lehrer, Latein in IV. 10 St., V. 1. Deutsch in I. 2., V. 3. Geschichte in V. 3. Rechnen in V. 4.

8. **H. E. Marotsky**, wissenschaftlicher Hülfs-Lehrer, Religion in III. 2 St., in IV. 2., in V. VI. 2. Geschichte in IV. 2. Latein in VI. 10. Deutsch in VI. 4. (1 mit V. combin.)

9. **C. F. E. Küsell**, technischer Hülfs-Lehrer, Gesang-Lehrer, Gesang in III. 2 St., in IV. 2., in V. 2., in IV. 2. Rechnen in VI. 4.

10. C. E. Thiem, technischer Hülfs-Lehrer, Zeichnen- und Schreib-Lehrer, Zeichnen in IV. 2 St., in V. 2., in VI. 2. Schreiben in IV. 1., in V. 3., in VI. 3.

2. Schülerzahl. Es befinden sich jetzt (September) in Prima 15., in Secunda 40, in Tertia 57, in Quarta 45, in Quinta 31, in Sexta 18 Schüler. Summa 206. Im Laufe des Jahres wurden aufgenommen 51. (Michaelis 30, Ostern 21.) — Zur Universität gingen ab 9. 5 um Theologie, 2 um Jura in Königsberg, 1 um Cameralia, 1 um Medicin in Berlin zu studiren. Zu anderweitiger Bestimmung sind abgegangen 16. Entfernt wurden 3 Secundaner.

Ordnung der Jahres-Prüfung.

Montag, den 26. September, Vormittags 9—12 Uhr.

Cl. VI.	Religion,)	Herr Hülfs-Lehrer Marotsky.	
— —	Lateinisch,)		
Cl. V.	Geschichte und)	Herr Gymnasial-Lehrer Claussen.	
	Geographie,)		
— —	Rechnen,)		
Cl. IV.	Geschichte, Herr Hülfs-Lehrer Marotsky.		
— —	Griechisch, Herr Ober-Lehrer Weyl.		

Nachmittags 2—4 Uhr.

Cl. III. Lateinisch, Herr Ober-Lehrer Dr. Brillowski.
— — Mathematik, Herr Professor Klupß.
— — Naturgeschichte, Herr Ober-Lehrer Weyl.

Dienstag den 27. September, Vormittags 9—12 Uhr.

Cl. II. Religion, der Director.
— — Griechisch, Herr Ober-Lehrer Dr. Janson.
Cl. I. Lateinisch, Herr Professor Fabian.
— — Deutsch, Herr Gymnasial-Lehrer Claussen.

Nachmittags 2—3 Uhr.

Cl. I. Physik, Herr Professor Klupß.
— — Geschichte, Herr Ober-Lehrer Dr. Brillowski.

3—4 Uhr, Entlassung der Abiturienten. Zwischen den Lectionen werden declamiren, die Sextaner Modricker, Hildebrandt, Lövenstein; die Quintaner Neumann, Döbbelin, Kühnast; die Quartaner Preuß, Penski, Kahlbeck; die Tertianer Sotteck, Neumann, Collin; der Secundaner Jendrzeycick und der Primaner Dreist werden Vorträge halten.

Mittwoch, den 28. September, Morgens 7 Uhr erfolgt mit der vierteljährigen Censur die Classen-Versetzung. Während der Michaelis-Ferien (vom 29. September bis 8. October) wird die Inscription neuer Schüler vollzogen. Das neue Schuljahr beginnt mit dem 10. October.

Rastenburg, im September 1842.

J. W. G. Heinicke.

Fortsetzung

der

Potenzlehre.

Vorbericht.

Ich habe im Programme 1836 einen Leitfaden der Potenzlehre entworfen, welcher den Schülern in die Hände gegeben, mir den Unterricht in diesem Zweige erleichtern soll, und zu gleichem Zwecke erfolgt hier die Fortsetzung derselben.

Klupsz.

§ 6.

Um aus dem Ausdrucke $\alpha^n = p$, $\alpha = \sqrt[n]{p}$ für alle Fälle zu finden (vergleiche § 3.), brauchen wir den binomischen Lehrsatz mit positiven ganzen Exponenten:

$$(a+b)^n = a^n + na^{n-1}b + \frac{n(n-1)}{1.2}a^{n-2}b^2 + \frac{n(n-1)(n-2)}{1.2.3}a^{n-3}b^3$$

$$+ \frac{n(n-1)(n-2)(n-3)}{1.2.3.4}a^{n-4}b^4 + \text{u. s. w.}$$

Beweis. Wir fanden (§ 1 Zusatz 6) $(a+b)^1 = a+b$, $(a+b)^2 = a^2 + 2ab + b^2$, $(a+b)^3 = a^3 + 3a^2b + 3ab^2 + b^3$ u. s. w., welche Ausdrücke aus dem obigen allgemeineren hervorgehen, wenn wir resp. $n=1$, $n=2$, $n=3$ u. s. w. setzen. Es wird nämlich für $n=1$, $(a+b)^1 = a^1 + 1a^{1-1}b + \frac{1.0}{1.2}a^{1-2}b^2 + \text{rc.}$, wo das 3te und alle folgenden Glieder den Faktor 0 enthalten und folglich wegfallen, und da $a^0 = 1$ (§ 1. Zus. 3.), so wird $(a+b)^1 = a+b$; mithin der Lehrsatz richtig für $n=1$. Ebenso erhalten wir für $n=2$, $(a+b)^2 = a^2 + 2a^{2-1}b + \frac{2.1}{1.2}a^{2-2}b^2 + \frac{2.1.0}{1.2.3}a^{2-3}b^3 + \text{rc.}$ $= a^2 + 2ab + b^2$; es ist demnach der Lehrsatz richtig für $n=2$. Auch gibt die binomische Formel für $n=3$, $(a+b)^3 = a^3 + 3a^{3-1}b + \frac{3.2\,a^{3-2}}{1.2}b^2 + \frac{3.2.1}{1.2.3}a^{3-3}b^3$

$+ \frac{3.2.1.0}{1.2.3.4} a^{3-4} b^4 + \text{rc.} = a^3 + 3a^2 b + 3ab^2 + b^3$. Auf diese Weise könnten wir für jede folgende Potenz die Richtigkeit des Lehrsatzes nachweisen; es würde aber daraus auf keine Weise die Allgemeinheit des Satzes hervorgehen. Um diese Allgemeinheit zu erzielen, wollen wir beweisen, daß der Lehrsatz für jede folgende Potenz richtig sein müsse, wenn er für die vorhergehende richtig ist. Es sei demnach $n = l$ ein solcher specielle Fall, für welchen die Formel bereits bewiesen ist, so steht es uns frei $(a+b)^l = a^l + l a^{l-1} b + \frac{l(l-1)}{1.2} a^{l-2} b^2 + \frac{l(l-1)(l-2)}{1.2.3} a^{l-3} b^3 + \frac{l.(l-1)(l-2)(l-3)}{1.2.3.4} a^{l-4} b$ rc. zu setzen. Man multipliiere jetzt beide Seiten mit $a+b$ so haben wir

$$(a+b)^{l+1} = \left\{ \begin{array}{l} a^{l+1} + l a b + \frac{l(l-1)}{1.2} a^{l-1} b^2 + \frac{l(l-1)(l-2)}{1.2.3} a^{l-2} b^3 + \text{rc.} \\ \quad + a^l b + \quad l a^{l-1} b^2 + \frac{l(l-1)}{1.2} a^{l-2} b^3 + \text{rc.} \end{array} \right\} \text{ oder}$$

$$(\ +b)^{l+1} = a^{l+1} + a^l b (l+1) + l a^{l-1} b^2 \left(\frac{l-1}{2} + 1\right) + \frac{l.(l-1)}{1.2} a^{l-2} b^3 \left(\frac{l-2}{3} + 1\right)$$

+ rc. Bringt man $\frac{l-1}{2} + 1, \frac{l-2}{3} + 1, \frac{l-3}{4} + 1$ u. s. w., auf gleiche Benennung:

$$\frac{l-1+2}{2} = \frac{l+1}{2}, \frac{l-2}{3} + 1 = \frac{l-2+3}{3} = \frac{l+1}{3}, \frac{l-3}{4} + 1 = \frac{l-3+4}{4}$$

$= \frac{l+1}{4}$ u. s. w. so wird $(a+b)^{l+1} = a^{l+1} + (l+1) a^l b + \frac{(l+1) l. a^{l-1} b^2}{1.2} + \frac{(l+1) l. (l-1)}{1.2.3} a^{l-2} b^3 + \frac{(l+1) l. (l-1)(l-2)}{1.2.3.4} a^{l-3} b^4$ rc. rc.

Was wir offenbar erhalten, wenn wir in den Ausdruck für $(a+b)^l$ anstatt l überall $l+1$ setzen; es ist demnach der Lehrsatz für die $(l+1)^{\text{te}}$ Potenz richtig, wenn er für die l^{te} richtig ist. Da er nun für die 1^{ste} (auch zum Ueberfluß für die 2^{te} und 3^{te}) bereits bewiesen ist, so muß er für alle folgenden Potenzen richtig sein w. z. b. w.

Zusatz 1. Setzt man für b, $-b$ so werden alle geraden Potenzen von b positiv und alle ungeraden negativ (§ 1, Zusatz 2.); folglich:

$$(a+b)^n = a^n - n a^{n-1} b + \frac{n(n-1)}{1.2} a^{n-2} b^2 - \frac{n(n-1)(n-2)}{1.2.3} a^{n-3} b^3 + \text{rc.}$$

Zusatz 2, Setzt man $a=1$, so wird $(1 \pm b)^n = 1 \pm n b + \frac{n(n-1)}{1.2} b^2$

$\pm \frac{n(n-1)(n-2)b^3}{1.2.3} +$ rc., eine bloß nach den Potenzen von b fortschreitende Reihe.

§ 7.

Anwendung dieser Formel zur Berechnung des α im Ausdrucke $\alpha = \sqrt[n]{p}$. Es sei zuerst $n=2$; oder $\alpha = \sqrt{p}$. Da $1^2 = 1$, $10^2 = 100$, $100^2 = 10000$, $1000^2 = 1000000$ u. s. w. so ist umgekehrt $\sqrt{1} = 1$, $\sqrt{100} = 10$, $\sqrt{10000} = 100$, $\sqrt{1000000} = 1000$ und folglich die Quadratwurzel einer ein- und zweiziffrigen Zahl eine einziffrige, die Quadratwurzel einer 3 oder 4ziffrigen Zahl, eine zweiziffrige, einer 5 oder 6ziffrigen Zahl, eine 3ziffrige u. s. w. Wenn man folglich die gegebene Zahl p, zu welcher die Quadratwurzel gesucht werden soll — die ich der Kürze halber das Quadrat nennen will — von der Rechten zur Linken in Kolonnen zu zwei Ziffern eintheilt, so enthält die Quadratwurzel so viel Ziffern, als p Kolonnen hat, z. B. gibt $\sqrt{9|90|36|09}$ vier Ziffern und es kommt nur darauf an, diese Ziffern mit Sicherheit zu finden.

Auch hier kann man nur stufenweise fortschreitend zu Werke gehen. Es sei p, 1stens ein vollständiges Quadrat und eine ganze Zahl (vergl. § 3). Besteht p aus einer Kolonne, so ist die Quadratwurzel leicht zu finden, denn sie ist diejenige Zahl, welche zum Quadrat erhoben, p gibt. Besteht sie aus 2 Kolonnen, so kann sie als ein aus 2 Ziffern entstandenes Quadrat betrachtet werden, dem Zehner $=$ a und dem Einer $=$ b, und da $(a+b)^2 = a^2 + 2ab + b^2$, so müssen diese 3 Glieder in p enthalten sein.

Man suche zuerst a aus der ersten Kolonne d. h. diejenige Zahl, welche zum Quadrat erhoben der ersten Kolonne am nächsten kommt; so z. B. ist in $\sqrt{7|84|}$ die erste Ziffer $=2$, oder ihrem Range nach $=20$; denn $20^2 = 400$, 30^2 aber würde $=900$, mithin zu viel geben. Zieht man $a^2 = 400$ von $p = 784$ ab, so bleibt der Rest $384 = 2ab + b^2$. Da nun b^2 gegen $2ab$ klein ist, so findet man b, wenn man den Rest $= R = 2ab$ folglich $b = \frac{R}{2a} = \frac{384}{40} = \frac{38,4}{4}$ setzt. Hier muß jedoch b nur so groß angenommen werden, daß außer $2ab$, auch noch b^2 abgezogen werden könne; es kann mithin b nicht $=9$ sein, weil $2ab + b^2 = (2a+b)\,b = 49.\,9 = 441$, mithin zu viel geben würde. Aber $b=8$ gibt $2ab + b^2 = (2a+b)\,b = 48.\,8 = 384$. Man sieht leicht ein, daß in a^2 die 2 Nullen weggelassen werden können, wenn ihre Stellen nur leer bleiben, ebenso in 2a die eine Null, da 2a ohnehin seinen Rang (als Zehner) wieder erhält, wenn die 2te Ziffer b hinzu kommt. Es muß aber, wenn man in 2a die Null wegläßt, im Rest von der Rechten zur Linken eine Ziffer abgeschnitten werden, um b zu bestimmen d. h. man nimmt hier $\frac{R}{2a}$ anstatt $\frac{384}{40}$, $\frac{38,4.}{4}$ Man rechnet demnach nach folgendem Schema:

$$\sqrt{7\,|\,84\,|} = \overset{a}{2}\overset{b}{8}$$
$a^2 = 4$
$2a + b = 48 \;|\; 384$
$2ab + b^2 = \;|\; 384$

$$\sqrt{53\,|\,29} = \overset{a}{7}\overset{b}{3}$$
49
$143 \;|\; 429$
$ \;|\; 429$

Enthält das Quadrat p 3 Kolonnen, so sucht man zuerst, wie zuvor, aus den beiden ersten Kolonnen die beiden ersten Ziffern der Wurzel, welche nun als erster Theil des Binoms $= a$ angenommen werden, und die 3te Ziffer stellt b vor. Auf ähnliche Weise verfährt man bei 4, 5 u. s. w. Kolonnen z. B.

$$\sqrt{9\,|\,90\,|\,36\,|\,09} = \overset{\overbrace{\overbrace{a\ b}^{a}\ b}^{a}}{3\ 1\ 4}\ \overset{b}{7};$$
$a^2 = 9$
$2a + b = 61 \;|\; 90$
$2ab + b^2 = 61$
$2a + b = 624 \;|\; 2936$
$2ab + b^2 = 2496$
$2a + b = 6287 \;|\; 44009$
$2ab + b^2 = 44009$

$$\sqrt{10\,|\,09\,|\,14\,|\,22\,|\,89\,|} = 31767$$
9
$61 \;|\; 109$
$ \;|\; 61$
$627 \;|\; 4814$
$ \;|\; 4389$
$6346 \;|\; 42522$
$ \;|\; 38076$
$63527 \;|\; 444689$
$ \;|\; 444689$

§ 8.

Es sei 2tens p kein vollständiges Quadrat, oder nach § 3 die Quadratwurzel irrational, so ist α (des Ausdrucks $\alpha^n = p$) oder $\sqrt{p}$ weder eine ganze Zahl noch ein Bruch, und wir finden den Näherungswerth der Quadratwurzel, wenn wir an das gegebene Quadrat p zwei Nullen anhängen, wodurch p 100 Mal und die Quadratwurzel 10 Mal zu groß wird, und man muß folglich die Quadratwurzel mit 10 dividiren, d. h. von der Rechten zur Linken eine Ziffer abschneiden. Ebenso kann man ein 2tes, 3tes u. s. w. Paar Nullen anhängen, und von der Quadratwurzel resp. 2, 3 u. s. w. Ziffern abschneiden, und so die Rechnung bis ins Unendliche fortsetzen.

§ 9.

Es bestehe 3tens p aus einer ganzen Zahl und einem Dezimalbruch, so denke man sich das Komma 2, 4, 6 u. s. w. Stellen zur Rechten weiter geschoben, wodurch das Quadrat p, 100, 10000, 1000000 u. s. w. Mal und die Quadratwurzel, α resp. 10, 100, 1000, u. s. w. Mal zu groß wird, und man erhält den wahren Werth der Quadratwurzel, wenn man zur Rechten resp. 1, 2, 3 u. s. w. Dezimalen abschneidet. Man theile folglich die ganzen Ziffern vom Komma ab, von der Rechten zur Linken, und die Dezimalen von der Linken zur Rechten in Kolonnen zu 2 Ziffern ein, und rechne wie

gewöhnlich, schneide aber von der Quadratwurzel zur Rechten so viel Dezimalen ab, als man Dezimal-Kolonnen genommen hat. Beispiele zum 2ten und 3ten Fall:

$\sqrt{10} = 3{,}162277 \ldots$

	9
61	100
	61
626	3900
	3756
6322	14400
	12644
63242	175600
	126484
632447	4911600
	4427129
6324547	48447100
	44271829
	. . . .

$\sqrt{3 \mid 47 \mid 76, \mid 23 \mid 76 \mid 34 \;\ldots} = 186{,}483 \ldots$

	1
28	247
	224
366	2376
	2196
3724	18023
	14896
37288	314776
	298304
372963	1447234
	1418889
	. . . . . .

Anmerkung. Würde man an das gegebene Quadrat p eine Null anhängen, so müßte man die Quadratwurzel durch $\sqrt{10}$ dividiren. Ebenso müßte man, wenn man 3, 5 u. s. w. Nullen anhängen möchte, durch $\sqrt{1000}$, $\sqrt{100000}$, u. s. w., welche ebenfalls irrational sind, dividiren. Dasselbe gilt, wenn man 1, 3, 5, u. s. w. Dezimalen zu den Ganzen hinzurechnen würde.

§ 10.

Abgekürztes Verfahren. Da bei irrationalen Wurzeln die Rechnung nie abbricht, und da überhaupt nur so viel Dezimalen berechnet werden dürfen, als zur genauen Bestimmung der Sache erforderlich sind, und da ferner die 1ste und 2te Ziffer des Quadrats p die 1ste Ziffer des α und ebenso die 2te und 3te, 3te und 4te, 5te u. s. w. des p resp. die 1ste, 2te, 3te, 4te u. s. w. Ziffer des α genau bestimmen, so hat man von dem Quadrat nur $n+1$ Ziffern in Rechnung zu bringen, wenn α, n Ziffern enthalten soll — die Rechnung nach § 8 und 9 wäre folglich eine reine Zeitverschwendung. — Aus der Anzahl der Kolonnen der ganzen Ziffern des p kennt man nämlich die Anzahl der ganzen Ziffern des α, und die Anzahl der zu berechnenden Dezimalen richtet sich entweder nach dem Werthe der Dinge, oder nach den Rechnungsoperationen, welche fernerhin mit der Quadratwurzel vorgenommen werden sollen — man kennt demnach unter allen Umständen die Anzahl der zu berechnenden Ziffern des α — . Man nehme nun die $n+1$ ersten Ziffern des p, ohne Rücksicht auf das Komma, nach vorhergegangener Eintheilung in Kolonnen, streiche die übrigen durch, wenn nämlich α nur n Ziffern enthalten soll, rechne so lange wie gewöhnlich fort, als die $n+1$ Ziffern ausreichen, und von nun an fängt das abgekürzte Verfahren erst an. Fehlt nämlich in der zunächst herunter zulassenden Kolonne eine Ziffer, so streiche man in $2a+b$ die letzte Ziffer durch, und nehme in das Produkt $(2a+b)b$, wenn b^2 unter 4, 14, 24, 34, u. s. w. ist, von der durchgestrichnen Ziffer den Zehner resp. 0, 1, 2, 3, 4, u. s. w. zu dem Produkt der folgenden Ziffer hinzu; wenn aber b^2 5, 15, 25, 35, 45 und darüber beträgt, so nimmt man zu der folgenden Ziffer den Zehner resp. 1, 2, 3, 4, 5, u. s. w., hinzu. Gehören beide Ziffern der zunächst herunterzulassenden Kolonne zu den durchgestrichnen, so streicht man in $2a+b$ die beiden letzten Ziffern durch, und rechnet wie zuvor. Bei der Berechnung der nächstfolgenden Ziffer des α darf man nur in dem Divisor $2a+b$, da alle Ziffern bis auf die beiden letzten stets wiederkehren, nur die nächstfolgende Ziffer durchstreichen, und wie zuvor rechnen und so lange fortfahren bis in $2a+b$ keine Ziffer mehr vorhanden ist. Es sei z. B. $\alpha = \sqrt{p} = \sqrt{2|37|63|76|73,12|34|5}$ bis auf 2 Dezimalen zu berechnen, so muß die Quadratwurzel α 5 ganze Ziffern und 2 Dezimalen, mithin 7 Ziffern enthalten, und man hat demnach vom gegebenen Quadrat p nur die 8 ersten Ziffern nöthig und rechnet wie folgt:

$$\sqrt{2|37|63|76|73,12345|} = 5415,50\ldots$$

$$\begin{array}{r|l}
 & 1 \\
\hline
25 & 137 \\
 & 125 \\
\hline
304 & 1263 \\
 & 1216 \\
\hline
3081 & 4776 \\
 & 3081 \\
\hline
30825 & 16957,. \\
 & 15413 \\
\hline
30839 & 1544..,. \\
 & 1542 \\
\hline
 & 2
\end{array}$$

Anmerkung. Ist p eine ganze Zahl oder auch ein endlicher Dezimalbruch und kein vollständiges Quadrat und die Anzahl der Ziffern des p reicht zur Berechnung einer bestimmten Anzahl Dezimalen nicht hin, so fülle man die fehlenden Stellen mit Nullen aus. Es sei z. B. $\sqrt{7938}$ bis auf 5 Dezimalen zu berechnen, so enthält die Quadratwurzel 2 ganze Ziffern und 5 Dezimalen, also im Ganzen 7 Ziffern und wir brauchen im Quadrat p 8 Ziffern, es müssen demnach noch 4 Nullen angehängt werden. Wenn aber p keine ganze Ziffer und hinter dem Komma noch mehrere Nullen enthält, so gibt jedes Nullenpaar nur eine Dezimale, und es müssen im p außer den Nullen, noch $n+1$

Dezimalen genommen werden, wenn, außer den Nullen des α, n Dezimalen berechnet werden sollen. Beispiele für beide Fälle:

$\sqrt{7938{,}0000} = 89{,}09546.$

	64
169	1538
	1521
17809	170000
	160281
178185	9719..
	8909
17848	810
	713
178	97

$\sqrt{0{,}00 \mid 00 \mid 76 \mid 35 \mid 43} = 0{,}0087381$

	64
167	1235
	1169
1743	6643
	5229
17468	1414.,.
	1397
.17468	17
	17
	.

§ 11.

Berechnung der Kubikwurzel. Da $1^3 = 1$, $10^3 = 1000$, $100^3 = 1000000$, $1000^3 = 1000000000$ u. s. w., so gibt jede 1, 2, oder 3ziffrige Zahl des gegebnen p, (des Ausdrucks $\alpha = \sqrt[3]{p}$) eine 1ziffrige Zahl für die Kubikwurzel α. Ebenso gibt jede 4, 5 und 6; 7, 8 und 9; u. s. w. ziffrige Zahl des p für α resp. eine 2, 3 u. s. w ziffrige Zahl. Man theile demnach das p von der Rechten zur Linken, und wenn p Dezimalen enthält, diese von der Linken zur Rechten, in Kolonnen zu 3 Ziffern. Indem man nun das p als aus dem Kubus einer 2theiligen Größe entstanden betrachtet, so hat man die Kubikwurzel nach der Formel $(a + b)^3 = a^3 + 3a^2b + 3ab^2 + b^3$, zu berechnen, wo a und b auf eine dem vorigen Verfahren ganz ähnliche Weise berechnet werden. Man suche nämlich aus der ersten Kolonne die höchste Ziffer der Kubikwurzel, ziehe a^3 ab, setze den Rest mit der nächst folgenden Kolonne $= R = 3a^2b$ und folglich $b = \frac{R.}{3a^2}$ Dieses b muß jedoch nur so groß genommen werden, daß außer $3a^2b$ auch noch $3ab^2 + b^3$ abgezogen werden können. Man betrachte nun die beiden ersten Ziffern als a und die 3te Ziffer als b, so ist der Rest mit der heruntergelassenen 3ten Kolonne wiederum $= 3a^2b$ zu setzen und wie vor das b zu bestimmen. Hier ist zu erwägen, daß a, seinem Range nach, ein Zehner ist und folglich $3a^2$, 2 Nullen am Ende haben sollte. Nimmt man also diese Nullen nicht, so ist der Divisor $3a^2$, 100 Mal zu groß und folglich muß R 100 Mal kleiner gemacht werden. Man schneidet demnach von dem R von der Rechten zur Linken die beiden letzten Ziffern ab, um das b zu finden, läßt in $3a^2b$ die beiden letzten und in $3ab^2$ die letzte Stelle offen. Der Kürze halber will ich hier nur das Schema geben, nach welchem beim nicht abgekürzten Verfahren gerechnet werden kann:

$$
\begin{array}{rcl}
& & \overbrace{a}\;\;\; \\
\sqrt[3]{2\,|\,460\,|\,375\,|} & = & 1\;3\;5 \\
& & a\;\;b\;\;b
\end{array}
$$

$$
\begin{array}{rl}
a^3 = & 1 \\
3a^2 = 3 & |\; 14{,}60 \\
3a^2 b = & 9.. \\
3ab^2 = & 27. \\
b^3 = & 27 \\
\hline
3a^2 b + 3ab^2 + b^3 = & 1197 \\
\hline
3a^2 = 507 & |\; 263375 \\
3a^2 b = & |\; 2535.. \\
\hline
3ab^2 = & 975. \\
b^3 = & 125 \\
\hline
3a^2 b + 3ab^2 + b^3 = & 263375
\end{array}
$$

§ 12.

Abgekürztes Verfahren. Auch hier hat man im Kubus p nur höchstens $n+2$ Ziffern zu nehmen, wenn die Kubikwurzel n Ziffern enthalten soll (vergl. § 10) und rechnet so lange wie gewöhnlich, bis keine Ziffer mehr herunterzulassen ist. Nun aber läßt man in den Produkten $3a^2$, $3a^2b$, $3ab^2$ und b^3, so viel Ziffern zur Rechten weg, als durch das Nichtherunterlassen der folgenden Kolonnen vernachläßigt worden sind. Da jedoch im Divisor $3a^2$ die beiden letzten Ziffern fehlen und $3a^2$ noch mit b multiplicirt werden muß, so muß man im $3a^2$, 3 weniger vernachläßigen, als durch das Weglassen der folgenden Kolonnen vernachläßigt worden sind; die letzte Ziffer des $3a^2$ wird jedoch durchgestrichen, und im Produkt $3a\;b$ nur ihr Zehner zum Produkt der folgenden Ziffer hinzugenommen. In $3ab^2$ fehlt nur eine Ziffer und es wird demnach nur eine weniger vernachläßigt, als durch das Nichtherunterlassen vernachläßigt worden sind. In b^3 wird keine abgerechnet, weil in b^3 keine Stelle leer gelassen wird. Sind z. B. n Ziffern durch das Nichtherunterlassen neuer Kolonnen vernachläßigt, so berechnet man $3a^2$ so, daß $n-3$ Ziffern vernachläßigt werden, streicht aber die letzte durch, um in $3a^2b$ nur $n-2$ zu vernachläßigen. In $3ab^2$ vernachläßigt man $n-1$ und in b^3 n Ziffern zur Rechten. Um nun die zu vernachläßigenden Ziffern nicht unnöthigerweise zu berechnen, um sie nachher wegzulassen, rechnet man wie folgt, man multiplicire 3a mit a, indem man mit der höchsten Ziffer des a zur Linken die Multiplication beginnt. Hier müßte man bei vollständiger Multiplication die Ziffern der 2ten und jeder folgenden Reihe um eine Stelle zur Rechten herausrücken und diese herausgerückten Ziffern können als die letzten Ziffern, vernachläßigt werden. Hat z. B. der Multiplicator a, k Ziffern, so können durch das Nichtherausrücken $k-1$ Ziffern vernachläßigt worden; reicht aber die Anzahl der vernachläßigten Ziffern noch nicht aus, so werden im Multiplicandus (3a) noch so viel Ziffern zur Rechten durchgestrichen, als fehlen. Auf gleiche Weise berechnet man $3ab^2$, indem man 3a mit b multiplicirt. Da b nie größer als $9^3 = 729$ sein kann, so wird b^3 nur berechnet, wenn weniger als 3 Ziffern zu vernachläßigen sind und man läßt eine, zwei oder alle drei Ziffern weg, je nachdem durch das Nichtherunterlassen resp. 1, 2, 3 und mehr Ziffern vernachläßigt worden sind. Ist die höchste der vernachläßigten Ziffer unter 5, so wird sie nicht weiter berücksichtigt, ist sie aber 5 und darüber, so wird zur folgenden Ziffer, der größern Genauigkeit wegen, eine Einheit hinzugenommen. Da wo das eigentlich abgekürzte Verfahren erst beginnt, muß man so lange die Produkte $3a^2$, $3a^2b$ vollständig berechnen, als es die Anzahl der zu vernachläßigenden Ziffern erfordert, d. h. sollen z. B. in $3a^2$ nur die beiden letzten Ziffern vernachläßigt werden, und a enthält 5 Ziffern, so wird bei der Multiplication des $3a$ mit a bei der 2ten und 3ten Ziffer in diesen Reihen noch zurückgerückt und erst bei der 4ten und 5ten ꝛc. das Zurückrücken unterlassen. Es versteht sich von selbst, daß die Ziffer, die nicht herausgerückt werden soll, auch nicht berechnet werden muß, was geschieht, indem man die letzte des Multiplicandus $3a$ durchstreicht; es wird jedoch ihr Zehner zur folgenden Ziffer hinzugenommen. Wenn p keine ganze Ziffern und hinter dem Komma eine oder mehrere Nullen enthält, so gibt jede Kolonne Nullen nur 1 Null im α und es müssen demnach außer den Nullen des p noch $n + 2$ Dezimalen genommen werden, wenn α, außer den Nullen, noch n Dezimalen enthalten soll. Folgende Beispiele werden die Sache klar machen. Es sei $\sqrt[3]{144{,}09546..}$ bis auf 5 und $\sqrt[3]{0{,}000\,000\,176\,1234}$ bis auf 7 Dezimalen zu berechnen.

$$\sqrt[3]{144{,}09546\ldots} = \overbrace{\overbrace{\overbrace{\overbrace{\overset{a}{5},\,\overset{b}{2}}^{a}\,\overset{b}{4}}^{a}\,\overset{b}{2}}^{a}\,\overset{b}{6}}^{a}\;\overset{b}{4}.$$

$$\begin{array}{rl}
a^3 = & 125 \\ \hline
3a^2 = 75\,.. & \mid 19095 \\ \hline
3a^2b = & 150\,.. \\
3ab^2 = & 60. \\
b^3 = & 8 \\ \hline
3a^2b + 3ab^2 + b^3 = & 15608 \\ \hline
3a^2 = 8112\,.. & \mid 34874{,}6. \\ \hline
3a^2b = & 32448\,.. \\
3ab^2 = & 2496. \\
b^3 = & 6. \\ \hline
3a^3b + 3ab^2 + b^3 = & 326982\ldots \\ \hline
\end{array}$$

$$\begin{array}{rr}
3a = & 15 \\
a = & 5 \\ \hline
3a^2 = & 75
\end{array}
\qquad
\begin{array}{rr}
3a = & 15 \\
b^2 = & 4 \\ \hline
3ab^2 = & 60
\end{array}$$

$$\begin{array}{rr}
3a = & 156 \\
a = & 52 \\ \hline
 & 780 \\
 & 312 \\ \hline
3a^2 = & 8112
\end{array}
\qquad
\begin{array}{rr}
3a = & 156 \\
b = & 16 \\ \hline
 & 156 \\
 & 936 \\ \hline
3ab^2 = & 2496
\end{array}$$

$3a^2 = 82373 \mid 21764$

$3a^2b = 16475$

$3ab^2 = 6$

$3a^2b + 3ab^2 = 16481$

$3a^2 = 8244 \mid 5283$

$3a^2b = 4946$

$3a^2 = 8244 \mid 337$

$3a^2b = 330$

7

$3a = 1572$

$a = 524$

7860

3144

629.

$3a^2 = 82373.$

$3a = 1572$

$b^2 = 4$

$3ab^2 = 66\ldots$

$3a = 15726$

$a = 5242$

7863.

315.

63

3

$3a^2 = 8244$

$\sqrt[3]{0{,}000 \mid 000 \mid 176 \mid 123 \mid 4\ldots} = 0{,}0056053.$

125

$3a^2 = 75\ldots \mid 51123$

$3a^2b = 450\ldots$

$3ab^2 = 540.$

$b^3 = 216$

50616

$3a^2 = 9408 \mid 5074\ldots\ldots$

$3a^2b = 4704$

$3ab^2 = 4$

4708

$3a^2 = 9463 \mid 366$

§ 13.

Auf ganz gleiche Weise kann man die 4te, 5te u. s. w. Wurzel berechnen, wenn man p resp. in Kolonnen zu 4, 5 u. s. w., die ganzen Ziffern von der Rechten zur Linken, und die Dezimalen von der Linken zur Rechten eintheilt und nach den Formeln $(a+b)^4 = a^4 + 4a^3b + 6a^2b^2 + 4ab^3 + b^4$, und $(a+b)^5 = a^5 + 5a^4b + 10a^3b^2 + 10a^2b^3 + 5ab^4 + b^5$ u. s. w. die Rechnung ausführt. Man hat hier mit den Divisoren resp. $4a^3$, $5a^4$ u. s. w. in den Rest hineinzudividiren, um b zu finden. Auch könnte man auf eine ganz ähnliche Weise wie bei der Kubik- und Quadratwurzel, abgekürzt rechnen, wenn man es nicht vorzieht, diese Wurzeln logarithmisch zu berechnen. (Vergl. die Logarithmentheorie.)

§ 14.

Ganz analog dem vorigen Verfahren berechnet man die Quadrat-, Kubik- u. s. w. Wurzel aus algebraischen Größen. Man ordnet nämlich die Ausdrücke, aus welchen die Wurzel gezogen werden soll, nach den steigenden oder fallenden Potenzen der Buchstaben und betrachtet bei der Quadrat-Wurzel das höchste Glied als a^2, und dividirt das nächste Glied durch $2a$, um b zu finden, zieht nun die Produkte $2ab + b^2$, von den entsprechenden Gliedern ab, und betrachtet nun die beiden ersten Glieder der Wurzel als a, dividirt wieder mit $2a$ in das höchste Glied des Restes und findet so das 3te Glied der Wurzel $= b$, zieht von den entsprechenden Gliedern $2ab + b^2$, ab, und betrachtet die 3 ersten Glieder der Wurzel als a und rechnet so lange fort, bis keine Glieder mehr vorhanden sind. z. B.

$$\sqrt{\tfrac{1}{4} + 3x + \tfrac{35}{4}x^2 + \tfrac{1}{2}x^3 + \tfrac{193}{16}x^4 - x^5 + 4x^6} = \tfrac{1}{2} + 3x - \tfrac{1}{4}x^2 + 2x^3.$$

$$\begin{array}{ll}
a^2 = \tfrac{1}{4} & \\
2a = 1 & \mid +3x \\
2ab = & \;\; +3x \\
 & \mid + \tfrac{35}{4}x^2 \\
b^2 = & \;\; 9x^2 \\
2a = 1 + 6x & \mid -\tfrac{1}{4}x^2 + \tfrac{1}{2}x^3 \\
2ab = & \;\; -\tfrac{1}{4}x^2 - \tfrac{3}{2}x^3 \\
 & \;\; + 2x^3 + \tfrac{193}{16}x^4 \\
b^2 = & \;\; \tfrac{1}{16}x^4 \\
2a = 1 + 6x - \tfrac{1}{2}x^2 & \mid 2x^3 + 12x^4 - x^5 \\
2ab = & \;\; 2x^3 + 12x^4 - x^5 \\
 & \;\; + 4x^6 \\
b^2 = & \;\; + 4x^6
\end{array}$$

§ 15.

Auf gleiche Weise kann man die 3te, 4te u. s. w. Wurzel aus algebraischen Ausdrücken ausziehen. Bei unvollständigen Quadraten, Kuben u. s. w. erhält man unendliche Reihen, welche nach den Potenzen der Größe fortschreiten, nach welchen p geordnet ist. So z. B. gibt:

$$\sqrt{1+c} = 1 + \frac{c}{2} - \frac{c^2}{8} + \frac{c^3}{16} - \frac{5c^4}{128} \text{ ꝛc.}$$

$$\begin{array}{r|l}
 & 1 \\
2 & +c \\
 & c + \frac{c^2}{4} \\
\hline
2+c & -\frac{c^2}{4} \\
 & -\frac{c^2}{4} - \frac{c^3}{8} + \frac{c^4}{64} \\
\hline
2+c-\frac{c^2}{4} & +\frac{c^3}{8} - \frac{c^4}{64} \\
 & +\frac{c^3}{8} + \frac{c^4}{16} - \frac{c^5}{64} + \frac{c^6}{256} \\
\hline
2+c-\frac{c^2}{4}+\frac{c^3}{8} & -\frac{5c^4}{64} + \frac{c^5}{64} - \frac{c^6}{256}.
\end{array}$$

Bei höheren Wurzeln ist die Rechnung, genau genommen, nicht schwieriger, wol aber weitläufstiger.

§ 16.

Um aus dem Ausdruck $\alpha^n = p$, n zu finden, wenn α und p gegeben ist, brauchen wir zunächst den binomischen Lehrsatz mit negativen ganzen Exponenten. Da wir $(a+b)^{-n}$ in $a^{-n}\left(1+\frac{b}{a}\right)^{-n}$ verwandeln können, so haben wir blos $1+\frac{b}{a}$ zur $-n^{ten}$ Potenz zu erheben, und wenn wir $\frac{b}{a}=c$ setzen, so ist $(1+c)^{-n}$ zu entwickeln. Wir wollen nun beweisen, daß der entwickelte Ausdruck für $(1+c)^{-n}$ aus dem Ausdruck $(1+c)^n$ hervorgehe, wenn wir für n die Größe $-n$ setzen, oder es bleibt zu beweisen, daß $(1+c)^{-n}$

$$= 1 - n.c - \frac{n(-n-1)}{1.2} . c^2 - \frac{n(-n-1)(-n-2)}{1.2.3} . c^3 - \frac{n(-n-1)(-n-2)(-n-3)}{1.2.3.4} \text{ ꝛc.}$$

$$= 1 - nc + \frac{n(n+1)}{1.2} c^2 - \frac{n(n+1)(n+2)}{1.2.3} c^3 + \frac{n(n+1)(n+2)(n+3)}{1.2.3.4} c^4 - \text{ꝛc. ꝛc.}$$

sein müsse.

Beweis. Es ist $(1+c)^{-1} = \frac{1}{1+c}$ (§ 2). Dividirt man mit $1+c$ in 1 hinein, so gibt die Division $1 - c + c^2 - c^3 + c^4 -$ ꝛc ꝛc. Die obige binomische Formel gibt für $n=1$:

$$(1+c)^{-1} = 1 - 1.c + \frac{1.2}{1.2} c^2 - \frac{1.2.3}{1.2.3} c^3 + \frac{1.2.3.4}{1.2.3.4} c^4 - \text{ꝛc. ꝛc.}$$

$$= 1 - c + c^2 - c^3 + c^4 - \text{ꝛc. ꝛc. wie vorher.}$$

Es ist demnach der binomische Lehrsatz richtig für die − 1te Potenz. Auf gleiche Weise könnte man sie für die −2te, −3te u. s. w. Potenz beweisen; es wird jedoch die Richtigkeit der Formel für alle negativen Potenzen von selbst einleuchten, wenn wir beweisen, daß sie für jede nächst höhere negative Potenz richtig sein müsse, wenn sie für die nächst vorhergehende richtig ist, d. h. wenn sie für die $-l$te richtig ist, sie auch für die $-l-1$te richtig sein müsse. Unter dieser Voraussetzung ist:

$$(1+c)^{-l} = 1 - lc + \frac{l(l+1)}{1.2}c^2 - \frac{l(l+1)(l+2)}{1.2.3}c^3 + \frac{l(l+1)(l+2)(l+3)}{1.2.3.4}c^4 - \text{ꝛc.}$$

Nun ist $(1+c)^{-l-1} = \frac{1}{(1+c)^{l+1}}$ (§ 2). Entwickelt man $(1+c)^{l+1}$ nach der binomischen Formel für positive ganze Exponenten, so erhalten wir eine Reihe, die fortschreitet nach den Potenzen von c, und es ist klar, daß, wenn wir mit dieser Reihe in die 1 hineindividiren, wir wiederum eine nach den Potenzen von c fortschreitende Reihe erhalten müssen. Es steht uns demnach frei $(1+c)^{-l-1} = 1 + Ac + Bc^2 + Cc^3 + Dc^4$ u. s. w. zu setzen, wo die Coefficienten A, B, C, D, ꝛc. noch zu bestimmen sind. Multiplicirt man beide Seiten dieser Gleichung mit $1+c$, so erhalten wir:

$$(1+c)^{-l} = \left\{\begin{array}{l} 1 + Ac + Bc^2 + Cc^3 + Dc^4 \text{ ꝛc.} \\ \quad + c + Ac^2 + Bc^3 + Cc^4 \text{ ꝛc.} \end{array}\right\}$$

oder $(1+c)^{-l} = 1 + (A+1)c + (B+A)c^2 + (C+B)c^3 + (D+C)c^4$ ꝛc. ꝛc. Nun war nach obiger Voraussetzung:

$$(1+c)^{-l} = 1 - lc + \frac{l(l+1)}{1.2}c^2 - \frac{l(l+1)(l+2)}{1.2.3}c^3 + \frac{l(l+1)(l+2)(l+3)}{1.2.3.4}c^4 - \text{ꝛc.}$$

wir haben demnach 2 identische Reihen, die nach den Potenzen einer willkürlichen Größe c fortschreiten, und wir können sie Glied für Glied einander gleich setzen. Denn es ist $1 + (A+1)c + (B+A)c^2 + (C+B)c^3 + (D+C)c^4$ u. $= 1 - lc + \frac{l(l+1)}{1.2}c^2 - \frac{l(l+1)(l+2)}{1.2.3}c^3 + \frac{l(l+1)(l+2)(l+3)}{1.2.3.4}c^4$ ꝛc. ꝛc. Von beiden Seiten 1 abgezogen und beide Seiten durch c dividirt, gibt: $A + 1 + (B+A)c + (C+B)c^2 + (D+C)c^3$ u. $= -l + \frac{l(l+1)}{1.2}c - \frac{l(l+1)(l+2)}{1.2.3}c^2 + \frac{l(l+1)(l+2)(l+3)}{1.2.3.4}c^3$ ꝛc.

Da nun diese beiden Seiten der Gleichung für jedes willkürliche c einander gleich sein müssen, so sind sie es auch für $c=0$. Setzt man aber $c=0$, so fallen alle, von c abhängigen, Glieder weg, und es wird $A+1=-l$ oder $A=-l-1$. Diesen Werth hat nun A nicht blos für $c=0$, sondern auch für jeden andern Werth; weil A von c unabhängig ist. Da nun $A+1$ immer $-l$, so erhalten wir aus der letzten Gleichung, wenn wir diese Größen abziehen und durch c dividiren: $B + A + (C + B)c + (D + C)c^2$ ꝛc. $= \frac{l(l+1)}{1.2} - \frac{l(l+1)(l+2)}{1.2.3}c + \frac{l(l+1)(l+2)(l+3)}{1.2.3.4}c^2$ ꝛc.

Diese beiden Reihen sind nun wiederum für jedes willkürliche c, also auch für $c = 0$ einander gleich, und es muß unter allen Umständen $B + A = \frac{l(l+1)}{1.2}$; oder $B = \frac{l(l+1)}{1.2} - A =$

$= \frac{l(l+1)}{1.2} + (l+1) = (l+1)\left(\frac{l}{2}+1\right) = \frac{(l+1)(l+2)}{1.2}$. Durch gleiches Raisonnement erhalten wir: $C + B = -\frac{l(l+1)(l+2)}{1.2.3}$ oder $C = -\frac{l(l+1)(l+2)}{1.2.3} - \frac{(l+1)(l+2)}{1.2}$

$= -\frac{(l+1)(l+2)}{1.2}\left(\frac{l}{3}+1\right) = -\frac{(l+1)(l+2)(l+3)}{1.2.3}$. Ebenso $D + C = \frac{l(l+1)(l+2)(l+3)}{1.2.3.4}$

oder $D = \frac{l(l+1)(l+2)(l+3)}{1.2.3.4} + \frac{(l+1)(l+2)(l+3)}{1.2.3} = \frac{(l+1)(l+2)(l+3)}{1.2.3}\left(\frac{l}{4}+1\right)$

$= \frac{(l+1)(l+2)(l+3)(l+4)}{1.2.3.4}$ u. s. w.

Die Rechnung darf hier nicht weiter fortgesetzt werden, weil das Gesetz, nach welchem diese Coefficienten fortschreiten müssen, einleuchtet. Setzt man nun die gefundenen Werthe für A, B, C, D ꝛc. in die Reihe $(1+c)^{-l-1} = 1 + Ac + Bc^2 + Cc^3 + Dc^4$ ꝛc. so wird $(1+c)^{-l-1} = 1 - (l+1)c + \frac{(l+1)(l+2)}{1.2}c^2 - \frac{(l+1)(l+2)(l+3)}{1.2.3}c^3$

$+ \frac{(l+1)(l+2)(l+3)(l+4)}{1.2.3.4}c^4$ ꝛc., welche Reihe wir offenbar erhalten, wenn wir in die Reihe für $(1+c)^{-l}$ anstatt $-l$ überall $-l-1$ setzen. Es ist demnach der Lehrsatz für die $-l-1^{ste}$ Potenz richtig, wenn er für die $-l^{te}$ richtig ist. Nun war aber der Lehrsatz für die -1^{ste} richtig, so muß er auch für die nächst höhere negative Potenz d. h. für die -2^{te} richtig sein, und da er für die -2^{te} richtig ist, so ist er auch für die -3^{te} u. s. w. richtig: w. z. b. w.

Zusatz. Es war $(a+b)^{-n} = a^{-n}\left(1+\frac{b}{a}\right)^{-n} = a^{-n}(1+c)^{-n} =$

$$a^{-n}\left\{1 - nc + \frac{n(n+1)}{1.2}c^2 - \frac{n(n+1)(n+2)}{1.2.3}c^3 \text{ ꝛc.}\right\}$$

$$= a^{-n}\left\{1 - n\frac{b}{a} + \frac{n(n+1)}{1.2}\frac{b^2}{a^2} - \frac{n(n+1)(n+2)}{1.2.3}\frac{b^3}{a^3} \text{ ꝛc.}\right\}$$

$= a^{-n} - na^{-n-1}b + \frac{n(n+1)}{1.2}a^{-n-2}b^2 - \frac{n(n+1)(n+2)}{1.2.3}a^{-n-3}b^3$ ꝛc.; es gilt demnach die binomische Formel für $(a+b)^{-n}$. Ebenso wird:

$$(a-b)^{-n} = a^{-n} + na^{-n-1}b + \frac{n(n+1)}{1.2}a^{-n-2}b^2 + \frac{n(n+1)(n+2)}{1.2.3}a^{-n-3}b^3 + \text{rc.}$$

§ 17.

Beweis der binomischen Formel für positive und negative gebrochene Exponenten d. h. es soll:

$$(a+b)^{\frac{p}{q}} = a^{\frac{p}{q}} + \frac{p}{q}.a^{\frac{p}{q}-1}.b + \frac{\frac{p}{q}(\frac{p}{q}-1)}{1.2}a^{\frac{p}{q}-2}b^2 +$$

$$+ \frac{\frac{p}{q}(\frac{p}{q}-1)(\frac{p}{q}-2)}{1.2.3}a^{\frac{p}{q}-3}b^3 \text{ rc.}$$ wo $\frac{p}{q}$ ± d. h. p ± sein kann. (§ 5. III.)

Man setze wiederum $a+b = a(1+\frac{b}{a}) = a(1+c)$ und folglich $(a+b)^{\frac{p}{q}} = a^{\frac{p}{q}}(1+c)^{\frac{p}{q}}$; wir haben demnach nur $(1+c)^{\frac{p}{q}}$ zu entwickeln. Nun ist $(1+c)^{\frac{p}{q}}$ $= \sqrt[q]{(1+c)^p} = \sqrt[q]{(1+pc+\frac{p(p-1)}{1.2}c^2 + \frac{p(p-1)(p-2)}{1.2.3}c^3 \text{ u. s. w.})}$ Da jede Wurzel aus einer Reihe, welche fortschreitet nach den Potenzen von c, wiederum eine nach den Potenzen von c fortschreitende Reihe sein muß (§ 15.), so steht es uns frei $\sqrt[q]{(1+c)^p}$ oder $(1+c)^{\frac{p}{q}} = 1 + Ac + Bc^2 + Cc^3 + \text{rc.}$ zu setzen, und es sind jetzt nur noch die Coefficienten A, B, C u. s. w. zu bestimmen. Da c eine willkürliche Größe ist, so können wir $c = x + y$ setzen, und wir haben $(1+x+y)^{\frac{p}{q}} = 1 + A(x+y) + B(x+y)^2 + C(x+y)^3 + \text{rc.}$ Man erhebe jetzt beide Seiten der Gleichung zur q^{ten} Potenz, so wird $(1+x+y)^p = (1 + A(x+y) + B(x+y)^2 + C(x+y)^3 + \text{rc.})^q$. Jetzt entwickle man beide Seiten nach den Potenzen von y, indem man auf der linken Seite $1+x$ als den ersten und y als den zweiten Theil des Binoms betrachtet, und es wird die linke Seite folglich:
$\left\{(1+x)+y\right\}^p = (1+x)^p + p(1+x)^{p-1}.y + Y$, wo Y alle höhere Potenzen von y

y^2 incl., vorstellen soll. Auf der rechten Seite entwickle man innerhalb der Parenthese alle Glieder nach den Potenzen von y bis zur 1sten Potenz incl., indem man die von y unabhängigen Glieder voransetzt, die Glieder, welche y in der 1sten Potenz enthalten, nachfolgen läßt, und die höhern Potenzen von y durch Y' bezeichnet. Es wird demnach die rechte Seite.
$\left\{1 + Ax + Bx^2 + Cx^3 + \text{rc.} + y\,(A + 2\,Bx + 3\,Cx^2 + 4\,Dx^3 + \text{rc.} + Y')\right\}^q$.
Jetzt entwickle man die q^{te} Potenz dieses Ausdrucks wiederum nach den Potenzen von y bis zur 1sten Potenz incl., indem man alle von y unabhängigen Glieder als den 1sten und alle von y abhängigen Glieder, als den 2ten Theil des Binoms betrachtet, wo Y' unbeachtet bleiben darf, weil es nur höhere Potenzen von y enthält. Es wird demnach der letztere Ausdruck:
$(1 + Ax + Bx^2 + Cx^3 + \text{rc.})^q + q(1 + Ax + Bx^2 + Cx^3 + \text{rc.})^{q-1}\,(A + 2\,Bx + 3\,Cx^2 + 4\,Dx^3 + \text{rc.}) + Y$. Setzt man nun diese Reihe der obigen der linken Seite $(1+x)^p + p\,(1+x)^{p-1}\,y + Y$ gleich, so haben wir 2 identische Reihen, welche nach den Potenzen der willkürlichen Größe y fortschreiten, und wir können sie Glied für Glied einander gleich setzen (vergl. § 16): es wird demnach $(1+x)^p = (1 + Ax + Bx^2 + Cx^3 + \text{rc.})^q$ und $p\,(1+x)^{p-1} = q\,(1 + Ax + Bx^2 + Cx^3 + \text{rc.})^{q-1}\cdot(A + 2\,Bx + 3\,Cx^2 + 4\,Dx^3 + \text{rc.})$

Da nun, Gleiches mit Gleichem dividirt, Gleiches gibt, so wird $\dfrac{p\,(1+x)^{p-1}}{(1+x)^p}$
$= \dfrac{q\,(1 + Ax + Bx^2 + Cx^3 + \text{rc.})^{q-1}\cdot(A + 2Bx + 3Cx^2 + 4Dx^3 + \text{rc.})}{(1 + Ax + Bx^2 + Cx^3 + \text{rc.})^q}$ oder
$\dfrac{p}{1+x} = \dfrac{q\,(A + 2\,Bx + 3\,Cx^2 + 4\,Dx^3\ \text{rc.})}{1 + Ax + Bx^2 + Cx^3 + \text{rc.}}$ od. $p\,(1 + Ax + Bx^2 + Cx^3 + \text{rc.}) = q\,(1+x)$. $(A + 2\,Bx + 3\,Cx^2 + 4\,Dx^3 + \text{rc.})$. Dividirt man beide Seiten durch q und entwickelt wiederum dieselben nach den Potenzen von x, so wird:

$$\frac{p}{q} + \frac{p}{q}\,Ax + \frac{p}{q}\,Bx^2 + \frac{p}{q}\,Cx^3 + \text{rc.} = \left\{\begin{array}{l} A + 2\,Bx + 3\,Cx^2 + 4\,Dx^3 + \text{rc.} \\ \quad + Ax + 2\,Bx^2 + 3\,Cx^3 + \text{rc.}\end{array}\right\} =$$

$A + (2\,B + A)\,x + (3\,C + 2\,B)\,x^2 + (4\,D + 3\,C)\,x^3 + \text{rc.}$ Da nun diese beiden identischen Reihen wiederum fortschreiten nach den Potenzen der willkürlichen Größe x, so kann man sie Glied für Glied einander gleich setzen, und es ist folglich $\frac{p}{q} = A$, $\frac{p}{q}A = 2\,B + A$, $\frac{p}{q}B = 3\,C + 2\,B$, $\frac{p}{q}C = 4\,D + 3\,C$ u. s. w. folglich $2\,B = \frac{p}{q}A - A = A\left(\frac{p}{q} - 1\right) = \frac{p}{q}\left(\frac{p}{q} - 1\right)$ oder

$B = \dfrac{\frac{p}{q}\left(\frac{p}{q} - 1\right)}{1\,.\,2}$; $3\,C = \frac{p}{q}B - 2B = B\left(\frac{p}{q} - 2\right) = \dfrac{\frac{p}{q}\left(\frac{p}{q} - 1\right)}{1\,.\,2}\left(\frac{p}{q} - 2\right)$ oder

$$C = \frac{\frac{p}{q}\cdot\left(\frac{p}{q}-1\right)\cdot\left(\frac{p}{q}-2\right)}{1\;.\;2\;.\;3.}\;;\; 4\,D = \frac{p}{q}\,C - 3C = C\left(\frac{p}{q}-3\right)$$

$$= \frac{\frac{p}{q}\left(\frac{p}{q}-1\right)\left(\frac{p}{q}-2\right)\left(\frac{p}{q}-3\right)}{1\;.\;2\;.\;3} \text{ oder } D = \frac{\frac{p}{q}\left(\frac{p}{q}-1\right)\left(\frac{p}{q}-2\right)\left(\frac{p}{q}-3\right)}{1\;.\;2\;.\;3\;.\;4} \text{ ꝛc.}$$

Da das Gesetz, nach welchen sich diese und die folgenden Coefficienten gestalten, einleuchtet, so ist die Entwicklung der Coefficienten E, F u. s. w. übrig. Setzt man nun die gefundenen Werthe für A, B, C, D u. s. w. in die Gleichung

$(1+c)^{\frac{p}{q}} = 1 + Ac + Bc^2 + Cc^3 +$ ꝛc. ein, so wird:

$$(1+c)^{\frac{p}{q}} = 1 + \frac{p}{q}c + \frac{\frac{p}{q}\left(\frac{p}{q}-1\right)}{1\;.\;2}c^2 + \frac{\frac{p}{q}\left(\frac{p}{q}-1\right)\left(\frac{p}{q}-2\right)}{1\;.\;2\;.\;3}c^3 + \text{ꝛc. und da}$$

$(a+b)^{\frac{p}{q}} = a^{\frac{p}{q}}(1+\frac{b}{a})^{\frac{p}{q}} = a^{\frac{p}{q}}(1+c)^{\frac{p}{q}}$, so wird $(a+b)^{\frac{p}{q}} =$

$$a^{\frac{p}{q}}\left\{1 + \frac{p}{q}c + \frac{\frac{p}{q}\left(\frac{p}{q}-1\right)}{1\;.\;2}c^2 + \frac{\frac{p}{q}\left(\frac{p}{q}-1\right)\left(\frac{p}{q}-2\right)}{1\;.\;2\;.\;3}c^3 + \text{ꝛc.}\right\};\; c = \frac{b}{a} \text{ gesetzt,}$$

die Parenthese aufgelöst, gibt: $(a+b)^{\frac{p}{q}} = a^{\frac{p}{q}} + \frac{p}{q}a^{\frac{p}{q}}\frac{b}{a} + \frac{\frac{p}{q}\left(\frac{p}{q}-1\right)}{1\;.\;2}a^{\frac{p}{q}}\frac{b^2}{a^2}$

$$+ \frac{\frac{p}{q}\left(\frac{p}{q}-1\right)\left(\frac{p}{q}-2\right)}{1\;.\;2\;.\;3}a^{\frac{p}{q}}\frac{b^3}{a^3} + \text{ꝛc.} = a^{\frac{p}{q}} + \frac{p}{q}a^{\frac{p}{q}-1}b + \frac{\frac{p}{q}\left(\frac{p}{q}-1\right)}{1\;.\;2}a^{\frac{p}{q}-2}b^2$$

$$+ \frac{\frac{p}{q}\left(\frac{p}{q}-1\right)\left(\frac{p}{q}-2\right)}{1\;.\;2\;.\;3}a^{\frac{p}{q}-3}b^3 + \text{ꝛc. u. z. b. w.}$$

Logarithmen-Theorie.

§ 18.

Es ist in dem Ausdruck $\alpha^n = p$, wenn α und p gegeben ist, n zu finden, wo n der Logarithme von p desjenigen Systems ist, dessen Grundzahl $= \alpha$. (Vergl. § 4.) Eben so ist in $\alpha^m = r$, $m = \log. r$ desjenigen Systems, dessen Grundzahl $= \alpha$. Hieraus folgt

1. $\alpha^n . \alpha^m = \alpha^{n+m} = p . r$ oder $n + m = \log . p + \log . r = \log . p . r.$

1. $\alpha^n : \alpha^m = \alpha^{n-m} = p : r$ oder $n - m = \log . p - \log . r = \log . (p : r) = \log \frac{p}{r}$

3. $(\alpha^n)^s = \alpha^{sn} = p^s$ oder $s . n = s . \log . p = \log . p^s$.

4. $\sqrt[s]{\alpha^n} = \alpha^{\frac{n}{s}} = \sqrt[s]{p}$ oder $\frac{n}{s} = \frac{\log . p}{s} = \log . \sqrt[s]{p}$.

Man findet demnach für jedes beliebige Logarithmensystem:

1stens Den Logarithmen eines Produkts, wenn man die Logarithmen der einzelnen Factoren addirt.

2tens Den Logarithmen eines Quotienten, wenn man den Logarithmen des Divisors vom Logarithmen des Dividendus abzieht.

3tens Den Logarithmen einer Potenz, wenn man den Logarithmen der Grundzahl mit dem Exponenten der Potenz multiplicirt.

4tens Den Logarithmen einer Wurzelgröße, wenn man den Logarithmen der Zahl unterm Wurzelzeichen mit dem Exponenten der Wurzel dividirt.

Wir wollen jetzt in den folgenden Paragraphen drei populäre Methoden, die Logarithmen zu berechnen, liefern, die aber, ihrer Weitläuftigkeit wegen, der 4ten weit nachstehen.

§ 19.

Erste Methode. Man berechne, wenn $\alpha = 10$ ist, verschiedene Potenzen von 10; nämlich: $10^0 = 1$, $10^1 = 10$, $10^2 = 100$, $10^3 = 1000$ rc., ebenso $10^{\frac{1}{2}} = \sqrt{10}$, $10^{\frac{1}{4}} = \sqrt{\sqrt{10}}$, $10^{\frac{1}{8}} = \sqrt{\sqrt{\sqrt{10}}}$ u. s. w. und setze aus diesen berechneten Zahlen durch Multiplication neue zusammen, so erhält man neue Potenzen von 10, zu welchen der Logarithme bekannt ist z. B. $10^1 . 10^{\frac{1}{2}} . 10^{\frac{1}{4}} = 10^{1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{4}} = 10^{\frac{7}{4}} = 10 . \sqrt{10} . \sqrt{\sqrt{10}}$. Es sei dieses Produkt $= p$, so ist $\frac{7}{4} = \log p$. Es ist nun die Aufgabe zu zeigen, wie man zu jeder beliebigen Zahl p den Logarithmen finden kann.

Man berechne zuerst $\sqrt{10} = 3{,}1622777$, dann $\sqrt{\sqrt{10}} = 1{,}7782794$, $\sqrt{\sqrt{\sqrt{10}}} = 1{,}3335214$ und so fort, bis man auf 1,0000001 kommt, so sind die dazu gehörigen Logarithmen resp. $\frac{1}{2} = 0{,}5$, $\frac{1}{4} = 0{,}25$, $\frac{1}{8} = 0{,}125$ u. s. w.

Folgende Tabelle enthält sämmtliche Wurzeln und die dazu gehörenden Logarithmen bis auf 7 Dezimalen:

Zahlen.	Logarithmen.	Zahlen.	Logarithmen.
3,1622777	0,5000000	1,0002811	0,0001221
1,7782794	0,2500000	1,0001406	0,0000610
1,3335214	0,1250000	1,0000703	0,0000305
1,1547820	0,0625000	1,0000351	0,0000153
1,0746078	0,0312500	1,0000176	0,0000076
1,0366329	0,0156250	1,0000088	0,0000038
1,0181517	0,0078125	1,0000044	0,0000019
1,0090350	0,0039063	1,0000022	0,0000010
1,0045074	0,0019531	1,0000011	0,0000005
1,0022512	0,0009766	1,0000005	0,0000002
1,0011249	0,0004883	1,0000003	0,0000001
1,0005623	0,0002441	1,0000001	0,0000001

Nun wähle man aus dieser Tabelle diejenigen beiden Zahlen, nehme nöthigenfalls 10, 100 u. s. w. dazu, deren Produkt der gegebenen Zahl p am nächsten kommt, jedoch kleiner als p wird; jetzt multiplicire man dieses Produkt mit derjenigen Zahl, welche ein dem p sich mehr näherndes Produkt gibt, und fahre so lange fort, bis man entweder auf die Zahl p selbst, oder ihr so nahe kommt, daß das letzte Produkt mit p verwechselt werden kann. Ist z. B. log. 7 zu berechnen, so multiplicire man 3,1622777 mit 1,7782794 auf abgekürztem Wege, und erhält das Produkt 5,6234134. Nun multiplicire man 5,6234134 mit 1,1547820, so erhält man das Produkt 6,4938166, dieses wiederum mit 1,0746078 multiplicirt, gibt 6,9783061 und fährt auf diese Weise so lange fort, bis man auf 6,9999999 kommt; so ist der log. 7 = der Summe aller Logarithmen derjenigen Factoren, welche multiplicirt worden sind: also hier log. 7 = 0,5 + 0,25 + 0,03125 + rc. Diese + 0,0625 Methode ist unbequem, weil man nicht immer gleich die Zahl herausfindet, mit welcher multiplicirt werden muß, um nicht mehr als p zu erhalten. Dagegen ist folgende Methode etwas bequemer.

§ 20

2te Methode. Man dividire p durch die nächst kleinere Zahl der vorigen Tabelle und nöthigenfalls durch 10, 100 u. s. w. Dieser Quotient sei = A, nun dividire man A wieder durch die Zahl, welche A am nächsten kommt, der Quotient sei = B. Nun dividire man wiederum B durch die nächst kleinere Zahl und fahre so lange fort, bis man 1,0000000 erhält. Da nun diese Divisoren Potenzen von 10 sind, so will ich sie durch 10^{α}, 10^{β}

10^γ, u. s. w. vorgestellt wissen und es ist $\frac{p}{10^\alpha}=A. \frac{A}{10^\beta}=C, \frac{B}{10^\gamma}=C$ u. s. w. und folglich $p = 10^\alpha . A = 10^\alpha . 10^\beta . B = 10^\alpha . 10^\beta . 10^\gamma . C$ u. s. w. bis $p = 10^\gamma . 10^\beta . 10^\gamma \ldots 1.$ $= 10^{\alpha+\beta+\gamma+\text{ꝛc.}}$ und folglich $\alpha+\beta+\gamma+$ ꝛc. $= \log.\ p$ d. h. die Summe der Logarithmen sämmtlicher Divisoren $= \log p$.

§ 21.

3te Methode. Man wähle unter den bekannten Potenzen von 10, nämlich: $10^1=10$, $10^2=100$, $10^3=1000$ u. s. w. und den Zahlen der vorigen Tabelle $10^{\frac{1}{2}} =3,1622777$, $10^{\frac{1}{4}}=1,7782794$ u. s. w. diejenigen beiden Potenzen heraus, zwischen welchen p am nächsten liegt, und suche zu denselben das geometrische Mittel, so ist der Logarithme desselben das arithmetische Mittel beider genommenen Zahlen. Denn es seien diese beiden Potenzen 10^α und 10^β und x das geometrische Mittel, so ist $10^\alpha : x = x : 10^\beta$, folglich $x^2 = 10^\alpha .\ 10^\beta = 10^{\alpha+\beta}$ und $x = 10^{\frac{\alpha+\beta}{2}}$; mithin $\frac{\alpha+\beta}{2} = \log x$, und da aus der arithmetischen Proportion $\alpha - y = y - \beta$, $2y = \alpha+\beta$ oder $y = \frac{\alpha+\beta}{2}$ folgt, so ist das arithmetische Mittel zwischen α und $\beta = \log x$, wie oben. Es sei $10^\alpha = A$. und $10^\beta = B$, so ist $x^2 = A.\ B$ und $x = \sqrt{A B}$. Zu diesem x und derjenigen Potenz von 10, zwischen welchen p am nächsten liegt, suche man wiederum das geometrische und zu ihren Logarithmen das arithmetische Mittel und fahre so lange fort bis das geometrische Mittel dem p so nahe gekommen ist, daß man es mit p verwechseln kann, und das arithmetische Mittel der Logarithmen der beiden letzten Zahlen ist log p. Die beste, am kürzesten zum Ziele führende, Methode ist die durch unendliche Reihen:

§ 22.

4te Methode. Man kann, bei gegebenem α, 1tens p durch eine, nach den Potenzen von n und 2tens umgekehrt n durch eine, nach den Potenzen von p fortschreitende, Reihe ausdrücken. Um 1tens p durch eine, nach den Potenzen von n fortschreitende, Reihe auszudrücken, muß man eine Potenz eines Binoms finden, in welchem n im 2ten Theile vorkommt, und der erste Theil von n unabhängig ist. Es sei $p = (m + k.n)^q$ wo m, k und q vom Logarithmen n unabhängige Größen vorstellen sollen. Da nun $p = \alpha^n$ dem angenommenen Ausdruck $(m + k.\ n)^q$, für jedes willkürliche p und den dazu gehörenden Logarithmen n, gleich sein soll, so muß auch, für $n=0$, $p=\alpha^n=(m+k.n)^q$ od. $p=\alpha^0 = m^q$ oder $1=m^q$, was offenbar der Fall ist, wenn $m = 1$ ist, und es muß, da m von p und n unabhängig ist, m immer = 1 sein. Man setze daher $p = \alpha^n = (1+k.n)^q$ $= 1 + q.k.n. + \frac{q.(q-1)}{1.2} k^2.n^2 + \frac{q.(q-1).(q-2)}{1.2.3} k^3 n^3 +$ rc. Um nun k und q zu finden, erhebe man beiden Seiten der Gleichung $\alpha^n = (1+k.n)^q$ zur l^{ten} Potenz und es wird $(\alpha^n)^l = \alpha^{n.l} = (1+k.n)^{l.q} = 1 + l.q.k.n + \frac{l.q.(l.q-1)}{1.2} k^2.n^2 +$ $+ \frac{l.q.(l.q-1)(l.q-2)}{1.2.3} k^3.n^3 +$ rc. Dasselbe müssen wir aber auch erhalten, wenn wir in den obigen Ausdruck l.n für n setzen, und es wird $\alpha^{l.n} = (1+k.l.n)^q = 1 + q.k.l.n$ $+ \frac{q(q-1)}{1.2} k^2.l^2.n^2 + \frac{q.(q-1).(q-2)}{1.2.3} q^3.l^3.n^3 +$ rc. Wir haben nun wiederum zwei identische Reihen, welche nach den Potenzen der willkürlichen Größe n fortschreiten; man kann sie daher auch Glied für Glied einander gleich setzen. Die ersten beiden Glieder $1=1$, $l.q.k.n = q.k.l.n$ führen zu keinem Resultat; aber die 3 Glieder geben $\frac{l\,q\,(l\,q-1)}{1.2} k^2.n^2 = \frac{q.(q-1)}{1.2} k^2.l^2.n^2$ oder $l\,q - 1 = (q-1).l$, was offenbar nur der Fall sein kann, wenn entweder $l = 1$, oder $q = \infty$ (unendlich groß) ist. Nun stellt l den Exponenten der Potenz vor, zu welcher α^n erhoben werden soll, so kann l nicht $= 1$ sein; weil der Exponent 1 den Grundfactor nicht verändert und es ist daher $q = \infty$ zu setzen. Wenn aber $q = \infty$, so geht in der obigen Reihe $p = \alpha^n = (1+k.n)^q =$ $= 1 + q.k.n + \frac{q.(q-1)}{1.2} k^2.n^2 + \frac{q.(q-1)(q-2)}{1.2.3} k^3.n^3 +$ rc., $\frac{q-1}{2}$ in $\frac{q}{2}$, $\frac{q-2}{3}$ in $\frac{q}{3}$ u. s. w. über, und es wird $p = \alpha^n = (1+k.n)^q = 1 + q.k.n + \frac{q^2.k^2.n^2}{1.2}$ $+ \frac{q^3.k^3.n^3}{1.2.3} +$ rc. Da p jede endliche Zahl vorstellt, so muß die Summe aller dieser Glieder endlich, und, da $q = \infty$, k nothwendig unendlich klein und q.k endlich sein. Man setze daher $q.k = b$, so wird $p = \alpha^n = 1 + b.n + \frac{b^2.n^2}{1.2} + \frac{b^3.n^3}{1.2.3} +$ rc. Die Zahl p ist sowol vom Logarithmen n, als von der Grundzahl α abhängig, und da hier p von n und b abhängig ist, so muß b eine Function von α sein, wie es sich auch später zeigen wird. Diese Function heißt der Modulus des Logarithmensystems.

Es sei 2^{tens} n durch eine, nach den Potenzen von p fortschreitende, Reihe auszudrücken. Es war $p = (1+k.n)^q$, folglich $p^{\frac{1}{q}} = 1 + k.n = 1 + \frac{b.n}{q}$ und folglich

$p^{\frac{1}{q}} - 1 = \frac{b.n}{q}$ oder $q.(p^{\frac{1}{q}} - 1) = b.n.$ Um nun eine nach den Potenzen von p fortschreitende Reihe zu haben, setze man $p^{\frac{1}{q}} = (1 + p - 1)^{\frac{1}{q}}$ und folglich:

$$bn = q\left((1+p-1)^{\frac{1}{q}} - 1\right) = q\left\{1 + \frac{1}{q}(p-1) + \frac{\frac{1}{q}(\frac{1}{q}-1)}{1.2}(p-1)^2 + \frac{\frac{1}{q}(\frac{1}{q}-1)(\frac{1}{q}-2)}{1.2.3}(p-1)^3 + \text{rc.} - 1\right\}$$

$$= q\left\{\frac{1}{q}(p-1) + \frac{\frac{1}{q}(\frac{1}{q}-1)}{1.2}(p-1)^2 + \frac{\frac{1}{q}(\frac{1}{q}-1)(\frac{1}{q}-2)}{1.2.3}(p-1)^3 + \text{rc.}\right\}$$

$= p - 1 + \frac{(\frac{1}{q}-1)}{1.2}(p-1)^2 + \frac{(\frac{1}{q}-1)(\frac{1}{q}-2)}{1.2.3}(p-1)^3 + \text{rc.}$ Da nun $q = \infty$, so ist $\frac{1}{q} = \frac{1}{\infty}$ oder unendlich klein; folglich kann man $\frac{\frac{1}{q}-1}{2} = -\frac{1}{2}$, $\frac{\frac{1}{q}-2}{3} = -{}^2/_3$ u. s. w. setzen, oder $bn = p - 1 - {}^1/_2(p-1)^2 + {}^1/_3(p-1)^3 - {}^1/_4(p-1)^4 + \text{rc.}$ und $n = \log.p = \frac{1}{b}(p - 1 - {}^1/_2(p-1)^2 + {}^1/_3(p-1)^3 - {}^1/_4(p-1)^4 + \text{rc.})$ (vergleiche § 25.) wo der Logarithme n durch die Zahl p und den Modulus b ausgedrückt ist. Man denke sich nun ein solches System, in welchem $b = 1$ ist, welches das natürliche, hyperbolische, auch logistische System genannt wird, so ist $n = \log.\text{nat}.p = p - 1 - {}^1/_2(p-1) + {}^1/_3(p-1)^3 - {}^1/_4(p-1)^4 + \text{rc.}$ Setzt man in der Reihe $bn = p - 1 - {}^1/_2(p-1) + {}^1/_3(p-1)^3 - {}^1/_4(p-1)^4 + \text{rc.}$, $n = 1$, so geht $\alpha^n = p$ in $\alpha = p$ über, und wir finden b durch die Reihe $b = \alpha - 1 - \frac{1}{2}(\alpha-1)^2 + \frac{1}{3}(\alpha-1)^3 - \frac{1}{4}(\alpha-1)^4 + \text{rc.}$ und es ist folglich $b = \text{lognat}\ \alpha$. Es ist nicht uninteressant die Grundzahl (basis) des natürlichen Systems zu kennen. Es war $\alpha^n = 1 + b.n + \frac{b^2.n^2}{1.2} + \frac{b^3.n^3}{1.2.3} + \frac{b^4\ n^4}{1.2.3.4} + \text{rc.}$ und da für das natürliche System $b = 1$ ist, so wird:

$\alpha^n = 1 + n + \frac{n^2}{1.2} + \frac{n^3}{1.2.3} + \frac{n^4}{1.2.3.4} +$ ꝛc., wo n jeden willkürlichen Logarithmen vorstellt. Setzt man nun $n = 1$, so wird $\alpha = 1 + 1 + \frac{1}{1.2} + \frac{1}{1.2.3} + \frac{1}{1.2.3.4} +$ ꝛc.

Wir wollen dieses α bis auf 7 Dezimalen berechnen:

$2 = 2$

$\frac{1}{1.2} = 0,5$

$\frac{1}{1.2.3} = 0,1666667$

$\frac{1}{1.2.3.4} = 0,0416667$

$\frac{1}{1.2.3.4.5} = 0,0083333$

$\frac{1}{1.2.3.4.5.6} = 0,0013889$

$\frac{1}{1.2.3.4.5.6.7} = 0,0001984$

$\frac{1}{1.2\ldots.8} = 0,0000248$

$\frac{1}{1.2\ldots9} = 0,0000028$

$\frac{1}{1.2..10} = 0,0000003$

$\frac{1}{1.2..11} = 0,0000000$

$\alpha = 2,7182819$

richtiger $\alpha = 2,7182818$

Die Reihe $\log.\text{nat}.\,p = p - 1 - \frac{1}{2}(p-1)^2 + \frac{1}{3}(p-1)^3 - \frac{1}{4}(p-1)^4 +$ ꝛc. würde hinreichend convergiren für < 2 und > 1 und namentlich für $p = {}^2/_3\ {}^4/_3,\ {}^6/_4$ u. s. w. Es wird z. B. $\log.\text{nat}\ {}^3/_2 = {}^1/_2 - {}^1/_2\,({}^1/_2)^2 + {}^1/_3\,({}^1/_2)^3 - {}^1/_4\,({}^1/_2)^4 +$ ꝛc.; eben so $\log.\text{nat}\ {}^4/_3 = {}^1/_3 - {}^1/_2\,({}^1/_3)^2 + {}^1/_3\,({}^1/_3)^3 - {}^1/_4\,({}^1/_3)^4 +$ ꝛc., und hieraus finden wir $\log.\text{nat}\ {}^3/_2 + \log.\text{nat}\ {}^4/_3 = \log.\text{nat}\ ({}^3/_2 \,.\, {}^4/_3) = \log.\text{nat}\ 2$. Wir finden aber auf folgendem Wege eine bequemere Reihe, die Logarithmen dieser Brüche zu berechnen. Man setze für p die Größe $1 + p$ und nachher $1 - p$, so wird

$\log.\text{nat}\ 1 + p = \quad p - {}^1/_2\,p + {}^1/_3\,p^3 - {}^1/_4\,p^4 + {}^1/_5\,p^5 -$ ꝛc. und

$\log.\text{nat}\ 1 - p = - p - {}^1/_2\,p^2 - {}^1/_3\,p - {}^1/_4\,p^4 - {}^1/_5\,p^5 -$ ꝛc. und folglich

$\log.\text{nat}\,(1 + p) - \log.\text{nat}\,(1 - p) = 2p + {}^2/_3\,p^3 + {}^2/_5\,p^5 +$ ꝛc. oder

$\log.\text{nat}\ \frac{1+p}{1-p} = 2\left\{p + \frac{p^3}{3} + \frac{p^5}{5} + \text{ꝛc.}\right\}$ Setzt man nun $\frac{1+p}{1-p} = z$, so wird

$1 + p = z - zp$ und $p = \frac{z-1}{z+1}$ und demnach

$\log.\text{nat}\ z = 2\left\{\frac{z-1}{z+1} + {}^1/_3\left[\frac{z-1}{z+1}\right]^3 + {}^1/_5\left[\frac{z-1}{z+1}\right]^5 + \text{ꝛc.}\right\}$, welche Reihe weit stärker, als die vorhergehende, convergirt.

Setzt man $z = \frac{3}{2}$, so wird $\frac{z-1}{z+1} = \frac{1}{5}$ und folglich lognat $\frac{3}{2} =$ $(\frac{1}{5} + \frac{1}{3}(\frac{1}{5})^3 + \frac{1}{5}(\frac{1}{5})^5$ ꝛc.); ebenso lognat $\frac{4}{3} = 2\,(\frac{1}{7} + \frac{1}{3}(\frac{1}{7})^3 + \frac{1}{5}(\frac{1}{7})^5$ ꝛc.) Nun ist:

$\frac{1}{5} = 0{,}2$	$\frac{1}{5} = 0{,}2$	$\frac{1}{7} = 0{,}1428571$	$\frac{1}{7} = 0{,}1428571$
$(\frac{1}{5})^2 = 0{,}04$	$\frac{1}{3}(\frac{1}{5})^3 = 0{,}0026667$	$(\frac{1}{7})^2 = 0{,}0204082$	$\frac{1}{3}(\frac{1}{7})^3 = 0{,}0009718$
$(\frac{1}{5})^3 = 0{,}008$	$\frac{1}{5}(\frac{1}{5})^5 = 0{,}0000640$	$(\frac{1}{7})^3 = 0{,}0029155$	$\frac{1}{5}(\frac{1}{7})^5 = 0{,}0000119$
$(\frac{1}{5})^5 = 0{,}00032$	$\frac{1}{7}(\frac{1}{5})^7 = 0{,}0000018$	$(\frac{1}{7})^5 = 0{,}0000595$	$\frac{1}{7}(\frac{1}{7})^7 = 0{,}0000002$
$(\frac{1}{5})^7 = 0{,}0000128$	$\frac{1}{9}(\frac{1}{5})^9 = 0{,}0000001$	$(\frac{1}{7})^7 = 0{,}0000012$	0,1438410
$(\frac{1}{5})^9 = 0{,}0000005$	0,2027326	$(\frac{1}{7})^9 = 0{,}0000000$	0,2876820
$(\frac{1}{5})^{11} = 0{,}0000000$	0,4054652		

folglich lognat $\frac{3}{2} = 0{,}4054652$, genauer $= 0{,}4054651$; lognat $\frac{4}{3} = 0{,}2876820$, genauer $= 0{,}2876821$. Wollte man die 7te Dezimale ganz genau haben, so müßte man auch die 8te berechnen. Es ist nun ferner (§ 18) lognat $\frac{3}{2}$ + lognat $\frac{4}{3}$ = lognat 2 = 0,6931472; lognat 3 = lognat $\frac{3}{2}$ + + lognat 2 = 1,0986123; lognat 4 = 2 lognat 2 = 1,3862944; lognat 6 = lognat 3 + lognat 2 = 1,7917595; lognat 8 = 3 lognat 2 = 2,0794416, genauer 2,0794415; lognat 9 = 2 lognat 3 = 2,1972246; lognat 12 = lognat 4 + lognat 3 = 2,4849067 u. s. w. Es ist offenbar, daß wir aus den Logarithmen der Primzahlen 2, 3, 5, 7, 11, 13, 17, 19, 23, 29, 31, 37, 41, 43, 47, 53, 59, 61 u. s. w. die Logarithmen aller übrigen Zahlen zusammensetzen können: wir haben demnach zunächst lognat 5, lognat 7, lognat 11, lognat 13 u. s. w. zu berechnen. Diese Logarithmen könnten wir nun gleichfalls durch die Reihe lognat z $= 2\left\{\frac{z-1}{z+1} + \frac{1}{3}\left[\frac{z-1}{z+1}\right]^3 + \frac{1}{5}\left[\frac{z-1}{z-1}\right]^5 \text{ ꝛc. }\right\}$, $z = \frac{5}{4}, \frac{7}{6}, \frac{11}{10}, \frac{13}{12}$ ꝛc. gesetzt, finden; folgende Methode führt jedoch rascher zum Ziele.

§ 23.

Man setze $x^2 = \frac{x^2}{x^2-1}\,(x-1)\,(x+1)$, so wird log. $x^2 = 2$ log. $x =$ log. $\frac{x^2}{x^2-1}$ + log.$(x-1)$ + log. $(x+1)$. Setzt man nun in die obige Reihe $z = \frac{x^2}{x^2-1}$, so wird $\frac{z-1}{z+1} = \frac{1}{2x^2-1}$, also lognat $\frac{x^2}{x^2-1} = 2\left\{\frac{1}{2x^2-1} + \frac{1}{3}\left(\frac{1}{2x^2-1}\right)^3 + \frac{1}{5}\left(\frac{1}{2x^2-1}\right)^5 \text{ ꝛc. }\right\}$ + lognat $(x-1)$ + lognat $(x+1)$ oder

$$\text{lognat } x = \frac{1}{2x^2-1} + \frac{1}{3}\left[\frac{1}{2x^2-1}\right]^3 + \frac{1}{5}\left[\frac{1}{2x^2-1}\right]^5 \text{ ꝛc. } + \tfrac{1}{2}\left(\text{lognat}(x-1) + \text{lognat}(x+1)\right).$$

Ist nun x eine Primzahl > 3 z. B. 5, 7, 11 ꝛc., so sind $x-1$, $x+1$ keine Primzahlen d. h. aus kleineren Primzahlen durch Multiplication zusammensetzbare Zahlen und es wird z. B.

$\log\text{nat}\ 5 = {}^1/_{19} + {}^1/_5\,({}^1/_{19})^3 + {}^1/_5\,({}^1/_{49})^5$ ꝛc. $+ {}^1/_2\,(\log\text{nat}\ 4 + \log\text{nat}\ 6)$.

Diese Reihe convergirt weit stärker, als die Reihe $\log\text{nat}\ \frac{5}{4} = 2\left(\frac{1}{9} + \frac{1}{3}\left(\frac{1}{9}\right)^3 + \frac{1}{5}\left(\frac{1}{9}\right)^5\right.$ ꝛc.), und da lognat 4, lognat 6 bereits bekannt sind, so finden wir lognat 5 auf kürzerem Wege, als es durch die letztere Reihe geschehen würde. Es ist:

$\frac{1}{49} = 0{,}0204082$	$\frac{1}{49} = 0{,}0204082$	$\log\text{nat}\ 4 = 1{,}3862944$
$(\frac{1}{49})^2 = 0{,}0004165.$	$\frac{1}{3}(\frac{1}{49})^3 = 0{,}0000028$	$\log\text{nat}\ 6 = 1{,}7917595$
$(\frac{1}{49})^3 = 0{,}0000085$	$0{,}0204110.$	$3{,}1780539$
$(\frac{1}{49})^5 = 0{,}0000000$	$1{,}5890269$	$1{,}5890269$
	$1{,}6094379 = \log\text{nat}\ 5.$	

Aus lognat 5 finden wir $\log\text{nat}\ 10 = \log\text{nat}\ 5 + \log\text{nat}\ 2 = 1{,}6094379 + 0{,}6931472 = 2{,}3025851$; $\log\text{nat}\ 15 = \log\text{nat}\ 5 + \log\text{nat}\ 3 = 1{,}6094379 + 1{,}0986123 = 2{,}7080502$ u. s. w.

Anmerkung. Je größer x angenommen wird, desto convergirender wird die Reihe: $\frac{1}{2x^2-1} + \frac{1}{3}\left(\frac{1}{2x^2-1}\right)^3 + \frac{1}{5}\left(\frac{1}{2x^2-1}\right)^5$ ꝛc., und die Rechnung wird demnach immer kürzer, je größer x ist z. B. für $x = 7, 9, 11, 13$ ꝛc. Da nun für große Primzahlen die letztere Methode sehr bequem ist, so ist man darauf bedacht gewesen, eine Methode zu erfinden, welche auch für die kleinsten Primzahlen 2, 3, 5 gleiche Rechnungsvortheile gewähre, und hat zu diesem Behufe folgende Methode in Vorschlag gebracht, welche aber, nach meiner Meinung, nicht schneller als die des § 22 und 23 zum Ziele führt.

§ 24.

Gesetzt es wäre lognat 2, 3 und 5 zu berechnen, so suche man zwei aufeinander folgende möglichst große Zahlen, welche nur die Factoren 2, 3 und 5 enthalten. Solche sind 8 und 9, 9 und 10, 15 und 16, 24 und 25, 80 und 81 ꝛc. Man suche

$\log\text{nat}\ \frac{16}{15} = a$, $\log\text{nat}\ \frac{25}{24} = b$, $\log\text{nat}\ \frac{81}{80} = c$, so ist nach § 18., wenn wir

$\log\text{nat}\ 2 = x$, $\log\text{nat}\ 3 = y$, $\log\text{nat}\ 5 = z$ setzen:

I. $4x - y - z = a$ oder $4x - y - z = a$.

II. $2z - 3x - y = b$. $\quad -3x - y + 2z = b$.

III. $4y - 4x - z = c$ $\quad -4x + 4y - z = c$.

$$\left.\begin{array}{ll} \text{I. und III. gibt } 8x - 5y = a - c & \text{oder } 24x - 15y = 3a - 3c \\ \text{I. und II. } \quad 5x - 3y = 2a + b & 25x - 15y = 10a + 5b \end{array}\right\} \text{also } x = 7a + 5b + 3c$$

und folglich $5y = 8x - a + c = 55a + 40b + 25c$ oder $y = 11a + 8b + 5c$

und nach I. $z = 4x - y - a = 16a + 12b + 7c$.

§ 25.

Es bleibt nun noch zu zeigen, wie man, aus den bereits berechneten natürlichen Logarithmen, die eines jeden andern Systems oder die künstlichen (log. artificiales) berechnet. Es sei e die Grundzahl des natürlichen, α des künstlichen Systems,

und $e^x = p$, $\alpha^n = p$ oder $x = \log nat\, p$, $n = \log art\, p$, so ist $e^x = \alpha^n$ und folglich

$x \log nat\, e = n \log nat\, \alpha$ und da $\log nat\, e = 1$, so ist $x = n \log nat\, \alpha$ oder $n = \dfrac{x}{\log nat\, \alpha}$

d. h. $\log art\, p = \dfrac{\log nat\, p}{\log nat\, \alpha}$ (vergl. § 22. S. 22). Ist $\alpha = 10$, die Grundzahl des Briggschen Systems, so ist $\log brigg\, p = \dfrac{\log nat\, p}{\log nat\, 10} = \dfrac{\log nat\, p}{2{,}3025851} = \log nat\, p.\ 0{,}4342945.$

Es wird demnach $\log brigg\ 2 = 0{,}6931472.\ 0{,}4342945 = 0{,}3010300$;
$\log brigg\ 3 = 1{,}0986123.\ 0{,}4342945 = 0{,}4771212$ genauer $0{,}4771213$.
$\log brigg\ 5 = 1{,}6094379.\ 0{,}4342945 = 0{,}6989700$. u. s. w.

Anmerkung. Da $10^0 = 1$, $10^1 = 10$, $10^2 = 100$, $10^3 = 1000$ u. s. w. und $10^0 = 1$, $10^{-1} = 0{,}1$, $10^{-2} = 0{,}01$, $10^{-3} = 0{,}001$ u. s. w., so haben alle Zahlen > 1 positive Logarithmen von 0 bis ∞ und alle Zahlen < 1 negative Logarithmen von 0 bis $-\infty$ und die Logarithmen der negativen Zahlen können daher weder positiv noch negativ sein, und sind folglich unmöglich. Dieses gilt nicht nur fürs Briggsche, sondern für alle Systeme.

(Fortsetzung folgt.)