DAS POTENTIAL

ZWEIER GETRENNT LIEGENDER ELLIPSOIDE

VON

H. VON SCHAEWEN,
OBERLEHRER.

WISSENSCHAFTLICHE BEILAGE
ZU DEM JAHRESBERICHT DES KÖNIGL. GYMNASIUMS ZU MARIENWERDER FÜR 1892/93.

LEIPZIG,
DRUCK VON B. G. TEUBNER.
1893.

1893. Progr. Nr. 36.

Durch F. Mertens ist in Crelle's Journal Bd. 63 nachgewiesen worden, dafs das durch ein sechsfaches Integral ausdrückbare Potential zweier homogener Ellipsoide, die sich nach einer Potenz der Entfernung anziehen, mittelst der Methode des Dirichlet'schen Discontinuitätsfaktors zurückgeführt werden kann auf ein Doppelintegral über Kugeloberflächenstücke. Zugleich ist gezeigt worden, dafs das Potential eines Ellipsoids mit konzentrisch sich ändernder Dichtigkeit für einen Punkt sich gleichfalls durch ein Doppelintegral darstellen läfst, woran die Bemerkung geknüpft ist, dafs hieraus das Potential zweier solcher Ellipsoide durch ein vierfaches Integral sich finden lasse. Im Folgenden will ich nun dieses allgemeine Problem für getrennte Lage der Ellipsoide nach der gekennzeichneten Methode direkt in Angriff nehmen, aus dem sechsfachen Integral ein vierfaches wirklich ableiten, zeigen, dafs aus ihm für konstante Dichtigkeit das Mertens'sche Doppelintegral folgt, endlich eine konvergente Reihenentwicklung für dasselbe aufstellen, in deren Gliedern für den Fall der Homogenität alle Integrationen vollständig durchgeführt sind. Indem ich zum Verständnis meiner Auseinandersetzung auf die genannte Abhandlung, sowie hinsichtlich der Litteratur über das wichtige Problem auf die grundlegenden Arbeiten von Laplace, Jvory, Gauss, Chasles, Dirichlet verweise, wie sie sich in Ostwald's „Klassiker der Naturwissenschaften" Bd. 19 zusammengestellt finden, bemerke ich zugleich, dafs mir die dort erwähnte Abhandlung von Laguerre über das Potential heterogener Ellipsoide in den Comptes rendus zum Vergleich mit meinem Resultat nicht zugänglich gewesen ist.

I.

Unter wesentlicher Beibehaltung der Mertens'schen Bezeichnung werde das Potential gesetzt

$$= \int \frac{P(f) \,.\, P'(f')\, dx\, dy\, dz\, dx'\, dy'\, dz'}{[(x-x')^2+(y-y')^2+(z-z')^2]^{\frac{n}{2}}},$$

was für $n = 1$ dem Falle des Newton'schen Gravitationsgesetzes entspricht.

$P(f)$, $P'(f')$ sind die Dichtigkeiten, $f = 1$ und $f' = 1$ die Gleichungen der Ellipsoide. Die Grenzbedingungen für die Integration folgen aus

$$1 - f \geqq 0 \qquad 1 - f' \geqq 0.$$

Man bezieht nun die Gleichungen der Ellipsoide durch die Substitutionen

$$x - a = u, \quad y - b = v, \quad z - c = w, \quad x' - a' = -u', \quad y' - b' = -v', \quad z - z' = -w'$$

auf ihre Mittelpunkte und setzt

$$1)\qquad \begin{aligned} f(u,v,w) &= a_{11}u^2 + a_{22}v^2 + a_{33}w^2 + 2a_{12}uv + 2a_{13}uw + 2a_{23}vw = 1 \\ f'(u',v',w') &= a'_{11}u'^2 + a'_{22}v'^2 + a'_{33}w'^2 + 2a'_{12}u'v' + 2a'_{13}u'w' + 2a'_{23}v'w' = 1 \end{aligned}.$$

Dann bleibt zu bestimmen

$$2)\qquad \mathrm{P}_n = \int \frac{PP'\,du\,dv\,dw\,du'\,dv'\,dw'}{[(u+u'+a-a')^2 + (v+v'+b-b')^2 + (w+w'+c-c')^2]^{\frac{n}{2}}}.$$

Indem jetzt mittelst des Fourier'schen Theorems die Dichtigkeiten ausgedrückt werden durch

$$3)\qquad \begin{aligned} P(f) &= \frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{+\infty} dl \int_0^1 d\varrho\, P(\varrho)\, e^{(k+il)(\varrho-f)} \\ P'(f') &= \frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{+\infty} dl' \int_0^1 d\varrho'\, P'(\varrho')\, e^{(k'+il')(\varrho'-f')}, \end{aligned}$$

ergiebt sich, dafs die Grenzen der Integrationen nach u, v, w, u', v', w' sich von $-\infty$ bis $+\infty$ ausdehnen lassen, denn für alle Wertsysteme, für welche $f > 1$ und $f' > 1$ wird, verschwinden jene Darstellungen 3) der Funktionen P und P'.

Man hat also

$$4)\qquad \mathrm{P}_n = \frac{1}{(2\pi)^2}\int_{-\infty}^{+\infty(6)} \frac{du\,dv\,dw\,du'\,dv'\,dw'}{r^n} \int_{-\infty}^{+\infty} dl \int_0^1 d\varrho\, P(\varrho) e^{(k+il)(\varrho-f)} \int_{-\infty}^{+\infty} dl' \int_0^1 d\varrho'\, P'(\varrho') e^{(k'+il')(\varrho'-f')},$$

wo $\qquad r = [(u+u'+a-a')^2 + (v+v'+b-b')^2 + (w+w'+c-c')^2]^{\frac{1}{2}}$

gesetzt ist.

Nach Hinzufügung der Faktoren $e^{-\varepsilon l^2}$, $e^{-\varepsilon' l'^2}$ unter dem Integralzeichen, in denen ε und ε' unendlich kleine positive Gröfsen bedeuten, ist man in der Lage, die Reihenfolge der Integrationen zu vertauschen. Man findet dann

$$5)\qquad \mathrm{P}_n(\varepsilon) = \frac{1}{(2\pi)^2}\int_{-\infty}^{+\infty} dl \int_0^1 d\varrho\, P(\varrho) e^{-\varepsilon l^2 + (k+il)(\varrho-f)} \int_{-\infty}^{+\infty} dl' \int_0^1 d\varrho'\, P'(\varrho') e^{-\varepsilon' l'^2 + (k'+il')(\varrho'-f')} \int_{-\infty}^{+\infty(6)} \frac{(du)\,(du')}{r^n},$$

woraus für $\varepsilon = 0$ und $\varepsilon' = 0$ P_n hervorgehen mufs.

Nun ist für $n \geqq 1$ nach Lemma II der Mertens'schen Abhandlung

$$[(u+u'+a-a')^2 + (v+v'+b-b')^2 + (w+w'+c-c')^2]^{-\frac{n}{2}}$$

$$= \frac{\Gamma(2-n)}{(2\pi)^2}\int_{-\infty}^{+\infty} d\lambda\, (\varkappa+i\lambda)^{n-1} \int d\sigma\, e^{(\varkappa+i\lambda)(L+L'+q)},$$

wo

$$L = \xi u + \eta v + \zeta w, \quad L' = \xi u' + \eta v' + \zeta w', \quad q = (a-a')\xi + (b-b')\eta + (c-c')\zeta,$$

$$\xi = \sin\vartheta\cos\psi \qquad \eta = \sin\vartheta\sin\psi, \qquad \zeta = \cos\vartheta$$

und $d\sigma$ das Element der Kugeloberfläche ist. Durch Einführung dieser Darstellung gelangt man mithin, falls man für die Integration nach λ noch einen Faktor $e^{-\varepsilon''\lambda^2}$ unter dem Integralzeichen hinzufügt und die Reihenfolge der Integrationen vertauscht, zu

$$\mathrm{P}^n(\varepsilon)=\frac{\Gamma(2-n)}{(2\pi)^4}\int_{-\infty}^{+\infty} e^{-\varepsilon''\lambda^2}(\varkappa+i\lambda)^{n-1}d\lambda\int_{-\infty}^{+\infty} e^{-\varepsilon l^2}dl\int_{-\infty}^{+\infty} e^{-\varepsilon' l'^2}dl'\int_0^1 d\varrho\, P(\varrho)e^{(k+il)\varrho}\int_0^1 d\varrho' P'(\varrho')e^{(k'+il')\varrho'}\int d\sigma\, e^{(\varkappa+i\lambda)\eta}Q.Q'$$

6) $$Q=\int du\, dv\, dw\, e^{-(k+il)f+(\varkappa+i\lambda)L}$$

$$Q'=\int du'\, dv'\, dw'\, e^{-(k'+il')f'+(\varkappa+i\lambda)L'}.$$

Man transformiert jetzt $f=1$, $f'=1$ auf die Hauptachsen durch die orthogonalen Substitutionen

$$u=x_u\, U+y_u\, V+z_u\, W$$

7) $$v=x_v\, U+y_v\, V+z_v\, W$$

$$w=x_w\, U+y_w V+z_w\, W$$

u. s. w.

Hierdurch wird

$$f=\frac{U^2}{A^2}+\frac{V^2}{B^2}+\frac{W^2}{C^2},\qquad f'=\frac{U'^2}{A'^2}+\frac{V'^2}{B'^2}+\frac{W'^2}{C'^2}.$$

Es sei $A>B>C$ und $A'>B'>C'$.

In den neuen Variabeln erhält man dann

$$Q=\int dU\, dV\, dW\, e^{-(k+il)\left(\frac{U^2}{A^2}+\frac{V^2}{B^2}+\frac{W^2}{C^2}\right)+(\varkappa+i\lambda)L},$$

wo jetzt

$$L=(x_u\xi+x_v\eta+x_w\zeta)\,U+(y_u\xi+y_v\eta+y_w\zeta)\,V+(z_u\xi+z_v\eta+z_w\zeta)\,W$$

zu setzen ist.

Die Integrationen nach U, V, W sind hiermit aber separiert und auch leicht auszuführen mit Hülfe des Satzes

$$\int_{-\infty}^{+\infty} dt\,.\,e^{-(m+ni)t^2+2(m'+in')t}=\sqrt{\frac{\pi}{m+ni}}\; e^{\frac{(m'+n'i)^2}{m+ni}}.$$

Hierdurch resultiert

8) $$Q=\frac{\pi^{\frac{3}{2}}}{(k+il)^{\frac{3}{2}}}\, e^{\frac{\left(\frac{\varkappa+i\lambda}{2}\right)^2 p^2}{k+il}},$$

wo

9) $$p^2=A^2(x_u\xi+x_v\eta+x_w\zeta)^2+B^2(y_u\xi+y_v\eta+y_w\zeta)^2+C^2(z_u\xi+z_v\eta+z_w\zeta)^2$$

ist.

Ein entsprechender Wert ergiebt sich für Q'.

Die hierin vorkommenden Gröſsen p und p' haben eine einfache geometrische Bedeutung, wie Mertens gezeigt hat. Sie sind die Abstände der Centra der Ellipsoide von den zum Radius ξ, η, ζ normalen Tangentenebenen. Setzt man nämlich die Determinante der a's in der Gleichung 1) $f(u, v, w) = 1$ gleich D und ferner $\frac{\partial \log D}{\partial a_{\varkappa\lambda}} = \alpha_{\varkappa\lambda}$, so wird das Quadrat dieser Entfernung bekanntlich

$$= \alpha_{11}\xi^2 + \alpha_{22}\eta^2 + \alpha_{33}\zeta^2 + 2\alpha_{12}\xi\eta + 2\alpha_{13}\xi\zeta + 2\alpha_{23}\eta\zeta.$$

Die Identität dieses Ausdruckes mit dem obigen Werte von p^2 kann aber leicht nachgewiesen werden, da mit Hülfe von 7) ohne Schwierigkeit hervorgeht, daſs

$$10)\qquad \begin{aligned} \alpha_{11} &= A^2 x_u^2 + B^2 y_u^2 + C^2 z_u^2 \\ \alpha_{22} &= A^2 x_v^2 + B^2 y_v^2 + C^2 z_v^2 \\ \alpha_{33} &= A^2 x_w^2 + B^2 y_w^2 + C^2 z_w^2 \\ \alpha_{12} &= A^2 x_u x_v + B^2 y_u y_v + C^2 z_u z_v \end{aligned}$$

u. s. w.

ist.

Bei Eintragung der Werte von Q und Q' überzeugt man sich sehr bald, daſs die Integrationen nach ϱ und ϱ' sich mit denjenigen nach l und l' vertauschen lassen und daſs ferner $\varepsilon = 0$ und $\varepsilon' = 0$ gesetzt werden darf. Man hat dann zu behandeln

$$\int_{-\infty}^{+\infty} \frac{dl\, e^{(k+il)\varrho + \frac{\left(\frac{\varkappa+i\lambda}{2}\right)^2 p^2}{k+il}}}{(k+il)^{\frac{3}{2}}}.$$

Nun läſst sich aber zeigen, daſs

$$\int_{-\infty}^{+\infty} e^{r+is+\frac{m^2}{r+is}} \frac{ds}{(r+is)^{\frac{3}{2}}} = \sqrt{\pi}\,\frac{e^{2m} - e^{-2m}}{m}$$

wird. Dies ergiebt also

$$\int dl = \frac{\sqrt{\pi}}{\frac{\varkappa+i\lambda}{2}\cdot p}\left[e^{\sqrt{\varrho}(\varkappa+i\lambda)p} - e^{-\sqrt{\varrho}(\varkappa+i\lambda)p}\right]$$

und ebenso

$$\int dl' = \frac{\sqrt{\pi}}{\frac{\varkappa+i\lambda}{2}\cdot p'}\left[e^{\sqrt{\varrho'}(\varkappa+i\lambda)p'} - e^{-\sqrt{\varrho'}(\varkappa+i\lambda)p'}\right].$$

Man hat mithin die Integrationen nach l und l' ausgeführt und erhält

$$11)\qquad \mathrm{P}_n(\varepsilon) = C\int_{-\infty}^{+\infty} e^{-\varepsilon''\lambda^2}(\varkappa+i\lambda)^{n-3}\,d\lambda \int_0^1\!\!\int_0^1 PP'\,d\varrho\,d\varrho' \int \frac{d\sigma . e^{(\varkappa+i\lambda)q}}{pp'}\left[e^{(\varkappa+i\lambda)p\sqrt{\varrho}} - e^{-(\varkappa+i\lambda)p\sqrt{\varrho}}\right]$$
$$\left[e^{(\varkappa+i\lambda)p'\sqrt{\varrho'}} - e^{-(\varkappa+i\lambda)p'\sqrt{\varrho'}}\right],$$

$$C = \frac{\Gamma(2-n)\,ABC\,A'B'C'}{4}.$$

Die Integrationen nach ϱ und σ können jetzt wieder mit derjenigen nach λ vertauscht werden und man darf auch $\varepsilon'' = o$ setzen, da das Integral

$$12)\qquad \int_{-\infty}^{+\infty} e^{b(r+it)}(r+it)^{a-1}\,dt = \frac{2\pi}{\Gamma(1-a)\,b^a}$$

ist für $b > o$, aber verschwindet für $b < o$ bei beliebigem a, falls man nur die Γ-Funktion für ein beliebiges Argument durch die Gleichung

$$a\,\Gamma(a) = \Gamma(a+1)$$

definiert.

Man gelangt zu diesem Satze auf folgende Weise. Man denkt sich die Funktion $e^{bz}z^{a-1}$, wo $z = x + iy$ und $b > o$ ist, für die ganze x,y-Ebene bestimmt und integriert nun von $z = -\infty$ auf einem Wege, der zunächst oberhalb der x-Achse läuft, dann den Punkt o umschliefst und unterhalb der x-Achse bis $-\infty$ zurückkehrt. Das Integral auf einem zweiten ähnlichen Wege mit demselben Anfangs- und Endpunkt mufs dann notwendigerweise demjenigen auf dem ersten gleich sein, wenn zwischen beiden Wegen kein Unstetigkeitspunkt liegt. Bestimmt man nun die Werte der Integrale für zwei besondere Wege, so müssen unter der obigen Bedingung auch diese gleich sein. Der erste dieser Wege soll fest gelegt sein durch 1) $z = \frac{1}{\varepsilon}e^{i\varphi}$, φ von π bis $\frac{\pi}{2} - \eta$, wo ε und η unendlich kleine Gröfsen sind, 2) $z = r + it$, t von $+\frac{1}{\varepsilon}$ bis $-\frac{1}{\varepsilon}$, 3) $z = \frac{1}{\varepsilon}e^{i\varphi}$, φ von $-\left(\frac{\pi}{2} - \eta\right)$ bis $-\pi$. Die Integrale auf den Stücken des unendlich grofsen Kreises von π bis $\frac{\pi}{2}$ und $-\frac{\pi}{2}$ bis $-\pi$ fallen für jedes beliebige a fort, denn da $b > o$ ist, wird der reelle Teil des Exponenten von e dann stets negativ und unendlich grofs. Es bleibt also das Integral auf dem gekennzeichneten Wege von $+\frac{\pi}{2}$ bis $-\frac{\pi}{2}$ übrig. Wenn $o < a < 1$ wäre, so fielen auch noch die Integrale auf den unendlich kleinen Stücken des unendlich grofsen Kreises von $\frac{\pi}{2}$ bis $\frac{\pi}{2} - \eta$ und von $-\left(\frac{\pi}{2} - \eta\right)$ bis $-\frac{\pi}{2}$ weg, und man erhielte auf einem der y-Achse parallelen Wege

$$i\int_{+\infty}^{-\infty} e^{b(r+it)}(r+it)^{a-1}\,dt.$$

Wird die Bedingung für a nicht erfüllt, so mufs man die Integrale von $\frac{\pi}{2}$ bis $\frac{\pi}{2} - \eta$ und von $-\left(\frac{\pi}{2} - \eta\right)$ bis $-\frac{\pi}{2}$ an den Grenzen des obigen Integrals noch hinzufügen, um den gesamten Integralwert zu erhalten. Das Integral für diesen Fall mag der Kürze wegen durch dasselbe Symbol bezeichnet werden. Wir wissen dann, dafs wir für ein beliebiges a noch auf dem unendlich grofsen Kreise bis zu den Stellen $+\frac{\pi}{2}$ und $-\frac{\pi}{2}$ gehen müssen. Dieses durch das obige Symbol dargestellte Integral ist nun gleich dem Integral auf einem zweiten Wege, der bestimmt ist durch 1) $z = e^{i\pi}t$, t von $\frac{1}{\varepsilon}$ bis ε_1, 2) $z = \varepsilon_1 e^{i\varphi}$, φ von $+\pi$ bis $-\pi$, 3) $z = te^{-i\pi}$, t von ε_1 bis $\frac{1}{\varepsilon}$.

Wenn nun a nicht negativ wird, verschwindet das Integral auf dem unendlich kleinen Kreise und es bleibt

$$e^{i\pi a}\int_{\infty}^{0} e^{-bt}\, t^{a-1}\, dt + e^{-i\pi a}\int_{0}^{\infty} e^{-bt}\, t^{a-1}\, dt = (e^{i\pi a} - e^{-i\pi a})\int_{\infty}^{0} e^{-bt}\, t^{a-1}\, dt = -2i \sin a\pi \int_{0}^{\infty} e^{-bt}\, t^{a-1}\, dt.$$

Dies Integral wird aber mit Hülfe der Γ-Funktion ausdrückbar. Man erhält dafür

$$-2\pi i \frac{\sin a\pi \,.\, \Gamma(a)}{b^a} = -\frac{2\pi i}{\Gamma(1-a)\, b^a},$$

wenn man nämlich setzt $\Gamma(a)\,\Gamma(1-a) = \frac{\pi}{\sin a\pi}$.

Wird $a < o$, verschwindet also das Integral auf dem unendlich kleinen Kreise nicht, so können wir unser zweites Integral nicht direkt durch das obige Integral von 0 bis ∞ ausdrücken, wohl aber mit Hülfe teilweiser Integration durch ein anderes Integral, das durch die Γ-Funktion darstellbar ist. Und wenn man nun die Γ-Funktion für ein beliebiges Argument durch die Gleichung $a\Gamma(a) = \Gamma(a+1)$ definiert, so findet man das Integral auf dem zweiten Wege stets $= \frac{2\pi i}{\Gamma(1-a)\, b^a}$. Da nun die Integrale auf dem ersten und zweiten Wege übereinstimmen müssen, hat man also

$$\int_{-\infty}^{+\infty} e^{b(r+it)}\, (r+it)^{a-1}\, dt = \frac{2\pi}{\Gamma(1-a)\, b^a} \quad \text{für} \quad b > o.$$

Dafs dieses Integral für $b < o$ verschwindet, ergiebt sich durch die Erwägung, dafs das Integral für $z = r + it$ von $t = -\frac{1}{\varepsilon}$ bis $t = +\frac{1}{\varepsilon}$ gleich sein mufs dem Integral für $z = \frac{1}{\varepsilon}\, e^{i\varphi}$ von $\varphi = -\frac{\pi}{2}$ bis $\varphi = +\frac{\pi}{2}$, da zwischen beiden Wegen kein Unstetigkeitspunkt liegt. Weil nun das letzte Integral stets verschwindet, ist das Gleiche bei dem ersten der Fall.

Nach dieser Entwicklung benutzen wir jetzt das Integral 12) zur Ausführung einer Integration in 11). Man übersieht leicht, dafs man zu behandeln hat

$$\int_{-\infty}^{+\infty} e^{(\varkappa + i\lambda)(q \pm p\sqrt{\varrho} \pm p'\sqrt{\varrho'})}\, (\varkappa + i\lambda)^{n-3}\, d\lambda.$$

Dies wird aber

$$= \frac{2\pi}{\Gamma(3-n)}\, (q \pm p\sqrt{\varrho} \pm p'\sqrt{\varrho'})^{2-n}.$$

Folglich findet man

$$13)\quad \mathrm{P}_n = \frac{C\,.\,2\pi}{\Gamma(3-n)} \int_0^1 d\varrho\, P \int_0^1 d\varrho'\, P' \int \frac{d\sigma}{pp'} \Big[(q + p\sqrt{\varrho} + p'\sqrt{\varrho'})^{2-n} - (q - p\sqrt{\varrho} + p'\sqrt{\varrho'})^{2-n} - (q + p\sqrt{\varrho} - p'\sqrt{\varrho'})^{2-n} + (q - p\sqrt{\varrho} - p'\sqrt{\varrho'})^{2-n} \Big],$$

wo die Integrationen in den einzelnen Integralen nach σ über solche Stücke der Kugeloberfläche auszudehnen sind, für welche die Bedingungen erfüllt werden

$$q \pm p\sqrt{\varrho} \pm p'\sqrt{\varrho'} > 0.$$

Wir haben hienach das sechsfache Integral auf ein vierfaches zurückgeführt, ohne die Funktionen P und P' zu kennen.

Es läfst sich zeigen, dafs aus dem Wert 13) für $P = 1$ und $P' = 1$ der Mertens'sche Wert P_n hervorgeht. Man hat nämlich für diesen Fall in 11) das Integral nach ϱ

$$= \int_0^1 d\varrho \left(e^{(\varkappa + i\lambda) p \sqrt{\varrho}} - e^{-(\varkappa + i\lambda) p \sqrt{\varrho}}\right)$$

$$= \frac{2}{(\varkappa + i\lambda)^2} \left[e^{(\varkappa + i\lambda) p} \left((\varkappa + i\lambda) p - 1 \right) + e^{-(\varkappa + i\lambda) p} \left((\varkappa + i\lambda) p + 1 \right) \right]$$

$$= \frac{2}{(\varkappa + i\lambda)^2} \frac{\partial}{\partial p} \frac{e^{(\varkappa + i\lambda) p} - e^{-(\varkappa + i\lambda) p}}{p}.$$

Daher wird

$$\int_0^1 d\varrho \int_0^1 d\varrho' = \frac{4}{(\varkappa + i\lambda)^4} \frac{\partial^2}{\partial p \, \partial p'} \frac{\left(e^{(\varkappa + i\lambda) p} - e^{-(\varkappa + i\lambda) p}\right)\left(e^{(\varkappa + i\lambda) p'} - e^{-(\varkappa + i\lambda) p'}\right)}{p p'}$$

und es geht 11) über in

$$4C \int_{-\infty}^{+\infty} e^{-\varepsilon'' \lambda^2} (\varkappa + i\lambda)^{n-7} d\lambda \iint \frac{d\sigma}{p p'} \frac{\partial^2}{\partial p \, \partial p'} \cdot \frac{1}{p p'} \Big[e^{(\varkappa + i\lambda)(q + p + p')} + e^{(\varkappa + i\lambda)(q - p - p')} - e^{(\varkappa + i\lambda)(q - p + p')} - e^{(\varkappa + i\lambda)(q + p - p')} \Big].$$

Daraus findet man dann

$$\mathrm{P}_n = \frac{4 C \, 2\pi}{\Gamma(7-n)} \iint \frac{d\sigma}{p p'} \frac{\partial^2}{\partial p \, \partial p'} \cdot \frac{1}{p p'} \Big[(q + p + p')^{6-n} + (q - p - p')^{6-n} - (q - p + p')^{6-n} - (q + p - p)^{6-n} \Big],$$

also genau den Mertens'schen Wert, weil

$$4C = \Gamma(2-n) \, ABC \, . \, A'B'C' = \frac{\Gamma(2-n)}{\sqrt{DD'}}$$

ist.

II.

Es soll jetzt für das gefundene Potential eine Reihenentwicklung aufgestellt werden. Zu diesem Zwecke wird auf 11) zurückgegangen, C gleich dem angegebenen Werte und der Kürze halber $p\sqrt{\varrho} = o$, $p'\sqrt{\varrho'} = o'$ gesetzt. Wenn man dann die Multiplikation unter dem Integralzeichen ausführt, ergiebt sich

$$14)\quad \mathrm{P}_{(n)}(\varepsilon) = \frac{\Gamma(2-n)}{4\sqrt{DD'}} \int_{-\infty}^{+\infty} e^{-\varepsilon \lambda^2} (\varkappa + i\lambda)^{n-3} d\lambda \int_0^1\!\!\int_0^1 d\varrho \, d\varrho' \sqrt{\varrho . \varrho'} \, PP' \int \frac{d\sigma}{o o'} e^{(\varkappa + i\lambda) q} \Big[e^{(\varkappa + i\lambda)(o + o')} + e^{-(\varkappa + i\lambda)(o + o')} - e^{(\varkappa + i\lambda)(o - o')} - e^{-(\varkappa + i\lambda)(o - o')} \Big].$$

Setzt man für jede Exponentialgröfse in der Klammer die Reihenentwicklung ein, so wird

$$15)\quad \mathrm{P}_{(n)}(\varepsilon) = \frac{\Gamma(2-n)}{\sqrt{DD'}} \sum_0^{\infty} {}^{\mu} \cdot \frac{1}{(2\mu+2)!} \int_{-\infty}^{+\infty} d\lambda (\varkappa + i\lambda)^{2\mu + n - 1} \int_0^1\!\!\int_0^1 d\varrho \, d\varrho' \sqrt{\varrho \varrho'} \, PP' \int d\sigma \, \Phi_{2\mu}(o^2, o'^2) e^{-\varepsilon \lambda^2 + (\varkappa + i\lambda) q}.$$

Hierin ist

$$2\,\Phi_{2\mu}(o^2,\ o'^2) = \frac{(o+o')^{2\mu+2} - (o-o')^{2\mu+2}}{o\,o'}$$

16)

$$= 2\left[\binom{2\mu+2}{1} o^{2\mu} + \binom{2\mu+2}{3} o^{2\mu-2}\, o'^2 + \text{ etc.}\right]$$

Es bedeutet also $\Phi_{2\mu}$ eine homogene ganze rationale Funktion μ^{ten} Grades der Gröſsen o^2 und o'^2.

Jetzt handelt es sich um die Bestimmung des allgemeinen Gliedes $\mathrm{P}_n^{(\mu)}(\varepsilon)$ der Integralreihe für $\mathrm{P}_n(\varepsilon)$. Dasselbe wird

$$17)\ \mathrm{P}_n^{(\mu)}(\varepsilon) = \frac{\Gamma(2-n)}{\sqrt{DD'}} \cdot \frac{1}{2\mu+2\,!} \int_{-\infty}^{+\infty} (\varkappa + i\lambda)^{2\mu+n-1}\, d\lambda \int_0^1\!\!\int_0^1 d\varrho\, d\varrho' \sqrt{\varrho\varrho'}\, PP' \int d\sigma\, e^{-\varepsilon\lambda^2 + (\varkappa+i\lambda)q}\, \Phi_{2\mu}(o^2, o'^2).$$

Da die Lage des ursprünglichen Coordinatensystems eine willkürliche ist, so kann die z-Achse, mithin auch die w-Achse durch die Centra der beiden Ellipsoide gelegt werden. Dann wird $a,\ a',\ b,\ b' = 0$ und $q = (c-c')\,\zeta = E \cos\vartheta$, wo E den Centralabstand der beiden Körper bedeutet.

Die Integrationsgrenzen sind nun o und π für ϑ, o und 2π für ψ. Bei der Integration nach ψ stöſst man auf keine weiteren Schwierigkeiten, da, wie aus den Werten für p^2 und p'^2 resp. o^2 und o'^2 zu entnehmen ist, $\Phi_{2\mu}$ eine ganze rationale Funktion von ξ, η, ζ bedeutet. Zur Bestimmung von

$$\int_0^{\pi} d\psi\ \Phi_{2\mu}$$

würden Ausdrücke von der Form

$$\int_0^{2\pi} d\psi\ o^{2(\mu-\mu')}\, o'^{2\mu'}$$

zu integrieren sein.

Nun läſst sich schreiben statt

$$p^2 = \alpha_{11}\xi^2 + \alpha_{22}\eta^2 + \alpha_{33}\zeta^2 + 2\alpha_{12}\xi\eta + 2\alpha_{13}\xi\zeta + 2\alpha_{23}\eta\zeta$$

$$\begin{aligned} p^2 = {} & (\alpha_{33} - \alpha_{11}\cos^2\psi - \alpha_{22}\sin^2\psi - 2\alpha_{12}\sin\psi\cos\psi)\,\zeta^2 \\ & + 2\,(\alpha_{13}\cos\psi + \alpha_{23}\sin\psi)\,\zeta\sqrt{1-\zeta^2} \\ & + \alpha_{11}\cos^2\psi + \alpha_{22}\sin^2\psi + 2\alpha_{12}\sin\psi\cos\psi \end{aligned}$$

oder nach Multiplikation von ϱ und Einführung von

18)

$$\begin{aligned} A_{11} &= \varrho\,(\alpha_{33} - \alpha_{11}\cos^2\psi - \alpha_{22}\sin^2\psi - 2\alpha_{12}\sin\psi\cos\psi) \\ A_{12} &= 2\varrho\,(\alpha_{13}\cos\psi + \alpha_{23}\sin\psi) \\ A_{22} &= \varrho\alpha_{33} - A_{11}, \end{aligned}$$

da

$$o^2 = \varrho p^2 \quad \text{ist,}$$

$$o^2 = A_{11}\zeta^2 + A_{12}\zeta\sqrt{1-\zeta^2} + A_{22}\,.$$

Ebenso wird

19) $$o'^2 = A'_{11}\zeta^2 + A'_{12}\zeta\sqrt{1-\zeta^2} + A'_{22}.$$

Daher hat man

$$\int_0^{2\pi} d\psi\, o^{2(\mu-\mu')}\, o'^{2\mu'} = \int_0^{2\pi} d\psi\, (A_{11}\zeta^2 + A_{12}\zeta\sqrt{1-\zeta^2} + A_{22})^{\mu-\mu'} (A'_{11}\zeta^2 + A'_{12}\zeta\sqrt{1-\zeta^2} + A'_{22})^{\mu'}.$$

Die zu integrierende Funktion läſst sich aber leicht in die Form bringen

$$(\mathfrak{A} + \mathfrak{A}_1\zeta\sqrt{1-\zeta^2})(\mathfrak{A}' + \mathfrak{A}'_1\zeta\sqrt{1-\zeta^2}) = \mathfrak{A}\mathfrak{A}' + \mathfrak{A}_1\mathfrak{A}_1'\zeta^2(1-\zeta^2) + (\mathfrak{A}\mathfrak{A}_1' + \mathfrak{A}_1\mathfrak{A}')\zeta\sqrt{1-\zeta^2},$$

wo die $\mathfrak{A}$'s ganze rationale Funktionen von ζ^2 sind. Das rationale Glied in obigem Ausdruck ist folglich auch eine ganze rationale Funktion von ζ^2, deren Koeffizienten sich aus den Gröſsen A_{11}, A_{22}, A'_{11}, A'_{22}, A^2_{12}, A'^2_{12} zusammensetzen, daher ganze rationale Funktionen von $\sin^2\psi$, $\cos^2\psi$, $\sin\psi\cos\psi$ sind. Der Koeffizient des irrationalen Gliedes schreitet aber, wie leicht zu ersehen ist, nach ungeraden Potenzen der Gröſsen A_{12} und A'_{12} vor, wird also von der Form sein müssen

$$\Psi\cos\psi + \Psi'\sin\psi,$$

wo Ψ und Ψ' ganze rationale Funktionen sind, die nur von $\sin^2\psi$, $\cos^2\psi$ und $\sin\psi\cos\psi$ abhängen. Unschwer läſst sich aber zeigen, daſs für diese Annahme von Ψ und Ψ'

$$\int_0^{2\pi}(\Psi\cos\psi + \Psi'\sin\psi)\,d\psi = 0$$

wird.

Daher fallen die in Bezug auf ζ irrationalen Glieder fort und es ergiebt sich

20) $$\int_0^{2\pi} d\psi\, o^{2(\mu-\mu')}\, o'^{2\mu'} = C_{2\mu}\,\zeta^{2\mu} + C_{2\mu-2}\,\zeta^{2\mu-2} + \text{etc.}$$

Von den C's, welche Integrale nach ψ von 0 bis 2π sind, soll zu späterem Gebrauch nur $C_{2\mu}$ bestimmt werden. Setzt man

$$I = A_{11}^{\mu-\mu'} - \binom{\mu-\mu'}{2} A_{11}^{\mu-\mu'-2} A_{12}^2 + \binom{\mu-\mu'}{4} A_{11}^{\mu-\mu'-4} A_{12}^4 - \text{ etc.}$$

$$II = \binom{\mu-\mu'}{1} A_{11}^{\mu-\mu'-1} A_{12} - \binom{\mu-\mu'}{3} A_{11}^{\mu-\mu'-3} A_{12}^3 + \text{ etc.}$$

und bildet sich I′ und II′, indem man A_{11}, A_{12} durch A'_{11} und A'_{12}, ferner $\mu-\mu'$ durch μ' ersetzt, so wird der Koeffizient von $\zeta^{2\mu}$

$$C_{2\mu} = \int_0^{2\pi}(I\,I' - II\,II')\,d\psi.$$

Dies ist aber der reelle Teil von

$$\int_0^{2\pi}(I + iII)\,(I' + iII')\,d\psi$$

oder der reelle Teil von

$$21)\qquad \int_0^{2\pi} (A_{11} + iA_{12})^{\mu-\mu'} (A'_{11} + iA'_{12})^{\mu'} \, d\psi .$$

Daher ist $C_{2\mu}$ der reelle Teil dieses Integrals.

Jetzt hat man die Integration nach ϑ von o bis π, oder nach ζ von $+1$ bis -1 auszuführen. Bei Betrachtung von 16) und 17) ersieht man sofort, dafs man zu diesem Ende nur zu bestimmen hat

$$\int_{-1}^{+1} e^{m\zeta} (C_{2\mu} \zeta^{2\mu} + C_{2\mu-2} \zeta^{2\mu-2} + \text{ etc.}) \, d\zeta,$$

wo der Kürze halber $E(\varkappa + i\lambda) = m$ gesetzt ist.

Dies Integral wird aber

$$= e^{m\zeta} (O_{2\mu} \zeta^{2\mu} + O_{2\mu-1} \zeta^{2\mu-1} + \cdots + O_0) \Big|_{-1}^{+1}$$
$$= e^m (O_{2\mu} + O_{2\mu-1} + \cdots + O_0) - e^{-m} (O_{2\mu} - O_{2\mu-1} + \text{ etc.})$$

Die O's lassen sich linear durch die C's ausdrücken durch die Gleichungen

$$22)\qquad \begin{aligned} & m O_{2\mu} = C_{2\mu} \\ & m O_{2\mu-1} + 2m O_{2\mu} = 0 \\ & m O_{2\mu-2} + (2\mu - 1) O_{2\mu-1} = C_{2\mu-2} \\ & m O_{2\mu-3} + (2\mu - 2) O_{2\mu-2} = 0 \\ & \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \\ & m O_0 + 1 \,.\, O_1 = C_0 \,. \end{aligned}$$

Es bliebe nun nach λ zu integrieren. Ein Glied von $\mathrm{P}_n^{(\mu)}(\varepsilon)$ wird nach 16) und 17) bis auf einen aus $\Phi_{2\mu}$ leicht zu bestimmenden konstanten Faktor $\binom{2\mu+1}{2\mu'+1}$ und den konstanten Faktor $\frac{1}{\sqrt{DD'}} \cdot \frac{1}{2\mu+2\,!}$, wenn man zugleich wieder m durch $E(\varkappa + i\lambda)$ ersetzt

$$23)\qquad \begin{aligned} & = \Gamma(2-n) \int_{-\infty}^{+\infty} d\lambda \, (\varkappa + i\lambda)^{2\mu+n-1} \, e^{-\varepsilon\lambda^2 + E(\varkappa+i\lambda)} (O_{2\mu} + O_{2\mu-1} + \cdots + O_0) \\ & - \Gamma(2-n) \int_{-\infty}^{+\infty} d\lambda \, (\varkappa + i\lambda)^{2\mu+n-1} \, e^{-\varepsilon\lambda^2 - E(\varkappa+i\lambda)} (O_{2\mu} - O_{2\mu-1} + \cdots + O_0). \end{aligned}$$

Da man nun $\varepsilon = 0$ setzen und das Theorem 12) benutzen kann, so erkennt man, dafs das zweite dieser Integrale vollständig wegfällt, denn man hat immer Integrale von der Form

$$\int_{-\infty}^{+\infty} e^{-E(\varkappa+i\lambda)} (\varkappa + i\lambda)^a \, d\lambda .$$

Wie nun die Gleichungen 22) lehren, in denen $m = E(\varkappa + i\lambda)$ ist, läfst sich $O_{2\mu} + O_{2\mu-1} + \cdots + O_0$ auf die Form bringen

$$\frac{\Omega_0}{E(\varkappa+i\lambda)} + \frac{\Omega_2}{E^3(\varkappa+i\lambda)^3} + \cdots \frac{\Omega_{2\mu}}{E^{2\mu+1}(\varkappa+i\lambda)^{2\mu+1}}.$$

Daher wird bei Anwendung von 12)

$$\Gamma(2-n)\int_{-\infty}^{+\infty} d\lambda\,(\varkappa+i\lambda)^{2\mu+n-1}\,e^{E(\varkappa+i\lambda)}\,(O_{2\mu} + O_{2\mu-1} + \cdots + O_0)$$

übergehen in

$$\frac{\Gamma(2-n)}{E^{2\mu+n}}\left[\frac{\Omega_0}{\Gamma(2-2\mu-n)} + \frac{\Omega_2}{\Gamma(4-2\mu-n)} + \cdots \frac{\Omega_{2\mu}}{\Gamma(2-n)}\right].$$

Bei wiederholter Benutzung des Satzes $a\,\Gamma(a) = \Gamma(a+1)$ hebt sich die Γ-Funktion ganz heraus und man erhält das Integral 23)

$$24)\qquad = \frac{2\pi}{E^{2\mu+n}}\left[\begin{array}{l}\Omega_0(2-n-1)(2-n-2)\cdots(2-n-2\mu)\\ +\,\Omega_2(2-n-1)(2-n-2)\cdots(2-n-2\mu+2)\cdots+\Omega_{2\mu}\end{array}\right].$$

Da nun in $\mathrm{P}_n^{(\mu)}$ für den Fall des Newton'schen Gravitationsgesetzes $n = 1$ zu setzen ist, so reduziert sich bei dieser Annahme 24), oder, was dasselbe ist, 23) auf

$$\frac{2\pi\,\Omega_{2\mu}}{E^{2\mu+1}}.$$

Aus 22) bestimmt sich aber

$$\Omega_{2\mu} = 2\mu!\;C_{2\mu}.$$

Also wird 24)

$$= \frac{2\pi\,.\,2\mu!\;C_{2\mu}}{E^{2\mu+1}}.$$

$C_{2\mu}$ ist hierin nach 21) bekannt.

Somit hätte man einen Term von $\mathrm{P}^{(\mu)}$ (d. i. P_n^{μ} für $n = 1$), welcher aus dem $\varrho^{2(\mu-\mu')}\varrho'^{2\mu'}$ enthaltenden Gliede der Funktion $\Phi_{2\mu}$ hervorgeht, bestimmt (vergl. 16) und 17)). Bis auf die früher fortgelassenen konstanten Faktoren und die Integrationen nach ϱ und ϱ' wird derselbe gleich dem reellen Teile von

$$\frac{2\pi\;2\mu!}{E^{2\mu+1}}\int_0^{2\pi}(A_{11} + iA_{12})^{\mu-\mu'}(A'_{11} + iA'_{12})^{\mu'}\,d\psi.$$

Fügt man noch die Koeffizienten zu und summiert für alle Glieder der Funktion $\Phi_{2\mu}$, so folgt

$$25)\qquad \frac{1}{\sqrt{DD'}}\,\frac{2\pi\,.\,2\mu!}{2\mu+2!}\cdot\frac{1}{E^{2\mu+1}}\int_0^{2\pi}\Phi_{2\mu}(A_{11}+iA_{12},\quad A'_{11}+iA'_{12})\,d\psi.$$

Mit Hinzufügung der Integrale nach ϱ und ϱ' findet man endlich $\mathrm{P}^{(\mu)}$ gleich dem reellen Teile von

$$26)\qquad \frac{2\pi}{\sqrt{DD'}}\,\frac{2\mu!}{2\mu+2!}\cdot\frac{1}{E^{2\mu+1}}\int_0^1\!\!\int_0^1 d\varrho\, d\varrho'\sqrt{\varrho\varrho'}\;PP'\int_0^{2\pi}d\psi\,\Phi_{2\mu}(A_{11}+iA_{12},\quad A'_{11}+A'_{12}).$$

Demnach ist für das Potential d. h. $\sum\limits_0^\infty \mathrm{P}^{(\mu)}$ eine nach ungeraden Potenzen von $\frac{1}{E}$ fortschreitende Reihenentwicklung ermittelt.

III.

Es läfst sich zeigen, dafs $\mathrm{P}^{(\mu)}$, das $\mu+1^{\text{te}}$ Glied der Reihe für das Potential, eine homogene Funktion μ^{ten} Grades der Differenzen der Halbachsenquadrate ist.

Mit Hülfe der Gleichungen 10) werden nämlich die Werte von A_{11} und A_{12} nach 18)

$$27)\quad \begin{aligned} A_{11} &= \varrho\,(A^2-B^2)\,[(y_u\cos\psi+y_v\sin\psi)^2-y_w{}^2]+\varrho\,(A^2-C^2)\,[(z_u\cos\psi+z_v\sin\psi)^2-z_w{}^2]\\ A_{12} &= -\,2\varrho\,(A^2-B^2)\,y_w(y_u\cos\psi+y_v\sin\psi)-2\varrho\,(A^2-C^2)\,z_w\,(z_u\cos\psi+z_v\sin\psi).\end{aligned}$$

Daraus ergiebt sich

$$A_{11}+iA_{12}=\varrho\,(A^2-B^2)\,(y_u\cos\psi+y_v\sin\psi-iy_w)^2+\varrho\,(A^2-C^2)\,(z_u\cos\psi+z_v\sin\psi-iz_w)^2.$$

Analoge Werte erhält man für das zweite Ellipsoid. Man hat eben nur die gestrichenen Buchstaben einzuführen. Da nun $\Phi_{2\mu}(A_{11}+iA_{12},\ A'_{11}+iA'_{12})$ eine homogene Funktion μ^{ten} Grades von den beiden Argumenten $A_{11}+iA_{12}$, $A'_{11}+iA'_{12}$ ist, so folgt mit Benutzung der Werte dieser Argumente, dafs sie auch eine homogene Funktion μ^{ten} Grades von A^2-B^2, A^2-C^2, $A'^2-B'^2$, $A'^2-C'^2$ sein mufs. Mithin wird auch $\mathrm{P}^{(\mu)}$ eine homogene Funktion μ^{ten} Grades dieser Gröfsen. Der Koeffizient von

$$(A^2-B^2)^\beta\;(A^2-C^2)^\gamma\;(A'^2-B'^2)^{\beta'}\;(A'^2-C'^2)^{\gamma'},$$

wo die positiven ganzen Exponenten der Bedingung $\beta+\gamma+\beta'+\gamma'=\mu$ genügen, wird in $\Phi_{2\mu}$ bis auf einen leicht zu bestimmenden konstanten Faktor aufser einem Doppelintegral nach ϱ und ϱ' enthalten das Integral

$$28)\quad \int_0^{2\pi} d\psi(y_u\cos\psi+y_v\sin\psi-iy_w)^{2\beta}\,(z_u\cos\psi+z_v\sin\psi-iz_w)^{2\gamma}\,(y_{u'}\cos\psi+y_{v'}\sin\psi-iy_{w'})^{2\beta'}\,(z_{u'}\cos\psi+z_{v'}\sin\psi'-iz_{w'})^{2\gamma'}.$$

Demnach mufs der Koeffizient des entsprechenden Gliedes in $\mathrm{P}^{(\mu)}$ gleich dem reellen Teil dieses Integrals sein. Die Ausrechnung eines Integrals von der Form 28) kann aber jederzeit durchgeführt werden, demnach ist man auch im stande in dem ganzen Wert von $\mathrm{P}^{(\mu)}$ nach ψ vollständig zu integrieren und es bleiben nur noch Doppelintegrale nach ϱ und ϱ' übrig, zu deren Bestimmung die Funktionen $P_{(\varrho)}$, $P'_{(\varrho')}$ bekannt sein müfsten.

IV.

Nunmehr schreiten wir zur Untersuchung der Konvergenzbedingung unserer Reihenentwicklung. Setzen wir

29) $$\begin{aligned} A_{11} + iA_{12} &= Re^{i\Psi} \\ A'_{11} + iA'_{12} &= R'e^{i\Psi'}, \end{aligned}$$

so kann aus 26) der reelle Teil ausgesondert werden und es folgt dann mit Benutzung der Bedeutung von $\Phi_{2\mu}$ nach 16)

$$\begin{aligned} \mathrm{P}^{(\mu)} = F\int_0^1\int_0^1 PP'\sqrt{\varrho\varrho'}\,d\varrho\,d\varrho'\int_0^{2\pi} d\psi\Big[\binom{2\mu+2}{1} R^\mu \cos\mu\Psi + \binom{2\mu+2}{3} R^{\mu-1}R'\cos\big((\mu-1)\Psi + \Psi'\big) \\ + \binom{2\mu+2}{5} R^{\mu-2}R'^2\cos\big((\mu-2)\Psi + 2\Psi'\big) + \text{ etc.}\Big] \end{aligned}$$

$$F = \frac{2\pi\,.\,2\mu!}{\sqrt{DD'}\,.\,2\mu+2\,!}$$

Da nun die Moduln R und R' positiv sind, wird der absolute Wert von $\mathrm{P}^{(\mu)}$ jedenfalls kleiner als derjenige sein, den man erhält, wenn man unter dem Integralzeichen alle Cosinusse $= 1$ setzt. Dann wird aber die zu integrierende Funktion $= \Phi_{2\mu}(R, R')$. Man erhält also $\mathrm{P}^{(\mu)}$ kleiner als das Integral

$$F\int_0^1\int_0^1 PP'\sqrt{\varrho\varrho'}\,d\varrho\,d\varrho'\int_0^{2\pi}\Phi_{2\mu}(R, R_1)\,d\psi.$$

Nun wird die weitere Annahme gemacht, dafs für P, P', ϱ, ϱ', R, R' die gröfsten auf dem Integrationswege überhaupt möglichen Werte gesetzt werden. Dann erhält man ein Integral, welches gröfser ist, als das zuletzt genannte, mithin um so mehr gröfser als das Integral $\mathrm{P}^{(\mu)}$ seinem absoluten Werte nach. Da die bezeichneten Funktionen beim Einsetzen der maximalen Werte Konstante werden, so gehen sie vor das Integrationszeichen, und man erhält, wenn man den den obigen Voraussetzungen entsprechenden Wert von $\mathrm{P}^{(\mu)}$ mit (P^{μ}) bezeichnet und zugleich für die maximalen Werte von PP', R, R' die bisherigen Zeichen gelten läfst

$$(\mathrm{P}^{\mu}) = F\,.\,2\pi\,PP'\,\Phi_{2\mu}(R, R').$$

Es läfst sich nun nachweisen, dafs die Reihe der Gröfsen (P^{μ}) unter gewisser Bedingung konvergiert. Man hat

$$\frac{(\mathrm{P}^{\mu+1})}{(\mathrm{P}^{\mu})} = \frac{(2\mu+1)(2\mu+2)}{(2\mu+3)(2\mu+4)}\cdot\frac{1}{E^2}\,\frac{\Phi_{2\mu+2}(R, R')}{\Phi_{2\mu}(R, R')}.$$

Mit Benutzung von 16) folgt

$$\Phi_{2\mu}(R, R') = \frac{(\sqrt{R}+\sqrt{R'})^{2\mu+2} - (\sqrt{R}-\sqrt{R'})^{2\mu+2}}{2\sqrt{RR'}},$$

mithin

$$\begin{aligned} \frac{\Phi_{2\mu+2}}{\Phi_{2\mu}} &= \frac{(\sqrt{R}+\sqrt{R'})^{2\mu+4} - (\sqrt{R}-\sqrt{R'})^{2\mu+4}}{(\sqrt{R}+\sqrt{R'})^{2\mu+2} - (\sqrt{R}-\sqrt{R'})^{2\mu+2}} \\ &= (\sqrt{R}+\sqrt{R'})^2\,\frac{1-\lambda^{2\mu+4}}{1-\lambda^{2\mu+2}}, \end{aligned}$$

wo $\lambda = \frac{\sqrt{R} - \sqrt{R'}}{\sqrt{R} + \sqrt{R'}}$ ein positiver echter Bruch ist, denn man kann $\sqrt{R} > \sqrt{R'}$ annehmen, weil man im umgekehrten Falle nur die Buchstaben zu vertauschen brauchte. Demnach wird

$$\frac{(\mathrm{P}^{\mu+1})}{(\mathrm{P}^{\mu})} = \frac{(2\mu+1)(2\mu+2)}{(2\mu+3)(2\mu+4)} \cdot \left(\frac{\sqrt{R}+\sqrt{R'}}{E}\right)^2 \frac{1-\lambda^{2\mu+4}}{1-\lambda^{2\mu+2}}.$$

Nun liegt der Wert des Bruches $\frac{1-\lambda^{2\mu+4}}{1-\lambda^{2\mu+2}}$ für $0 < \lambda < 1$ zwischen den Grenzen 1 und $\frac{2\mu+4}{2\mu+2}$, wie man sich sehr leicht überzeugt. Nehmen wir den gröfsten Wert dafür, so folgt

$$\frac{(\mathrm{P}^{\mu+1})}{(\mathrm{P}^{\mu})} < \frac{2\mu+1}{2\mu+3} \left(\frac{\sqrt{R}+\sqrt{R'}}{E}\right)^2,$$

Für $\mu = \infty$ ergiebt sich

$$\frac{(\mathrm{P}^{\mu+1})}{(\mathrm{P}^{\mu})} < \left(\frac{\sqrt{R}+\sqrt{R'}}{E}\right)^2.$$

Daher ist ohne Zweifel für jedes μ

$$\frac{(\mathrm{P}^{\mu+1})}{(\mathrm{P}^{\mu})} < \left(\frac{\sqrt{R}+\sqrt{R'}}{E}\right)^2.$$

Wird also

30) $$\left(\frac{\sqrt{R}+\sqrt{R'}}{E}\right)^2 < 1,$$

so konvergiert die Reihe der Gröfsen (P^{μ}) stärker als eine geometrische Reihe mit dem Quotienten $\left(\frac{\sqrt{R}+\sqrt{R'}}{E}\right)^2$. Mithin konvergiert unter der Bedingung 30) auch die Reihe der Gröfsen $\mathrm{P}^{(\mu)}$. Die Untersuchung hat sich also darauf zu richten, wann die Bedingung 30) erfüllt ist.

R und R' sind in 30), wie in dem Vorhergehenden gefordert wurde, die gröfsten Werte, welche die Moduln $\sqrt{A_{11}^2 + A_{12}^2}$ und $\sqrt{A_{11}'^2 + A_{12}'^2}$ (vergl. 29) auf dem Integrationswege überhaupt annehmen können. Es wird sich also darum handeln, festzustellen, welches diese gröfsten Werte von R und R' sind. Nach 18) ist

31) $$A_{11}^2 + A_{12}^2 = R^2 = \varrho^2 [(\alpha_{33} - \alpha_{11}\cos^2\psi - \alpha_{22}\sin^2\psi - 2\alpha_{12}\sin\psi\cos\psi)^2 + 4(\alpha_{13}\cos\psi + \alpha_{23}\sin\psi)^2].$$

Um das Maximum hierfür zu suchen, haben wir neben dem gröfsten Wert $\varrho = 1$ den gröfsten Wert der eckigen Klammer zu ermitteln. Hierzu nehmen wir die Geometrie zu Hülfe. Es ist nach 9)

$$p^2 = \alpha_{11}\xi^2 + \alpha_{22}\eta^2 + \alpha_{33}\zeta^2 + 2\alpha_{12}\xi\eta + 2\alpha_{13}\xi\zeta + 2\alpha_{23}\eta\zeta$$

das Quadrat des Lotes vom Centrum des Ellipsoids auf eine Tangentenebene dieses Körpers. Die Richtung dieses Lotes ist durch ξ, η, ζ oder ϑ und ψ bestimmt, die Koordinaten u, v, w des Berührungspunktes folgen aus

$$pu = \alpha_{11}\xi + \alpha_{12}\eta + \alpha_{13}\zeta$$
$$pv = \alpha_{12}\xi + \alpha_{22}\eta + \alpha_{23}\zeta$$
$$pw = \alpha_{13}\xi + \alpha_{23}\eta + \alpha_{33}\zeta.$$

Demnach wird unter Benutzung des Wertes von p^2 für $\vartheta = 0$ α_{33} das Quadrat des Stückes, welches von der w-Achse durch eine zu derselben normale Tangentenebene des Ellipsoids abgeschnitten wird. Setzt man ferner $\vartheta = \frac{\pi}{2}$, so geht p^2 über in $\delta^2 = \alpha_{11} \cos^2 \psi + 2\alpha_{12} \sin \psi \cos \psi + \alpha_{22} \sin^2 \psi$, und es ist mithin δ^2 das Quadrat des in der uv-Ebene liegenden, vom Centrum des Ellipsoids gezogenen Lotes zu einer der w-Achse parallelen Tangentenebene. Diese Tangentenebene berührt zugleich den auf der uv-Ebene senkrechten, das Ellipsoid umhüllenden Cylinder. Für $\vartheta = \frac{\pi}{2}$ hat man ferner nach den die Koordinaten des Berührungspunktes bestimmenden Gleichungen, da dann $p = \delta$ wird,

$$\delta w_0 = \alpha_{13} \cos \psi + \alpha_{23} \sin \psi ,$$

d. h. die Fläche eines Rechteckes.

Folglich wird nach 31)

$$R^2 = [(\alpha_{33} - \delta^2)^2 + 4(\delta w_0)^2] ,$$

eine Gröſse, welche sich für ein beliebiges Azimuth ψ in dem diesem Winkel entsprechenden Achsenschnitte des erwähnten Cylinders konstruieren läſst und welche für eine gewisse Schnittrichtung ein Maximum erreichen wird. Da nun diese letztere Schnittrichtung offenbar in Bezug auf die Hauptachsen der in der uv-Ebene liegenden Grundfläche des Cylinders eine feste sein wird und keine Änderung erleiden kann, wenn sich die willkürlichen uv-Achsen in ihrer Ebene drehen, so steht es frei, diesen letzteren eine solche Richtung zu geben, welche für die Untersuchung des Maximums von R die gröſsten Vorteile bietet. Dies ist der Fall, wenn man die Projektion der Hauptachse W des Ellipsoids auf die u-Achse fallen läſst. Es ist dann $\sphericalangle v, W = \frac{\pi}{2}$. Setzt man ferner $\sphericalangle w, W = \nu$, $\sphericalangle v, V = \lambda$, so werden die in 7) vorkommenden Cosinusse

$$\begin{array}{lll} x_u = \cos \nu \cos \lambda & x_v = \sin \lambda & x_w = - \sin \nu \cos \lambda \\ y_u = - \cos \nu \sin \lambda & y_v = \cos \lambda & y_w = \sin \nu \sin \lambda \\ z_u = \sin \nu & z_v = 0 & z_w = \cos \nu . \end{array}$$

Mit diesen Werten erhält man unter Benutzung von 27)

$$R^2 = \Big[[1 - (\cos \psi \cos \lambda + \sin \psi \sin \lambda \cos \nu)^2]\, \partial_b + (1 - \sin^2 \nu \sin^2 \psi)\, \partial_c\Big]^2 \\ - 4\, \partial_b \partial_c (\sin \lambda \cos \psi - \cos \lambda \sin \psi \cos \nu)^2 ,$$

wo der Kürze halber $\partial_b = A^2 - B^2$, $\partial_c = A^2 - C^2$ gesetzt ist.

Untersucht man jetzt das Maximum der Funktion R, so findet man nach einigen Rechnungen dasselbe $= \partial_c = A^2 - C^2$, und zwar sowohl für $\psi = 0$ und $\lambda = 0$ bei beliebigem ν, als auch für $\nu = 0$ und $\psi = \lambda$. Daher hat man in der Bedingung 30) $R = A^2 - C^2$ und entsprechend $R' = A'^2 - C'^2$ zu setzen.

Dadurch geht dieselbe über in

32) $$\frac{\sqrt{A^2 - C^2} + \sqrt{A'^2 - C'^2}}{E} < 1 .$$

Hieraus kann man nun folgende Schlüsse ziehen. Fallen die groſsen Achsen beider Ellipsoide auf die Centrale beider Körper, so wird bei der Berührung der Centralabstand

$E = A + A'$. Für diesen Wert ist aber stets die Konvergenzbedingung 32) erfüllt, denn es ist unter allen Umständen

$$\frac{\sqrt{A^2 - C^2} + \sqrt{A'^2 - C'^2}}{A + A'} < 1 .$$

Es ist also für diesen Fall unsere Potentialreihe bis zur Berührung der Körper konvergent. Fallen ferner die kleinsten Achsen C und C' mit der Centrale zusammen, so wird bei Berührung $E = C + C'$ und es ergiebt sich nur so lange sicher eine Konvergenz der Potentialreihe, als

$$\sqrt{A^2 - C^2} + \sqrt{A'^2 - C'^2} < C + C'.$$

Da nun, wie früher nachgewiesen ist (III), die Glieder der Potentialreihe homogene Funktionen der Differenzen der Halbachsenquadrate sind, so ändern sie sich nicht, wenn man statt der gegebenen Ellipsoide zwei mit ihnen confocale nimmt. Benutzt man dieses, so wird im letzteren Falle die Konvergenz vorhanden sein bis zur Berührung zweier mit den gegebenen confocaler Ellipsoide mit solchen Achsen, daſs die Bedingung

$$\sqrt{A^2 - C^2} + \sqrt{A'^2 - C'^2} < \sqrt{C^2 + \sigma} + \sqrt{C'^2 + \sigma'}$$

erfüllt ist.

V.

Es mag jetzt unsere Aufgabe sein, in der Potentialreihe 26) die Integration nach ψ, wenigstens für die ersten Glieder, thatsächlich durchzuführen. Es handelt sich dann vornehmlich um die Bestimmung des reellen Teils von

$$\int_0^{2\pi} \Phi_{2\mu}(A_{11} + iA_{12}, \quad A'_{12} + iA'_{12})\, d\psi$$

für die von 0 an aufsteigenden Werte von μ. Nach 16) ist

33) $$\Phi_{2\mu} = \binom{2\mu+2}{1}(A_{11} + iA_{12})^{\mu} + \binom{2\mu+2}{3}(A_{11} + iA_{12})^{\mu-1}(A'_{11} + iA'_{12}) + \binom{2\mu+2}{5}(A_{11} + iA_{12})^{\mu-2}(A'_{11} + iA'_{12})^2 + \text{etc.}$$

Nach 27) hat man

34) $$\begin{aligned} A_{11} &= \varrho\left[\partial_b[(y_u \cos\psi + y_v \sin\psi)^2 - y_w^2] + \partial_c[(z_u \cos\psi + z_v \sin\psi)^2 - z_w^2]\right] \\ A_{12} &= -2\varrho\left[\partial_b y_w (y_u \cos\psi + y_v \sin\psi) + \partial_c z_w (z_u \cos\psi + z_v \sin\psi)\right] \end{aligned}$$

und entsprechende Werte für die gestrichenen Buchstaben. Denkt man sich nun die Entwicklung von $\Phi_{2\mu}$ in 26) eingetragen, so erkennt man leicht, daſs die einzelnen Integrale nach ψ zu multiplizieren sind mit Integralen nach ϱ und ϱ' von der Form

35) $$\begin{aligned} \int_0^1 P_{(\varrho)}\, \varrho^{\frac{1}{2}+h}\, d\varrho &= r_h \\ \int_0^1 P'_{(\varrho')}\, \varrho'^{\frac{1}{2}+h}\, d\varrho' &= r'_h. \end{aligned}$$

Nach diesen vorbereitenden Bemerkungen gehen wir zur wirklichen Bestimmung von $\mathrm{P}^{(0)}$, $\mathrm{P}^{(1)}$, $\mathrm{P}^{(2)}$ über. Es ergiebt sich aus 26)

$$\mathrm{P}^{(0)} = \frac{2\pi}{\sqrt{DD'}} \cdot \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{E}\, r_0 r_0' \int_0^{2\pi} d\psi$$

$$= \frac{(2\pi)^2}{\sqrt{DD'}} \cdot \frac{r_0 r_0'}{E}.$$

Nun ist $\frac{1}{\sqrt{DD'}} = ABC\,A'B'C'$, wie man sich durch Transformation der Gleichungen 1) auf die Hauptachsen überzeugt. Die Masse des Ellipsoids

$$\frac{U^2}{A^2} + \frac{V^2}{B^2} + \frac{W^2}{C^2} = 1$$

mit der Dichtigkeit $P(\varrho)$, wo $\varrho = \frac{U^2}{A^2} + \frac{V^2}{B^2} + \frac{W^2}{C^2}$ ist, wird aber

$$= \int_0^1 \iiint dU\,dV\,dW\; P(\varrho)\; d\varrho.$$

Führt man die Polarkoordinaten

$$U = \sqrt{\varrho}\; A \cos\sigma \qquad V = \sqrt{\varrho}\; B \sin\sigma \cos\zeta \qquad W = \sqrt{\varrho}\; C \sin\sigma \sin\zeta$$

ein, so geht das die Masse ausdrückende Integral über in

$$M = 2\pi\, ABC \int_0^1 P(\varrho)\sqrt{\varrho}\; d\varrho = 2\pi\, ABC\, r_0.$$

Demnach wird das erste Glied der Potentialreihe

$$\mathrm{P}^{(0)} = \frac{M.M'}{E}. \tag{36}$$

Ferner ist nach Aussonderung des reellen Teiles aus Φ_2 für $\mu = 1$

$$\mathrm{P}^{(1)} = \frac{2\pi}{\sqrt{DD'}} \cdot \frac{2!}{4!} \cdot \frac{1}{E^3}\, 4 \cdot \int_0^1\!\!\int_0^1 PP' \sqrt{\varrho\varrho'}\; d\varrho\; d\varrho' \int_0^{2\pi} (A_{11} + A_{11}')\, d\psi.$$

Bei Substitution nach 34), Ausführung der trigonometrischen Integrale und Benutzung des Symbols 35) ergiebt sich dann nach einiger Rechnung

$$\mathrm{P}^{(1)} = \frac{2\pi^2}{3\sqrt{DD'}} \cdot \frac{1}{E^3}\Big[r_1 r_0' \left[\partial_b (1 - 3y_w^2) + \partial_c (1 - 3z_w^2)\right] + r_0 r_1' \left[\partial_{b'} (1 - 3y_{w'}^2) + \partial_{c'} (1 - 3z_{w'}^2)\right]\Big].$$

Für $\mu = 2$ hat man den reellen Teil von Φ_4

$$= 6\,(A_{11}^2 - A_{12}^2 + A_{11}'^2 - A_{12}'^2) + 20\,(A_{11} A_{11}' - A_{12} A_{12}'),$$

mithin

$$\mathrm{P}^{(2)} = \frac{2\pi}{\sqrt{DD'}} \cdot \frac{4!}{6!} \cdot \frac{1}{E^5} \int_0^1\!\!\int_0^1 PP' \sqrt{\varrho\varrho'}\; d\varrho\; d\varrho' \int_0^{2\pi} d\psi \Big[6\,(A_{11}^2 - A_{12}^2 + A_{11}'^2 - A_{12}'^2) + 20\,(A_{11} A_{11}' - A_{12} A_{12}')\Big].$$

Hieraus ergiebt sich nach Durchführung der Integration nach ψ

$$\mathrm{P}^{(2)} = \frac{\pi^2}{10\sqrt{DD'}} \cdot \frac{1}{E^5}\Big[r_2 r_0' (\partial_b^2 T_{yy} + 2\partial_b\partial_c T_{yz} + \partial_c^2 T_{zz})$$
$$+ \frac{10}{3} r_1 r_1' (\partial_b\partial_{b'} T_{yy'} + \partial_b\partial_{c'} T_{yz'} + \partial_{b'}\partial_c T_{y'z} + \partial_c\partial_{c'} T_{zz'})$$
$$+ r_0 r_2' (\partial_{b'}^2 T_{y'y'} + 2\partial_{b'}\partial_{c'} T_{y'z'} + \partial_{c'}^2 T_{z'z'})\Big].$$

Hierin ist gesetzt

$$T_{yy} = 3 - 30 y_w^2 + 35 y_w^4$$
$$T_{yz} = 1 - 5(y_w^2 + z_w^2) + 35 y_w^2 z_w^2$$
$$T_{yz'} = 1 + 2\cos^2(V, W') - 20\, y_w z_{w'} \cos(V, W') - 5(y_w^2 + z_{w'}^2) + 35 y_w^2 z_{w'}^2$$

u. s. w.

In ähnlicher Weise lassen sich die folgenden P's successive berechnen.

Es mögen noch die Werte der P's für die konstanten Dichtigkeiten $P = 1$ und $P' = 1$ beigefügt werden. Dann werden die Gröfsen r folgende Werte annehmen: $r_0 = r_0' = \frac{2}{3}$, $r_1 = r_1' = \frac{2}{5}$, $r_2 = r_2' = \frac{2}{7}$, und man erhält, wenn auch $\frac{4}{3}\pi ABC = M$, $\frac{4}{3}\pi A'B'C' = M'$ gesetzt wird:

$$\mathrm{P}^{(0)} = \frac{MM'}{E}$$

$$\mathrm{P}^{(1)} = \frac{MM'}{10\,E^3}\left[\partial_b(1 - 3y_w^2) + \partial_c(1 - 3z_w^2) + \partial_{b'}(1 - 3y_{w'}^2) + \partial_{c'}(1 - 3z_{w'}^2)\right]$$

$$\mathrm{P}^{(2)} = \frac{3MM'}{1400E^5}\Big[5(\partial_b^2 T_{yy} + 2\partial_b\partial_c T_{yz} + \partial_c^2 T_{zz} + \partial_{b'}^2 T_{y'y'} + 2\partial_{b'}\partial_{c'} T_{y'z'} + \partial_{c'}^2 T_{z'z'})$$
$$+ 14(\partial_b\partial_{b'} T_{yy'} + \partial_b\partial_{c'} T_{yz'} + \partial_{b'}\partial_c T_{y'z} + \partial_c\partial_{c'} T_{zz'})\Big].$$

VI.

Das gewonnene Resultat soll endlich auf den besonderen Fall angewendet werden, dafs die Ellipsoide sich wenig von der Kugel unterscheiden, und dafs die Entfernung E gegenüber den Dimensionen der Körper grofs ist. Dann konvergiert die Potentialreihe sehr stark, denn sie konvergiert stärker als eine geometrische Reihe mit dem Quotienten $\frac{\sqrt{A^2 - C^2} + \sqrt{A'^2 - C'^2}}{E}$ (vergl. 32)), der unter der gemachten Annahme eine sehr kleine Gröfse sein wird. Unter diesen Umständen hängt der Wert der Potentialreihe hauptsächlich von den Anfangsgliedern ab und zwar vorzugsweise von dem ersten, das ja auch bei grofsen Entfernungen einfach dafür gesetzt wird. In diesem Gliede tritt neben den Massen nur die Entfernung auf, die relative Achsenlage der Ellipsoide kommt darin nicht vor, und doch ist dieselbe von einem gewissen, wenngleich nur verhältnismäfsig geringen Einflusse auf den Wert des Potentials, wie die Werte von $\mathrm{P}^{(1)}$ und $\mathrm{P}^{(2)}$ zeigen. Es mag unsere Aufgabe sein, zu untersuchen, unter welchen Bedingungen die Maxima und Minima wenigstens für $\mathrm{P}^{(1)}$ und $\mathrm{P}^{(2)}$ auftreten, da $\mathrm{P}^{(3)}$ unter den gemachten Voraussetzungen sicher zu vernachlässigen sein wird.

Um das Maximum resp. Minimum von $P^{(1)}$ aufzufinden, hat man zu variieren

39) $$r_1 r_0' [\partial_b(1-3y_w^2) + \partial_c(1-3z_w^2) + \partial_{b'}(1-3y_{w'}^2) + \partial_{c'}(1-3z_{w'}^2)]$$

unter den Bedingungen

$$x_w^2 + y_w^2 + z_w^2 = 1, \qquad x_{w'}^2 + y_{w'}^2 + z_{w'}^2 = 1.$$

Durch die Substitutionen $x_w = \cos\sigma$, $y_w = \sin\sigma\cos\zeta$, $z_w = \sin\sigma\sin\zeta$, $x_{w'} = \cos\sigma'$, $y_{w'} = \sin\sigma'\cos\zeta'$, $z_{w'} = \sin\sigma'\sin\zeta'$ erfüllen wir die Bedingungsgleichungen identisch und erhalten als erste Variation von 39)

$$-6r_1r_0'[\partial_b \sin\sigma\cos\zeta(\cos\sigma\cos\zeta\,\delta\sigma - \sin\sigma\sin\zeta\,\delta\zeta) + \partial_c\sin\sigma\sin\zeta(\cos\sigma\sin\zeta\,\delta\sigma + \sin\sigma\cos\zeta\,\delta\zeta)]$$
$$-6r_0r_1'[\partial_{b'}\sin\sigma'\cos\zeta'(\cos\sigma'\cos\zeta'\,\delta\sigma' - \sin\sigma'\sin\zeta'\,\delta\zeta') + \partial_{c'}\sin\sigma'\sin\zeta'(\cos\sigma'\sin\zeta'\,\delta\sigma' + \sin\sigma'\cos\zeta'\,\delta\zeta')].$$

Wenn hierin die Koeffizienten von $\delta\sigma$ u. s. w. $= 0$ gesetzt werden, ergeben sich die Gleichungen:

$$\sin\sigma\cos\sigma\,[\partial_b\cos\zeta^2 + \partial_c\sin\zeta^2] = 0$$
$$\sin^2\sigma\sin\zeta\cos\zeta\,[\partial_b - \partial_c] = 0$$

und zwei entsprechende Gleichungen für die gestrichenen Buchstaben.

Also ist entweder 1) $\sigma = 0$, $\sigma' = 0$ und ζ und ζ' beliebig, oder 2) $\sigma = \frac{\pi}{2}$, $\sigma' = \frac{\pi}{2}$, $\zeta = \frac{\pi}{2}$, $\zeta' = \frac{\pi}{2}$, oder 3) $\sigma = \frac{\pi}{2}$, $\sigma' = \frac{\pi}{2}$, $\zeta = 0$, $\zeta' = 0$. Bildet man sich im ersten Falle die zweite Variation, so findet man dieselbe

$$= -6r_1r_0'[\partial_b\cos^2\zeta + \partial_c\sin^2\zeta](\delta\sigma)^2$$
$$-6r_0r_1'[\partial_{b'}\cos^2\zeta' + \partial_{c'}\sin^2\zeta'](\delta\sigma')^2.$$

Da sie negativ ist, wird mithin der Ausdruck 39) ein Maximum, folglich auch $P^{(1)}$ ein Maximum. Für den zweiten Fall ergiebt sich die zweite Variation

$$= 6r_1r_0'[\partial_c(\delta\sigma)^2 + (\partial_c - \partial_b)(\delta\zeta)^2] + 6r_0r_1'[\partial_{c'}(\delta\sigma')^2 + (\partial_{c'} - \partial_{b'})(\delta\zeta')^2].$$

Dies ist stets positiv, da stets $\partial_c > \partial_b$, $\partial_{c'} > \partial_{b'}$. Mithin tritt für diesen Fall ein Minimum von $P^{(1)}$ ein. Der dritte Fall führt auf kein Maximum oder Minimum, da die zweite Variation dann wird

$$= 6r_1r_0'(\partial_b(\delta\sigma)^2 + (\partial_b - \partial_c)(\delta\zeta)^2 + 6r_0r_1'(\partial_{b'}(\delta\sigma')^2 + (\partial_{b'} - \partial_{c'})(\delta\zeta')^2),$$

ein Ausdruck, der sowohl positiv als auch negativ sein kann.

Es ergiebt sich mithin, wenn

40) $$x_w = 1, \quad y_w = 0, \quad z_w = 0, \quad x_{w'} = 1, \quad y_{w'} = 0, \quad z_{w'} = 0,$$

d. h. wenn die grofsen Achsen der Ellipsoide mit der Centrale der beiden Körper zusammenfallen, der gröfste Wert von $P^{(1)}$. Der kleinste tritt ein für

41) $$x_w = 0, \quad y_w = 0, \quad z_w = 1, \quad x_{w'} = 0, \quad y_{w'} = 0, \quad z_{w'} = 1,$$

d. h. wenn die kleinsten Achsen in der Centrale liegen.

Setzt man das Wertsystem 40) in $P^{(2)}$ ein, so resultiert nach 38)

$$\begin{aligned} P^{(2)} = \frac{\pi^2}{10\sqrt{DD'}} \cdot \frac{1}{E^5}\Big[& r_2 r_0' (3\partial_b^2 + 2\partial_b\partial_c + 3\partial_c^2) + r_0 r_2' (3\partial_{b'}^2 + 2\partial_{b'}\partial_{c'} + 3\partial_{c'}^2) \\ & + \frac{10}{3}\Big(\partial_b\partial_{b'}\big(1 + 2\cos^2(V,V')\big) + \partial_b\partial_{c'}\big(1 + 2\cos^2(V,W')\big) \\ & + \partial_{b'}\partial_c\big(1 + 2\cos^2(V',W)\big) + \partial_c\partial_{c'}\big(1 + 2\cos^2(W,W')\big)\Big)\Big]. \end{aligned} \tag{42}$$

Da man sich nun die Richtungen der Achsen V, W, V', W' für den angenommenn Fall in eine Ebene verlegt denken kann, so folgt, falls man $\sphericalangle\, V, V' = \varphi$ setzt, $\cos(W,W') = \cos\varphi$, $\cos(V,W') = -\sin\varphi$, $\cos(V',W) = \sin\varphi$. Nach Aussonderung des konstanten Teiles aus 42) und Weglassung der positiven Faktoren bleibt von $P^{(2)}$ als variabler Teil übrig

$$(\partial_b\partial_{b'} + \partial_c\partial_{c'})\cos^2\varphi + (\partial_b\partial_{c'} + \partial_{b'}\partial_c)\sin^2\varphi .$$

Dieser erreicht bei $\varphi = 0$ sein Maximum, bei $\varphi = \frac{\pi}{2}$ sein Minimum, denn die zweite Variation wird

$$= -2\cos 2\varphi\,(\partial_b - \partial_c)(\partial_{b'} - \partial_{c'})(\delta\varphi)^2$$

und hierin sind $\partial_b - \partial_c$ und $\partial_{b'} - \partial_{c'}$ beides negative Gröfsen. Wenn mithin die grofsen Achsen auf die Centrale fallen, also $P^{(1)}$ sein Maximum hat, erreicht zugleich $P^{(2)}$ seinen gröfsten Wert, sobald die mittleren Achsen beider Körper untereinander parallel sind, seinen kleinsten Wert, sobald sie einen rechten Winkel bilden.

Berechnet man $P^{(2)}$ für das Wertsystem 41), so folgt

$$\begin{aligned} \frac{\pi^2}{10\sqrt{DD'}} \cdot \frac{1}{E^5}\Big[& r_2 r_0' (3\partial_b^2 - 8\partial_b\partial_c + 8\partial_c^2) + r_0 r_2' (3\partial_{b'}^2 - 8\partial_{b'}\partial_{c'} + 8\partial_{c'}^2) \\ & + \frac{10}{3} r_1 r_1' \Big(\partial_b\partial_{b'}\big(1 + 2\cos^2(V,V')\big) + \partial_c\partial_{c'}\big(26 + 2\cos^2(W,W') - 20\cos(W,W')\big) \\ & + \partial_b\partial_{c'}\big(-4 + 2\cos^2(V,W')\big) + \partial_{b'}\partial_c\big(-4 + 2\cos^2(V',W)\big)\Big)\Big]. \end{aligned}$$

Weil nun die Achsen W und W' mit der Centrale zusammenfallen sollen, ist $\cos(W,W') = 1$, $\cos(V,W') = 0$, $\cos(V',W) = 0$. $\sphericalangle\, V,V'$ werde $= \varphi$ gesetzt. Der Klammerausdruck besteht jetzt aus einem konstanten Teil und dem variabeln

$$\frac{20}{3} r_1 r_1' \partial_b\partial_{b'} \cos^2\varphi .$$

Das Maximum hiervon tritt aber ein bei $\varphi = 0$, das Minimum bei $\varphi = \frac{\pi}{2}$, das erstere, wenn die mittleren Axen parallel sind, das letztere, wenn sie auf einander senkrecht stehen.

Die gröfsten und kleinsten Werte von $P^{(1)}$ und $P^{(2)}$ zusammengestellt lauten folgendermafsen:

Für

$$P^{(1)}\,\text{max.} = \frac{2\pi^2}{3\sqrt{DD'}} \cdot \frac{1}{E^3}\left[r_1 r_0' (\partial_b + \partial_c) + r_0 r_1' (\partial_{b'} + \partial_{c'})\right]$$

wird

$$P^{(2)}\,\text{max.} = \frac{\pi^2}{10\sqrt{DD'}} \cdot \frac{1}{E^5}\Big[r_2 r_0'(3\partial_b^2 + 2\partial_b\partial_c + 3\partial_c^2) + r_2' r_0(3\partial_{b'}^2 + 2\partial_{b'}\partial_{c'} + 3\partial_{c'}^2)$$
$$+ \frac{10}{3} r_1 r_1' (3\partial_b\partial_{b'} + 3\partial_c\partial_{c'} + \partial_b\partial_{c'} + \partial_{b'}\partial_c)\Big],$$

$$P^{(2)}\,\text{min.} = \frac{\pi^2}{10\sqrt{DD'}} \cdot \frac{1}{E^5}\Big[r_2 r_0'(3\partial_b^2 + 2\partial_b\partial_c + 3\partial_c^2) + r_2' r_0(3\partial_{b'}^2 + 2\partial_{b'}\partial_{c'} + 3\partial_{c'}^2)$$
$$+ \frac{10}{3} r_1 r_1' (\partial_b\partial_{b'} + \partial_c\partial_{c'} + 3\partial_b\partial_{c'} + 3\partial_{b'}\partial_c)\Big].$$

Für

$$P^{(1)}\,\text{min.} = \frac{2\pi^2}{3\sqrt{DD'}} \cdot \frac{1}{E^3}\Big[r_1 r_0'(\partial_b - 2\partial_c) + r_1' r_0(\partial_{b'} - 2\partial_{c'})\Big]$$

ergiebt sich

$$P^{(2)}\,\text{max.} = \frac{\pi^2}{10\sqrt{DD'}} \cdot \frac{1}{E^5}\Big[r_2 r_0'(3\partial_b^2 - 8\partial_b\partial_c + 8\partial_c^2) + r_2' r_0(3\partial_{b'}^2 - 8\partial_{b'}\partial_{c'} + 8\partial_{c'}^2)$$
$$+ \frac{10}{3} r_1 r_1' (3\partial_b\partial_{b'} + 8\partial_c\partial_{c'} - 4\partial_b\partial_{c'} - 4\partial_{b'}\partial_c)\Big],$$

$$P^{(2)}\,\text{min.} = \frac{\pi^2}{10\sqrt{DD'}} \cdot \frac{1}{E^5}\Big[r_2 r_0'(3\partial_b^2 - 8\partial_b\partial_c + 8\partial_c^2) + r_0 r_2'(3\partial_{b'}^2 - 8\partial_{b'}\partial_{c'} + 8\partial_{c'}^2)$$
$$+ \frac{10}{3} r_1 r_1' (\partial_b\partial_{b'} + 8\partial_c\partial_{c'} - 4\partial_b\partial_{c'} - 4\partial_{b'}\partial_c)\Big].$$

Haben wir es mit Rotationsellipsoiden zu thun, so vereinfachen sich die Resultate. Sind nämlich die kleinsten Achsen die Rotationsachsen, so werden ∂_b und $\partial_{b'}$ beide $= 0$.

Marienwerder, Dezember 1892.

H. v. Schaewen.