KLEINIGKEITEN

AUS DEM

MATHEMATISCHEN UNTERRICHT

VON

OTTO HERWEG,
GYMNASIALOBERLEHRER.

BEILAGE ZUM PROGRAMM DES KÖNIGLICHEN GYMNASIUMS ZU NEUSTADT IN WESTPREUSSEN.

OSTERN 1891.

DRUCK VON E. H. BRANDENBURG & CO. IN NEUSTADT WPR.

1891.

Progr. Nr. 38.

II. Teil. Konstruieren.

(Zweite Hälfte.)*)

4. Kapitel.

Die eigentlichen Konstruktionsaufgaben.

26. Die Konstruktion einer Figur aus gegebenen Stücken kann man, zumal wenn es sich um die Zeichnung eines Dreiecks (oder Vielecks) handelt, in bildlichem Sinne betrachten als den Wiederaufbau der im Geiste bereits fertig vorgestellten, dann aber völlig niedergerissenen Figur. Bei einer ganzen Reihe von mehr einfachen Aufgaben ist dieser Wiederaufbau sofort mit Hülfe von geometrischen Örtern, wobei man sich aber der Natur dieses Hülfsmittels in vielen Fällen nicht einmal bewusst zu werden braucht, möglich; die fertig gedachte und als solche bildlich entworfene Figur enthält dann den Plan des Baues unmittelbar in sich, und einer besondern Vorbereitung zur Konstruktion bedarf es nicht. Der Art sind viele Grundaufgaben, z. B. die Konstruktion der vierten Proportionalen zu drei, der mittleren Proportionalen zu zwei gegebenen Strecken, die Verwandlung eines Parallelogramms in ein anderes mit gegebener Seite; denn die Figuren der zur Anwendung kommenden Sätze liefern sofort den Plan für die Ausführung.

27. Die Analysis. Bei der Mehrzahl der Aufgaben ist jedoch der Aufbau der Figur nur unter Anwendung eines mehr oder weniger kunstvollen Gerüstes von Hülfslinien möglich. Zur Auffindung dieses Baugerüstes dient die Analysis. Die Analysis enthält also keinen Teil der nachfolgenden eigentlichen Konstruktion, auch nicht in versteckter Form, sondern sie geht nur bis dahin, von wo aus das Weitere sich unmittelbar übersehen, bezw. auf geometrische Örter oder auf Grundaufgaben zurückführen lässt. Nur in dem Falle, dass man aus besonderen Gründen auf die Beschreibung und Ausführung der Konstruktion verzichtet, sind auch solche Fingerzeige, welche im wesentlichen schon Angaben über die Konstruktion enthalten, zulässig und wünschenswert oder geboten.

Die Analysis geht von der als fertig vorgestellten Figur aus, konstruiert zunächst diejenigen Stücke derselben, deren Grösse gegeben ist, in natürlicher Weise und sucht dieselben dann in Beziehung zu setzen, und zwar nötigenfalls durch geeignete, nicht etwa aufs Geratewohl, sondern nach vernünftiger Überlegung (§ 25) gezogene Hülfslinien. Im übrigen ist die Analysis nichts weiter als eine Beweisführung in dem allgemeinen Sinne, nämlich eine Ableitung neuer Eigenschaften aus bekannten mit Hülfe des Citatenschatzes. Ist man auf diese Weise durch das nach und nach entstandene Hülfsgerüst bis zu den konstruierbaren Grundlagen des Gebäudes hinabgestiegen, so wird die Figur im Geiste auseinandergeworfen, und der Neubau kann beginnen.

28. Die Konstruktion schlägt den umgekehrten Weg ein, und man darf wohl sagen, dass die Behandlung einer Aufgabe um so vollkommener erscheint, je genauer die Konstruktion den Weg der Analysis rückwärts schreitend inne hält. Die Konstruktion muss jedoch nicht bloss beschrieben, sondern auch nach den Angaben der Beschreibung ausgeführt werden. Es würde auch heutzutage, wo vortreffliche Aufgabensammlungen existieren und vielfach in den Händen der Schüler sind, Sammlungen von solcher Reichhaltigkeit, dass

---

*) Die erste Hälfte erschien als Beilage zum vorjährigen Programm (Ostern 1890, Progr. Nr. 39).

der Lehrer kaum etwas ausdenken kann, was nicht darin stände, geradezu die Schüler zur Unselbständigkeit verleiten, wenn man sich mit der Analysis und einer angeblich, aber nicht wirklich nach den Angaben konstruierten Figur begnügen wollte. Denn Analysis und Figur stehen meist wunderschön in der Sammlung drin, und was bliebe dann noch für die Selbstarbeit des Schülers übrig? Anders, wenn man verlangt, dass die Konstruktion wirklich ausgeführt und deren Richtigkeit auch bewiesen wird. Ein erfolgreicher Zwang wird in dieser Richtung ausgeübt, wenn die zur Konstruktion erforderlichen Stücke thunlichst in bestimmten Massen (die Winkel in Graden, die Strecken in Centimetern) angegeben werden. In dieser Grösse sind bei Dreiecks- und Vieleckskonstruktionen die Stücke einzeln der Konstruktionsfigur voranzusetzen, und diese selbst ist ohne fernere Benutzung des Massstabes und des Transporteurs mit Lineal und Zirkel herzustellen. Und zwar soll letzteres mit möglichster Ausführung der Einzelheiten geschehen. Auf der höheren Stufe kann man indes von der mathematischen Konstruktion gewisser Hülfslinien, z. B. einer Parallelen, absehen, wofern nicht die bereits vorhandenen Bestandteile der Figur bequeme Mittel hierzu an die Hand geben. Denn wie überall, so ist auch hier der Grundsatz zu beachten, dass Hülfskonstruktionen sich den Eigentümlichkeiten der Figur anschmiegen müssen. Aufmerksamkeit in diesem Punkte zeigt uns manchmal einen von dem gewöhnlichen abweichenden Weg. Sind Nebenkonstruktionen erforderlich, so sind dieselben in der Regel nicht an einer besondern Nebenfigur auszuführen, sondern in vorteilhafter Weise an der Hauptfigur anzubringen. Bei alledem aber muss die Figur ihre Erklärung möglichst in sich selbst tragen. Zu dem Zwecke ist u. a. bei Kreisen der zwischen je zwei zusammengehörigen Schnittpunkten liegende Bogenteil vollständig zu zeichnen; dadurch wird z. B. in Fig. 13 ausser allen Zweifel gestellt, dass $AB' = AC'$ sein soll, während kleine Bogenteilchen bei B' und C' zu einem sichern Urteile hierüber ohne Zirkelprobe nicht ausreichen.

29. Kleinigkeiten in der Ausführung. Wenn man von einer gewissen Stelle der Konstruktion an zwischen verschiedenen Wegen die Wahl hat, so thut man gut, einen Ausblick auf den Beweis zu werfen, damit man nicht gerade denjenigen Weg einschlägt, welcher für den Beweis Schwierigkeiten erzeugt.

Von den durch Kreise erhaltenen Schnittpunkten ist manchmal einer zur Konstruktion ausreichend; in diesem Falle hat man jedoch nicht eine einseitige Auswahl zu treffen, sondern beide Punkte gleichmässig zu berücksichtigen. Zuerst wird die Konstruktion mit dem einen Punkte zu ende geführt und dann in genau entsprechender Weise nach den die Arbeit sehr erleichternden Grundsätzen des § 17 der andere Punkt verwertet. Meistens ergiebt sich, dass jede der beiden Figuren (es können deren auch vier und mehr auftreten) den Bedingungen der Aufgabe genügt. Nur dann ist die Beschränkung auf einen Punkt am Platze, wenn durch Benutzung des anderen eine zu der erstern symmetrisch liegende Figur erzeugt wird.

Je ausführlicher indes die Konstruktion ist, um so grösser wird die Zahl der Linien. Damit aber trotzdem das Bild gefällig und übersichtlich bleibe, ist neben hinlänglicher Grösse der Figur ein Wechsel in der Darstellungsart der Linien je nach ihrer Wichtigkeit (kräftiger, feiner, gestrichelter, punktiert gestrichelter Zug — bloss punktierte Linien sehen meist unschön aus —) erforderlich. Auch auf die Auswahl und die Stellung der Buchstaben ist wohl zu achten; insbesondere sollen sie gleich gerichtet sein (nicht teils aufrecht stehen, teils liegen, teils gar die Beine in die Höhe strecken) und den durch sie bezeichneten Punkten möglichst nahe stehen, aber dabei soweit thunlich doch nicht durch die Linien hindurchgeschrieben werden.

30. Form des Textes. Von einer guten Beschreibung der Konstruktion kann man verlangen, dass sie den Leser in den Stand setzt, nach ihren blossen Angaben die Figur mit Sicherheit entstehen zu lassen; aber auch dann ist ein möglichst knapper, alles unnötige Beiwerk vermeidender Ausdruck geboten. Man darf sich jedoch zum Zwecke der Zeit- und Raumersparnis der kürzeren mathematischen Zeichensprache (zu deren Verständnis allerdings meist die Betrachtung der Figur mitwirken muss) bedienen, ähnlich wie dies bei der Voraussetzung geschieht. In der That steht die Konstruktion zu dem nachfolgenden Beweise völlig in dem Verhältnisse der Voraussetzung.

31. **Der Beweis.** Ich halte den Beweis (einzelne Fälle, z. B. Extemporalien, bei denen man sich sogar mit der blossen Analysis manchmal begnügen kann, ausgenommen) für einen wesentlichen Bestandteil der Bearbeitung einer Aufgabe. Die Förderung der Selbständigkeit des Schülers verlangt dies (vgl. § 28). Man hört und liest nun bisweilen die Redensart: Der Beweis liegt in der Analysis. Insofern man damit dem richtigen Gedanken Ausdruck geben will, dass die Analysis (im Verein mit ihrer fehlerfreien Verwertung bei der Konstruktion) eine ähnliche Beweiskraft habe wie der rückschreitende Beweis bei Lehrsätzen, ist sie überflüssig; in jeder andern Beziehung ist es eben eine blosse Redensart. Denn der hier zu verlangende Beweis ist im Gegensatz zur Analysis der rechtläufige und hat im übrigen mit jener weiter nichts gemein, als dass hin und wieder ein dort vorkommender Gedankengang oder Lehrsatz auch im Beweise Anwendung findet, kurz, er stützt sich einzig und allein auf die Konstruktion als seine Voraussetzung. Ebensowenig genügt die Angabe oder der Nachweis, dass gewisse Stücke der Figur die vorgeschriebene Grösse haben; denn mit der Bemerkung z. B., dass $AD = k$ gemacht worden, ist noch nicht bewiesen, dass nun auch, wie verlangt sein möge, die Summe zweier Seiten die Grösse k hat. Der Gedankengang des Beweises wird vielmehr folgender sein müssen. Man beginnt (1) mit einer Disposition des Beweises, d. h. mit der möglichst in den Ausdrücken der gestellten Aufgabe gehaltenen Antwort auf die Frage, was zu beweisen ist. Dann folgt (2) die nötigenfalls unter Beweis zu stellende Angabe derjenigen Bestandteile der Figur, für welche eine bestimmte Grösse oder Beziehung vorgeschrieben ist, auf welche sich also der Beweis zu erstrecken hat. Zuletzt wird (3) angegeben bezw. dargethan, dass diese Stücke auch wirklich jene Bedingungen erfüllen. Hiermit soll nur der Gedankengang gezeichnet werden; bei der wirklichen Durchführung des Beweises dürfen die einzelnen Teile mehr oder weniger zusammengezogen oder anders geordnet werden; überdies fällt bei gewissen Aufgaben der zweite Punkt als selbstverständlich aus.

32. ***BC* oder *a*?** Ich hatte einmal die Aufgabe gestellt: Ein Dreieck zu konstruieren aus einer Seite, dem Radius des Inkreises und dem Radius des jener Seite anliegenden Ankreises. Es waren also drei Strecken gegeben, welche zur Andeutung der Aufgabe die Bezeichnung a, ϱ, ϱ_a erhalten hatten. Einer bewies dabei mit dem Aufgebot allen Scharfsinnes, dass $a = a$ sei. Und doch hatte er es gut gemeint; das linke a war nämlich die Seite BC, das rechte die für BC vorgeschriebene Länge, also die gegebene Strecke a. Solche und ähnliche Ungehörigkeiten, die mir keineswegs vereinzelt begegnet sind, werden fern gehalten, wenn man die Schüler dazu anhält, im Verlauf des Beweises die einzelnen Teile der Figur nur mit den Buchstaben der Figur selbst (also oben BC statt des linken a) zu benennen. Ein anderes Mittel besteht darin, dass man die gegebenen Stücke mit willkürlichen, zu der Figur in keiner Beziehung stehenden Buchstaben bezeichnet; hiernach würde die oben in Worten ausgedrückte Aufgabe etwa in folgender Weise auf den durchzuführenden Einzelfall bezogen werden müssen. Gegeben seien die Strecken $l = 8\,cm$, $m = 2\,cm$, $n = 6\,cm$; es soll ein Dreieck gezeichnet werden, in welchem $a = l$, $\varrho = m$, $\varrho_a = n$ ist.

33. **Die Determination.** Bei willkürlich gegebenen Stücken ist die Konstruktion nicht immer möglich. Gewöhnlich muss dann wenigstens eine der gegebenen Grössen zwischen gewissen durch die anderen Stücke bestimmten oder bestimmbaren Grenzwerten liegen. Diese Grenzbestimmung gehört jedoch nicht selten zu den schwierigsten Forderungen. Ebendeshalb verzichtet wohl auch mit Recht der Lehrer auf eine selbständige und erschöpfende Untersuchung seitens des Schülers. Die dabei vorkommenden Betrachtungen sind jedoch so lehrreich, dass bei der Besprechung der Aufgaben darauf näher eingegangen werden sollte. Der bei der Determination einzuschlagende Weg kann ein zweifacher sein: entweder wir ermitteln die gesuchten Bedingungen aus der Erfahrung, die wir bei der Konstruktion machen können, oder wir entwickeln dieselben mehr aus dem Wesen der Figur. Der erste Weg ist der für den Schüler gangbarste, und dann hat die Determination ihren natürlichen Platz hinter der Konstruktion (und dem Beweise). Bei genügender Vorbildung

des Schülers oder in leichteren Fällen darf aber auch der andere Weg betreten werden. Dann kann die Determination vor der eigentlichen Konstruktion gefunden und derselben auch vorangestellt werden; dies bietet den Vorteil, dass aus den gegebenen Stücken schon im voraus erkennbar ist, ob mit ihnen die Konstruktion möglich ist oder nicht. Soweit angängig, besonders wenn die Trigonometrie zu Hülfe genommen werden kann, wird man füglich die Grenzen als Funktionen der gegebenen Grössen selbst darstellen können.

Mit der Determination, wenigstens wenn sie die Auflösung beschliesst, lassen sich naturgemäss die Bemerkungen über etwaige mehrfache Ergebnisse und andere Einzelheiten, in welchen sich je nach der Grösse der gegebenen Stücke Verschiedenheiten zeigen, verbinden.

34. Beispiele. Es wird nicht unnötig sein, einige mehr oder weniger vollständig gelöste Aufgaben als erläuternde Beispiele folgen zu lassen; der Leser wird leicht merken, welche der vorhergehenden Betrachtungen jedesmal besonders beleuchtet werden soll.*) 1) Aufgabe: Gegeben $\triangle ABC$; zu AB soll eine CA in X und CB in Y schneidende Parallele gezogen werden, so dass $XY = AX + BY$. Analysis: Gemäss der aufgestellten Bedingung muss sich XY in zwei Teile zerlegen lassen, von denen der eine gleich AX, der andere gleich BX ist. Schneiden wir daher von XY das Stück $XM = XA$ ab, so wird $YM = YB$ sein, u. s. w. (Was ist also M, und wie lässt sich das Resultat als Lehrsatz ausdrücken? Gilt dasselbe, wenn die Aussenwinkel halbiert werden? Wie ändert sich die Auflösung, wenn $XY = AX - BY$ werden soll?) 2) Aufgabe: Gegeben Kreis O und ein Punkt P ausserhalb desselben; es soll eine den Kreis in X und Y schneidende Sekante PXY gezogen werden, so dass $PX = XY$. Determination (aus dem Wesen der Figur): Zieht man durch O die Sekante PAB, so darf PA nicht grösser sein als AB. Analysis: PXY sei die gesuchte Sekante, also $PX = XY$. a) Wir versuchen die gleichen Strecken in kongruente Dreiecke zu bringen. Dies gelingt sofort, wenn wir OX und OY ziehen und OX um $XQ = XO$ verlängern; dann ist $\triangle OXY \cong \triangle QXP$, also $PQ = YO = OA$, ausserdem $OQ = AB$. b) Wenn wir PY als eine in X halbierte Diagonale eines Parallelogramms ansehen, so erhalten wir wesentlich dieselbe Auflösung. c) Möglicherweise dürfen wir PY als die in X halbierte Grundlinie eines gleichschenkeligen Dreiecks betrachten. Und richtig: ziehen wir den Durchmesser YZ — denn das ist hier der einfachste Weg, um in X auf PY eine Senkrechte zu errichten -- so steht $XZ \perp PY$, und es wird $PZ = YZ = AB$. d) Es muss uns aber auch der Satz einfallen: „Zieht man durch die Mitte einer Dreiecksseite eine Parallele zur zweiten, so halbiert sie die dritte und ist gleich der halben zweiten Seite"; und wirklich zeigt uns auch dieser einen leichten Weg: zieht man $XM \parallel YO$ (M ein Punkt auf OP), so ist $MP = MO$ und $MX = \frac{1}{2}OY = \frac{1}{2}OA$. Der Beweis für die Richtigkeit der hiernach ausgeführten Konstruktion ist jedoch nicht ganz so leicht, wie er aussieht. e) Da die von P gezogene Tangente PC bekannt ist, so liegt auch ein Versuch mit der Beziehung $PC^2 = PX \cdot PY$ nicht weit abseits; sofort ergiebt sich $2\,PX^2 = PC^2$. (Welche von den vorstehenden Lösungen lassen sich, entsprechend abgeändert, verwerten, wenn allgemeiner $PX : XY = m : n$ verlangt ist?) 3) Aufgabe: Auf einer Geraden liegen die Punkte A und B; auf derselben soll ein Punkt X so bestimmt werden, dass $AX^2 - XB^2 = q^2$, worin q eine gegebene Strecke ist. Analysis: X sei der gesuchte Punkt, also $AX^2 - XB^2 = q^2$. a) Wir erinnern uns sofort des pythagoreischen Lehrsatzes und beschreiben, um AX zur Hypotenuse und BX zur Kathete eines rechtwinkeligen Dreiecks zu machen, mit XA um X einen Kreis, welcher die in B auf AB errichtete Senkrechte in C trifft; dann ist $AX^2 - XB^2 = XC^2 - XB^2 = BC^2$, mithin $BC = q$. b) Wie aber, wenn wir unglücklicherweise $AX^2 - XB^2$ auf die andere mögliche Art zeichnen, nämlich indem wir über AX als Hypotenuse das rechtwinkelige Dreieck ADX mit $XD = XB$ konstruieren? Nun, wenn wir nicht weiter können, so müssen wir eben auf die erste Art verfallen; aber des Versuches ist es immerhin wert. In der That, da $XD = XB$ und $\sphericalangle ADX = R$, so liegt es nahe, ein zu AXD kongruentes Dreieck zu zeichnen, welches

*) Um die Druckkosten möglichst zu verringern, konnte nur ein Teil der erläuternden Figuren Aufnahme finden; das Vermisste wird der Leser nach den Angaben des Textes leicht selbst konstruieren können.

wir sofort erhalten, wenn wir DX über X hinaus verlängern und in B auf AB eine Senkrechte errichten, welche DX in C schneidet. Wir erkennen die Verwandtschaft dieser und der vorigen Lösung; aber ein Unterschied besteht doch: bei der zweiten Art wird nicht direkt X, sondern zunächst D gefunden durch den um A mit q und den über AC als Durchmesser beschriebenen Kreis. c) Es soll uns aber auch bekannt sein, dass $AX^2 - XB^2 = (AX - XB)\,(AX + XB) = (AX - XB) \cdot AB$ ist. Schneiden wir daher von XA ein Stück $XY = XB$ ab, so ist $AY \cdot AB = q^2$, d. h. AY ist die dritte Proportionale zu AB und q, welche auf mehrfache Art gefunden werden kann. Determination: Da $AX^2 - XB^2$ jeden Wert annehmen kann, so ist die Aufgabe stets lösbar; indes werden wir bei hinreichend grossem q den Punkt X, den wir in der Analysis auf AB selbst annahmen, auf der Verlängerung erhalten; die Lage desselben richtet sich nach den drei möglichen Beziehungen $q \lesseqgtr AB$.

35. 4) Aufgabe. Auf einer Geraden liegen der Reihe nach die Punkte A, C, B; auf derselben Geraden ausserhalb der Strecke AB den Punkt X zu suchen, für welchen $XC^2 = XA \cdot XB$ ist. Determination: Die Aufgabe ist stets lösbar, wovon man sich durch Aufsuchung zweier leicht zu findenden Grenzpunkte, zwischen denen X liegen muss, überzeugt. Eine vorläufige Auskunft über die Lage von X giebt auch eine andere Betrachtung: Ist M die Mitte von AB, so ist $XM = {}^1/_2\,(XA + XB)$, und da das geometrische Mittel zweier Grössen kleiner ist als das arithmetische, so ist $XC < XM$, d. h. X liegt mit C auf derselben Seite des Punktes M (und falls C und M zusammenfallen, in unendlicher Ferne). Im Nachfolgenden wird auf die Eigenschaften von vier harmonischen Punkten einer Geraden absichtlich nicht (oder wenigstens, soweit sich Anklänge daran finden, nicht absichtlich) Bezug genommen. Analysis: X sei der gesuchte Punkt, also $XC^2 = XA \cdot XB$. a) Wir denken an die Kathete eines rechtwinkeligen Dreiecks als mittlere Proportionale und konstruieren durch den Halbkreis über AX und die auf AX senkrechte Halbsehne BE das rechtwinkelige Dreieck AEX mit AX als Hypotenuse; dann ergiebt sich $XE = XC$. Daher ist im Dreieck AEX, entsprechend der bekannten Darstellung der halben Differenz zweier Dreieckswinkel, $\sphericalangle AEC = {}^1/_2(\sphericalangle XEA - \sphericalangle XAE) = {}^1/_2(R - \sphericalangle XAE) = {}^1/_2 \sphericalangle AEB$, folglich EC die Halbierungslinie des Winkels AEB, daher $AE : EB = AC : CB$. Mithin haben wir für E ausser der Geraden BB' ($\perp AB$) noch denjenigen Kreis als geometrischen Ort, der häufig den Namen des apollonischen führt, und es ergiebt sich leicht, dass dessen Mittelpunkt eben der gesuchte Punkt X ist. Die Konstruktion ist in Figur 16, die zugleich als Analysis-Figur gelten möge, ausgeführt. Zum Beweise ist der um X mit $XC = XD$ zu beschreibende Kreis, der BB' in E trifft, erforderlich. Dann ist gemäss den Eigenschaften des apollonischen Kreises $AE : EB = AC : CB$, folglich $\sphericalangle AEC = {}^1/_2 \sphericalangle AEB = {}^1/_2(\sphericalangle ABE - \sphericalangle EAB)$; anderseits aber ist $\sphericalangle AEC = {}^1/_2(\sphericalangle XEA - \sphericalangle XAE)$; folglich $\sphericalangle XEA = \sphericalangle ABE = R$; und da ausserdem $EB \perp AX$, so ist $XC^2 = XE^2 = XA \cdot XB$. b) Wir können aber mit demselben Rechte die Dienste der Tangente als mittlerer Proportionalen in Anspruch nehmen. Legen wir zu dem Ende durch A und B mit Hülfe der Mittelsenkrechten MO einen beliebigen Kreis O und ziehen die Tangente XF, so wird $XC = XF$ sein müssen. Hieraus folgt zunächst, dass $\sphericalangle XFC = \sphericalangle XCF$. Nun aber ergänzt $\sphericalangle XFC$ den $\sphericalangle OFC$ zu einem Rechten, und wenn FC bis zum Schnitt mit MO in G verlängert wird, so ergänzt $\sphericalangle XCF = \sphericalangle GCM$ den $\sphericalangle OGC$ zu einem Rechten; daher ist $\sphericalangle OFC = \sphericalangle OGC$, also $OG = OF$ und G ein Punkt des Kreises. Die Konstruktion ist in Fig. 17 dargestellt. c) Derselbe Satz von der Tangente kann in anderer Weise verwertet werden. Wir machen nämlich XC unmittelbar zur Tangente eines sonst beliebigen Kreises mit C als Berührungspunkt und ziehen an diesen Kreis die Sekante $XB'A'$; dann ist $XA \cdot XB = XC^2 = XA' \cdot XB'$, folglich sind A, B, A', B' Punkte eines Kreises. d) Sollte es nicht möglich sein, dadurch zum Ziele zu kommen, dass wir die Proportion $XA : XC = XC : XB$ in anderer Weise durch ähnliche Dreiecke verwirklichen? Errichten wir $XH = XC \perp AX$ und ziehen AH und BH, so ist, jene Proportion vorausgesetzt, $\triangle AXH \sim \triangle HXB$, also $\sphericalangle AHX = \sphericalangle HBX$; wegen $XC = XH$ ist aber $\sphericalangle AHC = {}^1/_2(\sphericalangle AHX - \sphericalangle HAX) = {}^1/_2(\sphericalangle HBX - \sphericalangle HAX)$

$= \frac{1}{2} \sphericalangle AHB$; folglich ist HC die Halbierungslinie des Winkels AHB. Das Weitere wie bei der ersten Analysis. e) Um die Gleichheit der beiden Verhältnisse in der Proportion $XA : XC = XC : XB$ äusserlich darzustellen, suchen wir ein drittes, welches dem einen von ihnen und folglich auch dem anderen gleich ist. Wir ziehen daher durch X eine beliebige Gerade und durch A und C irgend zwei Parallelen, welche die Gerade bezüglich in K und L schneiden; dann ist $XA : XC = XK : XL$, folglich auch $XC : XB = XK : XL$, mithin $BL \parallel CK$. f) Denselben Weg zeigt uns eine andere Überlegung. Da nämlich die in der Proportion vorkommenden Strecken auf derselben Geraden liegen, so kommt man auf den Gedanken, AC und CB als homologe Seiten ähnlicher Figuren, am einfachsten zweier Dreiecke, XA als Ähnlichkeitsstrahl und X als Ähnlichkeitspunkt zu betrachten. g) Eine nicht wesentlich davon verschiedene Konstruktion ergiebt sich, wenn wir aus $XA : XC = XC : XB$ die neue Proportion $XA : XC = (XA - XC) : (XC - XB) = AC : CB$ ableiten.

36. Bei den vorhergehenden Aufgaben kam es wesentlich auf die Analysis an, und sie sind eigens zu diesem Zwecke ausgewählt worden; bei den nachfolgenden aus dem Unterrichtsstoff des letzten Jahres herausgegriffenen Beispielen sollen vorzugsweise andere Teile der Auflösung berücksichtigt werden. 5) Aufgabe. Es soll ein Dreieck konstruiert werden aus einer Seite, dem gegenüberliegenden Winkel und dem Inkreisradius. Gegeben $a = 7\,cm$, $\alpha = 70^0$, $\varrho = 1{,}5\,cm$. I. Lösung. Analysis: ABC sei das gesuchte Dreieck. Halbieren wir die Winkel B und C durch BM und CM und fällen $MD \perp BC$, so ist 1. $BC = a$, 2. $\sphericalangle BMC = 2R - \frac{1}{2}B - \frac{1}{2}C = R + \frac{1}{2}A + \frac{1}{2}B + \frac{1}{2}C - \frac{1}{2}B - \frac{1}{2}C = R + \frac{1}{2}A = R + \frac{1}{2}\alpha$, 3. $MD = \varrho$. Daher lässt sich $\triangle BMC$ aus der Grundlinie, dem Winkel an der Spitze und der Höhe zeichnen. Konstruktion (Fig. 18*)): Wir machen eine Strecke $BC = a$, errichten auf derselben die Mittelsenkrechte $PQ = \varrho$ und benutzen den einen der hierzu verwendeten Kreise, um $\sphericalangle CBX = R + \frac{1}{2}\alpha$ anzutragen und auf BX die Senkrechte BZ zu errichten, welche PQ in K trifft. So verfahren nämlich weniger umsichtige Schüler, und auch wir würden unter gewöhnlichen Umständen ebenso verfahren. Der Winkel $R + \frac{1}{2}\alpha$ muss jedoch erst konstruiert werden, und dies soll an der Figur selbst geschehen; eine kurze Überlegung zeigt nun, dass wir zu dem Zwecke am besten zuerst $\sphericalangle CBY = \alpha$, dann $\sphericalangle CBZ = \frac{1}{2} \sphericalangle CBY = \frac{1}{2}\alpha$ machen und zuletzt $BX \perp BZ$ errichten; denn dadurch haben wir die gesuchte Senkrechte BZ von selbst erhalten. Ja es wäre BX sogar überflüssig; da jedoch auf andere Eigenschaften der Figur zunächst nicht eingegangen werden soll, so ist BX für den Beweis erforderlich. Nach diesen Bemerkungen wollen wir in der Konstruktion fortfahren. Wir beschreiben um K mit KB einen Kreis, welcher BC nicht nur in B, sondern auch in C trifft und die durch Q zu BC — nach dem Augenmass oder in sonst praktischer Weise — gelegte Parallele in M und M' schneidet. Darauf ziehen wir — unter Benutzung des Peripheriewinkels im Halbkreise $M'MN$ — $MD \perp BC$, beschreiben um M mit MD einen Kreis und ziehen an diesen Kreis von B und C die beiden noch möglichen Tangenten, deren Berührungspunkte wir jedoch nicht durch die Halbkreise über MB und MC, sondern durch die um B und C bezüglich mit den Radien BD und CD beschriebenen Bogen DF und DE bestimmen. Nennen wir den Schnittpunkt der Tangenten A, so ist ABC das gesuchte Dreieck. (Ein zu diesem symmetrisches $A'BC$ hätten wir durch Benutzung des Punktes M' erhalten.) Beweis: (1) Es ist zu beweisen, dass im $\triangle ABC$ eine Seite, der gegenüberliegende Winkel und der Inkreisradius die vorgeschriebene Grösse haben. (2) Die Seite ist BC, demnach $\sphericalangle BAC$ der in Betracht kommende Winkel; da infolge der Konstruktion — wie erforderlichenfalls leicht zu erweisen — $MD = ME = MF$ und $BC \perp MD$, $CA \perp ME$, $AB \perp MF$, so ist MD der Inkreisradius. (3) Nun aber ist 1. $BC = a$ gemacht; ferner ist einerseits $\sphericalangle BMC = CBX = R + \frac{1}{2}\alpha$ und anderseits $\sphericalangle BMC = R + \frac{1}{2} \sphericalangle BAC$, mithin 2. $\sphericalangle BAC = \alpha$; endlich ist 3. $MD = PQ = \varrho$. Daher ist ABC das verlangte Dreieck. — Obwohl die angegebene Konstruktion sich

*) Der Raumersparnis wegen musste die Figur auf $\frac{2}{3}$ der ihr zugedachten und oben für sie vorgeschriebenen Grösse verkleinert werden.

leicht und natürlich an die Analysis anlehnt, wurde mir einmal bei wesentlich derselben Analysis eine andere Lösung eingeliefert. Die Analysis enthielt den Zusatz: Für den Punkt A habe ich zwei geometrische Örter: die von C an den Kreis M gezogene Tangente und denjenigen Kreisbogen über BC, welcher α als Peripheriewinkel fasst; und hiernach war auch gezeichnet. Man überzeugt sich leicht, dass diese Konstruktion nicht erheblich weitläufiger ist als die unserige. Aber sie hat den Fehler, dass sie von dem durch die Analysis vorgezeichneten Wege in einer Weise abweicht, welche dem Schüler die Beweisführung sehr erschweren musste und thatsächlich für ihn zu grosse Schwierigkeiten bot. Denn der springende Punkt des Beweises ist dann der, darzuthun, dass AB eine Tangente des Kreises M ist. Zwei Wege mögen angedeutet werden. a) Man zeigt zuerst, dass K auf dem Bogen BC liegt. Infolge dessen ist im Kreise K $\sphericalangle BKM = 2 \sphericalangle BCM = \sphericalangle BCA$ und im Kreise O $\sphericalangle BKA = \sphericalangle BCA$; daher liegt M auf AK; u. s. w. b) Man fällt $MF \perp AB$, dann ist $\sphericalangle EMF = 2R - \alpha$, folglich $\sphericalangle FMB + \sphericalangle BMD + \sphericalangle DMC + \sphericalangle CME = 2R + \alpha$; anderseits ist $\sphericalangle BMD + \sphericalangle DMC = R + \frac{1}{2}\alpha$, daher ist auch $\sphericalangle FMB + \sphericalangle CME = R + \frac{1}{2}\alpha$. Da aber $\sphericalangle DMC = \sphericalangle CME$, so ist $\sphericalangle BMD = \sphericalangle FMB$; u. s. w. Determination: Es darf ϱ nicht grösser sein als die grösste Höhe, welche ein Dreieck von der Grundlinie a und dem gegenüberliegenden Winkel $R + \frac{1}{2}\alpha$ annehmen kann. Ist daher R der Schnittpunkt des Bogens BMC und der Mittelsenkrechten PQ, so heisst die Bedingung: $\varrho \leqq PR$, trigonometrisch: $\varrho \leqq \frac{1}{2} a \operatorname{cotg} \frac{1}{2}(R + \frac{1}{2}\alpha)$ oder $a \geqq 2\varrho \operatorname{tang} \frac{1}{2}(R + \frac{1}{2}\alpha)$. Die Determination kann jedoch auch von einem anderen Gesichtspunkte aus gefunden werden. Da nämlich durch ϱ und α der Kreis M, der Punkt A und die Seiten AB und AC (jedoch nicht die Punkte B und C) ihrer Lage nach bestimmt sind, so fragt es sich, welche Grenzwerte die Länge der an dem Kreise hingleitenden Tangente BC annehmen kann. Wie leicht erkennbar, kann sie ins Unendliche wachsen und für jede mögliche Grösse zwei verschiedene Lagen einnehmen, woraus hervorgeht, dass der kleinste Wert dann eintritt, wenn die beiden Lagen in eine einzige zusammenfallen, d. h. wenn $AB = AC$. Auch kann dies direkt nachgewiesen werden, am einfachsten wohl mit Hülfe des Ankreises an BC. Trigonometrisch erhält man denselben Ausdruck wie oben. Die vorstehenden Erwägungen schliessen sich jedoch viel mehr an die nachfolgende Lösung an.

II. Lösung: Dieselbe beruht darauf, dass (Fig. 19) $EE_1 = FF_1 = a$. Die Einzelheiten der Ausführung mögen übergangen werden; doch soll uns die Konstruktion von BC ein wenig aufhalten. Wird BC auf eine der gewöhnlichen Arten als gemeinschaftliche Tangente der Kreise M und M_1 konstruiert, wozu die Figur einige Handhaben bietet (der Schnittpunkt von NE_1 und MM_1 ist ein Punkt derselben), so ist der Beweis leicht. Der wesentlichste Punkt, dass nämlich $BC = a$, würde dann etwa folgendermassen bewiesen. Es ist

$$\begin{array}{ll} \text{einerseits} & BC = BD + DC = BF + CE, \\ \text{anderseits} & \underline{BC = BD_1 + D_1C = BF_1 + CE_1,} \\ \text{mithin} & 2\,BC = FF_1 + EE_1 = 2\,a;\ BC = a. \end{array}$$

Wenn man aber die Punkte B und C in weit einfacherer Weise durch den Kreis K bestimmt, so wird der Beweis schwieriger. Denn dann muss nachgewiesen werden, dass BC eine gemeinschaftliche Tangente der Kreise M und M_1 ist. Dies kann auf folgende Art geschehen. BC ist Tangente an M, wenn $\sphericalangle BCM = \sphericalangle MCE$. Nun aber steht der erstere auf dem Bogen $BB'M$ und der letztere (vgl. § 15) auf dem Bogen $C'CM$; u. s. w. Oder wir zeigen, dass $\sphericalangle CBM = \sphericalangle MBF$ mit den zugehörigen Bogen CM und $B'M$. In ähnlicher Weise findet man, dass BC Tangente an M_1 ist; doch kann man auch den Umstand verwerten, dass $CM_1 \perp CM$ ist: wenn CM den Winkel ACB halbiert, so halbiert CM_1 seinen Nebenwinkel.

37. Unsere Aufgabe giebt noch zu zweierlei Bemerkungen Anlass. Die eine bezieht sich auf den Angriffspunkt. Bei einer Dreiecksaufgabe hat man nämlich insofern verschiedene Wege vor sich, als man unter Umständen mit jedem der gegebenen Stücke beginnen kann. Bei der ersten Auflösung haben wir der Seite $BC = a$ von vornherein ihre bestimmte Lage gegeben, bei der zweiten konnten wir entweder dem Radius $ME = \varrho$ oder dem Winkel

$A=a$ schon gleich anfangs seinen endgültigen Ort anweisen. Manchmal bietet einer der Wege Hindernisse, nicht selten vereinigen sich zwei derselben, wie auch hier, oder gar alle drei zu einer übereinstimmenden Lösung. Die andere Bemerkung erstreckt sich auf das Endergebnis. Jede unserer beiden Konstruktionen liefert zwei kongruente, zu einander symmetrische Figuren. Wenn wir aber $PQ=\varrho$, bezw. in der zweiten Lösung $EE_1=a$ auf der betreffenden Geraden auch nach der andern Seite hin abtragen, was durch den nämlichen Kreis geschieht und bei PQ auch durch die absichtliche Unbestimmtheit des Ausdrucks freigestellt wurde, so erhalten wir, auf diesen Grundlagen (nach den Regeln des § 17) weiterbauend, zwei neue einander kongruente und symmetrische Figuren. Diese genügen zwar bei der Engherzigkeit in der Auffassung der Figuren, welche der Schulgeometrie eigen ist und z. T. eigen sein muss, den Bedingungen im vorliegenden Falle nicht wörtlich. Bedenkt man jedoch, dass, während bei fester Lage der übrigen Teile des Dreiecks die Seite BC als Tangente längs des Kreises M hingleitet, der Inkreis M zu einem Ankreise wird und der Innenwinkel A sich in einen Aussenwinkel verwandelt, so wird man auch jene Figuren gelten lassen oder wenigstens nicht ganz von der Hand weisen. Sie genügen auch den strengsten Anforderungen, wenn die Aufgabe in folgender Form gestellt ist: Ein Kreis und zwei Tangenten desselben sind gegeben; eine dritte Tangente zu ziehen, deren zwischen den beiden anderen liegender Abschnitt die Grösse a hat. Von den oben gegebenen Auflösungen ist dann die zweite am Platze; diese Konstruktion ist es, welche wir in Figur 19 ausgeführt sehen; M_1 ist dort durch den Kreis K gefunden. Die Determination erleidet jetzt natürlich eine Änderung; die Tangente hat nämlich in diesem Falle zwei endliche Grenzwerte, deren Ermittelung und Erörterung dem Leser überlassen sein möge.

38. 6) Aufgabe. Zur Konstruktion eines Dreiecks ist der Radius des Umkreises, der Unterschied der auf der Grundlinie von der Höhe gebildeten Abschnitte und das Rechteck (Produkt) aus den beiden anderen Seiten gegeben. Gegeben seien also die Strecken $k = 2{,}5\,cm$, $l = 3\,cm$, $m = 3{,}5\,cm$; gesucht das Dreieck, worin $r=k$, $p-q=l$, $ab=m^2$. Aus der Analysis möge nur bemerkt werden, dass $2rh_c=ab=m^2$, also h_c konstruierbar ist. Konstruktion (Fig. 20): Kreis O mit dem Radius k, Sehne $CC'=l$, $CG\perp CC'$ mit Hülfe des Durchmessers $C'E$ und $CG=2r=CF$, $CC'H=m$, $HD\perp GH$, $ADB \parallel CC'$. Beweis: 1. $r=k$. 2. Da $CD\perp AB$, so ist $DB=p$ und $DA=q$; beschreibt man daher um C mit CA einen Kreis, der AB noch in K schneidet, so wird $BK=p-q$. Nun aber ist $\sphericalangle CKA = \sphericalangle CAK = \sphericalangle C'BA$, also $CK \parallel C'B$ und daher $BK=CC'=l$. Mithin ist $p-q=l$. 3. $\sphericalangle GHD = R$, $HC\perp GD$, demnach $BC\cdot CA = CF\cdot CD = CG\cdot CD = CH^2$, d. i. $ab=m^2$. Determination: Es muss 1. $l \leq 2k$ und, damit AB den Kreis treffe, ausserdem 2. $CD \leqq MN$, also $m^2 = CD\cdot CF \leqq MN\cdot CF = MN\cdot NN' = CN^2$, d. i. $m \leq CN$ sein; algebraisch: $m^2 \leq 2k\,(k+\sqrt{k^2-\tfrac{1}{4}l^2})$. Wiewohl man sich hiermit zufrieden geben kann, so sieht man doch nicht recht ein, in welchem Zusammenhang die anscheinend ganz zweckmässig angefügte Konstruktion von CD mit dieser Determination steht. Wir können jedoch diese Verbindung herstellen, indem wir $NL\perp CE$ ziehen und über GL als Durchmesser den Halbkreis beschreiben, der CH in P trifft. Denn dann ist CL der Grenzwert von CD und folglich CP der grösstmögliche Wert für CH, d. i. für m. Um diese Determination mit der vorigen in Einklang zu bringen, wird zu beweisen sein, dass $CP=CN$ ist. Unter Benutzung der neuen Strecke CL erhält der Beweis folgende Gestalt: Da $CP^2=CG\cdot CL=CF\cdot CL$, so wird auch $CN^2=CF\cdot CL$ oder $CF:CN=CN:CL$ sein müssen; und das ist in der That der Fall, weil $\triangle CFN \sim \triangle CNL$. Dieser Beweisgang, welcher uns CN fast unmittelbar als mittlere Proportionale zwischen CF und CL vorführt, zeigt uns nun einen neuen Weg zur Konstruktion von CD, welcher überdies die Determination unmittelbar sichtbar macht. Schneiden wir nämlich von CN ein Stück $CQ=CH$ ab, so ist $CF:CQ=CQ:CD$, und da $\sphericalangle FCQ = \sphericalangle QCD$ ist, so ist $\triangle FCQ \sim \triangle QCD$, mithin $\sphericalangle CFQ = \sphericalangle CQD$. Zur Konstruktion des Punktes D ist daher letzteres die zu verwirklichende Bedingung. Zu dem Ende machen wir also $CQ=m$, ziehen die durch Q gehende Sehne FJ und legen durch Q zu NJ eine Parallele, welche CE in D trifft. Diese Konstruktion ist, wie sofort einleuchtet, nur dann möglich,

wenn $m \leqq CN$ ist. Nach der höheren geometrischen Auffassung hat natürlich der Punkt N' dasselbe Recht auf Berücksichtigung wie der Punkt N und liefert eine entsprechende zweite Grenze für m; doch dies sei der Betrachtung des Lesers empfohlen. Nach der Auffassung der gewöhnlichen Schulgeometrie aber müssten wir alle jene Dreiecke ausschliessen, welche an der Grundlinie einen stumpfen Winkel haben, da in diesen nicht mehr im gewöhnlichen Sinne $p-q$, sondern $p+q=l$ sein würde. Dann würde die Determination lauten: Es darf D nicht auf die Verlängerung von CE fallen, es muss also $CD \leqq CE$ sein; daraus algebraisch: $m^2 \leqq 2k\sqrt{4k^2-l^2}$.

39. Konstruktion von Figuren mit Hülfe ähnlicher Figuren. Wenn bei Dreiecksaufgaben (auf diese wollen wir uns hier beschränken) unter den gegebenen Stücken zwei Winkel oder ein Winkel und das Verhältnis zweier Strecken oder zwei Verhältnisse zwischen drei Strecken sich befinden — welche Bedingung übrigens im Grunde genommen stets erfüllt ist, da z. B. mit der wirklichen Grösse der Strecken a, b, w_c oder h_a, h_b, h_c auch deren Verhältnisse gegeben sind — so lässt sich bekanntlich zunächst ein dem gesuchten ähnliches Dreieck zeichnen, selbstverständlich nach den allgemeinen Konstruktionsregeln; das dritte noch gegebene Stück, welches hierbei notwendig eine Strecke sein muss, dient dann zur Herstellung der gewünschten Figur in ihrer wirklichen Grösse. Den Schülern ist es nun zwar am liebsten, wenn letztere durch eine Parallele zur Grundlinie des ähnlichen Dreiecks sich bewirken lässt; aber eben darum rate ich dem Lehrer, derartige Aufgaben schon von vornherein von dem allgemeinsten Gesichtspunkte aus zu erörtern. Denn jene Einzelmöglichkeit wird nur zu leicht verallgemeinert und ist dann oft eine Quelle der gröbsten Sinnestäuschung. Ähnlichkeitspunkt und Ähnlichkeitsstrahl sind zwei sehr leicht fassliche Begriffe, deren Kenntniss genügt, um sicher mit ihnen arbeiten zu können. Denn es kann nicht schwer sein, folgende zwar etwas langatmige, ihrem Inhalte nach aber höchst einfache Regel sich einzuprägen: Ist die ähnliche Figur konstruiert, so wählt man irgend einen Punkt, am besten einen Punkt der Figur selbst, zum Ähnlichkeitspunkt, verbindet denselben, soweit dies nicht schon geschehen ist, mit sämtlichen Punkten der Figur, insbesondere auch mit den Endpunkten derjenigen Strecke, welche dem dritten noch anzuwendenden Stücke homolog ist, und zeichnet dann die neue Figur so, dass je zwei homologe Punkte auf denselben Ähnlichkeitsstrahl zu liegen kommen und je zwei homologe Linien einander parallel werden. Die ersten Striche der neuen Figur bezwecken natürlich die richtige Eintragung der gegebenen Strecke, so dass sie, falls sie nicht auf einem Ähnlichkeitsstrahl abgetragen werden muss, ihrem homologen Stück parallel und von denselben Ähnlichkeitsstrahlen begrenzt ist, eine Arbeit, die bald geläufig wird. Wendet man noch »homologe« Buchstaben an, $ABC\ldots$, $A'B'C'\ldots$, so ist das Ganze ein Kinderspiel. Damit es aber nicht bei der mechanischen Anwendung der Regel bleibt, lassen wir für jeden Einzelfall den Beweis führen. Es ist einleuchtend, wie viel Abwechselung bei derselben Aufgabe durch die verschiedene Wahl des Ähnlichkeitspunktes in die Konstruktion und namentlich in den Beweis hineingebracht wird. Je nach seiner Lage bietet der eine Ähnlichkeitspunkt diesen, der andere jenen Vorteil, und die ständige Beweisführung ist eine gute Schule zur Einübung aller Art von Sätzen über Proportionen.

40. Algebraische Lösungen. Eine ganz besondere Methode der Behandlung geometrischer Aufgaben ist die algebraische. Sie ist erst dann allgemein anwendbar, wenn die Hülfsmittel der Trigonometrie benutzt werden können, wodurch es ermöglicht wird, auch die Winkel in der Rechnung auftreten zu lassen, und sie besteht darin, dass man eine Strecke der gesuchten Figur oder die goniometrische Funktion eines Winkels, welche man auf einfache Weise aus den gegebenen Grössen berechnen zu können glaubt, durch eine Gleichung zu bestimmen sucht und die gefundene Grösse geometrisch konstruiert. Abgesehen von solchen Aufgaben, wo man mit Proportionen oder dem Flächeninhalt der Figuren rechnen muss, die schon mehr einen geometrischen Anstrich bekommen haben, halte ich jedoch diese Art der Auflösung für ein nur ausnahmsweise anzuwendendes Mittel, da sie ihrem Wesen nach der Trigonometrie angehört. Indessen ist es immerhin, wenn die Zeit es erlaubt, der Mühe wert, eine algebraisch gefundene Strecke oder Winkelgrösse geometrisch darzustellen. Bei geschickter Anordnung der Konstruktion wird man häufig mit Erstaunen wahrnehmen, dass die algebraische Analysis auf dieselbe Konstruktion führt, wie die geometrische; ich erinnere nur an die stetige Teilung einer Strecke. Einen nicht zu unterschätzenden Wert hat jedoch die algebraische Analysis manchmal für den Lehrer. Wenn er nämlich einmal die Lösung einer Aufgabe nicht »herauskriegen« kann und es auch verschmäht, ihr in einer Aufgabensammlung nachzuspüren oder ihr vergeblich nachspürt, weil sie nicht darin steht, so kann ihm die algebraische Methode auf den richtigen Weg helfen; ja es kommt dann vor, dass man eine nicht auf eine quadratische Gleichung zurückführbare Gleichung höheren Grades erhält, ein Resultat, welches beweist, dass die Auflösung durch Kreise und gerade Linien unmöglich ist. So liefert also die algebraische Analysis ein Mittel, die Möglichkeit der Auflösung zu bejahen oder zu verneinen.

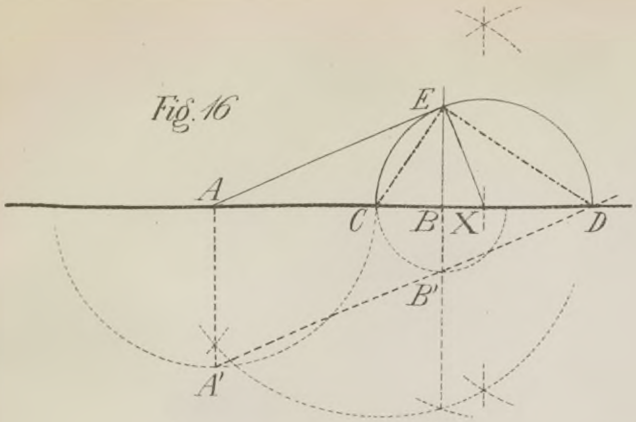
Hiermit habe ich mein Wort, mit welchem ich den ersten Teil dieser »Kleinigkeiten« schloss, wenigstens äusserlich eingelöst. Der Inhalt sei der eingehenden Beurteilung des Lesers empfohlen. Ich werde zufrieden sein, wenn ich auch nur wenigen eine kleine Anregung gegeben habe.

O. Herweg.

Berichtigung.

Seite 6, Zeile 16 v. o. ist statt BX zu lesen BY.

Fig. 16



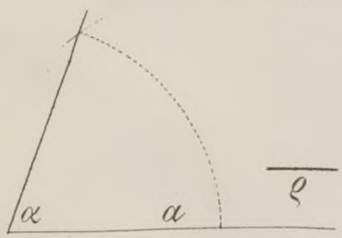


Fig. 17

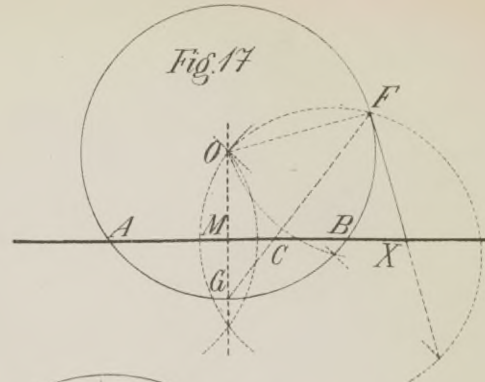


Fig. 18

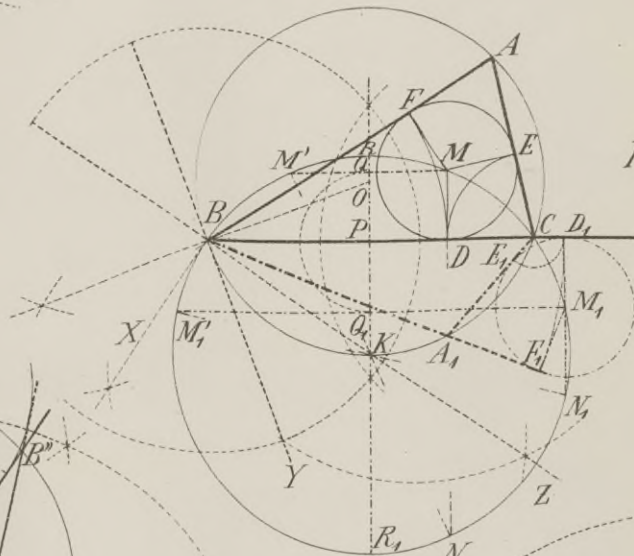


Fig. 19

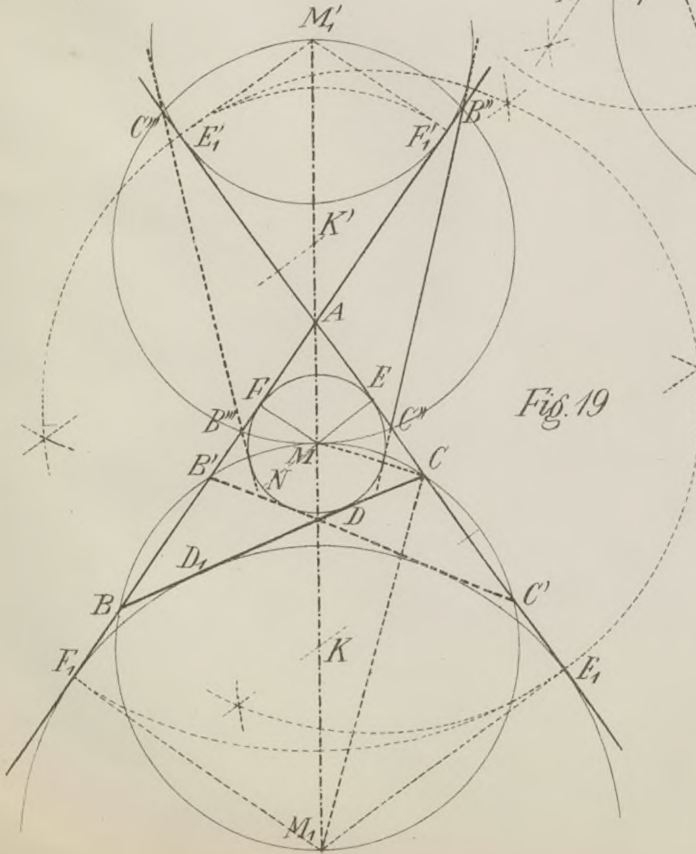


Fig. 20