Mathematische Aufgaben

aus dem Nachlaß

des Professors Hermann von Schaewen,

II. Teil,

herausgegeben von

Erich Wernicke, Oberlehrer.

Beigabe zum Jahresbericht

des

Königlichen evangelischen Gymnasiums zu Marienwerder

für das Schuljahr 1907/08.

Marienwerder.
Druck der R. Kanter'schen Hofbuchdruckerei.
1908.

1908. Progr. Nr. 42.

Frau Clara von Schaewen, die Witwe des am 18. März 1906 verstorbenen, um unser Gymnasium hochverdienten Professors Hermann von Schaewen, hat die von ihm seit dem Jahre 1881 für den mathematischen Unterricht entworfenen Aufgaben sämtlich der Anstalt geschenkt. Unserem Danke für die hochherzige Schenkung glauben wir den würdigsten Ausdruck dadurch zu geben, daß wir aus der wertvollen Sammlung eine weitere Auswahl der Öffentlichkeit und insbesondere unsern Schülern zugänglich machen.

II. Teil. Stereometrie.

§ 10. Gegenseitige Lage von Geraden und Ebenen.

1. Man errichtet in 2 Punkten A und B einer Ebene, die um 143 cm von einander entfernt liegen, je ein Lot von 87 cm in der Ebene und eins von 111 cm senkrecht zu der Ebene. Wie lang ist die Verbindungslinie ihrer Endpunkte, wie groß ist ihr Neigungswinkel gegen die Ebene?
2. Eine Gerade bildet mit ihrer Projektion auf eine Ebene einen Winkel von $55{,}2^0$, die Projektion mit einer anderen Geraden der Ebene durch die Spur der ersten einen Winkel von $26{,}75^0$. Welchen Winkel bildet die gegebene Gerade mit der letzten?

§ 11. Das Prisma.

A. Der Würfel.

1. Ein Würfel mit der Kante 10 cm in der Grund- und Aufrißebene zu zeichnen, wenn
   a) eine Seitenfläche der Aufrißebene parallel ist und eine andere in die Grundrißebene fällt,
   b) wenn er auf einer Seitenkante, parallel (senkrecht) zur Aufrißebene, in der Grundrißebene steht und die übrigen Kanten einen Winkel von 45^0 mit der Grundrißebene bilden,
   c) wenn er auf einer Ecke in der Grundrißebene so steht, daß die zugehörige Raumdiagonale senkrecht zur Grundrißebene steht. (Die sonstige Lage beliebig.)
2. Ein Würfel aus Kupfer hat die Kante 3,55 cm. Wie schwer ist er in Wasser?
3. Von einem Würfel ist die Gerade gegeben, die eine Ecke mit dem Mittelpunkt einer gegenüberliegenden Fläche verbindet. Wie groß ist die Kante des Würfels?
4. Von einem Würfel ist die Gerade gegeben, die von einer Ecke nach einer gegenüberliegenden Kante so gezogen wird, daß sie dieselbe nach dem Verhältnis $m : n$ teilt. Wie groß ist die Kante des Würfels?
5. Von einem Würfel ist der Inhalt des Diagonaldreiecks gegeben. Wie groß ist die Kante des Würfels?
6. Durch eine Würfelkante ist eine Ebene zu legen, die
   a) eine gegenüberliegende Würfelfläche halbiert und deren Umfang $u = 19\,658$ cm ist;

b) zur Würfeloberfläche im gegebenen Verhältnisse $m:n$ steht und einen gegebenen Umfang u hat;
c) die gegenüberliegende Fläche in dem gegebenen Verhältnisse $m:n$ teilt und einen gegebenen Umfang u hat. Wie groß ist die Würfelkante?

7. Durch einen Würfel ist eine Ebene gelegt, die die Diagonalachse enthält und eine Kante im Verhältnis $1:3$ schneidet. Wie groß sind die Seiten und Winkel des Schnitts?
8. Das Volumen eines Hohlwürfels ist $V = 15875$ cm³, die Dicke 2,5 cm. Wie lang sind die äußeren Kanten?
9. In einem Holzwürfel ($\sigma = 0{,}75$) von der Kante $a = 5{,}3$ cm liegt ein Hohlraum von der Gestalt eines Würfels. Die Höhlung wird mit Blei ($\sigma = 11{,}38$) ausgegossen. Wie groß ist der Inhalt des Hohlraumes, wenn der Würfel mit dem Bleiausguß gerade schwimmt?
10. In einem würfelförmigen Gefäß, dessen innere Seite 15 cm ist, steht ein Glasgefäß ($\sigma = 2{,}73$), dessen äußere Dimensionen 7, 8, 10 cm sind, dessen Wandstärke 2 mm ist und in dem Quecksilber [$\sigma = 13{,}596$] 4 mm hoch steht. Wie hoch muß das Wasser in dem großen Gefäße stehen, damit das innere gerade gehoben wird?

B. Der Rechtecker.

1. Von einer Säule mit quadratischem Querschnitt sind gegeben:
a) Inhalt und Oberfläche.
b) die Umfänge zweier Diagonalschnitte. $U_1 = 28$ cm, $U_2 = 36$ cm.
c) ein Diagonalendreieck und die Seitenkante b.
d) die Inhalte der beiden verschiedenen Diagonalschnitte J_1 und J_2.
e) das Verhätnis der Grundfläche zur Seitenfläche und die Diagonalachse. Welches sind die Dimensionen der Säule?
2. Aus Kupferblech ($\sigma = 8{,}9$), das 2 mm stark ist, wird eine Röhre mit quadratischem Querschnitt angefertigt, deren äußere Kante 3 cm ist. Die Röhre ist $8^3/_4$ m lang. Wie viel wiegt sie?
3. Eine quadratische Säule aus Blei ($\sigma = 11{,}38$), deren Seite 17,5 cm und deren Grundkante 8,3 cm ist, soll mit einer überall gleich dicken Korklage umgeben werden, so daß sie von Wasser gerade getragen wird. Wie dick ist die Korklage?
4. Der Inhalt eines Rechteckes ist zu berechnen, wenn gegeben sind:
a) die Oberfläche = 2976 cm², der Umfang der Grundfläche = 34 cm, die Seitenkante = 84 cm.
b) die Oberfläche = 2352 cm² [5472 cm²], die Raumdiagonale = 37 cm [53 cm], der Unterschied der Grundkanten = 7 cm [1 cm].
c) die Oberfläche = 3072 cm², die Raumdiagonale = 52 cm, der Umfang der Grundfläche = 56 cm.
d) die Oberfläche = 3968 cm² und das Verhältnis der 3 Kanten = $2:3:5$.

5. Die Kanten eines Rechteckers sind zu berechnen, wenn die Oberfläche = 192 cm², der Inhalt = 144 cm³, die Summe der Grundkanten = 7 cm sind.
6. Der Inhalt eines Rechteckers ist zu berechnen, wenn
   a) die Diagonalachse = $\sqrt{133}$ cm ist und die Kanten eine stetige Proportion bilden. deren äußere Glieder sich um 5 unterscheiden.
   b) die Diagonalachse = $\sqrt{126}$ cm, die Oberfläche = 198 cm² ist und die Kanten eine arithmetische Reihe bilden.
   c) die Raumdiagonale = 85 cm, die Oberfläche = 2976 cm² st und die eine Seitenkante um 67 cm länger als die Summe der beiden mit ihr in einer Ecke zusammenstoßenden Grundkanten ist.
   d) die Oberfläche = 192 cm², die Seitenkante um die Diagonale der Grundfläche länger als die beiden Grundkanten zusammen und die Gerade, die von einer oberen Ecke nach der Mitte der Grundfläche gezogen wird, = $\sqrt{150{,}25}$ cm sind.
   e) die Oberfläche = 192 cm², die Summe dreier anstoßenden Kanten = 19 cm, der Diagonalschnitt = 60 cm² sind.
   f) das Diagonalendreieck = $\frac{63}{2}$ [3 . $\sqrt{133}$] cm², die Oberfläche = 198 [228] cm² sind und
      α) die Kanten eine geometrische Reihe bilden,
      β) die dritte Kante c = 6 cm ist.
   g) der Umfang der Grundfläche um 18 cm kleiner als der einer Seitenfläche, der Umfang des Diagonalschnitts, der durch eine Seitenkante geht, = 34 cm und die Diagonalachse = 13 cm sind.
   h) die drei Geraden gegeben sind die eine Ecke mit den Mittelpunkten der gegenüberliegenden Seitenflächen verbinden.
7. In einem Rechtecker sind drei anstoßende Kanten = 5, 8, 12 cm gegeben. Wie groß ist der Neigungswinkel der Diagonalachsen gegen die Flächen?
8. Ein Marmorblock (σ = 2,84) von der Form eines Rechteckers ist 1,75 m lang, 0,89 m breit, 0,07 m hoch. Wie viel wiegt er in Wasser?
9. In einem Keller von der Länge a = 5,50 m und der Breite b = 3,85 m ist Wasser bis zu einer Höhe von 25 cm eingedrungen und soll durch eine Pumpe fortgeschafft werden, deren Kolben den Durchmesser 9 cm und deren Hubhöhe = 45 cm ist. Ein Auf- und Niedergang dauert $1\frac{1}{2}$ sec. Wann ist alles Wasser ausgepumpt?

C. Das Prisma.

1. Der Inhalt und die Oberfläche eines geraden dreiseitigen Prismas sind zu berechnen, wenn:
   a) die Seiten der Grundfläche a = 25, b = 29, c = 36 cm und die Höhe des Prismas h = 50 cm gegeben sind.

b) die Seiten der Grundfläche a = 13 [14]; b = 37 [20]; c = 40 [23] cm sind und die Seitenkante gleich dem Radius des dem Grunddreieck umbeschriebenen Kreises ist.
c) zwei Winkel und der Radius des dem Grunddreieck umbeschriebenen Kreises und die Seitenkante gegeben sind.

2. Die Grundfläche eines geraden Prismas ist ein reguläres Zehneck, die Höhe gleich dem Durchmesser des dem Zehneck einbeschriebenen Kreises. Wie groß ist das Volumen und die Oberfläche?
3. Von einem geraden Parallelepipedon sind gegeben die drei anstoßenden Kanten und die Winkel des Grundparallelogramms. Wie groß ist das Volumen und die Oberfläche des Körpers? [a = 52,6; b = 43,7; c = 24,9; γ = 148,33°.]

---

4. Die Grundfläche eines schiefen Prismas ist ein gleichseitiges Dreieck mit der Seite a, die eine Seitenkante ist $= \frac{3}{2}a$, ihre Projektion auf die Grundebene fällt mit der Höhe des Grunddreiecks zusammen. Wie groß ist das Volumen und die Oberfläche des Körpers?
5. Das Volumen und die Oberfläche eines schiefwinkligen Parallelepipedons zu berechnen, wenn die drei Kanten und die Winkel zwischen ihnen gegeben sind:

a = 50 cm	b = 60 cm	c = 70 cm
a = 80 cm	b = 50 cm	c = 70 cm
a = 57 cm	b = 83 cm	c = 75 cm
α = 50°	β = 60°	γ = 70°
α = 45°	β = 37,26°	γ = 52,33°
α = 57,66°	β = 65,58°	γ = 49,22°.

6. Bei einem schiefwinkligen Parallelepipedon sind die Grundkanten = 36 und 55 cm, die eine Diagonale der Grundfläche ist = 65 cm die Seitenkante = 84 cm, ihr Neigungswinkel gegen die Grundfläche 65,29°. Wie groß ist das Volumen?
7. Ein Rhomboeder von Kalkspat (σ = 2,72) hat die Kante 3 cm. Der Rhombuswinkel ist 105,08°. Wie groß ist sein Gewicht?
8. Ein Stück Kalkspat ist ein schiefes Parallelepipedon, bei welchem 3 Kanten von den Längen 6 cm, 4,5 cm und 3,8 cm unter dem Winkel 105,08° zusammenstoßen. Sein Gewicht beträgt 243,55 gr. Wie groß ist sein spezifisches Gewicht?

---

§ 12. Die Walze.

1. Der Achsenschnitt einer geraden Walze ist ein Quadrat mit gegebenem Inhalt i = 400 cm². Wie groß ist das Volumen und der Mantel der Walze?

2. Durch eine gerade Walze, deren Achsenschnitt ein gegebenes Quadrat ist, ist in einer gegebenen Entfernung von der Achse ein der Achse paralleler Schnitt gelegt, dessen Umfang von gegebener Größe ist. Wie groß ist Volumen und Oberfläche der Walze?
3. Durch eine gerade Walze vom Grundradius $r = 17$ cm ist parallel der Achse ein Schnitt vom Umfange $u = 82$ cm und Inhalt $J = 400$ cm² gelegt. Wie weit ist der Schnitt von der Achse entfernt?
4. die Oberfläche einer geraden Walze ist $O = 11775$ cm² [126,75 cm²] die Seitenkante $s = 50$ cm [14,5 cm]. Wie groß ist der Inhalt der Walze?
5. Ein Rechteck mit den Seiten 35 cm und 55 cm wird zu einer Walze zusammengerollt. Wie groß ist ihr Inhalt?
6. Wie lang ist der Kupferdraht von 1 mm Stärke, der sich aus 1 kg Kupfer [$\sigma = 8{,}9$] ziehen läßt?
7. Zwischen 2 Telegraphenstangen, die 100 m von einander entfernt sind, ist ein 3 mm dicker Eisendraht [$\sigma = 7{,}75$] ausgespannt. Wie viel wiegt derselbe?
8. Wieviel l Wasser liefert in einer Stunde eine Pumpe, deren Kolbendurchmesser = 8 cm und deren Hubhöhe = 40 cm ist, wenn zu jedem Auf- und Niedergang 1 sec. nötig ist?
9. Um ein cylindrisches Bassin, das 5 m Durchmesser und 3 m Höhe hat, mit Wasser zu füllen, arbeiten 3 gleichgroße Pumpen, deren Stiefel den inneren Durchmesser 10 cm haben In welcher Zeit wird bei einer Hubhöhe von 40 cm und 30 Kolbenzügen in der Minute bei jeder Pumpe das Bassin gefüllt?
10. Ein Wasserbassin in der Form einer Walze von 1,2 m innerem Durchmesser und 1,5 m innerer Höhe ist mit Wasser gefüllt. Wie lang könnte eine Röhrenleitung von 5 cm innerem Durchmesser sein, wenn sie durch das vorhandene Wasser gerade voll laufen soll. Wieviel kg Eisen [$\sigma = 7{,}75$] gehört zu der Leitung bei einer Röhrendicke von 5 mm?
11. Eine Gasröhrenleitung soll 495 m lang werden, die innere Weite der Röhren soll 20 cm, die Wandstärke 5 mm betragen. Wieviel kg Eisen [$\sigma = 7{,}4$] gehören zu der Leitung?
12. Aus einem cylindrischen Holzstamm [$\sigma = 0{,}75$], dessen Länge 6,2 m [5,50 m] und dessen Durchmesser 5,4 cm [Umfang = 86 cm] ist, soll ein Balken von der größten Festigkeit geschnitten werden. Wieviel Holz fällt ab?
13. Ein Kupferrohr [$\sigma = 8{,}9$] von 48 mm innerem Durchmesser, der Wandstärke 1 mm und der Länge 20 cm ist innen mit Kork [$\sigma = 0{,}24$] ausgefüllt. Wie tief sinkt es in Wasser in senkrechter Lage ein?
14. In welcher Richtung muß man eine gegebene gerade Walze durchschneiden, damit sich in der entstehenden Ellipse die Achsen wie 2 : 5 verhalten?

15. Eine gerade Walze mit dem Grundradius 5 cm soll durch eine Ebene geschnitten werden, so daß die große Achse der entstehenden Ellipse = 13 cm ist. Welches ist die Schnittrichtung?

---

16. In einem Kapillarrohr befindet sich ein Quecksilberfaden [$\sigma = 13{,}596$] von $h = 23$ cm Länge. Als man ihn herausbrachte, rollte er sich zu einem Tropfen zusammen, der $^1/_4$ gr wog. Wie groß war der Durchmesser des Rohres und der Quecksilberkugel?
17. Eine Walze mit dem Inhalt 343,27 cm^3 und dem Mantel 76,58 cm^2 soll $^1/_5$ eines Kegels mit dem doppelten Grundradius sein. Wie groß ist der Mantel des Kegels?
18. In ein walzenförmiges Gefäß mit dem inneren Durchmesser 8 cm, das bis zur Höhe von 6 cm mit Wasser gefüllt ist, wird eine Kugel von 3 cm Radius hineingeworfen, die bis zu $^2/_3$ ihres Durchmessers einsinkt. Wie hoch steigt das Wasser in dem Gefäße? Wie groß ist das spezifische Gewicht der Kugel? Wie groß muß die Kante eines unten an die Kugel angehängten Bleiwürfels [$\sigma = 11{,}38$] sein, wenn sie durch ihn gerade zum Sinken gebracht werden soll?
19. Ein walzenförmiges Gefäß mit dem inneren Durchmesser $2r = 40$ cm enthält bis zur Höhe $h = 30$ cm Wasser. Als man ein reguläres Tetraeder hineinsetzte, stieg das Wasser um 2 cm. Wie groß ist die Kante des Tetraeders?

---

20. Wie groß ist der Inhalt, die Oberfläche und der Neigungswinkel einer schiefen Walze, wenn
    a) der Umfang des kleinsten Achsenschnitts = 68 cm, der Inhalt des größten = 273 cm^2 und der kleinste Achsenschnitt $^1/_3$ des größten ist?
    b) der Inhalt des größten Achsenschnitts = 144 cm^2 [375 cm^2], sein Umfang = 52 cm [80 cm], der Inhalt des kleinsten = 108 cm^2 [180 cm^2] ist?
    c) die Achse = 245 cm, der Inhalt des größten Achsenschnitts = 2940 cm^2, der Inhalt des kleinsten halb so groß ist?
    d) der Umfang eines Achsenschnitts = 82 cm, die Achse um 1 cm länger als die Höhe und der Inhalt des größten Achsenschnitts um 16 cm^2 größer als der des kleinsten ist?
    e) der größte Achsenschnitt den Umfang 210 cm und die Diagonale 75 cm hat und die Höhe der Walze = 36 cm ist?
    f) der größte Achsenschnitt 672 cm^2 Inhalt und 124 cm Umfang hat und der kleinste Achsenschnitt $^4/_5$ des größten ist?

---

§ 13. Die Pyramide.

1. Eine gerade Pyramide hat als Grundfläche ein gleichseitiges Dreieck, jede Seitenfläche ist $^2/_3$ der Grundfläche. Wie groß ist der Inhalt der Pyramide?
2. Von einer geraden dreiseitigen Pyramide ist die Oberfläche bekannt, und jede Seitenfläche ist m mal so groß als die Grundfläche. Wie groß ist der Inhalt?
3. Von einer rechtwinkligen dreiseitigen Ecke sind die Kanten 40, 25, 35 cm [6, 8, 15 cm] abgeschnitten. Wie ist die Ebene durch die Endpunkte gegen die Kanten geneigt? Welche Winkel sind in ihr vorhanden?
4. Außerhalb der Ebene eines Dreiecks mit den Seiten 20, 34, 42 cm ist ein Punkt zu suchen, der von den Seiten des Dreiecks die gleiche Entfernung 25 cm hat, und sein Abstand von den Ecken des Dreiecks ist zu ermitteln.
5. Bei einer dreiseitigen geraden Pyramide ist die Grundkante a und der Radius der umbeschriebenen Kugel ρ gegeben. Wie groß ist der Inhalt der Pyramide?
6. Die Grundfläche einer dreiseitigen Pyramide ist ein gleichschenkliges Dreieck mit dem Schenkel 17 cm und der Basis 16 cm. Die Seitenkante ist 81,6 cm. Wie groß ist der Radius der ein- und umbeschriebenen Kugel?
7. Von 2 Gegenecken eines Würfels sind gerade Pyramiden so abgeschnitten, daß ihre Grundflächen die einbeschriebene Kugel des Würfels tangieren. Das Volumen und die Oberfläche des Restkörpers sind zu berechnen.
8. Eine gerade Pyramide hat als Grundfläche ein Dreieck mit den Seiten 32, 50, 78 cm. Der Radius ihrer umbeschriebenen Kugel ist = 97 cm. Gesucht wird der Inhalt und die Oberfläche.
9. Im Mittelpunkt eines Rechtecks mit den Seiten 48 und 14 cm ist ein Lot = 60 cm errichtet. Wie lang sind die Geraden vom oberen Ende des Lotes nach den Ecken. Wie sind dieselben untereinander und gegen die Ebene geneigt?
10. Der Umfang der rechteckigen Grundfläche einer geraden Pyramide ist 178 [316] cm. Die eine Seitenfläche hat den Umfang 153 [320] cm, die andere 130 [226] cm. Wie groß ist Inhalt und Oberfläche der Pyramide.
11. Eine gerade Pyramide hat ein Quadrat als Grundfläche, das m mal so groß ist als eine Seitenfläche. Wie groß sind der Inhalt und die Oberfläche?
12. In einer Pyramide, deren Grundfläche ein Rechteck ist, verhalten sich zwei aufeinanderfolgende Seitenkanten wie 12 : 5. Die Höhe ist $^3/_8$ der Diagonale der Grundfläche, der Inhalt 49 920 cm³.

13. Eine Pyramide hat als Grundfläche ein Rechteck mit den Seiten 32 cm [66 cm] und 24 cm [112 cm] und die gleichen Seitenkanten von 29 cm [97] cm. Wie groß sind das Volumen und die Winkel der Seitenflächen gegen die Basis?
14. Die Grundfläche einer geraden Pyramide ist ein Rechteck mit den Seiten 64 cm und 252 cm und die Seitenkante ist 194 cm [32 cm, 126 cm, 97 cm]. Parallel zur Grundfläche wird ein Schnitt gelegt, der am unteren Ende einer Seitenkante 48,5 cm abschneidet. Wie groß ist das Volumen des Pyramidenstumpfes?
15. Die Mitte einer Würfelkante wird mit den Mitten der 4 sich mit ihr kreuzenden Würfelkanten und diese unter sich verbunden. Welche Winkel und Flächen schließen die Kanten ein?
16. Über einem regulären Sechseck sind nach entgegengesetzten Seiten 2 gerade Pyramiden errichtet, deren Höhen gleich der Seite des Sechsecks sind? Wie groß ist das Volumen der Doppelpyramide?

---

17. Der Inhalt und die Oberfläche eines geraden Pyramidenstumpfes mit rechteckigen Endflächen zu berechnen, wenn
    a) die unteren Grundkanten = 30 und 31,5 cm, die oberen = 20 und 21 cm, die Seitenkante = 12,5 cm sind.
    b) die unteren Grundkanten = 35 und 120 cm, die Seitenkante = 130 cm und die der Ergänzungspyramide = 32,5 cm sind.
    c) der Umfang der unteren Grundfläche = 54 cm ist, die Grundflächen sich wie 9 : 4 verhalten und die Höhe = 18 cm, das Volumen = 2280 cm^3 sind.
18. Ein gerader Pyramidenstumpf hat als Grundflächen gleichseitige Dreiecke, deren Seiten sich wie m : n verhalten. Die Seitenkante ist = s und gleich der Mittellinie der Seitenflächen. Wie groß ist der Inhalt des Stumpfes?
19. Wieviel wiegt ein gerader Pyramidenstumpf aus Holz (σ = 0,7), wenn er als Grundfläche ein Rechteck mit den Seiten 9,8 und 36,6 cm hat, die Seiten des oberen Rechtecks = 7 und 24 cm, die Seitenkante = 13 cm sind?
20. Wie groß ist das spezifische Gewicht eines geraden Pyramidenstumpfes, wenn die untere Grundfläche ein Rechteck mit dem Umfange u = 43,4 cm und dem Inhalt i = 82,32 cm^2, die Seiten des oberen Rechtecks = 3,5 und 12 cm und die Seitenkante = 6,5 cm sind, und wenn er bis zur Hälfte seiner Höhe im Wasser einsinkt?

---

§ 14. Der Kegel.

1. Ein Kreisausschnitt vom Radius = 25 cm und Centriwinkel = 100,8° wird zu einem Kegelmantel zusammengerollt. Welchen Inhalt hat der Kegel?
2. Aus einem Kreisausschnitt mit dem Radius = 25 cm und dem Centriwinkel 216° wird ein kegelförmiges Gefäß hergestellt. Wie-

viel vermag dasselbe zu fassen? Bis zu welcher Höhe wird es von 1,988 l Wasser gefüllt? [Beim Hineinwerfen einer Metallkugel stieg das Wasser um 3 cm. Wie groß war die Kugel?]

3. Wie groß ist der Inhalt eines geraden Kegels, wenn seine Höhe $= 40$ cm, die Oberfläche $= 450\ \pi$ cm^2 ist?
4. Der Inhalt eines Kegels, dessen Mantel $2^3/_5$ mal so groß ist als seine Grundfläche, beträgt $100\ \pi$ cm^3. Wie groß ist seine Höhe, sein Radius, seine Seite und seine Oberfläche?
5. Ein gerader Kegel, dessen Radius $= 25$ cm ist und dessen Seitenlinie die Höhe um 5 cm übertrifft, hat ebensoviel Gesamtoberfläche wie eine gerade Walze, deren Achsenschnitt ein Rechteck mit dem Umfange 208 cm ist. Gesucht ist das Inhaltsverhältnis der Körper.
6. Ein gerader Kegel, dessen Seitenlinie $= 53$ cm ist und dessen Höhe den Radius um 17 cm übertrifft, hat ebensoviel Gesamtoberfläche als eine gerade Walze, deren Radius zur Höhe sich wie $1 : 13$ verhält. Wie verhalten sich die Inhalte der Körper?
7. Die Seitenkante eines geraden Kegels ist um 2 cm größer als die Höhe und der Umfang des Achsenschnitts $= 162$ cm. Der Radius der eingeschriebenen Walze verhält sich zu ihrer Höhe wie $16 : 21$. In welchem Verhältnis wird der Kegelinhalt und die Kegeloberfläche durch die Deckfläche geteilt?
8. Durch einen geraden Kegel mit dem Radius $= 16$ cm und der Seitenkante $= 65$ cm ist ein Schnitt parallel der Grundfläche gelegt, so daß sich der Mantel des Kegels zu dem des abgeschnittenen Kegels wie $25 : 4$ verhält. Wie groß ist der Inhalt des Kegelstumpfes?
9. In welcher Entfernung von der Spitze muß man einen gegebenen geraden Kegel [$r = 15$ cm und $h = 36$ cm] parallel zur Grundfläche schneiden, wenn
   a) der abgeschnittene Kegel $^8/_{27}$ des ganzen Kegels sein soll?
   b) der Stumpf zum abgeschnittenen Kegel sich wie $m : n$ verhält?
   c) der Stumpf um a^3 cm^3 größer ist als der abgeschnittene Kegel?
   d) der Mantel des Stumpfes um a^2 cm^2 größer ist als der des abgeschnittenen Kegels?
10. Wie groß ist der Inhalt eines Kegels, dessen umbeschriebene Kugel den Radius $\rho = 3$ cm hat und dessen Höhe $2^2/_3$ mal so groß ist als dieser Radius?
11. In eine gegebene Kugel ist ein Kegel einbeschrieben, dessen Mantel dreimal so groß ist als sein Grundkreis. Wie verhalten sich Kegel und Kugelinhalt?
12 Über einem gegebenen Kreise [Radius $= 5$ cm] einen Kegel zu errichten,
   a) der 2 mal so groß ist als seine unbeschriebene Kugel.
   b) dessen Inhalt sich zu dem seiner einbeschriebenen Kugel wie $81 : 40$ verhält.
   c) dessen Mantel $= \frac{1}{m}$ der Oberfläche der einbeschriebenen Kugel ist.

13. Ein Holzkegel mit dem Radius 8,5 cm und der Höhe 20 cm soll durch eine angehängte Messingkugel ganz unter Wasser gezogen werden. Wie groß ist der Radius der Kugel, wenn das spezifische Gewicht des Holzes 0,8, das des Messings 8,3 ist?
14. Ein Kegel aus Eisen [$\sigma = 7,5$] mit dem Radius $r = 5$ cm und der Höhe $h = 20$ cm schwimmt in Quecksilber a) mit der Spitze nach unten, b) mit der Grundfläche nach unten. Wie tief taucht er ein?
15. Eine Würfelfläche wird bis zum Schnitt mit der dem Würfel umbeschriebenen Kugel erweitert. Wie groß ist der Mantel des Kegels, der diesen Schnittkreis zum Berührungskreise hat?
16. Die Fläche eines regulären Tetraeders wird bis zur umbeschriebenen Kugel erweitert und an die Kugel ein Berührungskegel gelegt, so daß die Seitenlinien Tangenten der Kugel sind, ferner ein Kegel, der den Mittelpunkt der Kugel zur Spitze und den Berührungskreis zum Grundkreise hat. In welchem Verhältnis teilt die Kugeloberfläche das Volumen des Doppelkegels?

---

17. Wie groß sind die Radien eines abgestumpften geraden Kegels, wenn der Inhalt $= 39\,\pi$ cm^3, der Mantel $= 49\,\pi$ cm^2 und die Seite gleich der Summe der beiden Radien ist?
18. Wie groß ist die Mantelfläche eines geraden abgestumpften Kegels, wenn das Volumen $= 1671,3$ cm^3, die Höhe $= 12$ cm, die Fläche eines Achsenschnitts $= 156$ cm^2 ist?
19. Wie groß ist der Inhalt und die Oberfläche eines geraden Kegelstumpfes, wenn
    a) die Höhe $= 12$ cm, die Fläche des Achsenschnitts $= 180$ cm^2 sind und die Radien sich wie $1:2$ verhalten?
    b) der Achsenschnitt den Umfang $= 76$ cm hat, die Radien sich um 7 cm unterscheiden und der Mantel um $216\,\pi$ cm^2 größer ist als die Summe der Grundflächen?
    c) die Summe der Grundflächen gleich der Mantelfläche und die Höhe das geometrische Mittel aus den beiden Radien ist?
    d) die Mantelfläche $= 25\,\pi$ cm^2, die Höhe $= 4$ cm und der Unterschied der Kreisflächen $= 15\,\pi$ cm^2 sind?
20. In welchem Abstande von der Grundfläche wird ein Kegelstumpf, dessen Grundfläche $= 16$ cm^2, Deckfläche $= 4$ cm^2 und Höhe $= 20$ cm sind, durch eine der Grundfläche parallele Ebene geschnitten, wenn
    a) die Schnittfigur $= 9$ cm^2 sein soll?
    b) der eine Mantel zum anderen sich wie $m:n$ verhält? (3 : 1)
    c) die beiden Stumpfe sich wie $m:n$ verhalten? (3 : 1)
    d) der eine Mantel um a^2 cm^2 größer ist als der andere?
    e) der eine Stumpf um a^3 cm^3 größer ist als der andere?
21. Durch einen geraden Kegelstumpf, dessen Höhe $= 34$ cm und dessen Radien $= 4$ und 21 cm sind, soll ein Schnitt parallel der Grundfläche gelegt werden, der den Mantel so teilt, daß der obere Ab-

schnitt sich zum unteren wie 9 : 16 verhält. Welches ist das Verhältnis der beiden Teilkegelstumpfe?

22 In einen gegebenen Kegelstumpf [$r_1 = 12$, $r_2 = 7$, $h = 24$ cm] ist eine Walze einzubeschreiben, von der der Inhalt des Achsenschnitts [$m^2 = 264$ cm²] gegeben ist.

23. Wie groß ist der Umfang und der Inhalt eines Trapezes, das in einen Halbkreis so gelegt ist, daß die eine parallele Seite gleich dem Durchmesser = 26 cm, die andere = 24 cm und die Höhe = 5 cm ist?

24. Auf der Grundfläche einer Halbkugel ist ein gerader abgestumpfter Kegel errichtet, dessen Deckkreis auf die Kugelfläche fällt und dessen Radius halb so groß als der der Kugel ist. Wie teilt der Deckkreis das Volumen und die Oberfläche der Halbkugel?

25. Die Oberfläche und der Inhalt der umbeschriebenen Kugel eines geraden abgestumpften Kegels, dessen Radien $r_1 = 8$ cm und $r_2 = 5$ cm und dessen Seitenlinien $s = 9$ cm sind, ist zu berechnen.

26. Um wieviel unterscheiden sich die Inhalte eines geraden abgestumpften Kegels und seiner umbeschriebenen Kugel, wenn der Mantel = $169\,\pi$ cm² und der Unterschied der Radien des Kegels = 5 cm ist?

27. Mit welcher Kraft muß ein Eimer, der bis zum Rande mit Wasser gefüllt ist, gehalten werden, wenn er

   a) den oberen Durchmesser $2\,r_2 = 90$ cm, den unteren $2\,r_1 = 60$ cm und die Seite $s = 113$ cm hat, und wenn das Holz ($\sigma = 0{,}6$) überall die Dicke $d = 2{,}5$ cm hat?

   b) die Seite $s = 22{,}1$ cm, den oberen Umfang $u_2 = 92{,}4$ cm und den unteren $u_1 = 79{,}2$ cm hat, und wenn das Holz ($\sigma = 0{,}8$) überall die Dicke $d = 2$ cm hat? ($\pi = {}^{22}/_{7}$)

28. Wieviel Eimer Wasser [innerer oberer Umfang des Eimers $u_2 = 88$ cm, unterer $u_1 = 66$ cm und Seitenkante $s = 24$ cm] kann man in ein Faß füllen, das den inneren oberen Umfang $U_2 = 2{,}42$ m, den unteren $U_1 = 1{,}76$ m und die Seitenkante $S = 70$ cm hat?

---

29. Wie groß ist der Inhalt eines schiefen Kegels wenn

   a) die längste Seite = 32 cm, die kürzeste = 27 cm, der Winkel zwischen ihnen = 42,5° ist?

   b) die Fläche des kleinsten Achsenschnitts und die größte und kleinste Seitenlinie gegeben sind?

   c) der Inhalt des größten Achsenschnitts = 841 cm², des kleinsten = 840 cm² ist?

   d) der größte Achsenschnitt ein rechtwinkliges Dreieck mit dem Inhalt 2500 cm² und der kleinste gleich der Hälfte des größten ist?

   e) der größte Achsenschnitt = 450 cm², der kleinste = 270 cm², der Winkel an der Spitze des größten Achsenschnitts = 45° sind?

   f) die Achse 0,97 cm und der Winkel zwischen Achse und der längsten Seitenkante = 31,83° und der Winkel zwischen Achse und kürzester Seite = 42,28° sind?

30. In ein trichterförmiges Gefäß mit der Seitenkante $s = 37$ cm und der Öffnung $2r = 24$ cm werden 2,2 l Wasser gegossen. Wie hoch steht dasselbe? Wieviel muß hinzugegossen werden, damit es noch um 3 cm steigt?

31. Wie groß ist der Inhalt eines schiefen abgestumpften Kegels, wenn die Summe der längsten und kürzesten Seitenkante $= s$, der Winkel zwischen beiden Seitenkanten $= \alpha$, die Höhe $= h$ und der Radius des kleinsten Kreises $= r_2$ sind?

---

§ 15. Die Kugel.

1. Wie groß ist der Radius einer Kugel, welche ebenso groß ist als ein Kegelstumpf mit den Radien $r_1 = 8$ cm und $r_2 = 5$ cm und der Höhe $h = 10$ cm?
2. Wie groß ist der innere Durchmesser des Laufes eines Mörsers, dessen kugelförmiges Vollgeschoß 3 kg wiegt?
3. Wieviel schneidet eine Ebene von einer Kugel ab, wenn sie die Oberfläche im Verhältnis 1 : 2 teilt?
4. Wie groß ist die Höhe einer Kugelkappe, die n mal so groß ist als ihre Grundfläche?
5. Eine Kugel mit dem Radius $\rho = 10$ wird von einer Ebene so geschnitten, daß die Oberflächenteile sich wie 1 : 4 verhalten. Wie verhalten sich die Inhalte der zugehörigen Kugelabschnitte?
6. Ein Kugelabschnitt von der Höhe $h = 9$ cm hat $1134\,\pi$ cm³ Inhalt. Wie groß ist die zugehörige Kugelkappe?
7. Wie groß ist der Inhalt eines Kugelabschnitts, wenn
   a) der Grundflächenradius $= 24$ cm ist und die Höhe sich zum Kugeldurchmesser verhält wie 9 : 25?
   b) seine Kappe $\frac{1}{m}$ der Kugeloberfläche ist?
   c) seine Gesamtoberfläche $= O$, der Kugelradius $= \rho$ gegeben sind?
   d) der ihm einbeschriebene gerade Kegel gleich dem 3 ten Teil des Abschnitts ist? [Wie groß ist das Verhältnis der Mäntel beider Körper?]
   e) sein Inhalt ist $1^2/_3$ mal so groß ist als der des über seiner Grundfläche errichteten mit seiner Spitze bis zur Kugelkappe reichenden geraden Kegels? [In welchem Verhältnis steht die Kugelkappe zum Kegelmantel?]
   f) seine Gesamtoberfläche $1^3/_4$ mal so groß ist als ein größter Kugelkreis. [Wie groß ist der zugehörige Centriwinkel?]
8. Wie groß ist die Wölbung der Erde bei einer Strecke von 1 km Länge? [$r = 6370{,}3$ km].
9. Der Inhalt eines Kugelausschnittes ist $= 3750$ cm³, die Höhe seiner Kappe $= 10{,}65$ cm. Wie groß ist der Inhalt der zugehörigen Kugel?

10. Wie groß ist ein Kugelausschnitt, wenn

a) seine Oberfläche $= \frac{1}{m}$ der Kugeloberfläche ist?

b) sein Kegelmantel $= \frac{1}{m}$ der Kugelkappe ist?

11. Wie groß ist der Inhalt und die Oberfläche eines Kugelausschnittes, dessen Abschnitt sich zu seinem Kegel wie 13 : 12 verhält, wenn der Radius der Kugel = 10 cm ist?

12. Der Inhalt eines Kugelausschnitts ist = 2500 cm^3, der Kugelradius = 12,4 cm. Wie groß ist der Inhalt des Kugelabschnitts und seiner Kappe?

13. Eine hölzerne Kugel [$\rho = 7{,}5$ cm] sinkt in Wasser 8 cm ein. Wie groß ist ihr spezifisches Gewicht?

14. Eine kupferne Hohlkugel [$\sigma = 8{,}8$] von äußerem Durchmesser $\rho = 20$ cm sinkt gerade bis zur Hälfte in Wasser ein. Wie dick ist die Wandung?

15. Welches Gewicht hat eine Hohlkugel aus Kupfer [$\sigma = 8{,}8$] mit der Wanddicke $d = 2$ mm und dem äußeren Radius $\rho = 25$ cm?

16. Aus einer kupfernen Kugel von 4 cm Radius soll eine kupferne Hohlkugel von dem äußeren Radius $\rho = 10$ cm gebildet werden. Wie dick ist die Wandung?

17. Eine schwimmende Kugel von 25 mm Radius taucht 18 mm tief ins Wasser. Wie groß ist ihr spezifisches Gewicht?

18. Mit welchem Gewicht muß eine halbkugelförmige Glasschale [$\sigma = 2{,}5$] beschwert werden, damit sie bis zum Rande im Wasser einsinkt, wenn der äußere Radius $\rho = 10$ cm und ihr Gewicht $g = 310$ gr ist?

19. Wieviel wiegt eine kugelförmige Schale, wenn ihre Dicke $= d$ mm, ihre Tiefe $= h$ und der innere Randkreisradius $= \rho$ ist?

§ 16. Das Tetraeder, das Oktaeder und Ikosaeder.

1. Ein reguläres Tetraeder aus der Höhe h zu berechnen.

2. Das Lot vom Fußpunkt der Tetraederhöhe auf eine Kante ist $= l$. Wie groß ist das Volumen des Tetraeders?

3. Wie groß ist das Volumen eines Tetraeders, wenn

a) die Grundkanten = 36, 45, 54 cm, die Seitenkante = 48 cm sind?

b) die Oberfläche des umbeschriebenen Kegels $O = 6\pi(\sqrt{3} - 1)$ cm^2 ist?

c) die Differenz der Volumina des ein- und umbeschriebenen Kegels gegeben ist?

d) die Gerade gegeben ist, die die Mittelpunkte von 2 sich kreuzenden Geraden verbindet?

e) das Tetraeder regulär ist und der Inhalt des Schnittes durch eine Kante senkrecht zu der sie nicht schneidenden Kante gegeben ist? [der Inhalt eines Schnittes durch den Mittelpunkt des Abstandes von zwei sich nicht schneidenden Kanten gegeben ist?]

4. Einem Würfel ist ein reguläres Tetraeder mit dem Volumen V einbeschrieben. Wie groß ist der Inhalt des Würfels?
5. Wie groß ist das Verhältnis der Inhalte bezw. der Oberflächen eines regulären Tetraeders und
   a) eines Würfels, wenn beide Körper gleich große Oberflächen haben?
   b) eines zweiten Tetraeders, dessen Ecken in die Mittelpunkte der Flächen des ersten fallen?
6. Wie groß sind die Kanten eines regulären Tetraeders, das aus 1,250 kg Kupfer gegossen werden soll. [$\sigma = 8,9$]?
7. Wie groß sind die Kanten, wenn aus 1,250 kg Kupfer ein Hohltetraeder mit der Wandstärke 5 mm gegossen werden soll? [$\sigma = 8,9$]?

---

8. Welche ebenen Schnitte kann man in einem regulären Oktaeder durch folgende Schnitte erhalten?
   a) Achsenschnitt; b) Schnitt parallel der Achse [3 Möglichkeiten]; c) Schnitt schief gegen die Achse (4 Möglichkeiten).
9. Die orthogonalen Projektionen eines regulären Oktaeders zu suchen.
   a) Die Achsen stehen senkrecht,
   b) die eine Kante ist der Projektionsebene parallel,
   c) die eine Diagonale des Mittelschnitts ist parallel der Projektionsebene.
10. Wie groß ist das Volumen und die Oberfläche eines regulären Oktaeders, wenn
    a) der Achsenschnitt bekannt ist, welcher zwei gegenüberliegende Seiten halbiert?
    b) der Schnitt durch das Zentrum parallel der Seitenfläche gegeben ist?
11. Aus der Oberfläche eines regulären Oktaeders das Volumen zu berechnen.
12. Wie groß sind das Inhalts- und das Kantenverhältnis eines regulären Oktaeders und eines Würfels, wenn sie dieselbe Oberfläche haben?
13. Wie groß sind das Kanten-, Oberflächen- und Inhaltsverhältnis eines regulären Oktaeders und eines Würfels, wenn des letzteren Ecken auf die Oktaederkanten fallen?
14. In welchem Verhältnis stehen die Inhalte eines regulären Oktaeders und einer einbeschriebenen Walze, wenn
    a) die Grundkreise der letzteren durch je 4 Mittelpunkte von Oktaederflächen gehen? [Wie groß ist der Inhalt des Okteaders, wenn die Oberfläche der Walze gegeben ist?]
    b) die Grundkreise der letzteren die einbeschriebenen Kreise von 2 parallelen Oktaederflächen sind?
    c) ihre Achse mit der des Oktaeders zusammenfällt und ihr Achsenschnitt ein Quadrat ist?
15. Aus einem regulären Oktaeder von Blei ($\sigma = 11,38$) ist eine Walze ausgebohrt, die senkrecht zu einer Oktaederfläche steht und deren

Grundkreis der Oktaederfläche einbeschrieben ist. Wie viel wiegt das Reststück, wenn die Oktaederkante 12 cm beträgt?

16. Die Oberfläche eines regelmäßigen Tetraeders ist um $2\sqrt{3}$ cm² größer als die eines Oktaeders. Die Tetraederkante verhält sich zur Oktaederkante wie 3 : 2. Wie groß sind die Inhalte der Körper?

17. Von einer Ecke eines Oktaeders sind nach den Mittelpunkten der von der gegenüberliegenden Ecke auslaufenden Kanten Geraden gezogen. In welchem Verhältnis stehen die Inhalte des Oktaeders und derjenigen Pyramide, die diese 4 Geraden als Seitenkanten hat.

18. In ein Oktaeder einen senkrechten Kegel zu legen, dessen Radius sich zu seiner Seitenfläche wie 7 : 13 verhält

19. Um ein Oktaeder ist eine Kugel gelegt, eine Oktaederfläche sowie ihre Parallele bis zum Schnitt mit der Kugel erweitert und die beiden Schnittkreise mit einander verbunden. In welchem Verhältnis stehen die Inhalte der Kugel und der entstehenden Walze?

20. Die Kante eines regulären Ikosaeders ist gegeben. Wie verhalten sich die Abschnitte, die durch 2 parallele Fünfecke entstehen?

§ 17. Zusammensetzungen von Körpern.

1. In einen Würfel wird eine Walze so einbeschrieben, daß ihre Achse in eine Raumdiagonale des Würfels fällt.
   a) Welches ist die größte Walze?
   b) Wie groß ist der Radius und die Höhe der Walze, wenn
      α) ihr Achsenschnitt $\frac{1}{m}$ einer Würfelfläche ist?
      β) der Mantel der Walze sich zur Oberfläche der umbeschriebenen Kugel wie $1 : 8.\sqrt{2}$ verhält?

2. In einen Würfel ist eine Kugel gelegt, in jede der Ecken des Würfels wieder eine Kugel, die die erste Kugel und die Würfelfläche berührt, in die neuen Ecken wieder eine Kugel usw fort. Wie groß ist die Σ der Inhalte aller Kugeln?

3. Von einer Würfelecke sind 3 Gerade gezogen, welche von den in der gegenüberliegenden Ecke zusammenstoßenden Flächendiagonalen $\frac{1}{m}$ abschneiden. Wie groß ist die durch die Geraden und die Verbindungslinien jener Schnittpunkte bestimmte Pyramide?

4. Von einer Würfelecke werden nach den Mitten der 3 Seiten, die in der gegenüberliegenden Ecke zusammenstoßen, Gerade gezogen und durch je 2 dieser Linien und durch die 3 Mittelpunkte Ebenen gelegt. Wie groß ist das von diesen 4 Ebenen eingeschlossene Tetraeder?

5. In einen Würfel ist ein reguläres Oktaeder gelegt, in dieses ein Würfel usw. fort. Wie groß ist die Σ der Inhalte aller Würfel und Oktaeder?

6. In einen Würfel ist ein Doppelkegel gelegt, dessen Achse mit der Würfelachse zusammenfällt und dessen Mantel die Würfelflächen

berührt. Wie groß ist der Inhalt und die Oberfläche des Doppelkegels?

7. Um einen Würfel ist ein Doppelkegel gelegt, so daß die Achse des Kegels Diagonalachse des Würfels wird. Wie groß ist der Inhalt und die Oberfläche des Doppelkegels?

8. Einer Walze ist ein Rechtecker einbeschrieben, dessen Mantel $\frac{1}{m}$ des Walzenmantels ist. Wie groß ist der Inhalt des Rechteckers?

9. Ein Bassin, dessen Seitenwand eine Walze mit dem Durchmesser 4,8 m [5 m] und der Höhe 2,5 m [3 m] ist, hat als Boden einen Kegelmantel, dessen Spitze 0,30 m [0,50 m] unter der Walzengrundfläche liegt. Wie lange haben 2 [4] gleich große Pumpen gleichzeitig zu arbeiten, um es zu füllen, wenn jedes Rohr 8 cm [10 cm] inneren Durchmesser hat und jeder Kolben in der Minute 32 [40] mal 36 [40] cm gehoben wird?

10. Wie groß ist das Gewicht eines Nicholson'schen Aräometers aus Messingblech von einer Stärke = 0,5 mm? Der Hohlkörper besteht aus einer Walze von 10 cm Länge und 3 cm Durchmesser und 2 gleichseitigen Kegeln. Auf dem oberen Kegel steht eine 5 cm lange, 1 mm dicke Messingstange, die eine kreisförmige Messingplatte von 4 cm Durchmesser und 1 mm Stärke trägt. An dem unteren Kegel hängt ein mit Blei ausgegossener Kegel mit dem Winkel 60^0 und der Seite 4 cm an einem 1 mm dicken halbkreisförmigen Draht?

11. In ein walzenförmiges Gefäß von 40 cm innerem Durchmesser ist bis zur Höhe 9,4 cm Wasser gegossen. Als man einen geraden Metallkegel mit dem Grundradius 16 cm hineinsetzte, stieg das Wasser um 5,6 cm. Welcher Teil der Mantelfläche war von Wasser bedeckt?

12. Um eine gerade Walze, deren Radius sich zur Höhe wie 1 : 4 verhält, ist ein gerader Kegel gelegt, dessen Grundradius zur Höhe im Verhältnis 3 : 4 steht. Die Oberflächen und die Volumen der Stücke zu bestimmen, die durch die Walze abgegrenzt werden.

13. Ein Glasgefäß von Kugelform mit einem cylindrischen Halse hat den inneren Durchmesser 2r. Der innere Radius des Cylinders ist ρ, seine Länge h. Wie viel Quecksilber kann man einfüllen?

14. Eine Senkwage, bestehend aus einem cylindrischen Glasrohr und angesetzter Kugel, ist g gr schwer, hat den Cylinderradius ρ und sinkt in Wasser bis zu h cm der Cylinderlänge ein. Wie groß ist der Kugelradius?

15. In ein thermometerähnliches Gefäß mit cylindrischem Halse ist Quecksilber [irgend eine Flüssigkeit] enthalten. Bei 0^0 füllt dasselbe gerade die Kugel. Der Durchmesser der Kugel ist 18 mm [26 mm] und der innere Durchmesser des Cylinders $^1/_2$ mm [$^2/_3$ mm]. Wie hoch ist es bei 25^0 gestiegen, wenn der kubische Ausdehnungskoeffizient von Quecksilber 0,00018 ist? [Wie groß ist der kubische Ausdehnungskoeffizient, wenn bei 25^0 die Flüssigkeit 20 mm hoch stand?]

16. Einem geraden Kegel [$r = 10$, $h = 24$ cm] ist eine koaxiale Walze einbeschrieben, deren
   a) Oberfläche $= \frac{1}{m}$ der Oberfläche des Kegels ist.
   b) Mantel $= \frac{1}{m}$ [8 : 39] des Kegelmantels ist. Wie groß ist der Inhalt der Walze?
17. Einem geraden Kegel [$r = 11$, $h = 60$] ist ein koaxialer Doppelkegel einbeschrieben, dessen Inhalt $= \frac{1}{m}$ des großen Kegels ist. Wie groß ist der Inhalt des Doppelkegels?
18. Über der Grundfläche eines geraden Kegels ($r = 75$ cm, $h = 100$ cm) ist eine Halbkugel konstruiert. Welches Stück des Kegels ragt aus der Kugel heraus?
19. In ein 4seitiges Tetraeder (Grundkante = 10 cm, Höhe = 15 cm) ist ein Rechtecker so zu legen, daß die Ecken seiner Deckfläche auf den Seitenkanten des Tetraeders liegen und jede seiner Seitenflächen um 20 cm^2 größer ist als eine Deckfläche.
20. In ein regelmäßiges Tetraeder ist das größte rechtwinklige dreiseitige Prisma zu legen, von dem 3 Ecken auf den Tetraederseitenkanten liegen.
21. Man schneide von den Ecken eines regulären Tetraeders solche regulären Tetraeder ab, daß die Schnittflächen die einbeschriebene Kugel des ursprünglichen Tetraeders berühren. Wie groß ist Inhalt und Oberfläche des Restkörpers?
22. In ein regelmäßiges Oktaeder ist der größte Rechtecker hineinzulegen, der seine Ecken auf den 8 Oktaederkanten hat.
23. Innerhalb eines regulären Oktaeders liegt ein abgestumpfter gerader Kegel, dessen unterer Kreis 4 in eine Ecke zusammenlaufende Oktaederflächen in ihren Schwerpunkten berührt, während der obere Kreis durch die Mittelpunkte der Schwerlinien der 4 anderen Oktaederflächen geht. Wie groß ist der Inhalt und der Mantel des Kegels?
24. Von einer Ecke eines regulären Oktaeders werden nach den von der gegenüberliegenden Ecke ausgehenden Kanten Geraden gezogen, die von der Ecke an gerechnet die Kanten im Verhältnis 1 : 3 schneiden. Wie groß ist der Inhalt der umbeschriebenen Kugel der entstandenen Pyramide?
25. Wie groß ist der Inhalt der einer Kugel einbeschriebenen Walze, wenn der Kugeldurchmesser 25 cm ist und
   a) die Walzenoberfläche zur Kugeloberfläche sich wie 77 : 250 verhält?
   b) die Kugeloberfläche m [2] mal so groß als die Walzenoberfläche ist?
   c) der Achsenschnitt der Walze den Umfang u hat? [Durchmesser = 13 cm, $u = 34$ cm].

d) die Walzenhöhe zum Walzendurchmesser sich wie 24 : 7 verhält?
e) die Summe der beiden entstehenden Kugelhauben m [2] mal so groß ist als die übrigbleibende Kugelzone?

26. Wie groß ist der Inhalt einer in eine Halbkugel gelegten Walze, wenn
a) der Kugelradius 13 cm [17 cm] und die Oberfläche der Walze $408\,\pi$ cm² [$368\,\pi$ cm²] ist?
b) der Kugelradius 41 cm und der Umfang des Achsenschnitts der Walze 116 cm ist?
c) der Kugelradius $7.\sqrt{7}$ cm ist, und auf die erste Walze noch eine zweite gestellt ist, die halb so groß als die erste ist?

27. In einen Kugelabschnitt ist eine größte Walze zu legen.

28. 3 gleich große gegebene Kugeln berühren sich gegenseitig und werden wieder von einer Walze berührt.
a) Wie groß ist der Inhalt der Walze?
b) Wie groß ist der Inhalt eines Tetraeders, das die Kugeln mit der Grundfläche und je zwei Kugeln mit einer Seitenfläche berührt?

29. Wie groß ist eine Pyramide, die in eine Kugel mit dem Radius 17 cm gelegt ist, deren rechteckige Grundfläche 8 cm von dem Kugelmittelpunkt entfernt ist und Seiten hat, die sich wie 3 : 4 verhalten?

30. Einer gegebenen Kugel ist eine gerade Walze, dieser ein quadratisches Oktaeder einbeschrieben, dessen Achsen sich wie m : n verhalten. Wie groß ist der Radius der dem Oktaeder einbeschriebenen Kugel?

31. Senkrecht über dem Mittelpunkt einer auf einer Ebene liegenden undurchsichtigen Kugel [$\rho = 15$ cm] befindet sich ein Lichtpunkt.
a) Wie groß ist die beleuchtete Kugelkappe, wenn der auf der Ebene durch die Kugel erzeugte Schattenkreis gleich der Kugeloberfläche ist?
b) Wie groß ist der Schattenkreis, wenn der Lichtpunkt 40 cm über der Ebene liegt?

32. Über der Grundfläche einer Halbkugel [$\rho = 17$ cm] wird ein gerader Kegel errichtet. Wie groß ist der innerhalb der Kugel liegende Kegelstumpf, wenn
a) die Schnittebene beider Körper h = 15 cm über der Grundfläche liegt?
b) der Mantel des Kegels die Kugelhaube halbiert? [den fünften Teil der Oberfläche herausschneidet]

33. Wie verhält sich der Inhalt eines Kugelabschnitts zu dem eines geraden Kegels, der ihm einbeschrieben ist und dessen Mantel sich zur Kugelkappe wie 1 : 2 verhält?

34. In eine Kugel [$\rho = 25$ cm] ist ein Kegel einbeschrieben. In welchem Verhältnis steht Kegelinhalt zum Kugelinhalt, wenn
a) die Kegelhöhe um 8 cm größer ist als sein Grundradius?
b) der Kegel der größte sein soll?
c) die Kugel durch die Mantelfläche des Kegels halbiert wird?

35. Wie groß ist der Mantel eines an eine Kugel gelegten Tangentenkegels, wenn

a) die Spitze um 25 cm vom Kugelcentrum entfernt liegt und der Grundradius des Kegels 12 cm ist?
b) der Kugelradius 29 cm ist und der Grundkreis des Kegels 20 cm Abstand vom Kugelmittelpunkt hat?
c) der Grundradius des Kegels 12 cm und die Grundfläche 9 cm vom Kugelmittelpunkt entfernt ist?
d) der Berührungskreis die Kugeloberfläche im Verhältnis $m : n$ [1 : 2; 15 : 16] teilt?
e) der Mantel ebenso groß sein soll wie der des von dem Kugelmittelpunkt nach dem Berührungskreis gelegten Kegels?

36. An zwei Kugeln, deren Zentrale c und deren Radien r_1 und r_2 sind, ist der gemeinschaftliche Tangentenkegel gelegt. Wie groß ist der Mantel des Kegelstumpfes zwischen den Berührungskreisen?
37. 3 gleich große Kugeln mit dem Radius ρ_1 berühren sich gegenseitig und werden von dem Grundkreise und Mantel eines geraden Kegels berührt. Wie groß ist dieser Mantel, wenn
a) der Grundkreis gegeben ist?
b) auf die drei Kugeln eine vierte mit dem Radius ρ_1 gelegt ist und ebenfalls von dem Kegelmantel berührt wird?
38. Die 3 Kugeln werden von dem Grundkreis, Deckkreis und dem Mantel eines abgestumpften Kegels berührt. Der Radius des Grundkreises sei r_1. Wie groß ist der Kegelmantel?
39. Wie groß ist der Inhalt eines einer Halbkugel [$\rho = 25$ cm] einbeschriebenen Kegelstumpfes, wenn
a) seine Seite $s = 30$ cm ist?
b) sein Mantel $1\,^2/_3$ mal so groß ist als der Unterschied seiner Grundkreise?
40. Wieviel wiegt eine bikonkave sphärische Linse aus Glas ($\sigma = 2{,}5$) mit den Krümmungsradien $r_1 = 30$ und $r_2 = 24$ cm, der Dicke in der Mitte $\delta_1 = 1$ cm und dem Umfange $u = {}^{220}/_7$ cm?
41. Wie viel wiegt eine bikonvexe sphärische Linse aus Glas ($\sigma = 2{,}5$), deren Krümmungsradien $r_1 = 17$ cm und $r_2 = 32{,}5$ cm und deren Umfang ${}^{352}/_7$ cm ist?
42. Wie groß ist der Inhalt eines Fasses, dessen Grundfläche den Umfang 3,08 m, dessen mittlerer Umfang 3,52 m und dessen Höhe 1,12 m sind, wenn die Dauben kreisförmig gebogen sind?
43. In welchem Verhältnisse stehen inhaltlich Kugelkappe und Kegel, die sich zu einem Kugelsektor ergänzen, wenn die Kugelkappe gleich dem Kegelmantel ist?
44. Zwei Kugeln mit den Radien ρ_1 und ρ_2 sollen sich so schneiden, daß das dem Schnittkreise einbeschriebene gleichseitige Dreieck für die eine Kugel die Fläche des einbeschriebenen regulären Tetraeders, für die andern die des einbeschriebenen regulären Oktaeders wird.
45. Die gleich großen Kugeln mit dem Radius ρ_1 und eine vierte mit dem Radius ρ_2 berühren einander. Wie groß ist der Radius der Kugel, welche sie alle vier umhüllt?

§ 18. Aufgaben über das spezifische Gewicht.

1. Wie groß sind die Seiten einer quadratischen Säule aus Gold (19,25) [Marmor (2,84)], wenn das Verhältnis der Seitenkante zur Grundkante 3 : 2 [15 : 4], das Gewicht 27 kg [5 Ctn] ist?
2. Wie groß ist die Last, mit der ein quadratischer Schornstein von $1^1/_2$ Ziegelstärke und $5^1/_2$ m Höhe auf der Bodenfläche ruht, wenn die innere Weite 39 cm beträgt, ein Ziegel 26 cm lang ist und das spezifische Gewicht 1,95 hat?
3. Welchen Auftrieb hat ein geschlossener mit Luft [$\sigma = 0{,}0013$] gefüllter eiserner Kasten [$\sigma = 7{,}8$] von der Gestalt einer quadratischen Säule mit der Wandstärke 4 cm, der Höhe 2,3 m und der Grundkante 1 m im Meerwasser ($\sigma = 1{,}03$)?
4. In der Mitte eines Brettes von Fichtenholz [$\sigma = 0{,}75$], das die Breite 26 cm, die Dicke 3 cm hat, ist ein Ziegelstein [$\sigma = 1{,}95$] mit den Dimensionen 26, 13, 6 cm befestigt. Wie lang muß das Brett sein, damit es mit dem Stein gerade noch vom Wasser getragen wird?
5. Wie lang muß man einen quadratischen Balken von Fichtenholz [$\sigma = 0{,}75$], dessen Dicke 35 cm beträgt, schneiden, damit er einen Marmorwürfel [$\sigma = 2{,}84$], dessen Kante 24 cm ist, im Wasser trägt?
6. Um einen Marmorwürfel [$\sigma = 2{,}84$], dessen Seite 1 m ist, über Wasser zu tragen, soll ein Floß aus 9 m langen Holzstämmen [$\sigma = 0{,}83$], die an dem einen Ende 40 cm, an dem anderen 30 cm Durchmesser haben, benutzt werden. Wieviel Stämme müssen wenigstens gebraucht werden?
7. Eine Holzwalze [$2r = 8{,}2$ cm, $h = 20$ cm] schwimmt horizontal so in Wasser, daß 5 cm des Durchmessers hervorragen. Wie groß ist das spezifische Gewicht des Holzes?
8. Kann ein walzenförmiges an beiden Enden geschlossenes Rohr aus Eisen [$\sigma = 7{,}6$] von der Wandstärke $^1/_2$ mm, der äußeren Länge 40,4 cm, dem äußeren Durchmesser 4,5 cm eine unten angehängte eiserne Vollkugel von dem Radius 2 cm tragen? Bis zu welcher Tiefe sinkt es gegebenen Falls ein?
9. Ein walzenförmiges Gefäß aus Glas [$\sigma = 2{,}6$] hat außen die Höhe 12 cm und den Durchmesser 8 cm bei einer Wandstärke von 2 mm. Wie groß kann der Durchmesser einer unten angehängten Bleikugel [$\sigma = 11{,}4$] sein, wenn das Gefäß noch schwimmen soll? Würde die Kugel auch getragen werden, wenn man sie in den Cylinder legte? Wie groß dürfte sie dann nur sein?
10. Eine gläserne Hohlkugel [$\sigma = 2{,}74$] hat den äußeren Radius 5,2 cm und die Wandstärke 1 mm. Wieviel wiegt sie leer? Wieviel mit Wasser gefüllt? Welchen Auftrieb hat sie im Wasser?
11. Wie tief sinkt ein Kugelsektor [$\sigma = 7{,}5$], dessen Öffnungswinkel 90^0 und dessen Radius 10 cm ist, in eine Flüssigkeit [$\sigma = 13{,}6$] ein,
    a) wenn die Spitze nach unten?
    b) wenn sie nach oben gerichtet ist?

§ 19. Maxima und Minima.

1. Welches ist der größte oder kleinste Wert von
   a) $f(x) = 3x - \sqrt{5 - 9x^2}$?
   b) $f(x) = \sin x + \sin 2x$
   c) $f(x) = 2 \sin x + 3 \cos x$.
2. In welcher Entfernung von einem Gegenstande muß eine Linse mit der Brennweite f aufgestellt werden, wenn das erzeugte Bild die kürzeste Entfernung vom Gegenstand haben soll?
3. Zwischen den Punkten P_1 und P_2 soll eine konvexe Linse so aufgestellt werden, daß sie das Bild von P_1 nach P_2 wirft. Welches ist die größte Brennweite, welche die Linse haben darf und wo ist sie aufzustellen?
4. Von einem festen Punkt der Hypotenuse aller zu ihr gehörenden rechtwinkligen Dreiecke fällt man auf die Katheten Lote. Wann entsteht das größte Rechteck, und wann ist sein Umfang am größten?
5. Welches gleichschenklige Dreieck, das einem gegebenen Quadrate umschrieben ist und mit seiner Basis auf einer Quadratseite steht, hat den kleinsten Inhalt und Umfang? [Ebenso von einem gleichschenkligen Dreieck, das einem gegebenen Kreise umbeschrieben ist.]
6. Die beiden Punkte C und B bewegen sich auf den Schenkeln eines Winkels α so, daß C B sich um den festen Punkt P innerhalb des Winkels dreht. Welches ist das kleinste abgeschnittene Dreieck?
7. Wieviel Wasser vermag das größte Gefäß in Form einer quadratischen Säule zu fassen, wenn es 1 m^2 Oberfläche hat?
8. Unter allen Hohlmaßen von der Form einer geraden Walze mit gegebenem Inhalt 1 m^3 dasjenige mit der kleinsten Oberfläche zu finden.
9. In eine gegebene gerade Pyramide mit quadratischer Grundfläche die größte quadratische Säule zu legen, deren Grundfläche auf der Grundfläche der Pyramide ruht, während die Ecken der Deckfläche auf die Seitenkanten der Pyramide fallen.