Zur

öffentlichen Prüfung der Schüler

des

Königlichen Gymnasiums zu Lyck

am

28. und 29. Juli

ladet ergebenst ein

Prof. Dr. H. Hampke,
Director.

Inhalt: 1) Schulnachrichten vom Director.
2) Abhandlung über die Lemniskaten mit 1 Figurentafel vom Oberlehrer Kuhse.

Lyck, 1870.
Schnellpressendruck von Rudolph Siebert in Lyck.

Schulnachrichten.

I. Vertheilung der Lehrstunden

im Sommer-Semester 1870.

Lehrer.	I. A.	I. B.	II. A.	II. B.	III. A.	III. B.	IV.	V.	VI.	Vorschule I.	Vorschule II.	Summa d. Stunden.
Prof. Dr. Hampke, Director. Ord. I. B.	Griech. Prosa 4. Horaz 2.	Lat. 6. Horaz 2.			Griech. 1. Repet.				Lat. 1. Repet.			16.
Gortzitza I., 1. Oberlehrer, Ord. II. A.	Homer und Sophocl. 2.	Dtsch. 3.	Lat. 8.				Griech. 6.					19.
Dr. Horch, 2. Oberlehrer.	Gesch. u. Geogr. 3. Franz. 2.	Gesch. u. Geogr. 3. Franz. 2.	Gesch. u. Geogr. 3. Franz. 2.	Franz. 2.	Franz. 3.							20.
Kuhse, 3. Oberlehrer.	Math. 4. Physik 2.	Math. 4. Physik 2.						Dtsch. 2. Franz. 3.	Rechn. 4.			21.
Kopetsch, 1. ord. Lehrer. Ord. I. A.	Lat. 6.	Griech. Prosa 4. Homer 2.		Lat. 8.								20.
Laves I., 2. ord. Lehrer. Ord. III. A.				Gesch. u. Geogr. 3. Verg. 2. Dtsch. 2.	Lat. 8. Relig. 2.	Franz. 3.						20.
Dr. Ebinger, 3. ord. Lehrer. Ord. II. B.	Dtsch. 3.			Griech. 6.			Lat. 10. Franz. 2.					21.
Dr. Laves II., 4. ord. Lehrer. Ord. III. B.			Griech. Prosa 4.			Lat. 8. Prosa.		Lat. 10.				22.
Kalanke, 5. ord. Lehrer. Ord. IV.	Relig. 2. Hebræisch 2.	Relig. 2.	Dtsch. 2. Relig. 2. Hebræisch 2.	Relig. 2.		Relig. 2.	Gesch. u. Geogr. 3. Dtsch. 2. Relig. 2.					23.
Bock, 6. ord. Lehrer.			Math. 4. Phys. 1.	Math. 4. Phys. 1.	Math. 3.	Math. 3.	Math. 3.	Rechn. 4.				23.
Dr. Embacher, 7. ord. Lehrer.					Gesch. u. Geogr. 4. Dtsch. 2.	Gesch. u. Geogr. 4. Dtsch. 2. Ovid. 2.		Relig. 3.	Relig. 3. Dtsch. 2.			22.
Krueger, 8. ord. Lehrer.	Gesang 1. Gesang 1. Zeichnen 2.						Gesang 1. Zeichn. 2.	Zeichn. 2. Schrb. 3. Geogr. 3. Gesang 2.	Zeichn. 2. Schrb. 3. Geogr. 4.			25.
Gortzitza II. Hilfslehrer. 6 Wochen in Vertretung.					Geograph. Repet. 1.			Geogr. 3. Dtsch. 2.	Geogr. 3.			9.
Dr. Jacobi, Schulamts-Candidat.					Griech. 3.	Griech. 6.			Lat. 8.			17.
Dr. Gebhardi, Schulamts-Candidat.			Verg. 2. Homer 2.		Homer 2. Ovid. 2.							8.
Engelke, Lehrer der Vorschule.										Anschauungsübungen 3. Rechnen 4. Religion 3. Schrb. 4. Les. 6.	Schrb. und Les. 6.	26.
	36.	36.	36.	36.	34.	34.	32.	32.	29.	10.	10. 6.	

II. Lehrverfassung.

Vorschule.

Zweite Klasse.

Ordinarius: Engelke.

1. Religion. 3 St. Biblische Geschichte nach Woike: Nro. 42, 43, 45, 46 aus dem neuen, Nro. 1—11 aus dem alten Testamente. Die fünf ersten Gebote ohne Luthers Erklärung, einige Sprüche und Gebete wurden durch Vorsprechen von der zweiten Abtheilung gelernt. Die erste Abtheilung lernte die 10 Gebote ohne Luthers Erklärung, einige Sprüche, Gebete und Liederverse.

2. Anschauungsübungen. 3 St. Besprechung der in Böhme's Lesefibel abgebildeten und der in den Bildern zum ersten Anschauungsunterricht auf Tafel I, II, IX, XII, XIII, XIV, XVII dargestellten Gegenstände. Uebungen im Anschauen, Betrachten und Aussprechen des Aufgefassten. Besprechung biblischer Bilder.

3. Rechnen. 4 St. II. Abtheilung: 1. Stufe nach Hentschel. Die Zahlen von 1—10. Auffassen, Benennen und Schreiben der Grundzahlen. Das Addiren, Subtrahiren, Multipliciren und Dividiren.

I. Abtheilung: 2. Stufe nach Hentschel. Die Zahlen von 1—100. Addiren und Subtrahiren.

4. Schreiblesen. 6 St. Nach Böhme's Lesefibel. II. Abtheil.: Lesen von Nro. 1—100 und Abschreiben des Gelesenen. I. Abtheil.: Lesen der Stücke Nro. 101—156 und Abschreiben des Gelesenen.

Erste Klasse.

Ordinarius: Engelke.

1. Religion. 3 St. Bibl. Geschichten Nro. 1—11 aus dem alten, Nro. 42, 43, 45, 46 aus dem neuen Testamente. Gelernt wurden: das 1. Hauptstück mit Luthers Erklärung, 8 Lieder und zu jedem Gebote ein Liederspruch.

2. Anschauungsübungen. 3 St. Besprechung der auf Tafel I, II, IX, XII, XIII, XIV, XVII in Schreibers Bildern zum ersten Anschauungsunterricht dargestellten Gegenstände und mehrerer im 2. Theile desselben Werkes abgebildeter Gift- und Culturpflanzen. Uebungen im Auffassen, Erklären, Urtheilen und Schliessen. Besprechung biblischer Bilder.

3. Orthographische Uebungen. 2 St. Schreiben nach dem Dictat, verbunden mit dem Einüben orthographischer Regeln.

4. Rechnen. 4 St. 3. Stufe nach Hentschel. Grundrechnungsarten in grösseren Zahlen. II. Abtheilung: Auffassen, Lesen und Schreiben der Zahlen, Addiren und Subtrahiren; dazu die I. Abtheilung Multipliciren und Dividiren.

5. Lesen, Zergliedern, Erzählen, Sprachlehre. 6 St. Preuss. Kinderfreund I. Theil. 2. Abschnitt. Nro. 1—111. Ausgewählte Lesestücke des 2. Theils, geschichtlichen und geographischen Inhalts. Einübung des tonrichtigen Lesens. Zergliederung der Lesestücke in Betreff des Verständnisses des Inhalts, insbesondere der Satztheile, Wortarten, Wortbildungs- und Wortbiegungsformen. Uebungen im Wiedererzählen und Vortragen.

6. Schönschreiben. 2 St. Einübung der kleinen und grossen lateinischen Buchstaben und fortgesetzte Uebungen in der deutschen Schrift.

Sexta.

Ordinarius: Dr. Jacobi.

1. Deutsch. 2 St. W. Gortzitza II. S. Embacher. Lesen im Kinderfreund von Preuss. Wiedererzählen des Gelesenen. Die Wortarten, der einfache Satz und die Theile desselben. Uebungen in der Orthographie. Declamiren.

2. Latein. 9 St. S. 8 St. Jacobi. 1 St. Repet. Hampke. Lectüre aus Schönborn's Lesebuch für VI. Grammatik nach der Grammatik von Ellendt Seyffert. Regelmässige Deklination und Conjugation. Wöchentlich ein Exercitium oder Extemporale.

3. Religion. 3 St. W. Gortzitza II. S. Embacher. Biblische Geschichten des alten Testaments. Das Kirchenjahr mit seinen Festen und deren historischen Bezeichnungen. Die 2 ersten Hauptstücke mit der nöthigen Worterklärung. 6 Kirchenlieder.

4. Rechnen. 3 St. Kuhse. Die 4 Species mit unbenannten und benannten Zahlen.

5. Geographie. 4 St. Krüger. Gestalt und Grösse der Erde, ihre Bewegung und Zonen. Die 4 Erdtheile ausser Europa, mit ihren Gebirgen, Hauptflüssen, Meerbusen und das Allgemeinste von der polit. Geographie nach dem Leitfaden von Daniel.

6. Schreiben. 3 St. Krüger. Die kleinen und grossen Buchstaben deutscher und lateinischer Schrift, ihre Verbindung zu Wörtern und Sätzen.

7. Zeichnen. 2 St. Krüger. Gerade Linien in verschiedenen Richtungen und Verbindungen, die Winkel.

8. Gesang. 2 St. mit V. Krüger. Gehör- und Stimmübungen durch leichte Volkslieder. Choräle und kleinere Coloraturen. Uebung im Treffen und Transponiren.

Quinta.

Ordinarius: Krüger.

1. Deutsch. 2 St. Kuhse. Lesen im Kinderfreund von Preuss. Wiedererzählen. Erläuterung der Rede- und Satztheile. Orthographie und Interpunction. Declamiren.

2. Latein. 10 St. Laves II. Schoenborn's Lesebuch für V. nach Auswahl. Grammatik nach der Grammatik von Ellendt Seyffert. Einübung der sogenannten unregelmässigen Verba und der verba anomala. Repitition der regelmässigen Deklination und Conjugation und der in Sexta erlernten Vocabeln. Die unregelmässigen Deklinationen. Wöchentlich ein Exercitium oder ein Extemporale.

3. Französisch. 3 St. Kuhse. Ploetz Curs. I. Lect. 1—40. Schriftliche Uebungen.

4. Religion. 3 St. W. Laves I. S. Embacher. Gelernt wurden die Hauptstücke, 6 Kirchenlieder und die biblischen Geschichten des neuen Testaments. Repetirt wurden die biblischen Geschichten des alten Testaments.

5. Rechnen. 3 St. Bock. Bruchrechnung, Theilbarkeit der Zahlen.

6. Anschauungsübungen. 1 St. Bock.

7. Geographie. 2 St. Krüger. Repetition des Pensums der Sexta. Europa nach Daniels Leitfaden.

8. Schreiben. 3 St. Krüger. Nach Vorschriften deutscher und lateinischer Schrift.

9. Zeichnen. 6 St. Krüger. Krummlinige Figuren, das Blatt und die Blüthe. Das Schattiren. Blumen und kleinere Landschaften.

10. Gesang. 2 St. mit VI. Krüger. Wie Sexta.

Quarta.

Ordinarius: Kalanke.

1. Deutsch. 2 St. Kalanke. Lesen im Kinderfreund. Wiedererzählen des Gelesenen. Interpunctions- und Satzlehre. Alle 3 Wochen eine Reproduktion als Aufsatz. Declamiren. Erzählen.

2. Latein. 10 St. Ebinger. Gelesen wurden Nepos: Miltiades, Themistocles, Aristides, Pausanias, Cimon, Lysander, Alcibiades, Epaminondas, Cato. Das Gelesene wurde retrovertirt. Syntax der Casus, die wesentlichsten Regeln aus der Syntax des Verbums, Wiederholung der Etymologie. Wöchentliche Wiederholungen und in Verbindung damit wöchenlich ein Exercitium oder Extemporale.

3. Griechisch. 6 St. Gortzitza I. Grammatik nach Buttmann bis zu den Verbis auf $\mu\iota$ excl. Lektüre aus Jacobs. Im 2. und 3. Quartal wöchentlich ein Exercitium.

4. Französisch. 2 St. Ebinger. Ploetz 1. Cursus bis Lect. 73. Erlernung der Vocabeln, schriftliche und mündliche Uebungen im Uebersetzen und in der Orthographie.

5. Religion. 2 St. Kalanke. Lektüre der Apostelgeschichte, Erläuterung des ersten Hauptstückes und Erlernung der einschlagenden Sprüche, der beiden letzten Hauptstücke, der Bücher A. und N. Testaments, des christlichen Kirchenjahrs und von fünf Kirchenliedern.

6. Mathematik. 3 St. Bock. Planimetrie nach Koppe. Decimalbrüche.

7. Geschichte u. Geographie. 3 St. Kalanke. Griechische Geschichte bis zur Schlacht von Chaeronea nach Dielitz. Repetition der fünf Erdtheile nach Daniel. Kartenzeichnen.

8. Zeichnen. 2 St. Krüger. Fortgesetzte Uebung im Schattiren. Grössere Landschaften und Köpfe. Anwendung der Estampe.

9. Gesang. 2 St. Davon 1 mit III., 1 mit III., II., I. Krüger. Fortgesetzte Treffübungen in Dur und Moll. Vorbereitung für den gemischten Chor.

Tertia B.

Ordinarius: Dr. Laves II.

1. Deutsch. 2 St. W. Gortzitza II. S. Embacher. Schillersche Gedichte wurden erläutert und gelernt. Uebungen im Declamiren und im freien Vortrage. Repetition der Interpunktionslehre und der Satzlehre. Alle 3 Wochen ein Aufsatz.

2. Latein. Prosa 8 St. Laves II. Wiederholung der Casuslehre; Tempus- und Modus-Lehre nach Seyffert. Wöchentlich ein Exercitium oder ein Extemporale. Caesar bell. Gall. I, II, III, IV. Einzelne Stellen aus Caesar wurden memorirt. Ovid 2 St. W. Kopetsch und Gortzitza II. S. Embacher. Durchnahme des Wichtigsten über die Prosodie. Lektüre von Ovid. Met. nach Seidels Auszug VIII—X. incl. — Memoriren grösserer Stellen.

3. Griechisch. 6 St. Jacobi. Wiederholung des Pensums von Quarta, dazu Buttmann 82—113 excl. — Memoriren von Vokabeln. Lektüre aus Jacob's Lesebuch. Mündliche Uebungen im Uebersetzen aus Halms Etymologie I. Alle 14 Tage ein Exercitium oder Extemporale.

4. Französisch. 3 St. Laves I. Ploetz Elementarbuch: Regelmässige Conjugation, persönliche Fürwörter, einige unregelmässige Verba. Mündliche Uebungen im Uebersetzen aus dem Deutschen ins Französische. Lektüre aus Ploetz, Lectures choisies Nro. 1. Alle 14 Tage ein Exercitium.

5. Religion. 2 St. Kalanke. Leben Jesu nach Hollenberg mit Zugrundelegung der heiligen Schrift. Besprechung der beiden ersten Hauptstücke; dazu wurden die einschlagenden Sprüche und 5 Kirchenlieder gelernt. Repetition der Eintheilung des Kirchenjahres und der Hauptstücke, Erlernen der Kernsprüche aus der Bergpredigt.

6. Mathematik. 3 St. Bock. S. Gleichheit der Figuren. Lehre vom Kreise. W. Die 4 Species der Buchstabenrechnung. Potenzen. Repetition der Anfangsgründe der Planimetrie und der Decimalbrüche. Alle 3 Wochen eine schriftliche Arbeit.

7. Geschichte und Geographie. 4 St. W. Gortzitza II. S. Embacher. Repetition der griechischen Geschichte; römische Geschichte nach Dielitz. Physikalische und politische Geographie von Europa, ausser Deutschland, nach Voigt's Leitfaden.

8. Gesang. 2 St. Davon 1 mit IV. und 1 mit IV., III A., II., I. Krüger. Wie Quarta.

9. Zeichnen. 2 St. mit III. A., II. und I. Krüger. Conturzeichnen. Uebung im Schattiren mit der Estampe und im Schraffiren. Kopfstudien.

Tertia A.

Ordinarius: Laves I.

1. Deutsch. 2 St. W. Gortzitza II. S. Embacher. Uebungen im freien Vortrage und Declamiren, besonders von Schillerschen Balladen. Alle 3 Wochen ein Aufsatz. Lektüre: Wilhelm Tell, Wallenstein.

2. Latein. 10 St. 8 St. Prosa Laves I. Repetition der Etymologie und Casuslehre. Gebrauch der Tempora und Modi. Wöchentlich ein Exercitium oder ein Extemporale. Caes. bell. Gall. V—VII. incl. Ovid 2 St. W. Gortzitza II. S. Gebhardi. Ovid Met. VI—VIII. nach Seidel's Auszug. Metrische Uebungen. — Einzelne Stellen aus Caesar und Ovid wurden memorirt.

3. Griechisch. 6 St. 3 St. Prosa Jacobi, 1 St. Repetition Hampke, 2 St. Homer. W. Jacobi. S. Gebhardi. Xen. Anab. II. 6 — III. 3 Hom. Od. I—II. zur Hälfte. Buttmann § 114 und Wiederholung des Vorhergehenden. Wöchentlich ein Exercitium oder ein Extemporale.

4. Französisch. 3 St. Horch. Ploetz 2. Cursus. Lect. 1—28 u. 36—38. Erlernen von Vokabeln aus Ploetz: vocabulaire systém. Chrestomathie von Ploetz: récits hist. Nro. 7 bis 16. Mündliches Uebersetzen aus dem Deutschen in's Französische aus Ploetz Schulgrammatik. Alle 2 Wochen ein Exercitium.

5. Religion. 2 St. Laves I. W. Geschichte des Volkes Gottes im Anschluss an Hollenberg. Dazu die wichtigsten bezüglichen Abschnitte aus der Bibel gelesen. S. Besprechung der drei letzten Hauptstücke. Dazu wurden die einschlagenden Sprüche gelernt, 6 Kirchenlieder. Repetition der Hauptstücke.

6. Mathematik. 3 St. Bock. W. Wiederholung der Planimetrie nach Koppe § 49 bis 179. Gleichungen des ersten Grades. Quadratwurzeln. Aehnlichkeit und Ausmessung der Figuren nach Koppe § 180—224. Proportionen, Zinsrechnung und Discontorechnung. Schriftliche Arbeiten.

7. Geschichte u. Geographie. 4 St. W. Gortzitza II. S. Embacher. Deutsche Geschichte nach Dielitz von Anfang bis 1815, Repetition der griechischen Geschichte. Geographie von Deutschland nach Voigt's Leitfaden.

8. Gesang. 2 St. Davon 1 mit IV. und III. B., 1 mit IV., III. B., II. u. I. Krüger. Wie Ouarta.

9. Zeichnen. 2 St. mit III. B., II. u. I. Krüger. Wie III. B.

Secunda B.

Ordinarius: Dr. Ebinger.

1. Deutsch. 2 St. Laves I. Literaturgeschichte des Mittelalters nach Pischon und Lektüre aus Puetz (Altdeutsches Lesebuch, 2. Aufl.) Uebungen im Declamiren und Disponiren. Alle 5 Wochen ein Aufsatz.

2. Latein. 10 St. 8 St. Prosa. Kopetsch. Cicero de imperio Cn. Pompeji, Livius lib. XXVII. Privatim: Caesar bell. Gall. VII., Sallust conjuratio Catil. Grammatik nach Seyffert: Modus- und Casus-Lehre. Vierteljährlich ein Aufsatz. Wöchentlich ein Exercitium oder Extemporale. Memorirübungen. 2 St. Vergil Aen. 1—VI.

3. Griechisch. 6 St. 4 St. Prosa. Ebinger. Xenoph. Anab. III., IV., ein Theil von V. Retrovertiren. Die Syntax des Nomens nach Halm II., 1, woraus auch ein grosser Theil der Uebungsstücke mündlich übersetzt wurde, und Wiederholung der Etymologie. Vierzehntägige Repetitionen und im Anschluss daran ein Exercitium oder Extemporale. Homer. 2 St. Ebinger. Odyss. I—IX. incl. — XII., theils in der Klasse, theils privatim.

4. Französisch. 2 St. Horch. Grammatik aus Ploetz Schulgrammatik Lect. 29—57. Alle zwei Wochen ein Exercitium oder Extemporale. Erlernen von Gallicismen nach Ploetz, vocabulaire systématique. Mündliche Uebungen im Uebersetzen aus dem Deutschen ins Französische nach Ploetz, Schulgrammatik. Lektüre aus Ploetz, Manuel de la langue française: Voltaire; la Henriade, bataille de Rocroy et invasion de la Hollande et passage du Rhin.

5. Hebräisch. 2 St. mit II. A. Kalanke. I. Abtheilung: Repetition der Elementarlehre, Erlernen der wichtigsten Regeln aus der Formenlehre, Lektüre ausgewählter Stücke aus Gesenius Lesebuch. Stündlich schriftliche Analyse der durchgenommenen Formen. II. Abtheilung: Uebungen im Lesen und Schreiben; die Elementarlehre, das regelmässige Verbum, auch mit Suffixen, das Substantiv mit Suffixen; Uebungen im Uebersetzen.

6. Religion. 2 St. Kalanke. Im Anschluss an Hollenberg § 83—91, Lektüre und Erklärung der Apostelgeschichte und Einführung in die wichtigern paulinischen Briefe. Repetition der Hauptstücke mit den einschlagenden Sprüchen, und des christlichen Kirchenjahres. 1. Corinth. 13. und 1 Lied gelernt.

7. Mathematik. 4 St. Bock. Repetition des Pensums der III. A. u. Fortsetzung der Planimetrie bis Abschnitt 11 nach Koppe. Behandlung von planimetrischen Aufgaben. Rechnung mit Potenzen und Wurzeln, Gleichungen ersten Grades mit mehreren Unbekannten.

8. Physik. 1 St. Bock. Einleitung in die Physik. Lehre vom Gleichgewicht der festen, flüssigen und luftförmigen Körper.

9. Geschichte und Geographie. 3 St. Laves I. Mittlere Geschichte nach dem Lehrbuche der Weltgeschichte von Horch. In der Geographie: Physische und politische Geographie von Deutschland, Amerika und Australien nach Voigt's Leitfaden.

9. Gesang. 2 St. Davon 1 mit IV., III., II. A. u. I., 1 mit II. A. u. I. Krüger. Choräle, Lieder, Motetten, Chöre aus grösseren klassischen Musikwerken. Vorbereitung für den gemischten Chorgesang.

11. Zeichnen. 2 St. mit III., II. A. und I. Krüger. Wie III. B.

Secunda A.

Ordinarius: Oberlehrer Gortzitza.

1. Deutsch. 2 St. Kalanke. Die Composition des deutschen Aufsatzes, im Anschlusse Durchnahme von Musteraufsätzen. Lektüre und Erklärung kleinerer Abhandlungen von Herder und Schiller und der zu erlernenden Gedichte. Stündlich Deklamation und freier Vortrag. Zehn Aufsätze.

2. Latein. 10 St. 8 St. Prosa. Gortzitza I. Cicero, pro Roscio Amerino und divinatio in Q. Caecilium. Liv. XXVI, 35—XXVII. Privatim: bell. Alexandrinum. Liv. V, 34—49. Cic. epist. v. Hofmann I., II., 1—3. Exercitia, Extemporalia, Aufsätze. Zumpt cap. 62—87. Vergil 2 St. W. Jacobi. S. Gebhardi. Aeneide IX—XII.

3. Griechisch. 6 St. 4 St. Prosa Laves II. Lysias ausgewählte Reden. Xenophon's Memorabilien I., cap. 1, 2. Wiederholung der Etymologie. Syntax des Verbi nach Halm. Alle 14 Tage ein Exercitium oder ein Extemporale. Homer 2 St. W. Laves II. S. Gebhardi. Odyss. l. 13—24, theils in der Klasse, theils privatim.

4. Französisch. 2 St. Horch. Aus der Schulgrammatik von Ploetz, Lect. 58—78. Erlernen von Gallicismen nach Ploetz, vocabulaire systématique. Alle zwei Wochen ein Exercitium. Mündliche Uebungen im Uebersetzen aus dem Deutschen in's Französische nach Ploetz Schulgrammatik. Lektüre aus Ploetz, Manuel de la langue française, Toepfer, St. Marc Girardin, Rémusat.

5. Hebräisch. 2 St. mit II. B. Kalanke.

6. Religion. 2 St. Kalanke. Heilsgeschichte des A. Test. im Anschluss an Hollenberg § 1—45 und Einführung in die einzelnen alttestamentlichen Bücher. Dazu wurden die wichtigsten Psalmen und Jesaias 53. gelernt. Das Leben Jesu im Anschluss an Hollenberg § 47—82, und an die Lektüre der Evangelien im Urtext. Der grösste Theil der Bergpredigt wurde gelernt. Repetition des christlichen Kirchenjahres.

7. Mathematik. 4 St. Bock. Die Sätze über die harmonische Theilung nach Koppe, bis Abschnitt 15; planimetrische Aufgaben. Quadratische Gleichungen mit einer und mehreren unbekannten Grössen. Rechnung mit Logarithmen, Exponential-Gleichungen, Zinseszins- und Rentenrechnung. Erster Theil der Stereometrie. Trigonometrie: Relationen zwischen den Funktionen bis zur Aufstellung der Funktionen der Summe von Winkeln.

8. Physik. 1 St. Bock. Lehre von der Bewegung der Körper.

9. Geschichte u. Geographie. 3 St. Horch. Alte Geschichte bis auf August. Geographie: die Staaten Europa's, mit Ausnahme Deutschlands, Asien und Afrika nach Voigt.

8. Gesang. 2 St. 1 mit II. B. und I. 1 mit IV., III., II. B. und I. Krüger. Wie Secunda B.

11. Zeichnen. 2 St. mit III., II. B. und I. Krüger. Wie III. B.

Prima B.

Ordinarius: Der Direktor.

1. Deutsch. Gortzitza. 3 St. Literaturgeschichte nach Pischon, 5. und 6. Periode, vorzugsweise Klopstock und Lessing. Uebungen im Deklamiren und im Vortrage. Neun Aufsätze.

2. Latein. Hampke. 8 St. 6 St. Prosa. W. Lektüre von Cicero's: epistolae ad familiares nach der Auswahl von Dietsch; die Rede für den Ligarius. Der Trostbrief des Sulpicius wurde auswendig gelernt. S. Cicero: in Verrem actio quarta de signis. Privatlektüre: W. Livius, lib. II.; kleinere Reden Cicero's. S. die Rede für Sulla, die zweite philippische Rede. Exercitien, wöchentlich zweimal schriftliche Uebungen nach Seyfferts Uebungsbuch für Secunda. Zehn Aufsätze. 2 St. Horaz, carmina lib. I. und lib. II. 8 Oden wurden memorirt.

3. Griechisch. Kopetsch. 6 St. Plato's Crito und Apologie; Plutarch, vita Tib. Grachi. Grammatik nach Halm, Wiederholung der Syntax des Verbi und der Casuslehre. Täglich mündliche Uebungen im Uebersetzen aus dem Deutschen. Exercitien und Extemporalien. Homer Il. XVI, 650—XXII, privatim Homer, Il. I—V. Proben aus den griechischen Elegikern und Lyrikern, 2 St. wöchentlich, 6 Wochen hindurch, Dr. Gebhardi.

4. Französisch. Horch. 2 St. Wiederholung der Grammatik nach Ploetz Schulgrammatik. Wöchentlich ein Exercitium oder Extemporale. Lektüre: Thiers, expédition de Bonaparte en Egypte.

5. Hebräisch. Kalanke. 2 St. combinirt mit I. A. Ausgewählte Stücke aus der Genesis, dem Buche der Richter, den Büchern Samuelis und den Psalmen wurden gelesen und erklärt. Befestigung und Erweiterung der Formenlehre nach Gesenius Grammatik §. 30 bis §. 105 und Erlernen der wichtigsten Regeln aus der Syntax. Vokabellernen und schriftliche Analysen.

6. Religion. Kalanke. 2 St. Glaubens- und Sittenlehre im Anschluss an Hollenberg § 158—192 mit Heranziehung der Hauptstellen aus der conf. August. Lektüre des Evangelii St. Johannis und Repetition des Pensums der Secunda.

7. Mathematik. Kuhse. 4 St. Stereometrie, Trigonometrie, Arithmetik, planimetrische Aufgaben. Alle 4 Wochen eine Probearbeit.

8. Physik. Kuhse. 2 St. Repetition der Statik und Mechanik, der Wärmelehre; Dioptrik und Katoptrik nach Koppe.

9. Geschichte u. Geographie. Horch. 3 St. Neue Geschichte von 1500—1740. Wiederholung der alten und mittleren Geschichte. In der Geographie alle 14 Tage eine Repetitionsstunde.

10. Gesang. 2 St. Davon 1 mit IV., III. u. I. u. 1 mit II. u. I. A. Krüger, wie Secunda B.

11. Zeichnen 2 St. mit III. u. II. Krüger, wie Tertia.

Prima A.

Ordinarius: Kopetsch.

1. Deutsch. 3 St. Ebinger. Logik. Lektüre schillerscher und lessingscher Abhandlungen und der schwereren schillerschen und götheschen Gedichte. Im Anschluss daran Literaturgeschichte des achtzehnten Jahrhunderts. Aus dem Kreise der Lektüre wurden auch die Themata zu den freien Vorträgen gestellt. Alle vier Wochen ein Aufsatz.

2. Latein. 8 St. 6 St. Prosa. Kopetsch. Cic. de oratore I, 1—20, 26—28, 31—35; II, 12—18, 42—71; III, 1—15. Privatim Cic. de finibus. Wiederholung der Grammatik nach Zumpt. Uebungen im Lateinsprechen. Aufsätze. Exercitien und Extemporalien. Horaz 2 St. Hampke. Carmina lib. I. u. II. 8 Oden wurden memorirt.

3. Griechisch. 6 St. 4 St. Prosa. Hampke. W. Platon. Phaedon mit Auslassung einiger Kapitel gegen Ende. S. Thucydides: lib. I. mit Auswahl. Repetition der gesammten Syntax nach Halm. Stündlich Uebungen im mündlichen Uebersetzen aus dem Deutschen in's Griechische. Extemporalien. Homer 2 St. Gortzitza. Homer Il. XVI, 619—XXII, 288. Privatim Hom. Il. I—V.

4. Französisch. 2 St. Horch. Wiederholung der Grammatik nach Ploetz Schulgrammatik. Wöchentlich ein Exercitium oder Extemporale. Lektüre: W. der letzte Theil aus Michaud: histoire de la première croisade. S. Das erste Capitel aus Charras: la Prusse, York et Stein.

5. Hebräisch. 2 St. Kalanke. S. Prima B.

6. Religion. 2. St. Kalanke. Glaubens- und Sittenlehre im Anschluss an Hollenberg § 158—192 mit Heranziehung der Hauptstellen aus der conf. Aug. Lektüre des Evangelii Sct. Johannis und Repetition des Pensums der Secunda.

7. Mathematik. 4 St. Kuhse. Repetition und Erweiterung der Trigonometrie. Repetition der Wurzelrechnung, der Gleichungen, Logarithmen und Zinseszinsrechnung. Die arithmetischen und geometrischen Reihen, Combinationen und Permutationen. Repetition und Erweiterung der frühern Pensa in der Planimetrie und Stereometrie. Berechnung der Kugel, des Cylinders, der Pyramide und des Obelisken. Alle 4 Wochen eine schriftliche Arbeit.

8. Physik. 2 St. Kuhse. Repetition der Lehre vom Schalle, vom Falle der Körper, von den mechanischen Erscheinungen fester Körper und der Lehre von der Elektricität.

9. Geschichte und Geographie. 3 St. Horch. Neue Geschichte von 1740—1815. Wiederholung der übrigen Abschnitte der neuern Geschichte. In der Geographie: alle 14 Tage eine Wiederholungsstunde: Europa (mit Ausnahme von Deutschland und von Oestreich-Ungarn), Asien und Afrika.

10. Gesang. 2 St. Davon 1 mit IV., III., II. u. I. B. und 1 mit II. u. I. B. Krüger. Wie Secunda.

11. Zeichnen. 2 St. mit III., II. u. I. B. Krüger. Wie Tertia.

Die Turnübungen, von welchen Dispensation nur auf Grund eines ärztlichen Attestes stattfindet, wurden durch Herrn Gymnasiallehrer Bock geleitet.

Themata zu den deutschen Aufsätzen.

Secunda B. Laves II.

1. Gefecht, Treffen, Kampf, Schlacht.
2. Das Unangenehme und Angenehme des Winters (Klassenarbeit).
3. Eisenbahnen und Dampfschiffe.
3. Ist das Spazierengehen als Zeitverschwendung zu betrachten?
5. Vermögend, bemittelt, wohlhabend, begütert, reich.
6. Dreist, keck, muthig, kühn, verwegen.

7. Wie kommt es, dass beim Zunehmen der Cultur die Gastfreundschaft abzunehmen pflegt?
8. Der Löwe ist los (Klassenarbeit).
9. Der Bürge des Moeros im Gefängniss.
10. Leiden und Pflichten der am Kriege nicht Theilnehmenden (Klassenarbeit).

Secunda A. Kalanke.

1. Der Uebel höchstes ist die Schuld.
2. Warum fühlen wir uns in der freien Natur gewöhnlich so frisch und fröhlich?
3. Wer nach jedem bellenden Hunde wollte werfen, müsste viele Steine haben.
4. Honestum est, laudari a laudato viro (Probeaufsatz).
5. Ueber den Missbrauch der Uebersetzungen klassischer Schriftsteller.
6. Nichts ist schwerer zu ertragen,
   Als eine Reihe von schönen Tagen.
7. Historische Parallele zwischen Philipp von Macedonien und Napoleon I.
8. Was heisst Bildung? (Probeaufsatz.)
9. Verschiedene Themata zu Vorträgen.
10. Erinnerung und Hoffnung, zwei Hauptquellen der Freudigkeit des Menschen.

Prima B. Gortzitza I.

1. Wie kommt es, dass sich der Mensch gewöhnlich für besser hält, als er wirklich ist?
2. Der Gastwirth. Charakterschilderung mit besonderer Berücksichtigung des Wirthes in Lessings Minna.
3. Unser Leben ist nicht kurz, sondern wir machen es oft kurz.
4. Leidenden ist es ein Trost, Genossen des Unglücks zu haben.
5. Wie unterscheiden sich der Geizige und der Sparsame?
6. Der Schild des Achilles und die Gruppirung der Bilder auf demselben.
7. Ohne Wahl vertheilt die Gaben,
   Ohne Billigkeit das Glück;
   Denn Patroclus liegt begraben,
   Und Thersites kommt zurück.
8. Umarbeitung einiger Gedichte von Körner und von Klopstock in Distichen und in horazische Strophen, zum Theil auch in Reimstrophen.
9. Welches sind die Hauptergebnisse der Lessingschen Betrachtungen über die Fabel?

Prima A. Ebinger.

1 a. Fried' ist besser als das Recht;
Denn das Recht ist Friedens Knecht.

b. Aller Anfang ist schwer.

2 a. Es trägt Verstand und rechter Sinn
Mit wenig Kunst sich selber vor.

b. Non scholae, sed vitae discimus.

3 a. Der Herbst. Metrischer Versuch.

3 b. Durch Lehre klug von hundert keiner,
Durch Beispiel klug von hundert einer,
Durch Proben klug von hundert zwei,
Durch Schaden klug von hundert drei.

4 a. Ueber das horazische: quid sit futurum cras, fuge quaerere.
b. Viel Köpfe, viel Sinn.
5. Durch Kampf zum Sieg (Probeaufsatz).
6. Die Akropolis von Athen. Beschreibung eines in der Klasse hängenden Bildes.
7 a. Wie bestimmt Schiller das Ideal, welches der Dichter zur Darstellung zu bringen hat, in seinem Gedichte: die Künstler.
b. Der historische Hintergrund der Minna von Barnhelm.

8. Willst du dich deines Werthes freuen,
So musst der Welt du Werth verleihen.

9. Tasso und Antonio.

10. Was machst du nieden im Volke,
Unter der Wolke
Voll Sturm und Blitz?
Spann auf die Schwingen! Ueber der Wolke
Ist Himmelssitz.

Themata zu den lateinischen Aufsätzen.

Secunda B. Kopetsch.

1. Aduatuca a Romanis defensa.
2. Alesia obsidione a Caesare expugnata.
3. De T. Manlio Torquato.

Secunda A.: Gortzitza I.

1. Belli, quod Galli duce Brenno Romanis intulerunt, causa, ordo eventusque breviter exponuntur. (Liv. V. 34—49.)
2. Argumentum orationis a Cicerone pro S. Roscio Amerino habitae. Pars prior.
3. Pars altera.
4. Argumentum orationis a Cicerone in Q. Caecilium habitae.

Prima B.: Hampke.

1 a. Lucius Virginius tribunus plebis Appium Claudium apud populum accusat.
b. De pugna apud Ticinum commissa.
2 a. Mucii Scaevolae dictum, et facere et pati fortia Romani esse, exemplis probetur.
b. Pugna ad lacum Trasimenum commissa.
c. Titus Manlius Torquatus.
d. De C. Marcio Coriolano.
3 a. Vis consilii expers mole ruit sua, idem (dii) odere vires, omne nefas animo moventes.
b. Tulli Hostilii regnum.

c. C. Marcius Coriolanus.
d. Romuli regnum.

4 a. P. Cornelius Scipio patris patruique ultor, Poenorum in Hispania victor.
b. De causis et initiis secundi belli Punici.
c. T. Quinctius Flamininus, liberator Graeciae.
d. Unde factum sit, ut plurimas victorias Hannibal referret.

5 a. Quae maximae virtutes et vitia fuerint in Hannibale.
b. Quae debuerit populus Romanus Pompejo.
c. Comparentur inter se Hannibal et Scipio Africanus major.
d. Quas res Labienus, Caesaris legatus, in Gallia gesserit.

6 a. De imperio ad P. Scipionem deferendo concio habita anno ducentesimo quinto. (Nachbildung von Ciceros Rede de imperio Cn. Pompeji.)
c. Quibus rixis certaverit plebs cum patribus, antequam leges Liciniae perlatae sint.

7 a, b, c u. d. Unde factum sit, ut Caesar Galliam hominibus et copiis affluentem, brevi caperet (Probeaufsatz).

8 a. Phocion quum ad mortem duceretur, hunc, inquit, exitum plerique clari viri habuere Athenienses.
b. Neminem ante mortem beatum esse praedicandum, exemplis ex historia rerum petitis demonstretur.
c. Quo jure Livius bellum, quod Hannibale duce Carthaginienses cum populo Romano gesserunt, maxime omnium memorabile dixerit.
d. Divitiacum Aeduum singulari fide ac constantia in Romanos fuisse.

9 a. Quae commoda, quae incommoda ad Graecos ex bellis Persicis redundaverint, demonstretur.
b. Comparentur inter se Alexander magnus et C. Julius Caesar.
c. Bellum Jugurthinum Romanis turpissimum.
d. Belgas omnium Gallorum fuisse fortissimos, demonstretur.

10 a. Doceatur quod ab Horatio dictum est: ‚Valet ima summis Mutare et insignem attenuat deus Obscura promens', praecipue in magnis rerum conversionibus apparere.
b. Quibus mulieribus insignis fuerit populus Romanus.
c. Quibus viris quibusque virtutibus et vitiis insignis fuerit gens Corneliorum.
d. Bellis Samnitibus Romanos optima fortitudinis exempla edidisse.

11 a, b, c u. d. Quibus potissimum viris Atheniensium respublica gloriam amplitudinemque debuerit (Probeaufsatz).

Prima A.: Kopetsch.

1 a. Feriunt summos fulgura montes.
b. Verumne sit, quod Horatius dicit, carmina ceteris monumentis esse potiora.

2 a. Philippum, Macedonum regem, et Napoleonem, primum Francogallorum imperatorem, multis modis fuisse simillimos.
b. De injusta Socratis condemnatione.

3 a. Divine Plato escam malorum voluptatem vocat.
   b. Pericles maximae et gloriae et perniciei auctor fuit Atheniensibus.
4 a. Deleta Carthago quae commoda et rursus quae incommoda rei Romanae attulerit, breviter explicetur.
   b. Bellicae laudes cur pluris ducantur quam domesticae.
5 a. Bene ferre disce magnam fortunam, explicetur exemplisque illustretur.
   b. Bellum, gravissimam generis humani calamitatem, idem esse multarum virtutum incitamentum.
6 a. Quem censet Cicero plenum esse ac perfectum oratorem?
   b. Pugna Salaminia quantum toti Europae profuerit.
7 a. Quae fuerint inter civitates Graecas de principatu contentiones.
   b. Quibus potissimum bellis res publica Romana summum in periculum adducta est?
8 a u. b. Ingenuas didicisse fideliter artes
emollit mores nec sinit esse feros.

III. Abiturienten-Aufgaben.

A. Ostern 1870.

1. Thema zum deutschen Aufsatz.

Früh übt sich, was ein Meister werden will.

Schiller, Tell.

2. Thema zum lateinischen Aufsatz.

Bellum, gravissimam generis humani calamitatem, idem multarum virtutum esse incitamentum.

3. Mathematische Aufgaben.

a) Ein Dreieck zu construiren, wenn eine Seite, das Verhältniss der beiden andern Seiten und die zu einer der letzten Seiten gehörige Höhe gegeben ist.

b) Durch eine Kugel wird eine Ebene gelegt, welche den darauf senkrechten Kugeldurchmesser im Verhältniss von 4 : 5 theilt. Auf dieser Schnittfläche wird im grössern Kugelsegment ein gerader Kegel errichtet, dessen Spitze in der Kugeloberfläche liegt. Wenn das Volumen dieses Kegels, $k = 100$ Qubikfuss ist, wie gross ist dann der Radius, das Volumen und die Oberfläche der Kugel, der Radius der Schnittfläche und der Winkel an der Schnittfläche des Kegels?

c) Zwei Personen A und B reisen von zwei Orten C und D auf der Bahn einander entgegen. Als sie sich treffen, hat der erste zwei Meilen mehr zurückgelegt, als der andere. Sie setzen dann ihren Weg fort mit ihrer früheren Geschwindigkeit und nun gelangt A in 3 Stunden, B in 4 Stunden resp. nach D und C; welche Geschwindigkeit pro Stunde haben die Züge gehabt und wie weit war C von D entfernt?

d) Ein Dreieck zu berechnen aus einem Winkel $\alpha = 57^0\,3'\,41''$, der Höhe auf $a = 10{,}8$ und dem Halbmesser des umschriebenen Kreises $r = 16{,}18418$.

B. Im Sommer 1870.

1. Thema zum deutschen Aufsatz.

Was machst du nieden im Volke
Unter der Wolke
Voll Sturm und Blitz?
Spann' auf die Schwingen! Ueber der Wolke
Ist Himmelssitz.

Herder.

2. Thema zum lateinischen Aufsatz.

Invidia gloriae comes.

3. Mathematische Aufgaben.

a) Gegeben sind zwei Kreise O, M und eine Linie ausserhalb derselben, es soll auf dieser Linie ein Punkt P so gefunden werden, dass die von ihm an die Kreise gezogenen Tangenten gleich sind.

b) Ein auf die Spitze gestellter gerader Kegel ist 1 Zoll mit Wasser gefüllt. Durch eine hineingeworfene Kugel steigt das Wasser um 2 Zoll. Wie gross ist der Durchmesser der Kugel, wenn der Inhalt des ursprünglichen Wasserkegels = K ist?

c) Von einem Dreieck ist gegeben $a : b = 3 : 4$, $a^2 + b^2 = c^2$, Inhalt des Dreiecks $\triangle = 0{,}25$.

d) Gegeben die Hypotenuse eines rechtwinkligen Dreiecks $c = 22{,}1$ und die den rechten Winkel halbirende Transversale $t = 6\sqrt{2}$.

IV. Verfügungen von allgemeinem Interesse.

Verfügung des Kgl. Prov.-Schulkollegii vom 3. August 1869. Die Einführung der lateinischen Grammatik von Ellendt-Seyffert wird vorläufig für die untern und mittlern Klassen und des Leitfadens für den Unterricht in der Geographie von Daniel für die untern Klassen genehmigt.

V. d. K. P.-S. v. 11. Aug. 1869. Die Theilung der Prima in eine Ober- und Unter-Prima und die Bestreitung der dadurch erwachsenden Mehrausgaben aus der Gymnasialkasse wird genehmigt.

V. d. K. P.-S. v. 30. Aug. 1869. Der Etat für die Jahre 1870—72, welcher in Ein- und Ausgaben mit 11,026 Thlr. abschliesst, wird übersandt.

V. d. K. P.-S. v. 9. Sept. 1869. Dem Prof. Kostka wird wegen Fortdauer seiner Krankheit der Urlaub bis zum 1. Nov. verlängert.

V. d. K. P.-S. im Sept. 1869. Mittheilung der Themata, welche auf der im Jahre 1871 abzuhaltenden Direktoren-Conferenz der Provinz Preussen zur Besprechung gelangen sollen.

V. d. K. P.-S. v. 5. Nov. 1869. Nach Allerhöchster Anordnung Seiner Majestät des Königs soll am 10. Nov. d. J., dem Geburtstage Dr. Mart. Luthers, in den evangl. Kirchengemeinden des Landes ein ausserordentlicher allgemeiner Bettag gehalten und sollen die Schüler durch den Hinweis auf die in dem Ausbau der ev. Kirche liegenden Segnungen zur innern Theilnahme an diesem Werke angeregt werden.

V. d. K. P.-S. v. 6. Nov. 1869. Das Pensions-Gesuch des Prof. Kostka wird genehmigt und der Eintritt der Pensionirung auf Ostern 1870 festgesetzt.

V. des Kgl. Ministerii der geistlichen u. s. w. Angelegenheiten vom 18. Nov. 1869. Der Gymnasial-Bibliothek wird der sechste Band des Werkes: Leben etc. der Väter der lutherischen Kirche als Geschenk des Kgl. Ministerii übersandt.

V. d. K. P.-S. v. 20. Nov. 1869. Vertretungskosten für den beurlaubten Professor Kostka aus den Mitteln der Anstalt bis zum 1. April 1870 zu decken.

V. d. K. P.-S. v. 17. Dec. 1869. Die Theilung der Prima auch für diejenigen sechs Stunden, in welchen sie noch combinirt war, sowie einige damit im Zusammenhang stehende Veränderungen in der Vertheilung des Unterrichts werden genehmigt.

V. der Ober-Post-Direktion zu Gumbinnen v. 21. Dec. 1869. Ein Exemplar des neuen Post-Gesetzes für den Norddeutschen Bund wird übersandt.

V. d. K. P.-S. v. 27. Dec. 1869. Das Werk des Geheimrath Dr. Wiese über das preuss. Schulwesen wird zur Anschaffung für die Gymnasial-Bibliothek empfohlen.

V. d. K. P.-S. v. 30. Dec. 1869. Die Direktoren werden über die Behandlung der Kgl. Dienstsachen instruirt.

V. d. K. P.-S. v. 8. Jan. 1870. Der Lehrplan für den geographischen Unterricht wird genehmigt.

V. d. K. P.-S. v. 17. Jan. 1870. Die Gymnasial-Kasse wird zur Deckung der aus der völligen Theilung der Prima erwachsenden Mehrkosten angewiesen.

V. d. K. P.-S. v. 24. Jan. 1870. Pensionirung des Professor Kostka unter Beibehaltung der Verwaltung der Gymnasial-Kasse.

V. d. K. P.-S. v. 27. Jan. 1870. Der Direktor soll dem Prof. Kostka eine Verfügung des K. P.-S. übergeben, in welcher dasselbe dem aus seinem Amt scheidenden Lehrer volle Anerkennung für seine Treue und erfolgreiche Thätigkeit am Gymnasium zu Lyck ausspricht.

V. d. K. P.-S. v. 12. Febr. 1870. Für den aus seinem Amt scheidenden Prof. Kostka wird der rothe Adler-Orden vierter Klasse übersandt und der Direktor veranlasst, denselben in geeigneter Weise zu überreichen.

V. d. K. P.-S. v. 14. Febr. 1870. Behufs Beschränkung der Porto-Ausgaben sollen den Berichten Akten etc. nur insoweit beigefügt werden, als deren Einsicht zur Erledigung der betreffenden Sachen nothwendig erscheint.

V. d. K. P.-S. v. 26. Febr. 1870. Dem Direktor wird für die nächste im Jahre 1871 Statt findende Direktoren - Conferenz das Correferat über den deutschen Unterricht übertragen.

V. d. K. P.-S. v. 28. Febr. 1870. Einzelne Bestimmungen des Regulativs für die Behandlung portopflichtiger Dienstsachen werden abgeändert.

V. d. K. P.-S. v. 7. März 1870. Der Antrag des Direktors, bei der Erledigung der ersten Oberlehrer-Stelle eine Ascension sämmtlicher studirten Gymnasial-Lehrer eintreten zu lassen, wird genehmigt.

V. d. K. P.-S. v. 8. März 1870. Die Anzahl der alljährlich einzusendenden Programme wird um vier erhöht.

V. d. K. Ministerii für geistliche etc. Angelegenheiten v. 10. März 1870. Der Unterricht im Rechnen mit den neuen Maassen und Gewichten soll durch die Anschauungsmittel unterstützt und fruchtbringend gemacht werden.

V. d. K. P.-S. v. 17. März 1870. Dem Dr. Embacher wird die siebente ordentliche Lehrer-Stelle verliehen.

V. d. K. P.-S. v. 17. März 1870. Gehaltszahlung an den neu berufenen 7. ordentl. Lehrer Dr. Embacher.

V. d. K. P.-S. v. 13. April 1870. Die Zeugnisse, welche den Zöglingen der beiden obern Klassen behufs Erlangung des Rechts zum einjährigen freiwilligen Militair-Dienst ausgestellt werden, sollen den hiefür erlassenen Vorschriften genau entsprechen.

V. d. K. P.-S. v. 26. April 1870. Die Durchschnitts-Frequenz des Semesters kann am einundzwanzigsten Tage nach Beginn des Semesters, oder wenn das Semester mit einem Donnerstag beginnt, am dritten Sonnabend aufgestellt werden, je nachdem die Aufnahme neuer Schüler abgeschlossen ist.

V. d. K. P.-S. v. 30. April 1870. Das Zeugniss des Schulamts-Kandidaten Gortzitza über sein am Königl. Gymnasium zu Lyck absolvirtes Probejahr wird übersandt.

V. d. K. P.-S. v. 5. Mai 1870. Die Zahl der jährlich einzusendenden Programme wird auf drei hundert und zwanzig erhöht.

V. d. K. P.-S. v. 7. Mai 1870. Der pensionirte Sergeant J. Kegel in Lötzen wird als Kastellan am Königl. Gymnasio angestellt.

V. d. K. P.-S. v. 7. Mai 1870. Die Anträge auf Remuneration der im Jahre ertheilten Ueberstunden sollen bis zum 1. Dec. beim Königl. Provinzial-Schulkollegium gestellt werden.

V. d. K. P.-S. v. 9. Mai 1870. Der Lehrplan und der Stundenplan sollen spätestens vier Wochen vor Beginn des Schuljahres dem Kgl. Provinzial-Schulkollegium eingesandt werden.

V. d. K. P.-S. v. 13. Mai 1870. Die Beschäftigung des Schulamts-Candidaten Dr. Gebhardi wird genehmigt.

V. d. K. P.-S. v. 13. Mai 1870. Dem Dr. Jacobi sind bis zum 15. Juùi c. für jede Stunde 15 Sgr. aus der Anstalts-Kasse zu zahlen.

V. d. K. P.-S. v. 25. Mai 1870. Die besondern Hebungen behufs Unterhaltung und Erweiterung der Schüler-Bibliotheken sollen wegfallen und nöthigenfalls in der Erhöhung des Schulgeldes ein Ersatz dafür gesucht werden.

V. d. K. P.-S. v. 27. Mai 1870. Dem Oberlehrer Kuhse wird zur Wiederherstellung seiner Gesundheit ein sechswöchentlicher Urlaub ertheilt.

V. d. K. Ministerii v. 31. Mai 1870. Das Gehalt des Lehrers an der Vorschule wird um fünfzig Thaler erhöht.

V. d. K. P.-S. v. 8. Juni 1870. Verwendung der aus dem Jahre 1869 verbliebenen verfügbaren Mittel zu Remunerationen und Unterstützungen 195 Thlr., sowie zur Vermehrung der Lehrmittel 20 Thlr.

V. d. K. Pr.-S. v. 9. Juni 1870. Der nächste Cursus der Central-Turnanstalt für Civil-Eleven wird zu Anfang Oct. d. J. beginnen. Eine Zusammenstellung der Bestimmungen über die Aufnahme in die Anstalt und über die zu gewährenden Unterstützungen wird mitgetheilt.

V. d. K. P.-S. v. 9. Juni 1870. Das Gehalt des Kastellans wird vom 1. Oct. 1870 ab auf 180 Thlr. incl. Wohnung erhöht.

V. d. K. Ministerii v. 11. Juni 1870. Das Gehalt des Direktors, der dritten Oberlehrer-Stelle und der fünf ersten ordentlichen Lehrer-Stellen wird, und zwar vom 1. Jan. d. J. ab, so weit erhöht, dass nunmehr der Normal-Etat für das Königl. Gymnasium in Lyck zur Ausführung gebracht ist.

V. d. K. P.-S. v. 14. Juni 1870. Von der Vermehrung der Zahl der Portionen des Stipendii Masoviani soll vorläufig abgesehen, hingegen alle Portionen allmählich auf 30 Thlr. erhöht werden.

V. d. K. P.-S. v. 18. Juni 1870. Neuer Staats-Zuschuss von 395 Thlr. und Erhöhung der Lehrer-Gehälter (um 400 Thlr.) auf den Normal-Etat.

V. d. K. P.-S. v. 24. Juni 1870. Obwohl auf der nächstjährigen Direktoren-Konferenz der Provinz die Gesundheitspflege in den höheren Schulen zu eingehender Erörterung kommen wird, so werden doch schon jetzt die Direktoren und Lehrer auf die Nothwendigkeit häufiger Luftreinigung und Lufterneuerung in den Schulzimmern aufmerksam gemacht. Zu diesem Behufe sollen nicht allein die Klassen vor Beginn, nach Schluss des Unterrichts und während der Pausen offen gehalten, sondern auch geeignete Ventilations-Vorrichtungen angebracht werden.

V. d. K. Ministerii v. 18. Juni, d. K. P.-S. v. 28. Juni 1870. Vom Jahre 1871 ab soll die Kenntniss der ersten nothwendigen Hilfeleistungen in Fällen von Körperverletzungen bei der Turnlehrerprüfung unbedingt gefordert werden. Als Hilfsmittel zur Erwerbung der nöthigen Kenntnisse werden empfohlen:

Dr. de Corval, die erste Hilfe bei Verletzungen und sonstigen Unglücksfällen;
Der Leitfaden zum Unterricht für die Lazarethgehilfen;
Dr. Roth, Grundriss der physiologischen Anatomie für Turnlehrer-Bildungs-Anstalten, im Anhang.

V. d. K. P.-S. v. 30. Juni 1870. Der Schluss des Schulunterrichts in diesem Jahre soll Sonnabend den 30. Juli, der Wiederanfang Donnerstag den 8. September stattfinden.

V. d. K. Ministerii v. 4. Juli 1870. Hauptzeitschrift für deutsches Alterthum wird von jetzt ab auf buchhändlerischem Wege zugehen.

V. d. K. P.-S. v. 9. Juli 1870. Die Vertretungskosten für den erkrankten Oberlehrer Kuhse sind bis auf 60 Thlr. monatlich aus den Mitteln der Anstalt zu decken.

V. d. K. P.-S. v. 18. Juli 1870. Da von denjenigen Primanern, welche sich jetzt der Maturitäts-Prüfung unterziehen wollen, voraussichtlich manche der Einstellung in das Heer gewärtig sind, so sollen sobald als möglich, wo es angeht, noch in den Ferien, die schriftlichen Arbeiten begonnen werden. Auch diejenigen Primaner, welche erst zu Ostern künftigen Jahres den zweijährigen Cursus zurückgelegt haben, aber schon jetzt sich der Abiturienten-Prüfung mit einiger Aussicht auf Erfolg unterziehen könnten, sind, sofern sie demnächst in das Heer eintreten, zur bevorstehenden Prüfung zuzulassen.

V. **Chronik der Anstalt.**

Das Schuljahr begann am Donnerstag den 9. September Vormittags 8 Uhr.

Am 10. October v. J. und am 3. Juli d. J. reichte der Herr Vicegeneral-Superintendent Consistorialrath Remus den Lehrern u. Schülern der Anstalt in der Kirche das heilige Abendmahl.

Die schon im vergangenen Schuljahre angebahnte Theilung der Prima in zwei subordinirte Coeten ist im Laufe des Schuljahres vollendet. Jeder der beiden Coeten umfasste zu Anfang des Sommer-Tertials 27 Schüler.

Mit dem Ende des Winter-Halbjahres schied der erste Oberlehrer Prof. Kostka aus dem Lehrer-Kollegium, dem er länger als 43 Jahre ununterbrochen angehört hatte. Durch langwierige und andauernde Krankheit, welche auch während des ihm bereitwilligst gewährten halbjährigen Urlaubes nicht aufhörte, sah er sich veranlasst, bei der hohen Behörde um seine Pensionirung einzukommen, welche ihm in der ehrenvollsten Weise gewährt wurde. Der Unterzeichnete hatte das Glück, ihm Namens des Königl. Provinzial-Schulkollegii als eine besondere Auszeichnung für seine treuen Dienste und als ein besonderes Pfand der Gnade Sr. Majestät des Königs im Kreise des Lehrer-Collegii den Rothen Adlerorden zu überreichen.

Wehmüthig war der Abschied des alten Lehrers von der Anstalt, von den Schülern, den Lehrern und den zur Entlassung der Abiturienten in der Aula versammelten Angehörigen der Schüler. Nach der Entlassung der Abiturienten drückte der Unterzeichnete mit bewegtem Herzen ihm noch einmal den Dank der Anstalt für seine derselben geleisteten Dienste aus, versicherte ihm, dass sein Andenken bei der Anstalt stets in Ehren bleiben werde und bat ihn, auch nach seinem Scheiden ein Freund des Kollegii und der Anstalt zu bleiben. Der Scheidende gab in wenig Worten, die oft von Schluchzen unterbrochen wurden, eine kurze Skizze von seiner Thätigkeit an der Anstalt, dankte dem Unterzeichneten, wie dem Lehrer-Kollegium, den Schülern und den Angehörigen der Schüler für die ihm stets bewiesene Theilnahme und Liebe, und hinterliess als sein Vermächtniss den Schülern das Wort der Schrift: Gehorchet euern Lehrern und folget ihnen, denn sie wachen über eure Seelen, als die da Rechenschaft geben sollen, auf dass sie es mit Freuden thun und nicht mit Seufzen; denn das ist euch nicht gut.

Am Mittage desselben Tages fand in dem grossen Saale des Herrn Konietzko ein Diner statt, welches dem Gefeierten seine Kollegen und Freunde, sowie seine frühern Schüler veranstaltet hatten. Nicht allein aus der Stadt und dem Kreise Lyck, sondern auch aus den angrenzenden Kreisen fand sich eine äusserst zahlreiche Festversammlung ein. Nachdem der Gerichts-Direktor Hertzog den Toast auf Seine Majestät den König ausgebracht und der Unterzeichnete in dem Toast auf den Gefeierten darzuthun versuchte, wie den Verdiensten desselben um das Gymnasium die Anerkennung der hohen Behörden, die Liebe der Schüler, die Achtung der Angehörigen in immer steigendem Maasse gefolgt sei, und nachdem die frühern Schüler als Zeichen ihrer Verehrung ihrem alten Lehrer die kostbarsten Geschenke (einen Ruhesessel, einen Pokal, einen Chronometer, ein Album mit ihren Photographien und Abbildungen des Gymnasii und der Stadt) überreicht, wusste namentlich Herr Pfarrer Schrage, gleichfalls ein früherer Schüler, die Versammlung in eine heitere Stimmung zu versetzen, indem er in ebenso launiger als drastischer Weise auseinandersetzte, wie wenig der Scheidende seine Schüler geschont, wie nachhaltig er sie stets zur Erfüllung ihrer Pflicht genöthigt hätte.

Der Scheidende hat der Anstalt seine Dienste nicht gänzlich entzogen, sondern gehört derselben noch als Rendant an.

In Folge der Pensionirung des Prof. Kostka rückten sämmtliche Oberlehrer und die sieben ersten ordentlichen Lehrer in höhere Stellen ein, und wurde der erste ordentliche Lehrer Kuhse zum Oberlehrer ernannt. Die siebente ordentliche Lehrerstelle wurde dem Dr. Embacher übertragen. Friedrich Wilhelm Embacher wurde den 9. März 1843 zu Gumbinnen geboren und ist daselbst zuerst auf der Bürgerschule, dann auf dem Gymnasium unterrichtet worden. Von dem letztern mit dem Zeugniss der Reife entlassen, bezog er Michaelis 1864 die Universität zu Königsberg, um sich namentlich historischen Studien zu widmen. Nachdem er daselbst vier Jahre studirt, wurde er auf Grund seiner Dissertation: Symbolae criticae ad Adalberti Hammaburgensis archiepiscopi historiam zum Doktor promovirt, unterzog sich im März und December 1869 ber Prüfung pro facultate docendi und erhielt ein Zeugniss ersten Grades. Nachdem er sein Probejahr am Königl. Gymnasium zu Gumbinnen absolvirt, erhielt er durch Verfügung des Königl. Provinzial-Schul-Kollegiums vom 17. März d. J. die siebente ordentliche Lehrerstelle am hiesigen Gymnasium.

Am 14. Juli feierte die Anstalt auf dem drei Viertelmeilen von der Stadt entfernten Gute Birkenwalde ihr Schulfest. Morgens 7 Uhr nach gemeinsamer Andacht marschirten die Schüler mit ihren Lehrern, eine Musikkapelle an der Spitze, aus und feierten auf den schönen waldumkränzten Plätzen des Gutes den Tag. Am Vormittag führten die untern Klassen unter Leitung ihrer Ordinarien Wettkämpfe im Bogen- und Blasrohr-Schiessen, im Lauf und im Sackhüpfen, aus. Am Nachmittag und Abend nahm hauptsächlich Stangenklettern, Tanz im Freien und die Aufführungen der Schüler auf einer im Freien errichteten Bühne das Interesse in Anspruch. Trotzdem es einige Stunden Nachmittags regnete, schenkten dennoch die Bewohner des Kreises und der Stadt Lyck in grosser Zahl dem Feste ihre Theilnahme.

Am 21. Februar und am 18. Juli d. J. fand unter dem Vorsitze des Kgl. Provinzial-Schulrathes Dr. Schrader die mündliche Prüfung der Abiturienten Statt. An dem ersten Termine wurde 9, am zweiten 14 Abiturienten das Zeugniss der Reife zuerkannt, und zwar wurden damals 1, jetzt 9 Abiturienten von der mündlichen Prüfung dispensirt. — In diesen Tagen findet unter dem Vorsitze des Direktors eine Prüfung derjenigen Primaner statt, welche durch ihr Klassenalter oder andere Umstände von der ersten Prüfung ausgeschlossen wurden, jetzt aber ins Feld zu ziehen beabsichtigen.

Der Gesundheitszustand unserer Schüler im verflossenen Schuljahr war ein wohlbefriedigender. Erkrankungen am Typhus und überhaupt schwerern Krankheiten sind sehr selten vorgekommen. Im Februar musste allerdings wegen des starken Frostes, welcher bis 25° R. stieg, der Unterricht in den ersten Morgenstunden etwa eine Woche ausgesetzt, und den Angehörigen, namentlich der kleineren Schüler, anheimgestellt werden, die letztern nach der Schule zu schicken oder zu Hause zu behalten. Leider hat die Anstalt durch den Tod einen lieben Schüler, welcher in jeder Beziehung zu den besten Hoffnungen berechtigte, den Unter-Tertianer Joseph Neuber aus Wengoyen im Kreise Rössel verloren. Gott tröste die schwer geprüften Eltern! Uns wird das Andenken des früh Vollendeten bleiben.

Von dem Lehrer - Kollegium musste nicht allein der Professor Kostka den ganzen Winter hindurch vertreten werden, sondern auch vielfache Erkrankungen anderer Lehrer, sowie die Thätigkeit einiger als Geschworene, machten häufig Vertretungen nothwendig. Dazu kam, dass der Gymnasiallehrer Bock und der Hilfslehrer Schulamts-Kandidat Gortzitza auf 6 Wochen, welche zum Theil in die grossen Ferien, zum Theil in das erste Tertial des Schuljahres fielen, der letztere ausserdem zu Anfang des dritten Tertials auf 4 Wochen, der erstere nach Pfingsten auf zehn Tage beurlaubt wurden.

Wie in jedem Jahre, so hat auch im verflossenen Jahre unsere Anstalt zahlreiche Beweise von dem Wohlwollen der vorgesetzten Behörden erhalten, wodurch sie denselben zum ehrerbietigsten Danke verpflichtet ist. Nachdem erst im vorangegangenen Jahre das Gehalt von fünf Lehrerstellen, von der zweiten Oberlehrer-Stelle abwärts, um je fünfzig Thaler erhöht worden, ist durch Verfügung vom 18. Juni wiederum das Gehalt der ersten sechs ordentlichen Lehrerstellen um je 50 und das des Direktors um 100 Thlr. aus Staatsfonds vermehrt.

Nachdem es bekannt geworden, dass der Krieg mit Frankreich unvermeidlich sei, hat sich die allgemeine Begeisterung auch unserer Schule bemächtigt. Genährt wurde dieselbe auch dadurch, dass zwei Lehrer der Anstalt, die Herren Bock und Gortzitza II. als Offiziere in's Feld zogen. Ein grosser Theil der Schüler der obern Klassen meldete sich bei dem Unterzeichneten. Ein nicht unbedeutender Theil hat auch die Erlaubniss der Angehörigen schon erhalten, um in das Heer einzutreten. Will's Gott, so wird ein grosser Theil unserer Schüler für die verletzte Ehre ihres Königs und Vaterlandes in's Feld ziehen und den 1813 wohl verdienten Ruhm der Opferfreudigkeit der Ostpreussen erneuern.

Nr.	Namen der Abiturienten.	Geburtsort.	Alter. Jahre.	Aufenthalt im Gymn. Jahre.	Aufenthalt in Prima. Jahre.	Studium.	Universität.	Gewählter Beruf.
1	Ottomar Cludius	Schirwindt	20	2	2	Medicin	Königsberg	
2	Bernhardt Dorien	Lyck	18¼	9	2	Medicin	Berlin	
3	August Engel	Swentainen, Kr. Oletzko	20½	5½	2	Philologie	Königsberg	
4	Adolph Frenzel *	Oletzko	19¼	8	2	Jura	Königsberg	
5	Eugen Gusovius	Breitenhaide b. Johannisb.	20½	9	2½	Jura	Königsberg	
6	Fritz Reinboth	Gutterstedt bei Eisleben	18	5½	2		Berlin	Baufach.
7	August Romeike	Dombrowsken Kr. Lötzen	18¾	10	2	Medicin	Königsberg	
8	Franz Szielonka	Rosengarten b. Rastenb.	19½	1½	1½	Jura	Königsberg	
9	Herrmann Ziehe	Drygallen Kr. Johannisb.	21	2¼	2¼	Jura	Breslau	
10	Theodor Bandow *	Lyck	20	9½	2½	Philologie	Königsberg	
11	Emil Bilda *	Wiersbianken	20¾	6	2			Forstfach.
12	Carl Boehncke	Plebischken in Litthauen	18½	8¼	2	Jura		
13	Max Ebhardt *	Komorowen bei Arys	18	8¼	2	Jura		
14	Paul Fischer *	Sperling Kreis Angerburg	20½	6	2½			Forstfach.
15	Rudolph Fleischer	Rhein	18¼	6	2			Baufach.
16	Otto Koschorreck *	Claussen Kreis Lyck	22	3	2	Jura	Königsberg	
17	Herrmann Reinboth	Gutterstedt bei Eisleben	22¼	6	2½	Jura		
18	Fritz Reuter *	Lupken Kr. Johannisburg	19½	7	2			Landwirth.
19	Robert Saworra	Imionken Kreis Lyck	20¾	9	3			Steuerfach.
20	Rudolph Schink *	Philippken bei Kuminsko	21¼	6	2	Jura	Königsberg	
21	Max Springer *	Gerdauen	18	2	2	Philologie	Königsberg	
22	Hans v. Szczepanski	Lyck	18¾	1	2½			Militair.
23	Carl Unterberger *	Botschwingken K. Goldap	20	7½	2½	Theologie	Königsberg	

Die mit * Bezeichneten wurden vom mündlichen Examen dispensirt.

VI. Statistische Uebersicht.

1. Frequenz der Anstalt. Nach dem vorjährigen Programm zählte die Anstalt am 21. Juli v. J. . . . . 365 Schüler.

Abgegangen sind bis zum 21. Juli d. J.	78	„
	287	Schüler
Aufgenommen sind	87	Schüler
Also am 21. Juli d. J.	374	Schüler.

Davon sind in der Vorschule 51, in der Sexta 41, in der Quinta 52, in der Quarta 53, in der Tertia B. 48, in der Tertia A. 28. in der Secunda B. 24, in der Secunda A. 25, in der Prima B 27, in der Prima A. 25, zusammen 374.

Von den Abgegangenen sind 3 verwiesen, 13 mit dem Zeugniss der Reife entlassen.

VII. Lehrapparat.

1. Die Bibliothek des Gymnasiums ist theils durch Geschenke von dem Königl. Ministerium der geistlichen u. s. w. Angelegenheiten, theils aus dem zu diesem Zwecke bestimmten Fonds vermehrt worden.

2. Die Schülerbibliotheken sind aus eigenen Mitteln nicht unbeträchtlich erweitert worden, namentlich sind Abbildungen von Gegenständen des Alterthums beschafft und in obern Klassen aufgehängt worden.

3, 4. Die Bibliothek der Freibücher, die Sammlung physikalischer Instrumente wurden, so weit es die Fonds zuliessen, vervollständigt.

5. Der geographische Apparat ist durch Beschaffung von werthvollen neuen Karten bereichert.

6. Die Musikaliensammlung und namentlich die Sammlung von Vorzeichnungen hat eine wesentliche Vermehrung erfahren.

VIII. Stand des Stipendii Masoviani am 21. Juli 1870.

Nach dem Programm pro 1869 war der Bestand am 14. Juli 1869:

a. an hypothekarisch à 6 pro Cent angelegten Capitalien . .	2175	Thlr.	—	Sgr.	—	Pf.
b. bei der Kreis-Sparkasse vorläufig untergebracht	58	„	7	„	1	„
c. baar in der Kasse	2	„	27	„	2	„
in Summa	2236	Thlr.	4	Sgr.	3	Pf.

Seitdem sind hinzugekommen:

A. An neuen Beiträgen:

Von Herrn	Landrath Drewello in Lyck pro 1869 . . .	2	Thlr.
„	Kreisgerichts-Direktor Hertzog in Lyck pro 1869 .	2	„
„	Kreisgerichts-Rath Hubert „ „ .	1	„

Von Herrn	Kreisgerichts-Director Opitz in Lötzen	pro 1869 .	1	Thlr.	
„	Rechtsanwalt Wollmer in Lyck	„ .	1	„	
„	Rechtsanwalt Maschke „	„ .	1	„	
„	Bauinspektor Schmarsow „	„ .	1	„	
„	Kaufmann J. Schulemann „	„ .	2	„	
„	„ „ Migge „	„ .	1	„	
„	Kanzleirath Liedtke „	„ .	2	„	
„	Partikulier v. Straussen „	„ .	1	„	
„	Dr. Schmidt „	„ .	1	„	
„	Buchhändler Wiebe „	„ .	2	„	
„	Gymnasial-Lehrer Bock „	„ .	1	„	
„	„ Dr. Laves „	„ .	1	„	
„	Kreisrichter Strebe „	„ .	1	„	
„	Hauptmann von Streng in Drygallen	„ .	1	„	
„	Pfarrer Trescatis „	„ .	1	„	
„	Oberamtmann Hügenin „	„ .	1	„	
„	Domainenpächter Hügenin in Dombrowken	„ .	1	„	
„	Gutsbesitzer M. Goullon in Drygallen	„ .	1	„	
„	„ Ziehe in Neu-Drygallen	„ .	1	„	
„	Pfarrer Czygan in Rosinsko	„ .	1	„	
„	Kaufmann A. Alexander in Bialla	„ .	2	„	
„	Oberrechnungsrath Steppuhn in Potsdam	„ .	2	„	
„	Pfarrer Kuhr in Gonsken	„ .	1	„	
„	Gymnasial-Direktor Dr. Hampke	pro 1870 . .	4	„	
Von Frau	Kreisger.-Direktor Meyherr in Marggrabowa	pro 1869	1	„	
Von Herrn	Apotheker Lubenau „	„	1	„	
„	Kaufmann O. Zimmermann „	„	1	„	
„	Prediger Kohtz „	„	—	„	15 Sgr.
„	Kaufmann E. Zimmermann „	„	—	„	15 „
„	Kreisgerichts-Rath Pianka „	„	—	„	15 „
„	Kreisrichter Hassenstein in Lyck	„	1	„	
„	Kreisrichter Vogt in Marggrabowa	„	1	„	
„	Dr. Tribukait „	„	1	„	
„	Superintendent Schellong „	„	1	„	
„	Pfarrer Czypulowski in Arys	„	2	„	
„	„ Dziobek in Mierunsken	„	—	„	15 „
„	„ Skrodzki in Kallinowen	„	3	„	
„	„ Prophet in Pissanitzen	„	1	„	
„	„ Skrzeczka in Grabnick	„	1	„	
„	„ Stengel in Szabienen	„	2	„	
„	„ Gayk in Schimionken	pro 1869 u. 1870	2	„	
„	Gutsbesitzer Gottowy in Grabnick	pro 1869	1	„	
„	Pfarrer Rhein in Eckertsberg	„	1	„	
„	Consistorialrath Heinrici in Gumbinnen	pro 1869 u. 1870	2	„	

Von Herrn Gymnasial-Direktor Dr. Schaper in Posen pro 1870	1 Thlr.			
„ „ Fabian in Lyck „	2 „			
„ Oberlehrer Kuhse in Lyck „	2 „			
Vom hiesigen Gesangverein	2 „			
zusammen an Beiträgen	68 Thlr.			
B. An Hypotheken und andern Zinsen . . .	127 „	10 Sgr.	5 Pf.	
in Summa also neue Einnahmen	195 Thlr.	10 Sgr.	5 Pf.	

Davon ab die Ausgabe vom 14. Juli 1869 bis 21. Juli 1870

A. An Stipendien . . .	101 Thlr.	7 Sgr.	6 Pf.			
B. An Verwaltungskosten u. Porto	11 „	3 „	3 „			
zusammen mit				112 „	10 „	9 „
bleibt				82 Thlr.	29 Sgr.	8 Pf.
dazu der Bestand nach dem Programm pro 1869				2236 „	4 „	3 „
mithin am 21. Juli 1870 Bestand				2319 Thlr.	3 Sgr.	11 Pf.

Hiervon sind:

A. Hypothekarisch à 6 pro Cent untergebracht . .	2175 „	— „	— „
B. in der Kreissparkasse vorläufig angelegt . . .	91 „	19 „	6 „
C. baar in der Kasse	52 „	14 „	5 „
zusammen wie oben	2319 Thlr.	3 Sgr.	11 Pf.

Von den vier Stipendien ist nach dem im vorjährigen Programme mitgetheilten Beschlusse des Curatoriums eins um 5 Thlr. auf 30 Thlr. jährlich von Ostern d. J. ab erhöht. Die Stipendiaten sind seit Ostern d. J. der Ober-Primaner Nieszytka, welchem die erhöhte Portion von 30 Thlr. und auf ein halbes Jahr eine Portion von 25 Thlr., und die beiden Unter-Primaner Wegner und Sauer, welchen je eine Portion à 25 Thlr. jährlich verliehen ist. Das Curatorium besteht gegenwärtig aus dem Direktor und den beiden Oberlehrern Gortzitza und Dr. Horch. Die Kasse verwaltet nach wie vor der Gymnasial-Kassen-Rendant, Professor Kostka.

Indem wir den oben genannten Wohlthätern für die dem Stipendio Masoviano überwiesenen Gaben auf das Wärmste danken, bitten wir sie dringend im Wohlthun nicht zu ermüden, indem wir versichern, dass von den vielen bedürftigen Schülern unserer Anstalt nur befähigte und würdige diese Wohlthat geniessen.

Oeffentliche Prüfung.

Donnerstag den 28. Juli.

Vormittags von 8 Uhr ab.

Choral: Allein Gott in der Höh' sei Ehr'.

Vorschule: Anschauungsübungen. Engelke.

Lesen: Engelke.

Aus der Vorschule deklamiren: Max Laves und John Maschke: Der Knabe und der Sperling.
Carl Contag: Vom brummenden Kater. Georg Panzer: Die Schulkinder.
Emil Mueller: Vom Mäuschen.
Sexta: Latein. Jacobi.
Religion. Embacher.
Aus Sexta deklamiren: Schawaller I.: Feldmarschall Blücher. Stannius: Die Opfer zu Wesel. Arens: Schwäbische Kunde.
Gesang: Sonntagslied. Für Kinderstimmen.

Pause.

Gesang: Morgenlied von Karl M. v. Weber. Für Kinderstimmen.
Quinta: Geographie. Krüger.
Gesangübungen. Krüger.
Aus Quinta deklamiren: Flatau: der treue Reiter. Sdroyek: der siebzehnte Lenz 1813.
Quarta: Geschichte. Kalanke.
Griechisch. Gortzitza I.
Aus Quarta deklamiren: Mitzkowski: Böser Markt von Chamisso. Schumann: Die Sonne bringt es an den Tag. Leitner: Der Reiter und der Bodensee von G. Schwab.
Schlussgesang: Waldlied von Weber. Für Kinderstimmen.

Nachmittags von 3 Uhr ab.

Gesang: Der ambrosianische Lobgesang. Für Kinderstimmen.
Unter-Tertia: Latein, Prosa. Laves II.
Französisch. Laves I.
Aus Unter-Tertia deklamiren: Gyssling: Vaterlandslied. Pagio: Jägerlied.
Ober-Tertia: Geographie. Embacher.
Ovid. Gebhardi.
Aus Ober-Tertia deklamiren: Wittig: Drei geharnischte Sonette. Grabowski: Harras, der kühne Springer. Gottsched: Kaiser Otto I.
Unter-Secunda: Griechisch. Ebinger.
Deutsch. Laves I.
Aus Unter-Secunda deklamiren: Frey und Denzer: Dialog aus Wallenstein.
Grabowski: Die Kaiserwahl.
Schlussgesang: Waldlied von Abt. Für Männerchor.

Freitag den 29. Juli.

Vormittags von 8 Uhr ab.

Choral: Ein feste Burg.
Ober-Secunda: Religion. Kalanke.
Französisch. Horch.
Aus Ober-Secunda deklamiren: Riemasch und de la Terrasse: Dialog aus Heinrich VI.
Unter-Prima: Horaz. Hampke.
Griechisch: Kopetsch.

Ober-Prima: Geschichte. Horch.
Homer. Gortzitza.
Gesang: Abschnitte aus der Schöpfung von Haydn.

Pause.

Gesang: Abschiedslied von Tschirch. Für Männerchor.
Rede des Abiturienten Fischer: Die Herrlichkeit des Rheinstromes.
Rede des Primaners Bieler: Welche Eigenthümlichkeiten zeichnen die Freiheitskriege im Jahre 1813—1815 von allen aus.
Entlassung der Abiturienten durch den Direktor.
Gesang: Vaterlandsliebe von Kinckel. Gemischter Chor.

Es wird in Erinnerung gebracht, dass die abgehenden Schüler verpflichtet sind, das Schulgeld auch für das kommende Quartal zu bezahlen, wenn ihr Abgang von ihren Angehörigen nicht mindestens 14 Tage vor dem Schluss des Quartals dem Director angemeldet ist.

Die geehrten Angehörigen der Schüler mache ich ergebenst darauf aufmerksam, dass, da nunmehr der Cursus in den einzelnen Klassen ununterbrochen von Michaelis zu Michaelis dauert, es am wünschenswerthesten ist, die Schüler nur zu Michaelis der Schule zu übergeben.

Das neue Schuljahr beginnt Donnerstag den 8. September Vormittags 8 Uhr. Zum Empfang neu aufzunehmender Schüler ist der Unterzeichnete von Montag dem 5. September an bereit.

Prof. Dr. H. Hampke.

Die Lemniskaten.

§. 1. Definition und Grundgleichungen.

Wenn man über einer gegebenen Grundlinie Dreiecke zeichnet, in denen das Product aus den beiden anderen Seiten constant ist, so liegen die Spitzen aller Dreiecke in einer Lemniskate.

(Fig. 1.) Es sei AB die gegebene Grundlinie $= 2c$, $CA \times CB = a^2$. Nimmt man den Punkt O in der Mitte zwischen A und B als den Anfang der rechtwinkligen Coordinaten an, so ist $AC = \sqrt{(c+x)^2 + y^2}$, $BC = \sqrt{(c-x)^2 + y^2}$, folglich wird die Lemniskate durch die Gleichung $a^2 = \sqrt{\{(c+x)^2 + y^2\}\{(c-x)^2 + y^2\}}$ charakterisirt, welche sich auf die Form

$$\text{1)} \qquad (x^2 + y^2)^2 - 2c^2(x^2 - y^2) + c^4 - a^4 = o$$

bringen lässt. Wählt man Polarcoordinaten, so ist der Radius-Vector $r = \sqrt{x^2 + y^2}$, und wenn φ den Polarwinkel bezeichnet, $r \cos\varphi = x$, $r \sin\varphi = y$. Man erhält dann durch Substitution in 1)

$$\text{2)} \qquad \left\{ \begin{array}{l} r^4 - 2c^2 r^2 \cos 2\varphi + c^4 - a^4 = o, \text{ oder auch} \\ r^2 = c^2 \cos 2\varphi \pm \sqrt{a^4 - c^4 \sin^2 2\varphi}. \end{array} \right.$$

§. 2. Schnittpunkte der Curven mit den Axen.

Entwickelt man aus 1) den Werth von y, so ergiebt sich

$$\text{3)} \qquad y = \pm \sqrt{[- c^2 - x^2 + \sqrt{a^4 + 4c^2 x^2}]},$$

wo $\sqrt{(a^4 + 4c^2 x^2)}$ nur positiv zu nehmen ist. Berechnet man hieraus x, so findet man

$$\text{4)} \qquad x = \pm \sqrt{[c^2 - y^2 \pm \sqrt{(a^4 - 4c^2 y^2)}]},$$

wo $\sqrt{(a^4 - 4c^2 y^2)}$ positiv ist, wenn $r > c$, negativ, wenn $r < c$ ist.

Da $a^4 - c^4$ in Gl. 1) eine endliche constante Grösse ist, so kann weder $x^2 + y^2$ noch auch $x^2 - y^2$ unendlich sein; folglich kann auch keine der Coordinaten unendlich sein, und es giebt also bei keiner Lemniskate unendliche Zweige, oder Asymptoten, vielmehr ist jede dieser Curven in bestimmte Grenzen eingeschlossen. Setzt man in 3) $y = o$, so wird $x = \pm \sqrt{c^2 \pm a^2}$; setzt man in 4) $x = o$, so wird $y = \pm \sqrt{a^2 - c^2}$. Die Axe der x wird also im allgemeinen in 4, die Axe der y in 2 Punkten geschnitten. Die Lage dieser Punkte und überhaupt die Form der Curve ist von der Grösse von c und a abhängig, und man wird die Fälle $a < c$, $a = c$, $a > c$ zu berücksichtigen haben.

§. 3. **Normalen und Tangenten. Mittelpunkt.**

Die Differentiation der Gleichungen 3) und 4) liefert

5) $$\frac{dy}{dx} = \frac{x}{y} \cdot \frac{2c^2 - \sqrt{a^4 + 4c^2 x^2}}{\sqrt{a^4 + 4c^2 x^2}},$$

6) $$\frac{dx}{dy} = -\frac{y}{x} \cdot \frac{\pm\sqrt{a^4 - 4c^2 y^2} \pm 2c^2}{\pm\sqrt{a^4 - 4c^2 y^2}},$$

Die Vorzeichen nach den im vorigen §. gegebenen Bestimmungen, also mit Beziehung der oberen und unteren auf einander.

Da nach Gl. 3) $\sqrt{(a^4 + 4c^2 x^2)} = x^2 + y^2 + c^2 = r^2 + c^2$ ist, so lässt sich zunächst x und dann y durch r bestimmen, nämlich

7) $$x = \pm\frac{\sqrt{(r^2 + c^2)^2 - a^4}}{2c},\ y = \pm\frac{\sqrt{a^4 - (r^2 - c^2)^2}}{2c}.$$

Mit Benutzung dieser Werthe erhält man aus 5)

8) $$\begin{cases} \dfrac{dy}{dx} = \dfrac{c^2 - r^2}{c^2 + r^2} \cdot \dfrac{x}{y} = \dfrac{c^2 - r^2}{c^2 + r^2} \sqrt{\dfrac{(c^2 + r^2)^2 - a^4}{a^4 - (c^2 - r^2)^2}}, \\ \dfrac{dx}{dy} = \dfrac{c^2 + r^2}{c^2 - r^2} \cdot \dfrac{y}{x}. \end{cases}$$

Die allgemeine Gleichung einer im Punkte xy berührenden Linie, nämlich

$$\mu - y = \frac{dy}{dx}(z - x) \text{ oder } z - x = \frac{dx}{dy}(\mu - y)$$

nimmt demnach für die Lemniskaten die Form an

$$\mu - y = \frac{x}{y} \cdot \frac{2c^2 - \sqrt{a^4 + 4c^2 x^2}}{\sqrt{a^4 + 4c^2 x^2}}(z - x).$$

Setzt man $\mu = o$ und benutzt Gl. 7), so wird $x = z + \frac{y^2}{x} \cdot \frac{c^2 + r^2}{c^2 - r^2}$, und die Differenz $x - z = y \cdot \frac{dx}{dy}$ ist dann die Subtangente s des Punktes xy, also

9) $$s = \frac{y^2}{x} \cdot \frac{c^2 + r^2}{c^2 - r^2} = \frac{y^2}{x} \cdot \frac{\sqrt{(a^4 + 4c^2 x^2)}}{2c^2 - \sqrt{(a^4 + 4c^2 x^2)}}.$$

Die Tangente zwischen den Punkten (x, y) und (z, o) ist dann $t = \sqrt{(s^2 + y^2)}$ oder

10) $$t = \frac{y}{x} \cdot \frac{a^2 r}{c^2 - r^2}.$$

Für die Subnormale $\sigma = y \cdot \frac{dy}{dx}$ und die Normale $n = \sqrt{\sigma^2 + y^2}$ erhält man

11) $$\sigma = \frac{x(c^2 - r^2)}{c^2 + r^2},\ n = \frac{a^2 r}{c^2 + r^2}.$$

Der Subtangente s = x entspricht die durch den Anfang der Coordinaten gezogene Tangente. Es lassen sich aber nicht bei allen Lemniskaten solche Tangenten ziehen; denn Gl. 9) würde für diesen Fall übergehen in

$$x^4 + \left(\frac{a^4}{c^2} - c^2\right) x^2 = -a^4 \cdot \frac{a^4 - c^4}{4c^4},$$

woraus

$$x = \sqrt{\left[\frac{c^4 - a^4}{2c^2} \pm \sqrt{\frac{c^4 - a^4}{4}}\right]}$$

folgt. Für $a = c$ würde also x verschwinden; für $a > c$ würde x imaginär werden. Bei den Lemniskaten $a > c$ giebt es demnach keine Tangenten, welche durch den Anfang der Coordinaten gezogen werden könnten. Bei der Curve $a = c$ wird für $x = o$ auch $y = o$ (Gl. 3); die Curve geht dann also selbst durch den Anfang der Coordinaten hindurch. Für $a < c$ erhält die Subtangente den obigen reellen Werth. Um die Länge des diesem Werthe entsprechenden Radius-Vector zu bestimmen, kann Gl. 3) benutzt werden. Darnach ist $y^2 + x^2 = r^2 = - c^2 + \sqrt{a^4 \pm 4 c^2 x^2}$, d. i. hier $r^2 = - c^2 + \sqrt{[2c^4 - a^4 + 2c^2 \sqrt{c^4 - a^4}]}$, oder nach Ausziehung der Wurzel

$$r^2 = \sqrt{(c^2 - a^2)(c^2 + a^2)},$$

so dass also der betreffende Leitstrahl die mittl. Proportionale zwischen $\sqrt{c^2 - a^2}$ und $\sqrt{c^2 + a^2}$ ist.

Eine Subnormale, welche der Abscisse gleich wäre, giebt es nicht, denn es müsste nach Gl. 11) für $\sigma = x$ auch $c^2 - r^2 = c^2 + r^2$ sein, welche Relation nur für $r = o$, also für den Anfang d. Coord. Gültigkeit hat.

Bezeichnet ω den zwischen o^0 und 180^0 liegenden Winkel, welchen die Tangenten mit der positiven Richtung der Axe der x bildet, so ist $\tang \omega = \frac{dy}{dx} = \frac{x}{y} \cdot \frac{c^2 - r^2}{c^2 + r^2}$, und ω ist spitz, wenn $c^2 - r^2$ und $\frac{x}{y}$ zugleich positiv oder negativ sind, stumpf, wenn der eine Factor positiv, der andere negativ ist. Da nun $\frac{+x}{+y} = \frac{-x}{-y}$ und $\frac{+x}{-y} = \frac{-x}{+y}$ ist, so folgt, dass für jede Lemniskate die Tangenten an 2 diametral entgegengesetzten Punkten denselben Winkel mit der Axe bilden, also parallel sind. **Jede Lemniskate muss also 2 symmetrisch gestaltete Hälften haben.** Für diejenigen Punkte, in denen je 2 dieser Tangenten auch der Axe der x parallel sind, muss $\omega = o^0$ oder $\omega = 180^0$, d. h. $\tang \omega = o$ sein. Dann wird entweder $c = r$, oder $\frac{x}{y} = o$. Diese letztere Gleichung führt auf $x = o$, wenn nicht, was für $a = c$ möglich ist, zugleich auf $y = o$ wird. Tangenten, welche der Abscissenaxe parallel sind, finden sich also im allgemeinen in den Schnittpunkten der Curve mit demjenigen Kreise, dessen Halbmesser $r = c$ ist, und ausserdem in den Schnittpunkten der Curve mit der Ordinatenaxe. Ebendasselbe folgt übrigens auch aus Gl. 10) denn t wird unendlich für $x = o$ und für $c = r$. Für diejenigen Tangenten, welche der Axe der y parallel sind, wird $\omega = 90^0$, also $\tang \omega$ unendlich, mithin $y = o$, wenn nicht, wie vorher, auch hier zugleich $x = o$ wird. Im allgem. giebt es daher nur in den Schnittpunkten der Curve mit der Axe der x solche Tangenten, welche der Ordinatenaxe parallel sind.

Da die Berührungspunkte zweier parallelen Tangenten nach entgegengesetzten Richtungen gleich weit vom Anfang der Coord. entfernt sind, so erscheint dieser Anfang als **Mittelpunkt der Lemniskate.**

§. 4. **Form der Lemniskate** $a < c$. (Fig. 4).

Nach §. 2 schneidet diese Curve die Abscissenaxe in vier Punkten, die Ordinatenaxe gar nicht, denn $y = \sqrt{a^2 - c^2}$ ist hier imaginär. **Die Curve besteht daher aus 2 ganz** von einander getrennten symmetrischen Hälften. Um ihre grössten und kleinsten Ausdehnungen in der Richtung der Axen zu bestimmen, differenzire man die Gleichungen 8) zum zweiten Mal. Man erhält

$$\textbf{12)} \quad \frac{d^2y}{dx^2} = \frac{a^4(a^4 - c^4 - 3r^4)}{2y^3(r^2+c^2)^3} = \frac{4c^3 a^4(a^4 - c^4 - 3r^4)}{(r^2+c^2)^3[a^4 - (r^2-c^2)^2]^{3/2}},$$

$$\textbf{13)} \quad \frac{d^2x}{dy^2} = -\frac{d^2y}{dx^2}\cdot\left(\frac{dx}{dy}\right)^3 = \frac{a^4(a^4 - c^4 - 3r^4)}{2x^3(r^2-c^2)^3}.$$

Aus $\frac{dy}{dx} = o$ folgt, da hier x nicht $= o$ sein kann, nur $r = c$, also $y = \pm\frac{a^2}{2c}$; dann ist $\frac{d^2y}{dx^2}$ negativ für positive y und positiv für negative y, also $\frac{a^2}{2c}$ ein Maximum, $-\frac{a^2}{2c}$ ein Minimum. Die grösste Breite der Curve ist also $\frac{a^2}{c}$, d. h., weil $\frac{a}{c} < 1$, kleiner als a.

Aus $\frac{dx}{dy} = o$ folgt $y = o$, also $r = x = \pm\sqrt{c^2 \pm a^2}$. Nun ist für $x = \pm\sqrt{c^2+a^2}$ immer $r > c$, $r^2 - c^2$ positiv, $\frac{d^2x}{dy^2}$ für positive x negativ, für negative x positiv; wenn aber $x = \pm\sqrt{c^2-a^2}$, immer $r < c$, $r^2 - c^2$ negativ, $\frac{d^2x}{dy^2}$ für positive x positiv, für negative x negativ. Demnach $+\sqrt{c^2+a^2}$ und $-\sqrt{c^2-a^2}$ Maxima, $-\sqrt{c^2+a^2}$ und $+\sqrt{c^2-a^2}$ Minima, Die Länge der Curve in der Richtung der Abscissen ist daher höchstens $2\sqrt{c^2+a^2}$ und wird in der Mitte unterbrochen durch einen Raum von der Länge $2\sqrt{c^2-a^2}$. Die beiden Hälften unserer Curve $a < c$ sind, jede für sich allein, geschlossene kleinere Curven. Denkt man sich vom Mittelpunkte aus Tangenten an diese Theil-Curven gezogen, so lässt sich der von diesen eingeschlossene Winkel 2φ bestimmen, wenn man in die Gleichung $\cos\varphi = \frac{x}{r}$ die Werthe von x und r aus § 3 substituirt. Man erhält

$$\cos\varphi = \sqrt{\frac{\sqrt{c^4 - a^4} + c^2}{2c^2}}.$$

Je kleiner a wird in Vergleich mit c, desto mehr nähert sich $\cos\varphi$ der Einheit, φ der Null. Je mehr a der Länge von c gleich wird, nähert sich $\cos\varphi$ dem Werthe $\sqrt{\frac{1}{2}}$, φ also 45°. Die Theil-Curven liegen demnach zwischen Tangentenwinkeln, welche immer $< 90°$ sind. Die Längsdurchmesser derselben sind nach dem Obigen $= \sqrt{c^2+a^2} - \sqrt{c^2-a^2}$, also desto grösser, je grösser a wird.

§ 5. Form der Lemniskate $a = c$. (Fig. 5.)

Die Form der vorher betrachteten Curve $a < c$ geht, wenn a wächst, allmälig über in die Form der Curve $a = c$, bei der nun beide bisher getrennten Hälften in einem einzigen Punkte zusammenstossen. Die Gestalt der Curve $a = c$ nähert sich einer liegenden 8, oder einer Schleife (lemniscus), und sie ist es, welche zuerst von Jacob Bernoulli aufgefunden und als Lemniskate bezeichnet wurde. Ihre speciellen Gleichungen, aus 1) und 2) abgeleitet, sind:

$$\textbf{14)} \quad \begin{cases} (x^2+y^2)^2 - 2c^2(x^2-y^2) = o, \\ r^4 - 2c^2 r^2 \cos 2\varphi = o. \end{cases}$$

Für $y = o$ wird x entweder $= o$, oder $= \pm c\sqrt{2}$; für $x = o$ wird stets auch $y = o$. Demnach geht die Curve kreuzweis durch den Anfang der Coordinaten, und zwar, wie sich aus der Gleichung des vorigen § für $\cos\varphi$ leicht ergiebt, unter einem rechten Tangentenwinkel. Die Grösse dieses Winkels lässt sich auch aus Gl. 14 folgern, denn für $x = y = o$ wird auch $r = o$, mithin $\cos 2\varphi = \frac{r^2}{2c^2} = o$, $\varphi = 45^0$ oder $= 135^0$.

Aus $\frac{dy}{dx} = o$ folgt für $a = c$ nur $c^2 - r^2 = o$, $c = r$, und für diesen Werth wird $\frac{d^2y}{dx^2} = -\frac{3}{2c}$, also negativ, und die zugehörige Ordinate erhält, wenn positiv, ihren grössten Werth $+\frac{c}{2}$, wenn negativ, ihren kleinsten $-\frac{c}{2}$. Die Breite der Curve ist also $= c$. Aus $\frac{dx}{dy} = o$ folgt nur $y = o$, also $x = o$ oder $\pm c\sqrt{2}$. (Gl. 4). Ist $x = o$, so ist auch $r = o$, $\frac{d^2x}{dy^2} = \frac{o}{o}$; es findet weder ein Maximum noch ein Minimum statt. Ist $x = \pm c\sqrt{2}$, so ist $r = c\sqrt{2}$, also $r > c$, $\frac{d^2x}{dy^2}$ für posit. x negativ, für negat. x positiv, mithin $+c\sqrt{2}$ die grösste, $-c\sqrt{2}$ die kleinste Abscisse, und die Längenausdehnung der Curve $= 2c\sqrt{2}$.

Sowohl bei dieser Lemniskate, als auch bei der vorigen gehören die längsten und auch die kleinsten Abscissen zu den Schnittpunkten der Curve mit der x-Axe, so dass in der Richtung dieser Axe keine Einbiegungen der Curven vorhanden sind. Ebenso wenig haben die beiden Hälften dieser Curven zu beiden Seiten des Mittelpunktes noch besondere Einbiegungen, da die grössten Ordinaten denjenigen Punkten angehören, für welche $r = c$ ist und durch welche nach §. 3 Tangenten parallel der x-Axe gezogen werden können.

§. 6. **Formen der Lemniskate** $a > c$.

Die Schnittpunkte dieser Curven mit den Axen sind durch $x = \pm\sqrt{c^2 \pm a^2}$ und $y = \pm\sqrt{a^2 - c^2}$ bestimmt, und da $\sqrt{c^2 - a^2}$ hier imaginär ist, so giebt es nur 2 Schnittpunkte auf jeder der beiden Axen. In ähnlicher Weise wie bei den vorigen Lemniskaten lässt sich auch hier leicht schliessen, dass die Schnittpunkte mit der x-Axe zugleich die Maxima und Minima der Abscissen bestimmen, und dass also in dieser Richtung keine Einbiegungen der Curven statthaben. Setzt man $\frac{dy}{dx} = o$, so ist entweder $c^2 - r = o$, oder $(c^2 + r^2)^2 - a^4 = o$, d. h. entweder $r = c$, oder $r = \sqrt{a^2 - c^2}$. Für $r = c$ ist $y = \pm\frac{a^2}{2c}$; für $r = \sqrt{a^2 - c^2}$ ist $y = \pm\sqrt{a^2 - c^2}$. Das Vorzeichen von $\frac{d^2y}{dx^2}$ (Gl. 12) hängt in beiden Fällen von dem Vorzeichen von $a^4 = 4c^4$, d. i. von $a^2 - 2c^2$ ab. Man wird daher wieder drei besondere Fälle zu unterscheiden haben, $a^2 < 2c^2$, $a^2 = 2c^2$, $a^2 > 2c^2$. Auch ist zu berücksichtigen, dass der Bedingung $r = c$ nicht immer genügt werden kann; denn für $r = c$ wird (Gl. 7) $x = \pm\frac{\sqrt{4c^4 - a^4}}{2c}$, bleibt also nur so lange rell, als $2c^2 \geqq a^2$ ist; der Fall $r = c$ ist demnach für $a^2 > 2c^2$ unmöglich. Die Maxima und Minima der Ordinaten mögen demnach zunächst für $a^2 < 2c^2$ festgestellt werden.

§. 7. **Die Curve** $a > c$, $a^2 < 2c^2$. (Fig. 6).

Für $r = c$, also $y = \pm \frac{a^2}{2c}$ ist $\frac{d^2y}{dx^2}$ negativ für positive y, positiv für negative y, daher $\frac{a^2}{2c}$ eine grösste, $-\frac{a^2}{2c}$ eine kleinste Ordinate. Ist aber $r = \sqrt{a^2 - c^2}$, so ist $\frac{d^2y}{dx^2}$ positiv für positive y, negativ für negative y; daher $+\sqrt{a^2 - c^2}$ ein Minimum, $y = -\sqrt{a^2 - c^2}$ ein Maximum. Den Ordinaten $\frac{a^2}{2c}$ und $\sqrt{a^2 - c^2}$ entsprechen die Abscissen $\frac{\sqrt{4c^2 - a^4}}{2c}$ und o. Demnach ist diese Curve in der Nähe der Ordinatenaxe convex gegen die andere Axe, und zwar desto mehr, je grösser die Differenz $\frac{a^2}{2c} - \sqrt{a^2 - c^2}$, d. i. je grösser die Differenz $2c^2 - a^2$ ist, oder je kleiner a im Vergleich mit c ist, wenn nur überhaupt $a > c$ bleibt. Die Form dieser Curve nähert sich dann der Schleifenform der vorigen. In Fig. 6 ist $AB = 2c$, $AD = EF = \frac{a^2}{2c}$. Das genauere über Concavität und Convexität s. §. 10.

§. 8. **Die Curve** $a > c$, $a^2 = 2c^2$. (Fig. 7).

Wenn $r = c$ ist, was für $\frac{dy}{dx} = o$ hier immer der Fall ist, wird auch $y = r$ und (Gl. 7) $x = o$, so dass also der mit c als Halbmesser um den Mittelpunkt beschriebene Kreis die Lemniskate von innen berührt, und weil die längste Abscisse $\sqrt{c^2 + a^2} > r$ ist, von der Curve vollständig umschlossen wird. Der Werth von $y = r = c$ ist ein Maximum für positive, ein Minimum für negative Ordinaten; denn nach Gleichung 2) ist allgemein $\cos 2\varphi = \frac{r^4 - 3c^4}{2c^2\, r^2}$. Könnte nun r noch $< c$ werden, so müsste auch $\cos 2\varphi < \frac{c^4 - 3c^4}{2c^2\, r^2}$ oder $< -\frac{c^2}{r^2}$ sein können, d. h. für $r < c$ $\cos 2\varphi < -1$, was unmöglich ist. In der Richtung der y-Axe giebt es also hier keine convexe Einbiegung. Die Schleifenform ist vollständig verschwunden und dafür eine andere, einem gestreckten Kreise etwas ähnliche Form an die Stelle getreten. Das Verhältniss der Breite zur Länge ist $1 : \sqrt{3} = 1 : 1,732\ldots$

§. 9. **Die Curve** $a > c$, $a^2 > 2c^2$. (Fig. 8).

Diese Lemniskate hat in ihrer ganzen Länge von $x = -\sqrt{a^2 + c^2}$ bis $x = +\sqrt{a^2 + c^2}$ lauter reeller Abscissen. Nach Gl. 7 ist nun $x = \frac{\sqrt{(r^2 + c^2)^2 - a^4}}{2c}$, welcher Werth für $(r^2 + c^2)^2 > a^4$ oder $r^2 + c^2 > a^2$ reell ist. Für $r = c$ würde $a^2 < 2c^2$ folgen im Widerspruch mit der Bedingung $a^2 > 2c^2$. Wäre $r < c$, so müsste $r^2 + c^2 < 2c^2$, $a^2 < r^2 + c^2$, also ebenfalls $a^2 < 2c^2$ sein. Folglich ist stets $r > c$, $a^4 - c^4 > 3c^4$, $\frac{d^2y}{dx^2}$ negativ für positive y, positiv für negative y, die grösste Ordinate ist $\sqrt{a^2 - c^2}$, die kleinste $-\sqrt{a^2 - c^2}$, entsprechend dem Leitstrahl $r = \sqrt{a^2 - c^2}$. Ein Kreis mit r um den Mittelpunkt beschrieben, berührt also die Curve in der Ordinatenaxe, während der mit c beschriebene Kreis von der Curve überall absteht. Das Verhältniss ihrer Breite zur Länge ist $\sqrt{a^2 - c^2} : \sqrt{a^2 + c^2}$. Je grösser a in Vergleich mit c angenommen wird, desto mehr nähert es sich dem Verhältniss 1: 1, desto mehr nähert sich die Form dieser Lemniskate einem Kreise, wenn man will, einer Ellipse. Joh. Domin. Cassini, welcher Keplers Lehre von der elliptischen Bewegung der Planeten widersprach, glaubte die in Rede stehende Lemniskate als Planetencurve annehmen zu können. Nach ihm heisst dieselbe auch cassinische Curve. Er selbst nannte sie Ellipse.

§. 10. **Weiteres über Concavität und Convexität.**

Ganz allgemein ist eine Curve gegen die Abscissenaxe concav oder convex, jenachdem $f(x)$ und $f''(x)$ ungleiche oder gleiche Vorzeichen haben und wenn sie selbst nicht Null sind. Nun ist für die Lemniskaten (Gl. 3 und 12)

$$f(x) = \pm\sqrt{-c^2 - x^2 + \sqrt{a^4 + 4c^2 x^2}},$$

$$f''(x) = \frac{a^4(a^4 - c^4 - 3r^4)}{2y^3(r^2 + c^2)^3}.$$

Demgemäss haben $f(x)$ und $f''(x)$ für $a < c$ und $a = c$ stets ungleiche Vorzeichen, und diese beiden Curven sind also gegen die x-Axe stets concav. Für $a > c$ und $a^2 < 2c^2$ ist $a^4 - c^4 - 3r^4$ positiv oder negativ, jenachdem $\sqrt[4]{\frac{a^4 - c^4}{3}} > r$ oder $< r$ wird. Nun ist die grösste Länge des Radius-Vector $r = \sqrt{a^2 + c^2}$, und die in Rede stehende Curve ist daher von $r = \sqrt{a^4 + c^4}$ bis zu $r = \sqrt[4]{\frac{a^4 - c^1}{3}}$ concav; darauf, so lange $r < \sqrt[4]{\frac{a^4 - c^4}{3}}$ ist, convex. Die 4 Biegungspunkte der Curve, in denen Concavität und Convexität wechselt, entsprechen also dem Werthe $r = \sqrt[4]{\frac{a^4 - c^4}{3}}$. In den Curven $a^2 = 2c^2$ und $a^2 > 2c^2$, für welche nach dem Obigen die Bedingung $r < c$ nicht gilt, haben $f(x)$ und $f''(x)$ stets entgegengesetzte Zeichen, wesswegen die Curven gegen die x-Axe concav sind.

Zur Beurteilung der Krümmung gegen die Axe der y hat man (Gl. 4)

$$x = \varphi(y) = \pm\sqrt{c^2 - y^2 \pm \sqrt{a^4 - 4c^2 y^2}},$$

$$\varphi''(y) = \frac{a^4(a^4 - c^4 - 3r^4)}{2x^3(r^2 - c^2)^3}. \quad \text{(Gl. 13).}$$

Für $a < c$ ist $a^4 - c^4 - 3r^4$ negativ. Ist nun $r < c$, so haben $\varphi(y)$ und $\varphi''(y)$ gleiche, wenn $r > c$, ungleiche Vorzeichen. Daher ist derjenige Curventheil, für welchen $r > c$ ist, concav, der andere, für welchen $r < c$ ist, convex gegen die Ordinatenaxe. Ganz dasselbe gilt für die Curve $a = c$, nur dass hier im Mittelpunkt derselben, wo $r = x = y = o$, und $f'(x)$, $f''(x)$, $\varphi'(y)$, $\varphi''(y)$ die unbestimmte Form $\frac{o}{o}$ erhalten, die convexe Krümmung sich gewissermassen zu einem rechten Winkel zuspitzt. (Vergl. §. 5). Bei der Curve $a > c$ und $a^2 < 2c^2$ ist $a^4 - c^4 - 3r^4$ positiv oder negativ, jenachdem $\sqrt[4]{\frac{a^4 - c^4}{3}} > r$ oder $< r$ ist. Setzt man $r < \sqrt[4]{\frac{a^4 - c^4}{3}}$, so ist zugleich $r < c$, demnach die Vorzeichen von $\varphi(y)$ und $\varphi''(y)$ ungleich, die Curve also für diesen Theil concav. Wird dann $r > \sqrt[4]{\frac{a^4 - c^4}{3}}$ so haben $\varphi(y)$ und

$\varphi''(y)$, so lange $r < c$ ist, gleiche Zeichen, wenn $r > c$, ungleiche; daher wird die Curve von $r = \sqrt[4]{\frac{a^4 - c^4}{3}}$ ab zunächst convex, und dann von $r = c$ ab wiederum concav gegen die Axe der y.

In Fig. 6 ist $\angle$ HGO $= 30^0$, OG $= \sqrt{a^2 + c^2}$, OH $=$ OG tang $30^0 = \sqrt{\frac{a^2 + c^2}{3}}$, OK $= \sqrt{a^2 - c^2}$, OL $=$ OM $= \sqrt[4]{\frac{a^4 - c^4}{3}}$.

In den beiden Curven $a^2 = 2c^2$ und $a^2 > 2c^2$, wo, wenn $\varphi(y)$ und $\varphi''(y)$ nicht Null sind, r immer $> c$ ist, haben diese beiden Functionen immer ungleiche Vorzeichen, die Curven sind also auch gegen die Axe der y, ebenso wie gegen die Axe der x, concav.

§ 11. Construction der Lemniskaten.

Da die 4 Quadranten der Curve unter sich congruent sind, so genügt es, die Zeichnung eines einzigen Quadranten anzugeben.

Man nehme willkürlich eine Linie 2c als Dreiecks-Basis an; darüber beschreibe man ein Dreieck mittelst zweier anderer Linien, welche man durch Verwandlung eines Quadrats a^2 in ein Rechteck leicht erhalten kann. In Fig. 2 z. B. ist $a^2 = AB^2 = BQ$. BP $=$ BQ, $BP_{,,}$ p und $p_{,}$ sind willkürlich angenommene Punkte. In Fig. 3 ist MNQP ein Rhombus mit der Seite a, B, $B_{,}$, B_2, B_3, ... willkürlich angenommene, BB : MP $=$ PQ : QA, also MP . PQ $= a^2 =$ MB . QA; ebenso $a^2 = MB_{,} . QA_{,}$ u. s. w. Dabei versteht sich von selbst, dass die Linien MB, $MB_{,}$, ... so gewählt werden müssen, dass MB $+$ QA $> 2c$ ist. Die Spitzen aller Dreiecke sind dann stetig zu verbinden, um die Lemniskate zu erhalten. Es empfiehlt sich, diejenigen Punkte nach § 4—9 zuerst aufzusuchen, welche den grössten und kleinsten Coordinaten und besonderen Biegungen der Curve entsprechen. Die Fig. 4 bis 8 stellen die 5 verschiedenen Formen dar. Fig. 4 entspricht $a < c$, und zwar $a = \frac{15}{16}c$; in Fig. 5 ist $a = c$, Fig. 6 $a > c$ und zwar $a^2 < 2c^2$, $a = {}^{16}/_{15}\,c$; Fig. 7 $a^2 = 2c^2$; Fig. 8 $a^2 > 2c^2$, $a = {}^{15}/_{7}\,c$. In einzelnen Fällen sind auch andere Constructions-Methoden, als die oben erwähnten, bequem. Für $a = c$ z. B. ist (Gl. 7) $\frac{x}{r} = \cos\varphi = \frac{\sqrt{r^2 + 2c^2}}{2c}$; setzt man $2c^2 = b^2$, so wird $2c . \cos\varphi = \sqrt{r^2 + b^2}$; ist nun (Fig. 9) OA $= c =$ AD, über OD ein Halbkreis beschrieben, AE normal in A, so ist OE $= \sqrt{2c^2} = b =$ OF die grösste Abscisse; macht man die Normale FG $=$ OF, ferner FK $=$ irgend einen angenommenen Radius-Vector r, so wird ein um O mit dem Halbmesser OK beschriebener Bogen den Halbkreis in H schneiden, OH wird $=$ OK $= \sqrt{r^2 + b^2} = 2c . \cos$ DOH, also $\angle$ DOH $= \varphi$; dem angenommenen Leitstrahl FK entspricht also $\angle\varphi$, so dass, wenn nun OC $=$ FK gemacht wird, C ein Punkt der Lemniskate sein wird.

§. 12. Construction der Tangenten.

Eine allgemein gültige Construction ist längst von Steiner angegeben. Sie ist in der Kürze folgende: Ist C der Punct der Lemniskate, für welchen die Tangente gezeichnet werden soll, so ziehe man die Leitstrahlen AC und BC (Fig. 7) und auf dieselben in A und B respect. die Normalen AD und BC unbestimmt lang: endlich lege man zwischen diese Normalen und durch sie begrenzt eine Linie FG, so, dass der Punct C diese Linie FG halbirt. Dann ist FG die gesuchte Tangente.

Speciell für die Lemniskate $a = c$ lässt sich noch eine andere Construction ausführen mit Benutzung des Satzes, dass der Winkel, welchen die Normale eines Punktes dieser Curve mit der positiven Abcissenaxe einschliesst, dreimal so gross ist, als der von dieser Axe und dem Radius-Vector des Punktes gebildete Winkel. Es ist nämlich $x = r \cos \varphi$, $y = r \sin \varphi$, $r^2 = 2c^2 \cos 2\varphi$ (Gleich. 14) also $x = c.\sqrt{2}.\cos \varphi \sqrt{\cos 2\varphi}$, $y = c.\sqrt{2}.\sin \varphi \sqrt{\cos 2\varphi}$; $dx = -c\sqrt{2}.\frac{\sin 3\varphi}{\sqrt{\cos 2\varphi}} d\varphi$, $dy = c.\sqrt{2}.\frac{\cos 3\varphi}{\sqrt{\cos 2\varphi}} d\varphi$; also $\frac{dy}{dx} = -\cot 3\varphi$, $-\frac{dx}{dy} = \tang 3\varphi$.

Nun ist aber $-\frac{dx}{dy}$ die trigonom. Tangente desjenigen concaven Winkels, welchen die Normale mit der positiven Richtung der Axe der x einschliesst. Bezeichnet man diese Winkel mit Θ, so ist also $\tang \Theta = \tang 3\varphi$, d. h. $\Theta = 3\varphi$.

Ist also P (Fig. 10) ein Punkt der Lemniskate, so ziehe man den Leitstrahl OP, dann ist $\angle POE = \varphi$; man mache dann $POM = 2\varphi$ und ziehe $PN \parallel MO$, endlich durch P die Linie FG normal auf PN, so muss FG die gesuchte Tangente sein.

Es sei $F_,G_,$ eine andere Tangente, welche durch T geht und parallel mit FG ist. Dann ist $\angle TWE = 180^0 - PNE = 180^0 - 3\varphi$. Nach dem vorher erwähnten Satze ist nun dieser Winkel $= 3$ TOE, also $\angle TOE = \frac{1}{3} TWE = 60^0 - \varphi$ oder $\angle TOE + \varphi = 60^0 = \angle TOP$. Wenn demnach für einen beliebigen Punkt P unserer Curve die Tangente schon construirt ist, so giebt es noch eine zweite ihr parallele Tangente durch denjenigen Punkt, dessen Radius-Vector einen Winkel von 60^0 mit dem ersten Radius-Vector bildet. —

Wenn übrigens zwei Punkte der Curve $a = c$, für welche die Leitstrahlen r und $r_,$, die zugehörigen Winkel φ und $\varphi_,$ sind, eine solche Lage haben, dass $\varphi + \varphi_, = 60^0$, so ist immer $r^4 + r_,^4 + r^2 r_,^2 = 3a^4$. Denn es ist

$$r^2 = 2c^2 \cos 2\varphi,\ r^4 = 4c^4 \cos^2 2\varphi,$$
$$r_,^2 = 2c^2 \cos 2\varphi_,,\ r_,^4 = 4c^4 \cos^2 2\varphi_,;$$

folglich $r^4 + r_,^4 + r^2 r_,^2 = 4a^4 (\cos^2 2\varphi + \cos^2 (120 - 2\varphi) + \cos 2\varphi.\cos(120 - 2\varphi)$; aber $\cos(120 - 2\varphi) = -\frac{1}{2}\cos 2\varphi + \frac{1}{2}\sqrt{3}.\sin 2\varphi$. Substituirt man diesen Werth, so folgt obige Gleichung.

§. 13. **Krümmungskreise.**

Ist für einen Punkt xy der Halbmesser des Krümmungskreises $= R$ und sind γ und δ die Coordinaten seines Mittelpunktes, so gelten, wenn $y = f(x)$, allgemein die Gleichungen:

$$R = \frac{\{1 + f'(x)^2\}^{3/2}}{f''(x)},\ \gamma = x - \frac{\{1 + f'(x)^2\} f'(x)}{f''(x)},\ \delta = y + \frac{1 + f'(x)^2}{f''(x)}.$$

also speciell für alle Lemniskaten

$$\text{15)}\quad \left\{ \begin{aligned} R &= \frac{2r^3 a^2}{a^4 - c^4 - 3r^4} \text{ oder auch } \frac{2r^3 a^2}{3r^4 + c^4 - a^4}, \text{ jenachdem } f''(x) \text{ pos. oder negativ,} \\ \gamma &= x.\frac{(r^2 + c^2)^2 - a^4}{3r^4 + c^4 - a^4} = \frac{(r^4 + 2c^2 r^2 + c^4 - a^4)^{3/2}}{2c(3r^4 + c^4 - a^4)}, \\ \delta &= y.\frac{a^4 - (c^2 - r^2)^2}{a^4 - c^4 - 3r^4} = \frac{(a^4 - c^4 - r^4 + 2c^2 r^2)^{3/2}}{2c(a^4 - c^4 - 3r^4)}, \end{aligned} \right.$$

und für $a = c$ noch besonders

$$R = \frac{2c^2}{3r},\ \gamma = \frac{(r^2 + 2c^2)^{3/2}}{6cr},\ \delta = -\frac{(2c^2 - r^2)^{3/2}}{6cr}.$$

Es ergiebt sich hieraus, dass der Krümmungshalbmesser niemals $= 0$ wird, ebenso dass er niemals unendlich wird ausser in der Curve $a^2 = 2c^2$ für $r = c$ und in der Curve $a = c$ für $r = 0$. Nur in diesen wenigen Punkten also geht die Krümmung in eine gerade Linie über.

Will man R construiren, so setzt man vielleicht am bequemsten $3r^4 + c^4 - a^4 = 2r^2 (r^2 + c^2 \cos 2\varphi)$, abgeleitet aus Gl. 2. Dann wird $R = \frac{ra^2}{r^2 + c^2 \cos 2\varphi}$. Ist ferner $c . \cos 2\varphi = f$, $cf = g^2$, $r^2 + g^2 = k^2$, so wird $R = r . \left(\frac{a}{k}\right)^2$. Setzt man $\frac{a^2}{k} = m$, so erhält man R als vierte Proportionallinie zu k, m und r. Dieses etwas umständliche Verfahren lässt sich für viele specielle Fälle sehr abkürzen, z. B. für $r = c$. oder für $a = c$. In letzterem Falle hat man $R = \frac{2c^2}{3r}$, ein Ausdruck, der sich auch mit Benutzung von $\Theta = 3\varphi$ (§. 12) construiren lässt. Es ist nämlich (Fig. 10), wenn $PA = \frac{1}{3} PO$ gemacht und $AC \perp OP$ bis zum Schnittpunkt mit der Normale gezogen wird, $\angle PNE = 3\varphi$, $\angle OPN = 2\varphi$, $PA = PC . \cos 2\varphi$, $PC = \frac{PA}{\cos 2\varphi} = \frac{r}{3 \cos 2\varphi} = \frac{r}{3} . \frac{2c^2}{r^2} = \frac{2c^2}{3r} = R$. Hat man übrigens die Länge von R gefunden, so bedarf es der Berechnung von δ und γ nicht mehr, da der Mittelpunkt des Krümmungskreises auf der Normale liegt.

§. 14. **Evolution.**

Der geometrische Ort sämmtlicher Krümmungsmittelpunkte ist bekanntlich die Evolute. Man würde deren Gleichung finden können, wenn man r aus den Werthen von γ und δ eliminirte. Diese Elimination führt aber im allgemeinen auf Gleichungen des 12. Grades. Einfacher gestaltet sich die Rechuung in besonderen Fällen, so bei der Curve $a = c$. Setzt man $b^2 = 2c^2$, so ist bei dieser Lemniskate

$$\gamma^2 + \delta^2 = \frac{3r^4 + b^4}{9r^2} \text{ und } \gamma^2 - \delta^2 = \frac{3b^4 + r^4}{9b^2}.$$

Eliminirt man r, so erhält man nach einigen Umformungen

16) $$[27(\gamma^2 - \delta^2) - 8 . b^2]^2 . b^2 = 81 (\gamma^2 + \delta^2)^2 [9(\gamma^2 - \delta^2) - 3 . b^2]$$

als Gleichung der Evolute für die eigentliche Lemniskate $a = c$, eine Gleichung des vierten Grades. Da $\gamma^2 - \delta^2$ hier stets positiv ist, so folgt, dass die Abscissen bei dieser Curve stets grösser als die Ordinaten sind, den einzigen Fall ausgenommen, wo für den $r = 0$ beide Coordinaten, nämlich

$$\gamma = \sqrt{\frac{(r^2 + b^2)^3}{18 b^2 r^2}} \text{ und } \delta = \sqrt{\frac{(b^2 - r^2)^3}{18 b^2 r^2}}$$

unendlich werden. Ist $\delta = 0$, so wird die Abscissenaxe für $b = c\sqrt{2} = r$ von der Evolute geschnitten; dann ist $\gamma = \frac{2}{3} b$ und $R = \frac{1}{3} b$. Die Ordinatenaxe vird von der Evolute niemals getroffen.

§. 15. **Rectification im allgemeinen.**

Die Länge eines beliebigen Bogens s zwischen den Abscissen $x = \alpha$ und $x = \beta$, wo $\alpha < \beta$, ist allgemein durch

$$s = \int_\alpha^\beta dx \sqrt{1 + \left(\frac{dy}{dx}\right)^2}$$

ausgedrückt. Da nun $x = r \cos\varphi$, $y = r \sin\varphi$, so wird $dx = -r.\ \sin\varphi\, d\varphi + \cos\varphi.\ dr$ und $dy = r \cos\varphi\, d\varphi + \sin\varphi.\ dr$, also $dx^2 + dy^2 = r^2 d\varphi^2 + dr^2$ und

$$ds = \pm\, dr \sqrt{\left\{1 + r^2. \left(\frac{d\varphi}{dr}\right)^2\right\}} = \pm\, dy \sqrt{\left\{r^2 + \left(\frac{dr}{d\varphi}\right)^2\right\}},$$

wo $+$ oder $-$ gilt, jenachdem s und r, resp. s und φ, zugleich oder nicht zugleich wachsen. Nach Gleich. 2 ist aber $r^4 - 2c^2 r^2 \cos 2\varphi + c^4 - a^4 = o$, woraus

$$\frac{d\varphi}{dr} = \frac{c^2. \cos 2\varphi - r^2}{c^2 r \sin 2\varphi} \text{ folgt. Aber } \cos 2\varphi = \frac{r^4 + c^4 - a^4}{2c^2 r^2},$$

$$\sin 2\varphi^2 = \frac{4c^4 r^4 - (r^4 + c^4 - a^4)^2}{4c^4 r^4}; \text{ demnach}$$

$$1 + r^2. \left(\frac{d\varphi}{dr}\right)^2 = a^4. \frac{4r^4}{\{(r^2 + c^2)^2 - a^4\}\ \{a^4 - (c^2 - r^2)^2\}},$$

$$ds = \pm\, dr\,.\, 2a^2. \frac{r^2}{\sqrt{(r^2 + c^2 + a^2)(r^2 + c^2 - a^2)(a^2 + c^2 - r^2)(a^2 - c^2 + r^2)}},$$

17) $$s = \pm\, 2a^2 \int \frac{r^2\, dr}{\sqrt{\{-(a^4 - c^4)^2 + 2(a^4 + c^4) r^4 - r^8\}}} + C.$$

Bestimmt man die Länge der Bogen nur für einen einzigen Quadranten und anfangend wenn $a > c$ bei dem Durchschnittspunkte der Curve mit der Ordinatenaxe, wenn aber $a < c$, bei dem Punkte, dessen Leitstrahl $r = x = \sqrt{c^2 - a^2}$ ist, so sind bei der ersten Art von Curven die Grenzen des Integrals zwischen $r = \sqrt{a^2 - c^2}$ und $r = r$, bei der anderen Art zwischen $r = \sqrt{c^2 - a^2}$ und $r = r$ zu nehmen.

Geht man von der Gleichung $ds = \pm\, d\varphi \sqrt{r^2 + \left(\frac{dr}{d\varphi}\right)^2}$ aus, so führt die Rechnung auf

18) $$s = + a^2 \int d\varphi \sqrt{\left\{\frac{c2 \cos 2\varphi}{a^4 - c^4 \sin 2\varphi^2} \pm \frac{1}{\sqrt{(a^4 - c^4 \sin 2\varphi^2)}}\right\}} + C,$$

wo das doppelte Vorzeichen innerhalb der Klammer nur bei der Curve $a < c$ zur Anwendung kommt. Beschränkt man die Rechnung wieder auf den ersten Quadranten, so ist für die Curven $a > c$

$$s = -\, a^2 \int_{\frac{\pi}{2}}^{\varphi} d\varphi \sqrt{\left\{\frac{c^2 \cos 2\varphi}{a^4 - c^4 \sin^2 2\varphi} + \frac{1}{\sqrt{(a^4 - c^4 \sin^2 2\varphi)}}\right\}},$$

wo s wächst, während φ abnimmt. Bei der Lemniskate $a = c$ ist φ höchstens 45^0 (§. 5), und die Werthe für s erhalten, wenn $2c^2 = b^2$ gesetzt wird, die Formen

19) $$s = \int_0^r \frac{dr}{\sqrt{1 - \left(\frac{r}{b}\right)^4}} \text{ und } s - \int_\varphi^{\frac{\pi}{4}} \frac{b\,.\,d\varphi}{\sqrt{\cos 2\varphi}}.$$

Führt man anstatt φ die Variable $\tan \varphi = t$ in die Rechnung ein, so ist $dt = \frac{d\varphi}{\cos\varphi^2}$, $d\varphi = dt\,.\,\cos\varphi^2$, $\cos\varphi = \frac{1}{\sqrt{1 + t^2}}$ und man erhält

$$\int\frac{d\varphi}{\sqrt{\cos 2\varphi}}=\int\frac{d\varphi}{\cos\varphi\sqrt{1-\text{tang}\varphi^2}}=\int\frac{dt.\cos\varphi}{\sqrt{1-\text{tang}\,\varphi^2}}=\int\frac{dt}{\sqrt{1-t^4}}\text{, also}$$

20) $$s=b.\int_0^t\frac{dt}{\sqrt{1-t^4}}.$$

Dabei ist zu beachten, dass der Bogen $s=\int_0^r\frac{dr}{\sqrt{1-\left(\frac{r}{b}\right)^2}}$ im Mittelpunkt der Curve, dagegen der Bogen $=b.\int_0^t\frac{dt}{\sqrt{1-t^4}}$ am andern Endpunkt des Quadranten anfängt, so dass der erste Bogen als der directe, der zweite als der umgekehrte Bogen bezeichnet werden könnte.

Bei den Lemniskaten $a<c$ ist die Anwendung der Gleichung 18 nicht bequem, da dem Winkel φ allemal zwei Bogen entsprechen. Wählt man daher Gleichung 17, und beschränkt sich wieder auf den ersten Quadranten, so ist

21) $$s=2a^2\int_{\sqrt{c^2-a^2}}^r\frac{r^2\,dr}{\sqrt{-(c^4-a^4)^2+r^4(2c^4+2a^4-r^4)}}.$$

§. 16. **Weitere Ausführung der Integration für die Curven** $a<c$ **und** $a>c$.

Die Integrale zur Bestimmung der Bogenlängen sind für $a<c$ und $a>c$ nur in ihren Grenzen verschieden. Setzt man in Gl. 21. $r=\sqrt{p-u}$ und $p>u$ und positiv, so ist $dr=-\frac{1}{2}\cdot\frac{du}{\sqrt{p-u}}$, $r^2\,.\,dr=-\frac{1}{2}\,du\sqrt{p-u}$. Setzt man ferner $A=-(a^4-c^4)^2$, $B=2(a^4+c^4)$ so wird

$$\int\frac{r^2\,dr}{\sqrt{A+B\,r^4-r^8}}=-\frac{1}{2}\int\frac{du.\sqrt{p-u}}{\sqrt{A+B\,(p-u)^2-(p-u)^4}}=$$

$$-\frac{1}{2}\int\frac{du.\sqrt{p-u}}{\sqrt{\{A+p^2(B-p^2)-2p\,(B-2p^2)\,u+(B-bp^2)\,u^2+4pu^3-u^4}}$$

oder für $\mathfrak{A}=A+p^2(B-p^2)$, $\mathfrak{B}=-p\,(B-2p^2)$, $\mathfrak{C}=B-6p^2$, $\mathfrak{D}=2p$, $\mathfrak{E}=-1$

$$2a^2\int\frac{r^2\,dr}{\sqrt{(A+Br^4-r^4)}}=-a^2\int\frac{du.\sqrt{p-u}}{\sqrt{(\mathfrak{A}+2\,\mathfrak{B}u+\mathfrak{C}u^2+2\mathfrak{D}u^3+\mathfrak{E}a^4)}}.$$

Setzt man den Nenner des letzten Bruches $=U$, so erhält man

$$s=-a^2\int_{p-c^2+a^2}^u\frac{du.\sqrt{p-u}}{\sqrt{U}}.$$

Nun ist aber $\sqrt{p-u}=\left\{1-\frac{1}{2}\cdot\frac{u}{p}-\frac{1}{8}\cdot\left(\frac{u}{p}\right)^2-\frac{1}{16}\cdot\left(\frac{u}{p}\right)^3-\ldots.\right\}\sqrt{p}$, so dass Gleichung 21 übergeht in die folgende:

22) $$s=a^2\sqrt{p}\left\{-\int_{p-c^2+a^2}^u\frac{du}{\sqrt{U}}+\frac{1}{2p}\int_{p-c^2+a^2}^u\frac{u.\,du}{\sqrt{U}}+\frac{1}{8p^2}\int_{p-c^2+a^2}^u\frac{u^2\,du}{\sqrt{U}}+\ldots\right\}$$

Alle diese Integrale sind in der allgemeinen Form

$$\int \frac{du\,(\alpha + \beta u + \gamma u^2 + \delta u^3 + \ldots)}{\sqrt{(\mathfrak{A} + 2\,\mathfrak{B}u + \mathfrak{C}u^2 + \mathfrak{D}u^3 + \mathfrak{E}u^4)}}$$

enthalten. Man kann aber auch das Integral der Gl. 21 auf die Form

$$\int \frac{dz\,(\alpha + \beta z + \gamma z^2 + \delta z^3 \ldots)}{\sqrt{(A + Bz^2 + Cz^4)}}$$

bringen. Dann setzt man im Obigen $p - u = z$, also

$$u = p - z \text{ und } p > z, \frac{u}{p} = 1 - \frac{z}{p},\ dz = -du, \text{ so ist}$$

$$\sqrt{p-u} = \sqrt{p}\left\{1 - \frac{1}{2}\left(1-\frac{z}{p}\right) - \frac{1}{8}\left(1-\frac{z}{p}\right)^2 - \frac{1}{16}\left(1-\frac{z}{p}\right)^3 - \ldots\ldots\right\}$$
$$= \sqrt{p}\,\{A_, + B_,z + C_,z^2 + D_,z^3 + \ldots\},$$

wo $A_,$, $B_,$, $C_,$, ... gewisse constante Grössen sind. Die weitere Rechnung ergiebt dann

$$\int\frac{r^2\,dr}{\sqrt{(A+Br^4-r^8)}} = \frac{\sqrt{p}}{2}\left\{A_,\int\frac{dz}{\sqrt{A+Bz^2-z^4}} + B_,\int\frac{z\,dz}{\sqrt{A+Bz^2-z^4}} + C_,\int\frac{z^2\,dz}{\sqrt{A+Bz^2-z^4}} + \ldots\right\}$$

wo alle Integrale von der vorher angegebenen allgemeinen Form sind.

Die ganze rationale Funktion $P = \alpha + .\,\beta z + \gamma z^2 + \delta z.^3 + \ldots$ lässt sich umformen in $(\alpha + \gamma z^2 + \varepsilon z^4 + \ldots) + (\beta + \delta z^2 + \zeta z^4 \ldots)\,z$, wofür die Form $K + Lz$ gewählt werden kann. Setzt man ausserdem $R = \sqrt{A + Bz^2 + Cz^4}$, so erhält man

$$\int\frac{P\,dz}{R} = \int\frac{K\,dz}{R} + \int\frac{L.z\,dz}{R},$$

$$\text{und für } z^2 = y,\ z\,dz = \frac{1}{2}\,dy$$

$$\int\frac{P\,dz}{R} = \int\frac{K\,dz}{R} + \frac{1}{2}\int\frac{L'.\,dy}{\sqrt{A+By+Cy^2}}$$

so dass die Länge des Bogens s im allgemeinen durch diese letzten zwei Integrale ausgedrückt wird, nämlich

23) $$s = a^2\sqrt{p}\,.\left\{A_,\int_{c^2-a^2}^{z}\frac{dz}{\sqrt{A+Bz^2-z^4}} + C_,\int_{c^2-a^2}^{z}\frac{z^2\,dz}{\sqrt{A+Bz^2-z^4}} + E_,\int_{c^2-a^2}^{z}\frac{z^4\,dz}{\sqrt{A+Bz^2-z^4}} + \ldots\right.$$
$$\left. + \frac{B_,}{2}\int_{(c^2-a^2)^2}^{y}\frac{dy}{\sqrt{A+By-y^2}} + \frac{D_,}{2}\int_{(c^2-a^2)^2}^{y}\frac{y.\,dy}{\sqrt{A+By-y^2}} + \ldots\right\}.$$

Die erste Gruppe der in dieser Gleichung enthaltenen Integrale lässt sich auf die Form $\int\frac{A'+B'\sin\alpha^2}{1+r\sin\alpha^2}\cdot\frac{d\,\alpha}{\sqrt{1-k^2\sin\alpha^2}}$ bringen, wo $k < 1$ ist, d. h. also auf elliptische Funktionen. Es ist im Obigen $r^2 = p - u = z$ gesetzt worden. Da in den Lemniskaten $a > c$ und $a < c$ der Leitstrahl r nicht $= o$, auch nicht unendlich wird, so liegt z zwischen bestimmten Grenzen. Es sei demnach jetzt $p > z$, $z > q$, $R^2 = A + Bz^2 + Cz^4 = (p^2 - z^2)(z^2 - q^2)$, d. h. $-(a^4 - c^4)^2 + 2(a^4 + c^4)z^2 - z^4 = -p^2q^2 + (p^2 + q^2)z^2 - z^4$, also $p^2q^2 = (a^4 - c^4)^2$, $p^2 + q^2 = 2(a^4 + c^4)$, $p = a^2 + c^2$, $q = a^2 - c^2$, $k^2 = \frac{p^2-q^2}{p^2} = \frac{4a^2c^2}{p^2} < 1$, $k = \frac{2ac}{p} < 1$, so lässt sich z^2 durch $\frac{q^2}{1-k^2\sin\alpha^2}$ ersetzen, und man erhält

$$p^2 - z^2 = \frac{(p^2 - q^2)\cos\alpha^2}{1 - k^2\sin\alpha^2},\ z^2 - q^2 = \frac{q^2\,k^2\,\sin\alpha^2}{1 - k^2\sin\alpha^2},$$

$$\int\frac{dz}{R} = \frac{1}{p}\int\frac{d\alpha}{\sqrt{1 - k^2\sin\alpha^2}},\ \int\frac{z^2.\,dz}{R} = \int\frac{q^2.\,d\alpha}{p\,(1 - k^2\sin\alpha^2)^{3/2}} = \frac{q^2}{p}\int\frac{d\alpha}{(1 - k^2\sin\alpha^2)\sqrt{1 - k^2\sin\alpha^2}}.$$

Die übrigen Integrale, welche z^4, z^6... enthalten, lassen sich sämmtlich durch die oben genannten beiden ausdrücken. Es ist nämlich

$$Rz = A\int\frac{dz}{R} + 2B.\int\frac{z^2\,dz}{R} + 3C.\int\frac{z^4\,dz}{R};$$

$$Rz^3 = 3A\int\frac{z^2\,dz}{R} + 4B\int\frac{z^4\,dz}{R} + 5C\int\frac{z^6\,dz}{R};$$

$$Rz^5 = 5A\int\frac{z^4\,dz}{R} + 6B\int\frac{z^6\,dz}{R} + 7C\int\frac{z^8\,dz}{R};\ \text{u. s. w.}$$

demnach

$$\int\frac{z^4\,dz}{R} = \frac{1}{3C}\left(Rz - A\int\frac{dz}{R} - 2B\int\frac{z^2\,dz}{R}\right),$$

$$\int\frac{z^6\,dz}{R} = \frac{1}{5C}\left(Rz^3 - 3A\int\frac{z^2\,dz}{R} - \frac{4B}{3C}\left(Rz - A\int\frac{dz}{R} - 2B\int\frac{z^2\,dz}{R}\right)\right)$$

u. s. w. Der Werth von α ergiebt sich aus der Gleichung $z^2 = \frac{q^2}{1 - k^2\sin\alpha^2} = r^4$, nämlich $\alpha = \text{Arc}\sin\frac{\sqrt{z^2 - (c^2 - a^2)^2}}{kz}$.

Die Integrale sind so zu begrenzen, dass sie für $\alpha = o$ verschwinden. Der Kürze wegen sei dann

$$\int_o^\alpha\frac{d\alpha}{\sqrt{1 - k^2\sin\alpha^2}} = F(\alpha),\ \int_o^\alpha\frac{d\alpha}{\sqrt{1 - k^2\sin\alpha^2}.\,(1 - k^2\sin\alpha^2)} = \Pi(\alpha).$$

Die zweite Gruppe der in Gl. 23 vorkommenden Integrale hat die allgemeine Form $\int\frac{y^m.\,dy}{\sqrt{A + By - y^2)}}$. Es ist aber

$$\int\frac{y^m\,dy}{\sqrt{A + By - y^2}} = -\frac{y^{m-1}}{m\,(A + By - y^2)^{-1/2}} + \frac{(2m-1)B}{2m}\int\frac{y^{m-1}\,dy}{\sqrt{A + By - y^2}}$$
$$+ \frac{(m-1)A}{m}\int\frac{y^{m-2}\,dy}{\sqrt{A + By - y^2}},$$

also, wenn der Kürze wegen $\sqrt{A + By - y^2} = \mathfrak{R}$ gesetzt wird,

$$\int\frac{y\,dy}{\mathfrak{R}} = -\frac{1}{(A + By - y^2)^{-1/2}} + \frac{B}{2}\int\frac{dy}{\mathfrak{R}},$$

$$\int\frac{y^2\,dy}{\mathfrak{R}} = -\frac{y}{2(A + By - y^2)^{-1/2}} + \frac{3B}{4}\int\frac{y\,dy}{\mathfrak{R}} + \frac{A}{2}\int\frac{dy}{\mathfrak{R}},$$

$$\int\frac{y^3\,dy}{\mathfrak{R}} = -\frac{y^2}{3\,(A + By - y^2)^{-1/2}} + \frac{5B}{6}\int\frac{y^2\,dy}{\mathfrak{R}} + \frac{2A}{3}\int\frac{y\,dy}{R},$$

u. s. w. Es lässt sich daher jeder Bogen der Lemniskaten a $>$ c und a $<$ c theils durch elliptische, theils durch Kreisfunctionen ausdrücken. Die Länge des ganzen Quadranten einer Lemniskate a $>$ c wird dann in folgender Weise zu berechnen sein:

$$\int_{(a^2-c^2)^2}^{(a^2+c^2)^2} \frac{dy}{\mathfrak{R}} = \text{Arc tang } (+\infty) - \text{Arc tang } (-\infty)$$

$$= (4n+1)\frac{\pi}{2} - \{2(2n+1)+1\}\frac{\pi}{2} = -\pi;$$

$$\int_{(a^2-c^2)^2}^{(a^2+c^2)^2} \frac{y.\,dy}{\mathfrak{R}} = -\frac{B}{2}\pi; \quad \int_{(a^2-c^2)^2}^{(a^2+c^2)^2} \frac{y^2.\,dy}{\mathfrak{R}} = -\left(\frac{3}{4}B + A\right)\frac{\pi}{2};$$

$$\int_{(a^2-c^2)^2}^{(a^2+c^2)^2} \frac{y^3.\,dy}{\mathfrak{R}} = -\left(\frac{15}{24}B^2 + \frac{3}{2}AB\right)\frac{\pi}{2};$$

und zufolge Gl. 23, wenn Q den Quadranten bezeichnet,

$$\textbf{24)} \quad \begin{cases} A_,.\frac{1}{p}F\left(\frac{\pi}{2}\right) + C_,.\frac{9^2}{p}.\,\Pi\left(\frac{\pi}{2}\right) \\ \qquad - E_,.\frac{1}{3pC}\left[A.\,F\left(\frac{\pi}{2}\right) + 2q^2.\,B.\,\Pi\left(\frac{\pi}{2}\right)\right] \\ \qquad + \ldots.. \text{ (Reihe elliptischer Funktionen)} \\ - \left[B_, + \frac{B.D_,}{2} + \left(\frac{3B}{4.\,2} + \frac{A}{2}\right)F_, \right. \\ \qquad \left. + \left(\frac{3.\,5.}{4.\,6.}\cdot\frac{B^2}{2} + \frac{3}{4}AB\right)H_, + \ldots.\right]\frac{\pi}{2}. \end{cases}$$

Für die Lemniskate a $<$ c liegen die Grenzen der Integrale der ersten Gruppe zwischen $\alpha = o$ und $\alpha = \text{Arc sin } \frac{2\,ca}{k\,(c^2+a^2)}$, bei der zweiten Gruppe zwischen $(c^2-a^2)^2$ und $(c^2+a^2)^2$, wenn der ganze Quadrant rectificirt werden soll.

§. 17. **Die Rectification der Lemniskate** a = c

ist in den Gleichungen 19 und 20 angedeutet. Beide Gleichungen enthalten ein Integral von der Form

$$\int \frac{dx_,}{\sqrt{1-x_,^4}}.$$

In der Gleich. 19 kann $\frac{r}{b}$ höchstens = 1 sein; in Gleich. 20 kann t, weil φ höchstens 45^0 sein kann, ebenfalls 1 nicht übersteigen. Man kann deshalb $x_, \overline{\lessgtr}\, 1$ setzen. Es sei $x_, = \cos\psi$, $dx_, = -\sin\psi.\,d\psi$, so ist $1 - x_,^4 = \sin\psi^2\,(2-\sin\psi^2)$,

$$\frac{dx_,}{\sqrt{1-x_,^4}} = -\frac{d\psi}{\sqrt{2-\sin\psi^2}} = -\frac{d\psi}{\sqrt{2}.\sqrt{1-\frac{1}{2}\sin\psi^2}}.$$

Will man das negative Zeichen vermeiden, so kann man $\text{cotang}\,\psi = \sqrt{\frac{1}{2}}\,\text{tang}\,\varphi_,$, also

$$-d\psi = \sqrt{\frac{1}{2}}\cdot\frac{d\varphi_,}{1-\frac{1}{2}\sin\varphi_,^2}$$ setzen, und man erhält dann

$$\int \frac{dx,}{\sqrt{1-x,^4}} = \int \frac{d\varphi,}{\sqrt{2}.\sqrt{1-\frac{1}{2}\sin\varphi,^2}} = K.\,F\,(\varphi,),$$

wo $K = k = \sqrt{\frac{1}{2}}$ so dass also auch hier wieder elliptische Funktionen erscheinen. Setzt man nach Gl. 19 $x, = \frac{r}{b} = \cos\psi$, so wird $dr = -b\sin\psi.\,d\psi$, und wenn wieder cotang $\psi = \sqrt{\frac{1}{2}}.$ tang φ, zugleich mit Berücksichtigung der Grenzen,

25)
$$s = \int_0^r \frac{dr}{\sqrt{1-\left(\frac{r}{b}\right)^4}} = \int_0^{\varphi,} \frac{b.\,d\varphi,}{\sqrt{2}\sqrt{1-\frac{1}{2}\sin\varphi,^2}}.$$

Da bei der Curve $a = c$ der $\angle\,\varphi \overline{\lesssim} 45^0$, tang $\varphi \overline{\lesssim} 1$ ist, so kann man die Variable in Gleich. 20 durch $\cos\varepsilon$ ersetzen, so dass $b.\,dt = -b.\sin\varepsilon.\,d\varepsilon$ und $\sqrt{1-t^4} = \sin\varepsilon.\sqrt{2}.\sqrt{1-\frac{1}{2}\sin\varepsilon^2}$ wird. Dann ist

$$\int_0^t \frac{b.\,dt}{\sqrt{1-t^4}} = -\int_0^\varepsilon \frac{b.\,d\varepsilon}{\sqrt{2}.\sqrt{1-\frac{1}{2}\sin\varepsilon^2}},$$

und für cot $\varepsilon = \sqrt{\frac{1}{2}}$ tang ψ,

26)
$$s' = \int_0^t \frac{b.\,dt}{\sqrt{1-t^4}} = \int_0^{\psi,} \frac{b.\,d\psi,}{\sqrt{2}.\sqrt{1-\frac{1}{2}\sin\psi,^2}}.$$

Durch Gleich. 25 ist die Länge des directen Bogens, durch Gl. 26 die des umgekehrten Bogens ausgedrückt. Durch beide zusammen lässt sich der ganze Quadrant berechnen; es ist nämlich

27)
$$Q = b.\int_0^{\psi,} \frac{d\psi,.}{\sqrt{2}.\sqrt{1-\frac{1}{2}\sin\psi,^2}} + b.\int_0^{\varphi,} \frac{d\varphi,}{\sqrt{2}.\sqrt{1-\frac{1}{2}\sin\varphi,^2}},$$

wenn beide Bogen so gewählt werden, dass die oberen Grenzwerthe von φ, und ψ, zusammenfallen.

Die Entwickelung von $s = \int_0^r \frac{dr}{\sqrt{1-\left(\frac{r}{b}\right)^4}}$ hat keine Schwierigkeit. Es ist, wenn $b = 1$ gesetzt wird,

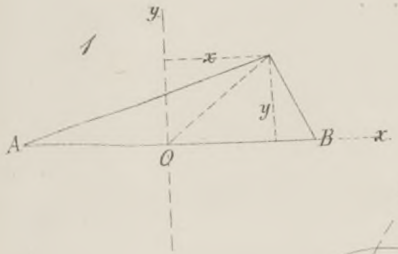
$$(1-r^4)^{-\frac{1}{2}} = 1 + \frac{1}{2}\,r^4 + \frac{1:3}{2.4}\,r^8 + \frac{1.3.5}{2.4.6}\,r^{12} + \ldots,$$

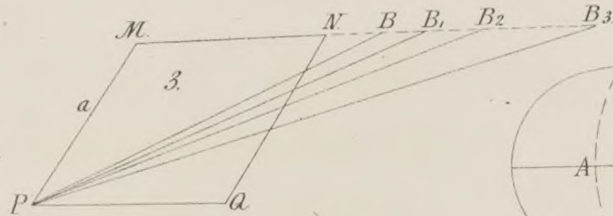
$$\int_0^r \frac{dr}{\sqrt{1-r^4}} = r + \frac{1}{2}\cdot\frac{r^5}{5} + \frac{1.3.}{2.4.}\cdot\frac{r^9}{9} + \frac{1.3.5}{2.4.6}\cdot\frac{r^{13}}{13} + \ldots$$

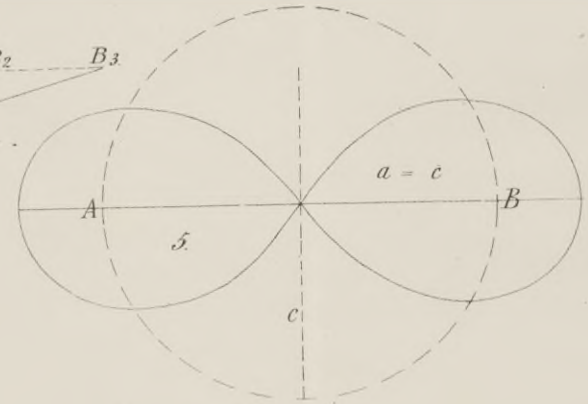
Für die Berechnung der Länge des ganzen Quadranten kann aber diese Reihe nicht benutzt werden; denn es müsste $r = b = 1$ gesetzt werden, für welchen Fall die Reihe nicht convergirt. Durch andere Rechnungen, deren Auseinandersetzung hier zu weit führt, erhält man für $b = 1$

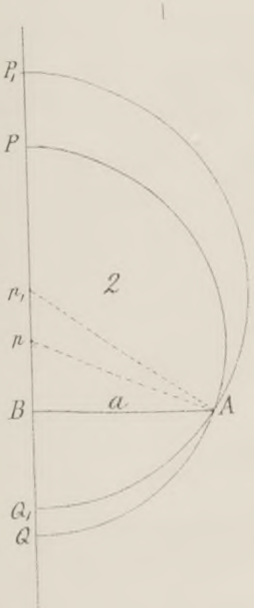
$$Q = 1,3110334\ldots,$$

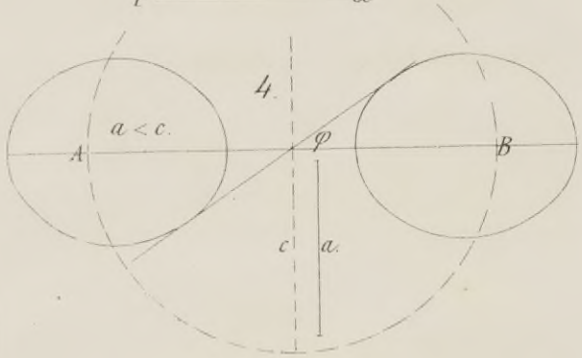
in den ersten 4 Decimalen sicher.

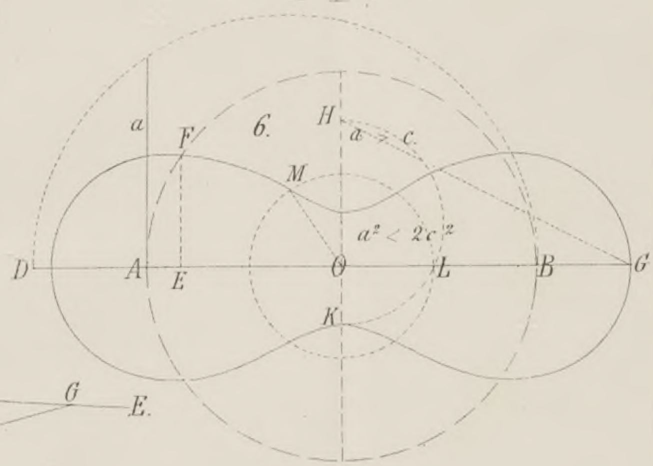

1
y
x
y
A
O
B
x

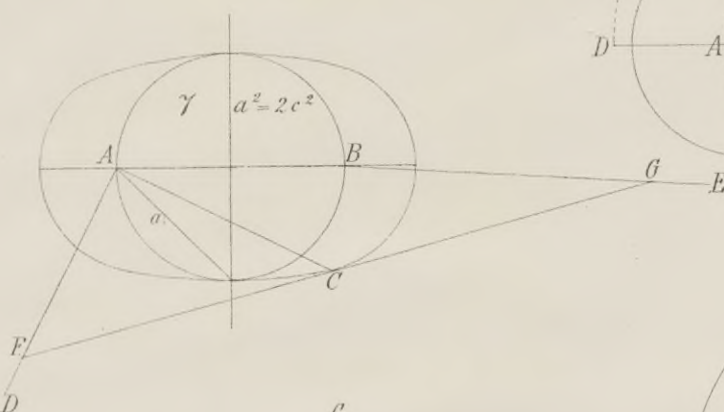

M
N
B
B_1
B_2
B_3
3
a
P
Q

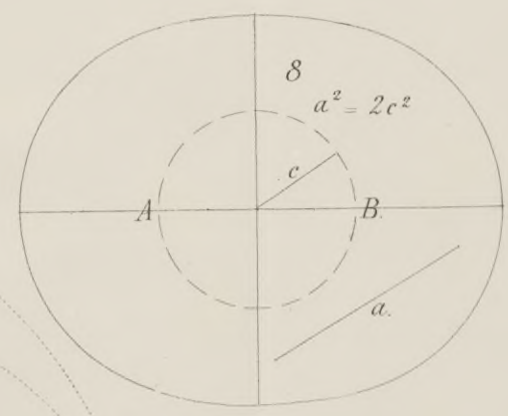

$a = c$
A
B
5
c

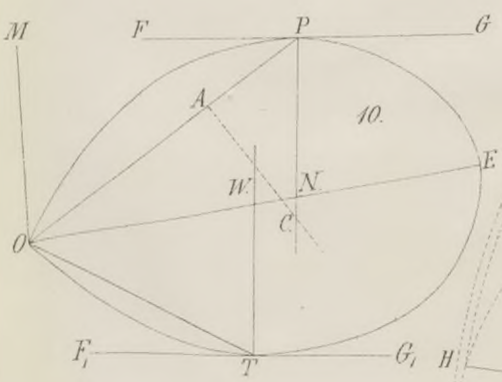

P_1
P
2
p_1
p
B
a
A
Q_1
Q

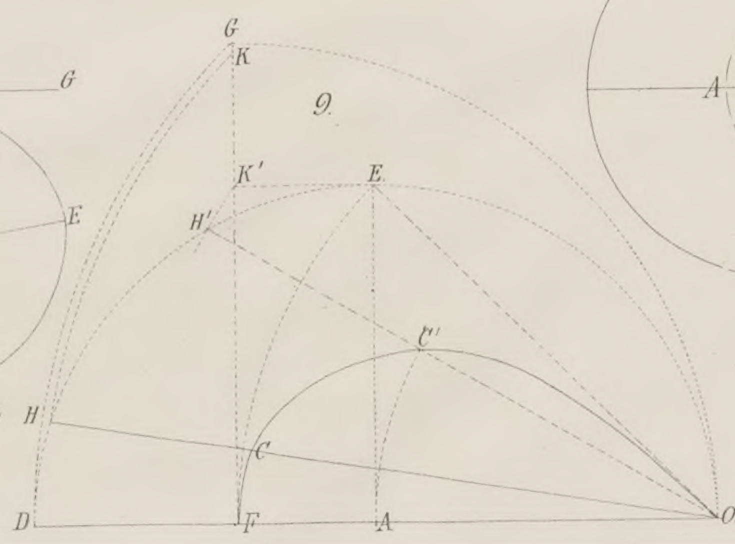

4
$a < c$
A
φ
B
c
a


a
F
6
H
$a > c$
M
$a^2 < 2c^2$
D
A
E
O
L
B
G
K


7
$a^2 = 2c^2$
A
B
G
E
a
C
F
D


8
$a^2 = 2c^2$
c
A
B
a


M
F
P
G
A
10
E
W
N
C
O
F_1
T
G_1


G
K
9
K'
E
H'
C'
H
C
D
F
A
O

wo

man

$\psi =$

in

$\sqrt{1}$

und

Bog
näm

wen

gese

benu
conv
man

in d