# *LOGARITHMO-TECHNIA:*

SIVE

Methodus construendi

# LOGARITHMOS

Nova, accurata, & facilis;

*SCRIPTO*

Antehàc Communicata, Anno Sc. 1667.

Nonis *Augusti*: Cui nunc accedit.

Vera Quadratura Hyperbolæ,

&

Inventio *Summæ* Logarithmorum.

---

AUCTORE *NICOLAO MERCATORE*

Holsato, è Societate Regia.



---

HUIC ETIAM JUNGITUR

*MICHAELIS ANGELI RICCII* Exercitatio Geometrica de Maximis & Minimis; hîc ob Argumenti præstantiam & Exemplarium raritatem recusa.

---

*LONDINI,*

Typis *Guilielmi Godbid*, & Impensis *Mosis Pitt* Bibliopolæ, in vico vulgò vocato *Little Britain*. Anno M. DC. LXVIII.

10.

*CANDIDIS* atque *INGENUIS*

MATHEMATUM

CULTORIBUS

Opellam hanc lubens meritóque

DEDICAT

AUTHOR.

# LOGARITHMOTECHNIA.

LOGARITHMUS composito vocabulo dicitur à ratione & numero, quasi rationum numerus; id quod planè cum re consentit. Est enim Logarithmus nihil aliud, quam numerus ratiuncularum, contentarum in ratione, quam absolutus quisque ad unitatem obtinet. In qua definitione rationes accipimus, tanquam magnitudines partibus constantes homogeneis toti; strictiori aliquantò notione, quàm vulgò solet. Quamvis enim ratum sit, rationem omnem ex comparatione quantitatum homogenearum oriri: certè nec quævis comparatio producit rationem; nec quarumvis quantitatum, homogenearum licèt, habitudo est ratio quanta, seu partibus constans. Nam æqualitatis, quæ dicitur, ratio, est illa quidem quantitatum homogenearum, atque æqualium, habitudo mutua, unde nec rationis appellatione privandam autumem, cui definitio *Euclidéa* competit non minùs ac aliis rationibus, quas inæqualitatis vocant: sed nihil obstat, quò minùs generalem istam rationis notionem porrò dividamus ita, ut quantitatem habere putentur solæ rationes, ex inæqualium habitudine ortæ; at æqualitatis ratio in indivisibili consistat, habeatque se in rationibus, quemadmodum punctum in magnitudinibus, aut nullitas in numeris, quæ singula quantitate ac partibus carent. Componas enim sexcentas rationes æqualitatis, non augetur nec minuitur ratio, sed eadem manet æqualitas: secùs atque in rationibus inæqualitatis, quæ additæ vel detractæ invicem, faciunt rationem majorem vel minorem. Quantum autem est, quòd additis vel demtis partibus homogeneis augetur minuiturve. Sed nec quævis comparatio quantitatum homogenearum rationem producit. Veluti cùm numerum dividimus per numerum; comparantur utique quantitates homogeneæ, spectando quoties altera contineatur in altera; sed quod inde oritur latus, nec ratio est ipsorum numerorum, nec sanè quantitatem exprimit rationis, quæ utrisque intercedit. Alioquin diviso numero quovis per æqualem, quæ inde oritur unitas, exprimeret quantitatem rationis æqualium, quam tamen quantitate carere suprà adstruximus. Quinimò, datis pluribus rationibus, *v. gr.* 4 *ad* 2, & 9 *ad* 3, si diviso utriusque antecedente per suum

ſuum conſequentem, exhiberent orti 2 & 3 veram quantitatem iſtarum rationum; oporteret, ut ex his ortis compoſitus numerus, nimirum 5, exhiberet quoque veram quantitatem rationis compoſitæ. Atqui ratio compoſita eſt 36 *ad* 6, cujus quantitatem jam exprimeret ortus 6, diverſus ſanè ab iſto 5. Obtinuit tamen uſus, ut rationes denominentur à latere orto; ſic ratio 4 ad 2 dicitur dupla, & 9 ad 3 tripla: verùm hæc nomina arbitrio hominum impoſita; retineri quidem poſſunt, veritati autem derogare nullo modo debent. Quanquam nec utilitate caret iſte modus denominandi rationes; ſiquidem arguit, rationes eſſe majores, quarum denominator eſt major, & contrà: eodem modo ſinus majores congruunt majoribus arcubus, quorum tamen veram quantitatem exprimere nemini videntur. Cœterùm, ut linea eſt dupla lineæ, quam bis continet; ita, propriè loquendo, dupla foret ratio alterius rationis, quam bis continet; ſed pro eo duplicatam dicere maluerunt Scriptores, quorum arbitrio ſynonyma alioquin vocabula *dupli* & *duplicati*, res planè diverſas ſignificare intelliguntur. Verùm id quod eſt multò maximum; nimirum omnium quantitatum menſuram eſſe quantitatem homogeneam, & in diviſione genuina fieri applicationem menſuræ homogeneæ ad quantitatem menſurandam, ortum vero ex tali applicatione, nihil aliud eſſe, quàm numerum Arithmeticum, exprimentem, quoties menſura continetur in menſurato; hoc ſcilicet eſt, quod omnem dubitationem excludit. Ita falluntur profectò, qui applicatâ lineâ rectâ illatabili ad aream datam, putant inveniri latitudinem rectanguli; quaſi non potiùs ſecundum veras diviſionis leges applicaretur rectangulum æquè longum diviſori, & æquè latum unitati aſſumtæ, ad aream extenſam quoque ad longitudinem diviſoris; & quaſi non ortus ex iſta applicatione, numerus eſſet Arithmeticus, exprimens, quoties rectangulum menſurans contineatur in menſurato, vel (cùm per 1. VI eadem ſit ratio) quoties latitudo rectanguli applicati contineatur in latitudine rectanguli menſurati; quò ſcilicet diviſio verè opponatur multiplicationi, quæ reſolvat hujus productum in ſua elementa. Quemadmodum enim omnis multiplicator eſt numerus Arithmeticus (ut habet *Stevinus* in Arithmetica Practica;) ita omnis ortus à diviſione eſt ſimiliter numerus Arithmeticus. Quæ quidem omnia facillimè præſenti negotio aptantur. Nam multiplicare rationem nihil eſt aliud, quàm replicare aliquam rationem toties, quot ſunt unitates in numero aliquo Arithmetico, qui dicitur factor. Et dividere rationem, eſt applicare rationem aliquam ad aliam rationem, ut inveniatur numerus Arithmeticus, exprimens, quoties menſurans ratio contineatur in menſurata. Id ſi hîc fieret, nihil dubium, quin vera patefieret rationis quantitas. At enimverò, cùm applicatur terminus alicujus rationis ad alterum; num putamus rationem applicari

plicari ad rationem? quo pacto igitur ortus ex tali applicatione poteſt exprimere quantitatem datæ rationis? Verum eſt quidem, quòd ortus ex applicatione termini ad terminum, rationem habet ad unitatem eandem, quam dividuus ad diviſorem; ſed hoc modo eadem prodit ratio, quæ ante diviſionem fuerat, aliis tantùm terminis expreſſa; nec proinde quantitas rationis datæ invenitur in menſura aliqua priùs nota, quemadmodum in aliis magnitudinibus diviſis aſſolet, & inſtituti noſtri ratio poſtulat: Siquidem tum demum quantitatem rationum exactè determinâſſe videbimur, cùm eas omnes in una aliquâ ac eâdem communi menſurâ æſtimare noverimus; id quod Logarithmorum ope præſtari, definitione modò traditâ innuere volui. Ex qua porrò intelligitur, cùm ſinguli Logarithmi numerent particulas rationum inde ab unitate ad ſingulos ordine abſolutos procedendo coacervatarum; fieri non poſſe, quin æqualibus Logarithmorum differentiis (id eſt, æqualibus particularum incrementis) congruant quoque æquales rationes abſolutis intercedentes (cùm integra ex æquali numero particularum æqualium conflata, inter ſe ſint æqualia;) adeòque Logarithmos eſſe in proportione Arithmetica, cùm eorum abſoluti ſunt in Geometrica; idcircò poſſe operationem Regulæ proportionum in compendium redigi, ſubſtitutâ additione & ſubtractione loco multiplicationis & diviſionis: Denique rationis cujuſque bipartitionem, tripartitionem, *&c.* quæ alioquin requireret extractionem radicis quadratæ, cubicæ, *&c.* conſiſtere in bipartitione, tripartitione, *&c.* differentiæ Logarithmorum datis terminis congruentium (hoc eſt, ratiuncularum in ratione data comprehenſarum.) Qui uſus cùm ſit eximius; patet poſtremò, quo pacto tam utiles numeri artificiales, ſeu Logarithmi concinnari poſſint; nimirum inveſtigando, quot ratiunculæ, aſſumtæ magnitudinis, contineantur in ratione cujuſque abſoluti ad *unitatem*. Sic enim unitatis Logarithmus evadit 0, cùm unitatis ad unitatem ratio ſit æqualitatis, quam quantitate carere ſuprà aſſerui. Ita nimirum fiet, ut cùm inter multiplicandum vel dividendum unitas nihil mutet; hujus Logarithmus 0 (dum additio & ſubtractio ſubſtituuntur multiplicationi & diviſioni) nihil quoque additione vel detractione ſui mutet. Numerus autem ratiuncularum in ratione decupla contentarum commodiſſimè aſſumitur 1,0000000 (hoc eſt, una decupla ratio in numerum partium decimalium rotundum diſtributa.) Ita enim fiet, dum inter unitatem & 10 intercedit una ratio decupla, & porrò inter 10 & 100 altera, inter 100 & 1000 tertia, & deinceps; ut in centupla quidem ratione contineantur ratiunculæ 2,0000000 (hoc eſt, duæ decuplæ rationes in numerum partium rotundum diſtributæ) in millecupla verò ratione contineantur 3,0000000 (hoc eſt, tres rationes decuplæ in numerum partium rotundum distributæ;) & deinceps. Unde primùm hoc commodi consequimur, ut absolutis, iisdem characteribus expressis, iidem competant Logarithmi; veluti si absoluto 2 competat Logarithmus 0,3010299; etiam absolutis 20, 200, 2000 competent Logarithmi 1,3010299; 2,3010299; 3,3010299. Etenim si rationes 2 ad 1, 20 ad 1, 200 ad 1, & deinceps, intelligantur partitæ, illa quidem in rationes 2 ad 1 & 1 ad 1; ista in 20 ad 10, & 10 ad 1; hæc in 200 ad 100, & 100 ad 1; apparet, quòd excessus 2 ad 1, quo illa superat rationem 1 ad 1 æqualis sit excessui 20 ad 10, quo ista superat rationem 10 ad 1, idemque æqualis excessui 200 ad 100, quo hæc superat rationem 100 ad 1. Ergo si ratio 2 ad 1 præter æqualitatis rationem (quam innuit characteristica 0) contineat ratiunculas 3010299, qualium ipsa decupla continet 1,0000000; certè ratio 20 ad 1 præter unam decuplam (quam innuit characteristica 1) continebit eundem numerum ratiuncularum excurrentium 3010299; & ratio 200 ad 1 præter duas decuplas (quas innuit characteristica 2) continebit similiter eundem numerum ratiuncularum excurrentium 3010299. Unde porro & hoc consequimur, ut ex inspecta characteristica, uniuscujusque absoluti valorem æstimare queamus. Nam cùm in decupla contineantur 1,0000000 ratiunculæ numero rotundo, & in centupla 2,0000000 ratiunculæ numero itidem rotundo; oportet, ut quæcunque sunt inter decuplam & centuplam contineant plus quàm unam decuplam, minùs autem quàm duas; quamobrem characteristica omnium absolutorum, qui sunt inter 10 & 100, ipsiusque adeo denarii (hoc est, omnium numerorum, qui scribuntur duobus characteribus) erit 1; & sic deinceps.

His ita ordinatis, proximum est, ut ostendamus, quomodo inveniatur mensura rationis, quam quisque absolutus obtinet ad unitatem, in partibus, qualium decupla continet 1,0000000 (hoc est, quomodo cujusque absoluti Logarithmus investigandus sit.) Verbi gratiâ: Scire velim, ratio 100[5 ad 1 quot contineat ratiunculas, qualium decupla continet 1,0000000. Dispesco igitur rationem datam 100[5 ad 1 in suas partes, nimirum 100[5 ad 100, 100 ad 10, & 10 ad 1, quarum posteriores duæ constituunt duas decuplas (unde patet Characteristicam fore 2;) itaque restat, ut investigemus, quota pars sit reliqua ista ratio 100[5 ad 100 ipsius decuplæ. Quod si igitur termini 100[5 & 100 ducantur uterque in sese, producti exhibebunt rationem duplicatam rationis 100[5 ad 100, cujus (duplicatæ sc. rationis) termini rursus in se ducti procreabunt duplicatam duplicatæ, id est, quadruplicatam rationis 100[5 ad 100: atque ita continuatâ multiplicatione terminorum, donec is, qui gignitur ex ductu continuo termini 100[5 in seipsum, evadat decuplus ejus, quem ductus continuus

tinuus

tinuus termini 100 in seipsum producit; denominator potestatis postremò genitæ ostendet, quot integris vicibus ratio 100[5 ad 100 contineatur in decupla. Et cùm alter terminorum sit 100, cujus potestates omnes constant unitate & certo numero cyphrarum; omnis labor reliquus occupabitur circa elevandum alterum terminum 100[5 ad eam potestatem, quæ prioris termini (nimirum 100$^{rij}$) æquè altam potestatem excedat decuplo; cujus operationis compendium exemplo, quam verbis docere præstat.

100[5000 (1)
500x (1)

1005000
5025

1010025 (2)
5z00x0x (2)

1010025
10100
20
5

1020150 (4)
0510201 (4)

1020150
20403
102
51

1040706 (8)
6070401 (8)

1083068 (16)
8603801 (16)

1173035 (32)
5303711 (32)

1376011 (64)
1106731 (64)

1893406 (128)

1893406 (128)
6043981 (128)

3584985 (256)
5894853 (256)

12852116 (512)

Hæc potestas plusquam decuplo excedit potestatem æquè altam 100$^{rij}$; ergo resumo 256$^{tam}$, eamq; duco, non in sese, ut modò, sed in proximè præcedentem, nimirum 128$^{vam}$, hoc modo:

3584985 (256)
6043981 (128)

6787831 (384)
1106731 (64)

9340130 (448)
5303711 (32)

10956299 (480)

Hæc potestas denuò excedit æquè altam 100$^{rij}$ plusquam decuplo; ergo eandem 448$^{vam}$ duco, non in 32$^{dam}$, ut modò, sed in proximè præcedentem, hoc modo:

9340130 (448)
8603801 (16)

10115994 (464)

Ubi rursus nimium colligitur; ergo eandem adhuc 448$^{vam}$ duco, non in 16$^{tam}$, ut modo, sed in proximè præcedentem, nimirum 8$^{vam}$, hoc modo:

9340130 (448)
6070401 (8)

9720329 (456)
0510201 (4)

9916193 (460)
5200101 (2)

10015603 (462)

Quæ potestas rursus excedit limitem; quare eandem 460$^{mam}$ duco, non in 2$^{dam}$, sed in 1$^{mam}$, hoc modo:

9916193 (460)
5001 (1)

9965774 (461)

Cùm

Cùm igitur $462^{da}$ poteſtas termini 100⌊5 excedat æquè altam 100rij plus quam decuplo; at $461^{ma}$ ejuſdem termini 100⌊5 excedat æquè altam 100rij minùs quam decuplo: ajo, rationem 100⌊5 ad 100 contineri in decupla plus quam 461 vicibus, minùs autem quàm $462^{bus}$.

Cœterùm

| | | | | | |
|---|---|---|---|---|---|
| Cùm poteſtas | 460 | fit | 9916193 | | & differentiæ |
| | 461 | | 9965774 | 49581 | propemodum |
| | 462 | | 10015603 | 49829 | æquales; |

Itaque partem proportionalem, quâ poteſtas juſta, nimirum 10000000 excedit proximè minorem 9965774, per Regulam auream facilè ac tutò reperire datur, ſumendo nimirum,

| | |
|---|---|
| juſtæ | 10000000 |
| & proximè minoris | 9965774 |
| differentiam | 34226, & dicendo: |

Ut differentia inter proximè minorem & majorem (nimirum 49829)

Ad differentiam inter proximè minorem & juſtam (putà 34226;)

Ita 10000, ad 6868; quæ ſunt partes decimales unius vicis, adeò ut ratio 100⌊5 ad 100 contineatur in decupla 461⌊6868 vicibus. Porrò, Si decupla (ſive ratio 100⌊5 ad 100 ſumta 461⌊6868 vicibus) continet ratiunculas 1,0000000; quot ejuſmodi ratiunculas continebit ratio 100⌊5 ad 100 ſemel ſumta? Prodeunt 21659⌊7 ratiunculæ, quæ ſunt exacta menſura rationis 100⌊5 ad 100, quibus ſi addas rationes 100 ad 10, & 10 ad 1, hoc eſt bis decuplam, conſtantem ratiunculis 2,0000000; fit integra menſura rationis 100⌊5 ad 1 (ſive Logarithmus abſoluti 100⌊5) hic ſcilicet 2,0021659⌊7.

Pari modo invenietur Logarithmus abſoluti 99⌊5, vel ratio abſoluti 99⌊5 ad 1, ſi ex ratione 100 ad 1 (quæ æquipollet bis decuplæ) auferas rationem 100 ad 99⌊5, hoc eſt, ex ratiunculis 2,0000000 auferas numerum ſimilium ratiuncularum in ratione 100 ad 99⌊5 contentarum. Quæratur igitur primùm, quoties ratio 100 ad 99⌊5 contineatur in decupla. Ubi rurſus alter terminorum cùm ſit 100, operationis haut indiget; alter verò 99⌊5 continuo ductu in ſeipſum elevandus eſt ad eam poteſtatem, quæ decuplo minor ſit poteſtate 100rij æquè altâ. En operationem:

995000 (1)
599 (1)

8955000
895500
49750

9900250 (2)
520099 (2)

8910225
891023
198
49

9801495 (4)
5941089 (4)

8821345
784120
980
392
88
5

9606930 (8)
396069 (8)

9229310 (16)
139229 (16)

8518016 (32)

8518016 (32)
6108158 (32)

7255660 (64)
665527 (64)

5264459 (128)
9544625 (128)

2771452 (256)
2541772 (256)

554290 (512)

Hæc potestas plusquam decuplo minor est potestate $100^{rij}$ æquè altâ; ergo resume

2771452 (256)
9544625 (128)

1459018 (384)
665527 (64)

1058613 (448)
6108158 (32)

901728 (480)

Quæ potestas rursus plusquam decuplo minor est potestate $100^{rij}$ æquè altâ, ergo resume

1058613 (448)
139229 (16)

977026 (464)

Quæ etiam plusquam decuplo minor est potestate $100^{rij}$ æquè alta; ergo resume

1058613 (448)
396069 (8)

1017002 (456)
5941089 (4)

996814 (460)

Hæc quoque plusquam decuplo minor est potestate $100^{rij}$ æquè altâ; ergo resume

1017002 (456)
520099 (2)

1006857 (458)
599 (1)

1001823 (459)

Cùm igitur $460^{ma}$ potestas termini *99*[5 deficiat ab æquè altâ $100^{rii}$ plusquam decuplo; at $459^{na}$ ejusdem termini *99*[5 deficiat ab æquè altâ $100^{rii}$ minùs quàm decuplo; ajo, rationem 100 ad *99*[5 contineri in decupla plusquam 459 vicibus, minùs autem quàm 460.

Tum, Ut differentia potestatum $459^{næ}$ & $460^{mæ}$ (nimirum 5009) ad differentiam $459^{næ}$ & justæ (putà 1823:) Ita 10000, ad 3639. Quare ratio 100 ad *99* [5 continetur in decupla 459[3639 vicibus.

Porrò

Porrò, Si decupla (ſive ratio 100 ad 99[5 ſumta 459[3639 vicibus) continet ratiunculas 1,0000000; quot ejuſmodi ratiunculas continebit ratio 100 ad 99[5 ſemel ſumta. Prodeunt 21769[3 ratiunculæ, quæ ſunt exacta menſura rationis 100 ad 99[5, quâ ſcilicet ratio 99[5 ad 1 deficit à ratione 100 ad 1, hoc eſt, à bis decuplâ, quæ cùm conſtet ratiunculis 2,0000000, demtis hinc 21769[3, reſtat menſura rationis 99[5 ad 1, hæc ſcilicet 1,9978230[7, qui proinde eſt Log-us abſoluti 99[5.

Atque hoc modo æſtimatis rationum quantitatibus in communi quadam menſura, non ſolùm natura & uſus Logarithmorum clarius eluceſcit; ſed & conſtructio eorundem multò facilior evadit. Id quod magis perſpicuum fiet, cùm oſtendero alterum etiam longè promtiorem modum rationes æſtimandi. Sed amolienda eſt prius difficultas, quæ, haut ſcio, an cuiquam detecta, plures utique in errorem induxit. Cùm enim ratio duobus terminis intercedens vulgò haut aliter conſideretur, quàm accipiendo alterutrum terminum ut antecedentem, & alterum ut conſequentem; unde cùm ratio eſt quanta (hoc eſt, cùm termini ſunt inæquales) vel major terminus eſt antecedens, & dicitur ratio majoris inæqualitatis, vel minor eſt antecedens, & dicitur ratio minoris inæqualitatis: Ajo ego, eandem rationem iiſdem terminis conceptam poſſe ac debere (ſaltem in Muſicis, atque in hac noſtra Logarithmotechnia) alio etiamnum modo conſiderari ita, ut neuter terminorum exiſtimetur tanquam antecedens, vel conſequens, ſed uterque capiatur ſimul pariter tempore atque ordine. Sic *v. gr.* in Muſicis intervallum diapente, ſive ratio $\frac{3}{2}$ vel $\frac{2}{3}$, poteſt quidem accipi ita, ut numerus undationum ab acutiori phthongo in aëre excitatarum, nempe ternarius, ſit antecedens, & binarius, exhibens numerum undationum pari temporis ſpatio â graviori phthongo effectarum, ſit conſequens, dum intelligatur acutior phthongus tempore (vel ſaltim cogitatione) præcedere graviorem; & vice verſâ: ſed nihil vetat, quò minus etiam ambo iſti phthongi ſimul atque eodem tempore conſonent, adeóque neuter altero ſit vel tempore vel naturâ prior. Cœterùm nihilo majus ob hoc vel minus evadit intervallum diapente (ratione ſeſquialterâ conſtans) ſive acutior phthongus præcedat graviorem, ſive contrà, ſeu denique ambo ſimul conſonent. Ita, licèt utilis ſit demonſtrationibus Geometricis conſideratio vulgaris, quâ minor terminus antecedens ad majorem conſequentem dicitur minorem rationem habere, quàm idem ille major tanquam antecedens ad eundem minorem tanquam conſequentem obtineat: Negari tamen haut poteſt, eundem numerum ratiuncularum contineri in ſeſquialtera ratione, ſive ternarius ſit antecedens, ſive binarius, ſive neuter; adeóque conſiderationem antecedentis & conſequentis in æſtimanda mole vel menſura rationum nullum inſtar habere.

Non

Non ſecùs ac quinarius negatus (—5) mole haud differt à quinario affirmato (+5) cùm uterque conſtet quinque unitatibus; diſſimulatâ nimirum affectione, propter quam negatus vel affirmatus cenſetur, & ſolâ mole vel quantitate ſimpliciter æſtimatâ: cùm tamen accipiendo quinarium negatum, prout ſigno negationis affectus eſt, verum ſit, eum minorem eſſe, non modò quovis numero affirmato, ſed & omni negato, qui à nihilo minùs differat, quàm ipſe, quales ſunt binarius vel ternarius negatus (—2, vel—3.) Ubi præter molem numeri conſideratur quoque, utram in partem eadem abeat à nihilo, affirmatam an negatam. Ita quoque ſive uniſonum (vel æqualitatis rationem, quæ quantitate caret, atque ideò rectè componitur nihilo) ponas in phthongo graviori (vel in binario) indéque aſcendas ad phthongum invervallo diapente acutiorem (vel ad ternarium;) ſive contrà ponas uniſonum in acutiori (vel æqualitatis rationem in ternario) indeque deſcendas ad phthongum intervallo diapente graviorem (vel ad binarium:) certè eádem eſt utrobique quantitas intervalli Muſici (atque idem numerus ratiuncularum intercedentium) licèt ab uniſono (vel ab æqualitatis ratione, tanquam nihilo) in diverſas planè partes abeat. Unde ſi moles ſola, aut quantitas rationis æſtimetur, diſſimulando utram in partem (majoriſne, an minoris inæqualitatis) vergat ab æqualitate; nihilo major eſt ratio ternarii ad binarium, quàm binarii ad ternarium. Sed ſi cum mole unà includas quoq; conſiderationem proceſſûs à majori termino ad minorem, vel contrà; non eo inficias, minorem eſſe quamvis rationem minoris inæqualitatis non modò quâvis ratione majoris inæqualitatis; ſed & quâvis aliâ minoris inæqualitatis, quæ ab æqualitate minùs abſit. Ita ratio antecedentis 5 ad conſequentem 8, non modò minor eſt ratione antecedentis 8 ad conſequentem 6 (vel 5) ſed eádem quoque minor eſt ratione antecedentis 6 (vel 7) ad conſequentem 8: licèt ſepoſitâ vel neglectâ notione antecedentis & conſequentis, eádem ſit moles rationis $\frac{5}{8}$ atque $\frac{8}{5}$. Diſtinguemus igitur deinceps inter quantitates mole-majores, & affectione-majores: ita ut in rationibus notio inæqualitatis majoris vel minoris nîl niſi affectionem innuat. Eas porrò rationes appellamus mole-majores, quarum major terminus diviſus per minorem, dat quotum majorem; & vice verſâ. Præterea majoris inæqualitatis rationum quæcunque mole, eædem & affectione majores ſunt; at minoris inæqualitatis rationes quò ſunt mole majores, eò affectione minores ſunt. Quibus præmiſſis, digeremus ea, quæ reſtant, in propoſitiones.

## PROPOSITIO I.

Si duæ quantitates ejuſdem affectionis auferantur ab invicem (affirmata ſc. ab affirmata, vel negata a negata) ſitque quantitas reliqua ejuſdem affectionis cum duabus ab initio datis; quantitas ablata mole-minor eſt quantitate ex qua auferebatur. Sin quantitas reliqua diverſæ ſit affectionis à duabus initiò datis; quantitas ablata mole-major eſt quantitate ex qua auferebatur. Sit exempli gr.

| ratio ſubducenda | ratio ex qua | ratio reliqua |
|---|---|---|
| $\frac{5}{8}$ | $\frac{3}{5}$ | $\frac{24}{25}$ |

tres ſcilicet rationes ejuſdem affectionis, putà minoris inæqualitatis ſingulæ; ergo, inquam, ratio ſubducta $\frac{5}{8}$ mole-minor eſt ratione ex quâ $\frac{3}{5}$. Sit rurſus

| ratio ſubducenda | ratio ex qua | ratio reliqua |
|---|---|---|
| $\frac{8}{5}$ | $\frac{3}{2}$ | $\frac{15}{16}$ |

quarum priores duæ ſunt ejuſdem affectionis, nimirum majoris inæqualitatis ambæ, at tertia $\frac{15}{16}$ diverſæ eſt affectionis, putà inæqualitatis minoris; ergo, inquam, ratio ſubducta $\frac{8}{5}$ mole-major eſt ratione ex quâ $\frac{3}{2}$.

## PROPOSITIO II.

Si ſint quotcunque rationes continuæ & terminorum æquidifferentium; v. gr. $\frac{a}{a+b}$, $\frac{a+b}{a+2b}$, $\frac{a+2b}{a+3b}$, & deinceps, faciendo ſcilicet antecedentem cujuſque ex poſterioribus rationibus æqualem conſequenti proximè præcedentis, & a minoribus progrediendo ad majores: Erit quælibet præcedentium rationum mole-major qualibet ſequente; ſed & differentiarum inter ipſas rationes tam primarum, quàm ſecundarum, tertiarum, cæterarumque adeò omnium in infinitum, ſemper præcedens mole-major eſt ſequente. Sin à majoribus terminis progrediare ad minores; contrarium eveniet.

Patet ex collatione ſequentis tabellæ cum propoſitione prima.

Rationes.

| Rationes. | Diff: primæ. | Differentiæ secundæ. |
|---|---|---|
| $a$ | | |
| $a+b$ | | |
| | $aa+2ab+bb$ | |
| | $aa+2ab$ | |
| $a+b$ | | $a^4+6a^3b+12aabb+8ab^3$ |
| $a+2b$ | | $a^4+6a^3b+12aabb+10ab^3+3b^4$ |
| | $aa+4ab+4bb$ | |
| | $aa+4ab+3bb$ | |
| $a+2b$ | | $a^4+10a^3b+36aabb+54ab^3+27b^4$ |
| $a+3b$ | | $a^4+10a^3b+36aabb+56ab^3+32b^4$ |
| | $aa+6ab+9bb$ | |
| | $aa+6ab+8bb$ | |
| $a+3b$ | | $a^4+14a^3b+72aabb+56ab^3+128b^4$ |
| $a+4b$ | | $a^4+14a^3b+72aabb+162ab^3+135b^4$ |
| | $aa+8ab+16bb$ | |
| | $aa+8ab+15bb$ | |
| $a+4b$ | | |
| $a+5b$ | | |

## Propositio III.

Si quotcunque rationum continuarum, quarum termini ſint æquidifferentes, prima eadémque minima vocetur a, differentia autem primæ & ſecundæ rationis vocetur b, tum ex differentiis ſecundis prima vocetur c; atque ex tertiis prima vocetur d; & ſic porrò: Aio ſecundam rationem fore $a+b$, tertiam $a+2b+c$, quartam $a+3b+3c+d$ quintam $a+4b+6c+4d+e$; atque ita deinceps, componendo ſingulas rationes ex prima & tot differentiis, quot quæque locis abeſt à prima, ipſis autem differentiis jungendo coëfficientes numeros figuratos, primis quidem radices, ſecundis trigonales, tertiis pyramidales, atque ita porrò, ſingulóſque adeò, prout naturali ſerie ordinantur in ſubjecta Tabella:

 Unitates

| Unitates. | radices. | trigonales. | pyramidales. | trigono-trigonales. | trigono-pyramidales. | pyrami-di-pyramidales. | trigono-trigono-pyramid. | trigono-pyrami-di-pyramid. | pyrami-di-pyrami-di-pyramida. |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| 1 | 1 | 1 | 1 | 1 | 1 | 1 | 1 | 1 | 1 |
| 1 | 2 | 3 | 4 | 5 | 6 | 7 | 8 | 9 | 10 |
| 1 | 3 | 6 | 10 | 15 | 21 | 28 | 36 | 45 | |
| 1 | 4 | 10 | 20 | 35 | 56 | 84 | 120 | | |
| 1 | 5 | 15 | 35 | 70 | 126 | 210 | | | |
| 1 | 6 | 21 | 56 | 126 | 252 | | | | |
| 1 | 7 | 28 | 84 | 210 | | | | | |
| 1 | 8 | 36 | 120 | | | | | | |
| 1 | 9 | 45 | | | | | | | |
| 1 | 10 | | | | | | | | |

Nimirum eodem modo, quo iidem figurati numerant complementa poteſtatum à radice binomia genitarum; obſervato aſcenſu obliquo à ſiniſtra dextrorſum.

Sic undecima ratio conſtat ex $a+10b+45c+120d+210e+252f+210g+120h+45i+10k+l$; ſumtis ordine numeris imam tabellæ baſin occupantibus.

Exhibet

Exhibet autem tabella non modò quotam velis rationem; ſed & ſummam quotcunque continuè ſequentium, pari fermè negotio methodoque. Sic ſumma quinque rationum eſt 5a+10b+10c+5d+e, obſervato aſcenſu obliquo, ut antè.

Demonſtratio.

| Rationes. | diff: primæ. | Secundæ. | Tertiæ. | 4 |
|---|---|---|---|---|
| a | | | | |
| | b | | | |
| a+b | | c | | |
| | b+c | | d | |
| a+2b+c | | c+d | | e |
| | b+2c+d | | d+e | |
| a+3b+3c+d | | c+2d+e | | |
| | b+3c+3d+e | | | |
| a+4b+6c+4d+e | | | | |

Cùm enim per præcedentem, progrediendo à majoribus terminis ad minores (vel quod idem eſt, à minoribus rationibus ad majores) non modò ſecunda ratio excedat primam, ſed & primarum, ſecundarum, cæterarumque differentiarum ſecunda quæque excedat primam; licebit ſanè iſtos exceſſus vocare b, c, d, & deinceps.

| | | |
|---|---|---|
| Cùm a. differentiarum tertiarum prima ſit | d | Ex hypotheſi; |
| Et quartarum prima (quâ ſecunda tertiarum excedit primam) | e | |
| Erit ſanè ſecunda tertiarum | d+e | |
| Rurſus cùm ſecundarum differentiarum prima ſit | c | Ex hypotheſi; |
| Et tertiarum prima (quâ altera ſecundarum excedit primam) | d | |
| Erit ſanè altera ſecundarum | c+d | |
| Sed 2da 3tiarum (quâ tertia ſecundarum excedit alteram) erat | d+e | |
| Ergo tertia ſecundarum erit | c+2d+e | |
| Porrò cùm primarum differentiarum prima ſit | b | Ex hypotheſi; |
| Et ſecundarum prima (quâ ſecunda primarum excedit primã) | c | |
| Erit ſanè ſecunda primarum | b+c | |
| Sed altera ſecundarum (quâ tertia primarum excedit 2dam) erat | c+d | |
| Ergo tertia primarum | b+2c+d | |
| Sed & 3tia 2darum (quâ quarta primarum excedit 3tiam) erat | c+2d+e | |
| Ergo quarta primarum erit | b+3c+3d+e | |
| Denique cùm prima ratio ſit | a | Ex hypotheſi; |
| Et differentia inter primam & ſecundam rationem | b | |
| Erit ſanè ſecunda ratio | a+b | |
| Et cùm differentiarum primarum ſecunda foret | b+c | |
| Erit tertia ratio | a+2b+c | |

Sed

| | |
|---|---|
| Sed & differentiarum primarum tertia erat | $b+2c+d$ |
| Ergo quarta ratio | $a+3b+3c+d$ |
| Tandem differentiarum primarum quarta erat | $b+3c+3d+e$ |
| Ergo quinta ratio | $a+4b+6c+4d+e$ |

$$\text{Postremò rationes}\left\{\begin{array}{ll}\text{Prima} & a\\ \text{Secunda} & a+b\\ \text{Tertia} & a+2b+c\\ \text{Quarta} & a+3b\div 3c+d\\ \text{Quinta} & a+4b\div 6c+4d+e\end{array}\right\}\text{addantur,}$$

fit summa quinque rationum $5a+10b+10c+5d+e$.

Rationes vel magnitudines.

| | |
|---|---|
| Prima | $a$ |
| 2 | $a+b$ |
| 3 | $a+2b+c$ |
| 4 | $a+3b+3c+d$ |
| 5 | $a+4b+6c+4d+e$ |
| 6 | $a+5b+10c+10d+5e+f$ |
| 7 | $a+6b+15c+20d+15e+6f+g$ |
| 8 | $a+7b+21c+35d+35e+21f+7g+h$ |
| 9 | $a+8b+28c+56d+70e+56f+28g+8h+i$ |
| 10 | $a+9b+36c+84d+126e+126f+84g+36h+9i+k$ |

## Propositio IV.

Si quotcunque rationum continuarum, quarum termini sint æquidifferentes, prima eadémque maxima vocetur a, differentia autem primæ & secundæ vocetur b, tum differentiarum secundarum prima vocetur c, tertiarum prima d, & sic deinceps; Aio secundam rationem fore $a-b$, tertiam $a-2b+c$, quartam $a-3b+3c-d$, quintam $a-4b+6c-4d+e$; atque ita deinceps, alternatis semper signis affirmatis & negatis. Demonstratur ut præcedens.

## Propositio V.

Datæ rationis multiplicem invenire prope verum.

Constructio. Differentiam terminorum datæ rationis duc in denominatorem multiplicis dati, & à facto aufer ipsam differentiam, reliqui semissem adde termino majori, & detrahe minori; ita prodibunt duo termini exprimentes rationem paulò minorem quæsitâ. Tum si termini prodeuntes sint

ſint fortè numeri mixti ex integris & fractis ; reducantur ad purè fractos, quorum denominatoribus omiſſis, ratio quæſita cenſebitur in numeratoribus integris & à fractione liberis. *V.gr.* Quæratur rationis $\frac{25}{28}$ quadruplum. Differentia terminorum 3 ducta in 4 exhibet 12, unde ablatis tribus reſtant 9, cujus ſemis $4\frac{1}{2}$ additus termino majori 28, facit $32\frac{1}{2}$, detractus autem minori 25, relinquit $20\frac{1}{2}$ ; erit igitur ratio $20\frac{1}{2}$ ad $32\frac{1}{2}$ paulo major quadruplo rationis $\frac{25}{28}$. Reductis terminis $20\frac{1}{2}$ & $32\frac{1}{2}$ ad purè fractos, fiunt $\frac{41}{2}$ & $\frac{65}{2}$, omiſſiſque denominatoribus, erit ratio $\frac{41}{65}$ paulo major quæſitâ.

Demonſtratio hujus & ſequentis propoſitionis conſtabit ex propoſitione VII.

## Propoſitio VI.

Datæ rationis partem imperatam invenire prope verum.

Conſtructio. Differentiam terminorum datæ rationis divide in partes totidem, quot denominator partis quæſitæ conſtat unitatibus, atque ex iis partibus exemtâ unâ, reliquarum ſemiſſem adde termino minori, & detrahe quoque majori ; ita probibunt duo termini exprimentes rationem paulo minorem quæſitâ : Tum ſi termini prodeuntes ſint fortè numeri mixti ex integris & fractis ; reducantur ad purè fractos, quorum denominatoribus omiſſis, ratio quæſita cenſebitur in numeratoribus integris, & à fractione liberis. *V. gr.* Oporteat rationis $\frac{3}{5}$ invenire partem quintam. Differentia terminorum 2 diviſa quinquefariam exhibet $\frac{2}{5}$, quæ eſt una pars quinta, eximenda ex integra ſumma quinque partium, quæ erat 2, & reſtant $\frac{8}{5}$, quarum ſemis $\frac{4}{5}$ additus termino minori , facit $3\frac{4}{5}$; detractus vero ex majori 5, reliquum facit $4\frac{1}{5}$; erit igitur ratio $3\frac{4}{5}$ ad $4\frac{1}{5}$ paulo minor, quàm pars quinta rationis $\frac{3}{5}$. Reductis terminis $3\frac{4}{5}$ & $4\frac{1}{5}$ ad purè fractos, fiunt $\frac{19}{5}$ & $\frac{21}{5}$, omiſſiſque denominatoribus, erit ratio $\frac{19}{11}$ paulo minor quæſitâ. Rurſus inveniendus ſit rationis $\frac{8}{11}$ ſemis. Differentia terminorum 3 bipartita exhibet $1\frac{1}{2}$, qui eſt unus ſemis, eximendus ex integra ſumma duarum partium 3, & reſtat $1\frac{1}{2}$, cujus ſemis $\frac{3}{4}$ additus termino minori , facit $8\frac{3}{4}$ ; detractus autem ex majori 11, relinquit $10\frac{1}{4}$ ; erit igitur ratio $8\frac{3}{4}$ ad $10\frac{1}{4}$ paulò minor ſemiſſe rationis $\frac{8}{11}$. Reductis terminis $8\frac{3}{4}$ & $10\frac{1}{4}$ ad purè fractos, fiunt $\frac{35}{4}$ & $\frac{41}{4}$, omiſſiſque denominatoribus, erit ratio $\frac{35}{41}$ paulò minor quæſitâ.

## Propoſitio VII.

Invenire, quantum pars rationis imperata, quæ per præcedentem invenitur, deficiat ab exactiori.

Conſtructio.

*Conſtructio.* Primò, ſi partis imperatæ denominator ſit numerus impar; ſume rationes, quæ ſunt rationi per præcedentem inventæ utrinque vicinæ & æquidifferentes, ita habebis tres rationes, quarum minimam aufer à media, & mediam à maxima, prodibunt duæ differentiæ, quarum differentiam denuò inveſtigabis, tantiſper aſſervandam. Deinde partis imperatæ denominatori unitatem detrahe, reliqui ſemiſſem in tabula Figuratorum inſertâ prop. III, quære inter radices, & invento congruentem numerum trigonalem excerptum tripartire, ſic invenies, quoties ſumenda ſit differentiarum differentia ſuprà aſſervata, ut acquiras particulam, quâ pars imperata, quæ per præcedentem inveniebatur, deficit ab exactiori. *V.gr.* Scire velim, ratio $\frac{19}{21}$ per præcedentem inventa quantum deficiat ab exactiori quinta parte rationis $\frac{3}{5}$. Rationi $\frac{19}{21}$ utrinque vicinæ & æquidifferentes ſunt $\frac{17}{19}$ & $\frac{21}{23}$. Differentia minimæ à media $\frac{437}{441}$ & mediæ à maxima $\frac{357}{361}$, & harum differentiarum differentia $\frac{157437}{157757}$ aſſervanda. Tum partis imperatæ denominatori 5 detraho 1, reſtant 4, cujus ſemiſſi 2 inter radices invento congruit trigonalis numerus 3, cujus triens eſt 1, indicans differentiarum differentiam ſupra aſſervatam $\frac{157437}{157757}$ ſemel ſumtam exhibere particulam, quâ ratio $\frac{19}{21}$ deficit ab exactiori quinta parte rationis $\frac{3}{5}$, adeò ut hujus exactior pars quinta ſit ratio $\frac{19}{21}$ + ratione $\frac{157437}{157757}$.

Sin partis imperatæ denominator ſit numerus par; ſume ſemiſſem differentiæ terminorum rationis per præcedentem inventæ, quem ejuſdem termino minori detrahes, & majori addes pariter ac detrahes; ita obtinebis quatuor rationes continuas terminorum æquidifferentium, ex quibus minorum duarum differentiam auferes ex majorum duarum differentia, & emergentem differentiarum differentiam aſſervabis. Deinde partis imperatæ denominatorem bipartire, & invento ſemiſſi congruentes in tabella propoſitioni III. ſubjuncta ſpecies excerpe, ſaltim uſque ad $c$ ſpeciem, poſitoque $a = \frac{1}{2}$, $b = 2$, $c = 1\frac{1}{3}$; duc cujuſquè ſpeciei valorem in ſuum coëfficientem, collectiſque omnibus in unam ſummam, habebis, quot vicibus ſumenda ſit differentiarum differentia ſuprà aſſervata, ut acquiras particulam, quâ pars imperata, quæ per præcedentem inveniebatur, deficit ab exactiori. Ex.gr. Rationis $\frac{8}{11}$ octans per præcedentem inventus ſit $\frac{149}{155}$; Scire velim, quantum is deficiat ab exactiori. Differentia terminorum eſt 6, cujus ſemis 3 detractus minori termino, relinquit 146; additus autem majori, facit 158; & detractus majori, relinquit 152. Sunt ergo quatuor rationes continuæ terminorum æquidifferentium $\frac{146}{149}, \frac{149}{152}, \frac{152}{155}, \frac{155}{158}$. Differentia duarum minorum rationum $\frac{24016}{24025}$ ablata à differentia duarum majorum

jorum $\frac{22192}{22201}$ relinquit differentiarum differentiam $\frac{1753825}{1753879}$ aſſervandam. Partis imperatæ denominator eſt 8, cujus ſemiſſi 4 congruunt in tabella propoſitioni III ſubjuncta ſpecies iſtæ: $a+3b+3c$; ſed $a=\frac{1}{2}$, & $3b=6$, & $3c=4$, quæ juncta faciunt $10\frac{1}{2}$. Ergo differentiarum differentiæ $\frac{1753825}{1753879}$ ſuprà ſervatæ ſumendum eſt decuplum cum ſemiſſe, ut acquiramus particulam, quâ octans per præcedentem inventus deficit ab exactiori. Atqui rationis $\frac{1753825}{1753879}$ decuplum per V hujus eſt $\frac{1753582}{1754122}$ vel $\frac{876791}{877061}$, & ſemis per VI eſt $\frac{3507677}{3507731}$; adeò ut rationis $\frac{9}{11}$ octans exactior præter rationem per præcedentem inventam $\frac{149}{155}$ contineat etiamnum ratiunculas $\frac{876791}{877061}$, & $\frac{3507677}{3507731}$.

## Demonſtratio.

Cùm per III hujus ſumma trium rationum continuarum, terminis æquidifferentibus contentarum ſit $3a+3b+c$
Erit ejuſdem ſummæ triens $a+b+\frac{1}{3}c$ $\alpha$
Rurſus differentia primæ & ſecundæ rationis eſt $b$
ſecundæ autem & tertiæ $b+c$
Ergo differentiarum differentia $c$
Cujus triens $\frac{1}{3}c$
Quem ſi addas mediæ trium rationum $a+b$
Erit ſumma $a+b+\frac{1}{3}c$
Æqualis nempe trienti trium rationum ſuprà notato literâ $\alpha$. Ergo diſcerptâ ratione quavis in tres continuas terminorum æquidifferentium, ut jubet propoſitio VI, erit media ex iis paulò minor triente totius diſcerptæ, & quidem tantò minor, quantus eſt triens differentiæ differentiarum intercedentium inter rationem primam & ſecundam, nec non inter ſecundam & tertiam, quod innuit propoſitio VII.

Sic quoque per III hujus, ſumma ſedecim rationum continuarum, terminis æquidifferentibus contentarũ, eſt $16a+120b+560c+1820d$
Et ejuſdem ſummæ octans $2a+15b+70c+227\frac{1}{2}d$ $\beta$

D Tum

Tum per tabellam propositioni III subjunctam, quatuor mediæ ex istis sedecim, nimirum 7ma, 8va, 9na, 10ma, sunt

$$\left\{\begin{array}{l} a+6b+15c+20d \\ a+7b+21c+35d \\ a+8b+28c+56d \\ a+9b+36c+84d \end{array}\right.$$

Differentia duarum priorum $b+6c+15d$

posteriorum $b+8c+28d$

Differentiarum differentia $2c+13d$

Hujus decuplum $20c+130d$

& semis $c+6\frac{1}{2}d$

Unà cum summa duarum ex quatuor istis mediar. $2a+15b+49c+91\frac{1}{2}d$

Facit $2a+15b+70c+228d$

Æqualem octanti sedecim rationum suprà notato literâ $\beta$. Ergo si ratio data discerpatur in partes sedecim, erunt duæ mediæ ex iis simul, paulò minores octante totius discerptæ; & quidem tantò minores, quantum est differentiæ differentiarum (intercedentium inter rationes ex sedecim istis septimam & octavam, nec non inter 9nam & 10mam) decuplum cum semisse. q. e. d.

## Propositio VIII.

Rationes terminorum æquidifferentium sunt propemodum, ut reciprocè ipsorum terminorum media Arithmetica.

Explicatio. Sumatur per VI hujus rationis cujusvis, v.gr. $\frac{8}{9}$ pars quævis, v.gr. semis $\frac{33}{35}$, tum pars quævis alia, v.gr. triens $\frac{25}{26}$, & ut fiant terminorum æquidifferentium, pro $\frac{8}{9}$ sumatur $\frac{16}{18}$, & pro $\frac{25}{26}$ æquipollens $\frac{50}{52}$. Medium Arithmeticum terminorum rationis totius est 17, semissis, 34, trientis 51. Liquet igitur, ut tota ratio $\frac{16}{18}$ est ad semissem suum $\frac{33}{35}$; ita reciprocè semissis medium Arithmeticum 34 esse ad medium totius 17: & ut tota ratio $\frac{16}{18}$ est ad trientem suum $\frac{50}{52}$; ita reciprocè trientis medium Arithmeticum 51 esse ad medium totius 17: ideóque etiam, ut semis $\frac{33}{35}$ est ad trientem $\frac{50}{52}$; ita reciprocè trientis medium 51 esse ad medium semissis 34: Tantum porrò hanc analogiam abire à vero, quantum semisses, trientes, partesve aliæ rationum per VI hujus inventæ deficiunt ab exactis. Quamobrem id agendum, ne defectus ille instituto nostro officiat. Cæterùm minor erit defectus, minúsque adeò officiet, quò rationes in analogiam adscitæ minores fuerint. Cùm enim secundum demonstrationem præcedentis, octans exactus sedecim rationum foret $2a+15b+70c+227\frac{1}{2}d$, at summa duarum ex sedecim istis mediarum $2a+15b+49c+91\frac{1}{2}d$, qui est octans per VI inventus; patet differentiam horum octantium consistere in contemtiori

temtiori parte secundarum & tertiarum differentiarum. Atqui rationum continuarum minores, habent differentias primas minores, ac proinde differentiarum secundarum & tertiarum partem exiliorem multò etiamnum minorem. Sed exemplo res fiet illustrior. Nam rationis $\frac{99}{101}$ semis, per VII hujus, est $\frac{199}{201} + \frac{7999399}{7999401}$; ubi ratio $\frac{199}{201}$ ab exactiori semisse deficit ratiunculâ superbipartiente $\frac{7999399}{7999401}$. Rursus rationem $\frac{199}{201}$ (quæ priùs assumtæ $\frac{99}{101}$ propemodū semis est) si denuò bipartiamur per VII hujus, habebimus $\frac{399}{401} + \frac{127997599}{127997601}$; ubi ratio $\frac{399}{401}$ ab exactiori semisse deficit ratiunculâ superbipartiente $\frac{127997599}{127997601}$. Minor est igitur defectus, cùm bipartimur rationem minorem $\frac{199}{201}$, quàm si bipartiamur majorem $\frac{99}{101}$, quantò scilicet ratiuncula superbipartiens $\frac{127997599}{127997601}$ minor est superbipartiente $\frac{7999399}{7999401}$, hoc est propemodum, quantò 8 milliones minores sunt 128 millionibus, nimirum sedecim vicibus. Sed & ejusdem rationis quò minor pars sumetur per VI hujus, eò minùs deficiet à vero. Sic rationis $\frac{99}{101}$ semis, per VII hujus, erat $\frac{199}{201} + \frac{7999399}{7999401}$, & ejusdem triens per eandem est $\frac{299}{301} + \frac{8099459197}{8099460797}$; ubi quidem triens $\frac{299}{301}$ (qualis per VI invenitur) minùs deficit ab exactiori, quàm semis $\frac{199}{201}$ (per eandem inventus;) quantò ratiuncula $\frac{8099459197}{8099460797}$ minor est alterâ $\frac{7999399}{7999401}$. Unde sequitur, cùm bipartitâ ratione $\frac{99}{101}$ secundum VI hujus, non nisi binarium quasi perdamus in octo millionibus, vel unitatem in quatuor millionibus; futurum, ut istius semisse $\frac{199}{201}$ (sive $\frac{99[5}{100[5}$) diminuto quovis modo per analogiam VItæ hujus superstructam, minùs etiam perdamus; adeóque à ratione $\frac{99[5}{100[5}$ nos analogicè argumentari posse ad quamvis minorem terminorum æquidifferentium, ita ut minùs quàm unitatem perdamus in quatuor millionibus; quóque ratio, ad quam argumentamur, minor fuerit, eò jacturam fore minorem.

## Propoſitio IX.

Datâ menſurâ rationis $\frac{99[5}{100[5}$ in particulis, qualium decupla continet 1,0000000; invenire menſuram cujuſvis minoris rationis terminorum æquidifferentium, in particulis ſimilibus.

Rationis $\frac{99[5}{100}$ menſura ſuprà inventa fuit 21769[3, & rationis $\frac{100}{100[5}$ menſura ibidem 21659[7, quarum ſumma exhibet rationem $\frac{99[5}{100[5}$ =43429[0. Dehinc oporteat nos invenire menſuram rationis $\frac{100}{101}$. Ergo per præcedentem dic:

Ut medium Arithmeticum terminorum $\frac{100}{101}$ (nimirum 100[5) ad medium Arithmeticum terminorum $\frac{99[5}{100[5}$ (nimirum 100;) ita menſura hujus rationis (putà 43429) ad menſuram iſtius 43213. Tot igitur particulis Log-us abſoluti 101 excedit Log-um abſoluti 100. Quare, cùm Log-us abſoluti 100 ſit 2,0000000; oportet, ut Log-us abſoluti 101 ſit 2,0043213.

Porrò invenienda ſit menſura rationis $\frac{101}{102}$. Dic:

Ut medium Arithmeticum terminorum $\frac{101}{102}$ (nimirum 101[5) ad medium Arithmeticum terminorum $\frac{99[5}{100[5}$ (nimirum 100;) ita menſura hujus rationis (putà 43429) ad menſuram iſtius 42787. Tot igitur particulis Log-us abſoluti 102 excedit Log-um abſoluti 101. Quare, cùm Log-us abſoluti 101 foret 2,0043213; oportet, ut Log-us abſoluti 102 ſit 2,008600.

Cùm autem in omnibus hiſce analogiis terminus ſecundus ſit 100, & tertius 43429; liquet, ad inveniendam menſuram cujuſvis rationum ſequentium nihil amplius reſtare, quàm ut dividamus numerum 43429 per medium Arithmeticum terminorum rationis datæ. Cæterùm invenimus nos quidem rationis $\frac{99[5}{100[5}$ menſuram 43429, quæ fortè debebat eſſe unitate major, putà 43430; ſed facilè intelligit quivis, ſi pro ratione $\frac{99]5}{100]5}$

aſſumſiſſemus

assumsissemus $\frac{\overline{999}[5}{1000[5}$, & in cumulandis horum terminorum potestatibus calculum ad plures locos extendissemus, ad majorem utique præcisionem perveniri potuisse, adeóque huic methodo ad accuratam facilitatem nihil quicquam deesse. At non deest modus etiam hoc ipso facilior, qui post acquisitos paucos Logarithmos solâ additione rem peragit, & præterea probam suam secum fert, quem propositionibus sequentibus breviter exponemus.

### Propositio X.

Rationum duarum continuarum differentia est ad aliarum duarum continuarum differentiam; ut harum communis termini quadratum, ad istarum communis termini quadratum; dummodo singularum termini sint æquidifferentes.

Sint duæ rationes continuæ $\frac{a}{a+b}$, & $\frac{a+b}{a+2b}$, quarum terminus communis est $a+b$, & hujus quadratum $aa+2ab+bb$; sint verò & aliæ duæ continuæ $\frac{a+3b}{a+4b}$, & $\frac{a+4b}{a+5b}$, quarum communis terminus est $a+4b$, & hujus quadratum $aa+8ab+16bb$. Singularum termini differunt communi excessu $b$. Differentia duarum priorum est $\frac{aa+2ab}{aa+2ab+bb}$, & posteriorum duarum $\frac{aa+8ab+15bb}{aa+8ab+16bb}$. Atque hæ differentiæ sunt quoque terminorum æquidifferentium. Ergo per VIII hujus, sunt propemodum, ut reciprocè ipsorum terminorum media Arithmetica; hoc est, ut prior differentia $\frac{aa+2ab}{aa+2ab+bb}$, ad posteriorem $\frac{aa+8ab+15bb}{aa+8ab+16bb}$: ita horum terminorum medium Arithmeticum $aa+8ab+15\frac{1}{2}bb$, ad medium Arithmeticum istorum $aa+2ab+\frac{1}{2}bb$; hoc est propemodum, ut communium terminorum quadrata, nimirum $aa+8ab+16bb$ ad $aa+2ab+bb$: quæ ab istis mediis Arithmeticis non nisi quantitate $\frac{1}{2}bb$ differunt, exiguâ sanè, & in rationibus minoribus (ubi sc. differentia terminorum $b$ ad ipsos terminos exiguum instar habet) facilè contemnendâ.

Propositio

## Propoſitio XI.

Rationum trium continuarum differentiarum differentia, eſt ad aliarum trium continuarum differentiarum differentiam; ut cubus medii Arithmetici mediæ ex his, ad cubum medii Arithmetici mediæ ex iſtis; dummodo ſingularum rationum termini ſint æquidifferentes.

Sint tres rationes continuæ $\frac{a}{a+b}, \frac{a+b}{a+2b}, \frac{a+2b}{a+3b},$ quarum differentia differentiarum eſt $\frac{a^4+6a^3b+12aabb+8ab^3}{a^4+6a^3b+12aabb+10ab^3+3b^4},$ & mediæ illarum medium Arithmeticum eſt $a+\frac{3b}{2},$ cujus cubus $a^3+\frac{9aab}{2}+\frac{27abb}{4}+\frac{35b^3}{8};$ ſint verò & aliæ tres continuæ $\frac{a+2b}{a+3b}, \frac{a+3b}{a+4b}, \frac{a+4b}{a+5b},$ quarum differentia differentiarum eſt $\frac{a^4+14a^3b+72aabb+160ab^3+128b^4}{a^4+14a^3b+72aabb+162ab^3+135b^4},$ & mediæ illarum medium Arithmeticum $a+\frac{7b}{2},$ cujus cubus $a^3+\frac{21aab}{2}+\frac{63abb}{4}+\frac{343b^3}{8}.$ Cæterùm ſingulæ rationes differunt communi exceſſu $b$; at differentiæ differentiarum non ſunt terminorum æquidifferentium, ſiquidem differentia terminorum prioris eſt $2ab^3+3b^4$, at poſterioris $2ab^3+7b^4$: ſecùs ac in præcedenti propoſitione. Quare cùm illic res expediretur regulâ proportionum ſimplici inverſâ, hic opus eſt duplici inverſâ; nimirum:

Ut medium Arithmeticum prioris differentiæ differentiarum (nimirum $a^4+6a^3b+12aabb+9ab^3+\frac{3b^4}{2}$) ductum in differentiam terminorum poſterioris ($2ab^3+7b^4$) ad medium Arithmeticum poſterioris differentiæ differentiarum (nimirum $a^4+14a^3b+72aabb+161ab^3+\frac{263b^4}{2}$) ductum in differentiam terminorum prioris ($2ab^3+3b^4$:) Ita differentia differentiarum prior ad poſteriorem: Ita quoque Cubus medii Arithmetici mediæ trium priorum rationum (nimirum $a^3+\frac{9aab}{2}+\frac{27abb}{4}+\frac{35b^3}{8}$) ad Cubum medii Arithmetici mediæ trium poſteriorum rationum (nimirum $a^3+\frac{21aab}{2}+\frac{63abb}{4}+\frac{343b^3}{8}$.)

Quæ

Quæ analogia vera esse deprehendetur, si productum extremorum æquale sit producto mediorum.

Atqui primus terminus $a^4+6a^3b+12aabb+9ab^3+\frac{3b^4}{2}$ in $2ab^3+7b^4$ $=2a^5b^3+19a^4b^4+66a^3b^5+102aab^6+66ab^7+\frac{21b^8}{2}$, si ducatur in quartum $a^3+\frac{21aab}{2}+\frac{63abb}{4}+\frac{343b^3}{8}$; productum est $2a^8b^3+40a^7b^4+297a^6b^5+1180a^5b^6+2991\frac{1}{8}a^4b^7$, &c.

Rursus secundus terminus $a^4+14a^3b+72aabb+161ab^3+\frac{263b^4}{2}$ in $2ab^3+3b^4=2a^5b^3+28a^4b^4+144a^3b^5+322aab^6+263ab^7+\frac{789b^4}{2}$, si ducatur in tertium $a^3+\frac{9aab}{2}+\frac{27abb}{4}+\frac{35b^3}{8}$; productum est $2a^8b^3+40a^7b^4+339a^6b^5+1593a^5b^6+4558\frac{1}{8}a^4b^7$, &c.

Hoc igitur productum cùm consentiat cum isto, non modò in primis & secundis speciebus, sed & in maxima parte tertiarum & quartarum; ajo analogiam in propositione memoratam, veram esse. Nam defectus, qui hîc apparet in productis terminorum, in ipsis terminis longè minor erat, quippe qui multiplicando crevit. Ut taceam in minoribus rationibus differentias secundas & tertias nullius ferè momenti esse.

Simili modo ostendetur, differentias tertias rationum continuarum & terminorum æquidifferentium, esse ut Quadrato-quadrata; quartas, ut Quadrato-cubos terminorum, qui singulis in tabella propositioni II subjunctâ, è regione opponuntur. Atque ita deinceps.

## Propositio XII.

Numerorum in progressione Arithmetica ordinatorum Quadrata conveniunt in differentiis secundis, Cubi in tertiis, Quadrato-quadrata in quartis, & sic deinceps.

Patet ex inspectione tabellarum subjectarum:

| Numeri | Quadrata | diff. 1. | diff. 2. |
|---|---|---|---|
| 1 | 1 | | |
| | | 3 | |
| 2 | 4 | | 2 |
| | | 5 | |
| 3 | 9 | | 2 |
| | | 7 | |
| 4 | 16 | | |

Numeri

| Numeri | Cubi | diff. 1. | diff. 2. | diff. 3. |
|---|---|---|---|---|
| 1 | 1 | | | |
| | | 7 | | |
| 2 | 8 | | 12 | |
| | | 19 | | 6 |
| 3 | 27 | | 18 | |
| | | 37 | | 6 |
| 4 | 64 | | 24 | |
| | | 61 | | |
| 5 | 125 | | | |

| Numeri | Quadrato-quadrata. | diff. 1. | diff. 2. | diff. 3. | diff. 4. |
|---|---|---|---|---|---|
| 1 | 1 | | | | |
| | | 15 | | | |
| 2 | 16 | | 50 | | |
| | | 65 | | 60 | |
| 3 | 81 | | 110 | | 24 |
| | | 175 | | 84 | |
| 4 | 256 | | 194 | | 24 |
| | | 369 | | 108 | |
| 5 | 625 | | 302 | | |
| | | 671 | | | |
| 6 | 1296 | | | | |

Hinc patet, datis v. gr. cubis quatuor, vel quadrato-quadratis quinque, quo pacto cæteri continuâ additione ſuccenturiari poſſint. Sint enim dati

| Cubi | diff. 1. | diff. 2. | diff. 3. |
|---|---|---|---|
| $a=8$ | | | |
| | $e=19$ | | |
| $b=27$ | | $h=18$ | |
| | $f=37$ | | $k=6$ |
| $c=64$ | | $i=24$ | |
| | $g=61$ | | $k=6$ |
| $d=125$ | | $l=..$ | |
| | $m=..$ | | |
| $n=...$ | | | |

*Dic*: $k+i=l$, $l+g=m$, $m+d=n$.

Propoſitio XIII.

Logarithmos quotvis locorum continuâ ac ſolâ additione producere ita, ut ultimo exiſtente probo, cœteri omnes ſint probi. Con-

Constructio. Cùm sit $\frac{a}{b-c} = \frac{a}{b} + \frac{ca}{bb} + \frac{cca}{b^3} + \frac{c^3a}{b^4}$, & deinceps continuando progressionem in infinitum; si ponamus $a = 100 =$ medio Arithmetico rationis $\frac{99[5}{100[5}$ & $b = 100000$, & $c = 0[5$, adeò ut $b-c$ sit $99999[5 =$ medio Arithmetico rationis datæ $\frac{99999}{100000}$, cujus mensuram invenire oportet, erit $\frac{a}{b-c}$ $\left(\text{nimirum } \frac{100}{99999[5}\right)$ $= \frac{a}{b}$ $\left(\text{five } \frac{100}{100000} \text{ vel } 0|\underline{001}\right) + \frac{ca}{bb}$ $\left(\text{five } \frac{0[5 * 100}{10000000000} \text{ vel } \frac{50}{1000000000000} \text{ vel } 0|\underline{000000005}\right) + \frac{cca}{b^3}$ $\left(\text{five } \frac{0[25 * 100}{10000000000000000} \text{ vel } \frac{25}{1000000000000000} \text{ vel } 0|\underline{0000000000000025}\right) + \frac{c^3a}{b^4}$ $\left(\text{five } \frac{0[125 * 100}{1000000000000000000000000} \text{ vel } \frac{1[25}{10000000000000000000000000} \text{ vel } 0|\underline{0000000000000000000125}\right) = 0|\underline{0010000050000025000125}$: sin manentibus $a$ & $b$, ut antè, ponatur $c = 1[5$; erit $\frac{a}{b-c} = 0|\underline{001000015000225003375}$: vel si rursus manentibus $a$ & $b$, ponatur $c = 2[5$; erit $\frac{a}{b-c} = 0|\underline{001000025000625015625}$. Liquet ex præcedenti, quo pacto datis numeri 5 quadrato & cubo, sequentium quoque numerorum 15, 25, cæterorumque quadrata & cubi additione continuâ inveniri possint. Istis igitur numeris cum suis quadratis & cubis ritè dispositis ita, ut post unitatem in 0[001 sextum locum occupet ultima figura numeri 5 (vel 15, vel 25;) & sextum ab hac locum ultima figura quadrati 25 (vel 225, vel 625;) & ab hac rursus sextum locum ultima figura cubi 125 (vel 3375, vel 15625; (quemadmodum exempla superiora ostendunt: conflati erunt numeri, qui in tertium Regulæ aureæ terminum 43429 ducendi sunt singuli, ut prodeat mensura rationum datarum $\frac{99999}{100000}$, $\frac{99998}{99999}$, $\frac{99997}{99998}$. Atque hæc multiplicatio, ut solâ quoque additione perficiatur, digerendus est tertius terminus 43429 in tabellam subsidiariam, hoc modo:

| | |
|---|---|
| 1 | 43429 |
| 2 | 86858 |
| 3 | 130287 |
| 4 | 173716 |
| 5 | 217145 |
| 6 | 260574 |
| 7 | 304003 |
| 8 | 347432 |
| 9 | 390861 |

Acquiſitâ hoc modo rationum omnium menſurâ à $\frac{99999}{100000}$ uſque ad $\frac{10000}{10001}$ in particulis, qualium decupla continet 1,0000000; mox addendo has ordine retrogrado concinnabimus Logarithmos ſingulorum abſolutorum à 10000 ad 100000; quorum ultimus ſi ſit probus, præcedentes omnes erunt probi; niſi fortè error poſterior quaſi ex condicto corrigat priorem, quod in hac non magis quàm omnibus aliis probis, nec niſi rariſſimè uſuvenire poteſt.

---

Atque ita expoſitâ methodo conſtruendi Logarithmos novâ, accuratâ, & facili, haud ſcio, an opus ſit monere Lectorem, ſi ad praxin accedere luberet, non requiri compoſitorum numerorum Logarithmos; ideoque omnes pares primùm excludendos, deinde omnes à quinario productos; ita ut reſtent ſoli Logarithmi numerorum in unitatem, $3^{\text{rium}}$ $7^{\text{rium}}$ $9^{\text{rium}}$ exeuntium, àtque horum quoque tertium quemque, cùm ſit ex ternario compoſitus, omitti poſſe, Sic acquiſitis Logarithmis abſolutorum 1003 & 10013, omiſſo Log-o abſoluti 10023 ex ternario compoſiti quærendus eſt Log-us abſoluti 10033, utpote triceſſimi ab abſoluto 10003; tum Log-us abſoluti 10043, triceſimi ab abſoluto 10013: tum rurſus omiſſo Log-o numeri 10053, quærantur Log-i numerorum 10063, 10073; atque ita deinceps. Quare dicendum per Regulam Propoſitione VIII. traditam:

Ut 10048, nimirum medium Arithmeticum inter 10033 & 10063, ad 10018, nimirum medium Arithmeticum inter 10003 & 10033: Ita 13006, nimirum differentia Logarithmorum congruentium abſolutis 10003 & 10033,

ad

ad 12967, differentiam Log-orum competentium abſolutis 10033 & 10063.

Dico:

$$\text{Ut}\left\{\begin{matrix}10048\\10078\\10108\\ \&c.\end{matrix}\right\}\ \text{ad } 10018;\ \text{ita } 13006,\ \text{ad}\left\{\begin{matrix}12967\\ \&c.\end{matrix}\right.$$

Item:

$$\text{Ut}\left\{\begin{matrix}10058\\10088\\10118\\ \&c.\end{matrix}\right\}\ \text{ad } 10028;\ \text{ita } 12992,\ \text{ad}\left\{\begin{matrix}12953\\ \&c.\end{matrix}\right.$$

At tertius qui ſequitur ordo, nimirum:

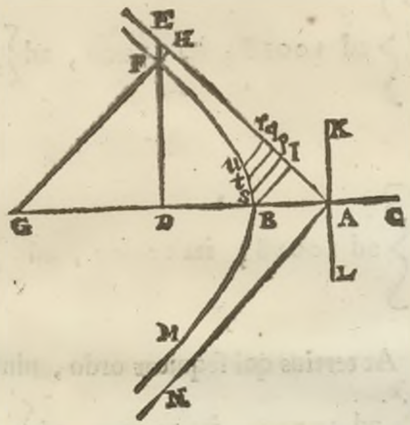
$$\text{Ut}\left\{\begin{matrix}10068\\10098\\ \&c.\end{matrix}\right\}\ \text{ad } 10038;\ \text{ita } 12979,\ \text{ad}\left\{\begin{matrix}12940\\ \&c.\end{matrix}\right.$$

hic ipſe eſt, quem omittendum indigeto.

Pari modo tertius quiſque in unitatem $7^{rium}$, $9^{rium}$ exeuntium omittetur. Itaque fiet, omiſſis paribus lucrifaciamus ſemiſſem operæ, & detractis quinariis rurſus partem decimam, denique excluſo tertio quoque in 1, 3, 7, 9, deſinentium, trientem laboris reſidui; unde non niſi $\frac{4}{15}$. nonaginta chiliadum, quæ ſunt à 10000 ad 100000, induſtriam noſtram expectant. Hoc eſt, de 90 chiliadibus reſtant ſolùm 24 concinnandæ. Cæteros compoſitos à $7^{rio}$, $11^{rio}$, aliis ve primis genitos, non eſt operæ pretium ſecernere in methodo tam proclivi; præſertim cùm probando calculo inſervire poſſint.

Cæterum ex iis, quæ hactenus diſſeruimus, ſatis liquet, naturam Logarithmorum Geometriæ nullo modo obnoxiam eſſe; ſed verius ac liquidius ex proprio ſuo fonte manare. Intercedit tamen utriſque cognatio ſuavis, & contemplatione digniſſima, quam deinceps paucis exponere non gravabor.

## Propositio XIV.




Sit Hyperbole $MBF$, cujus latus rectum $KL$ æquale sit transverso $BC$; erunt asymptoti $AN$ & $AE$ ad angulos rectos, & quadratum $DF$ æquale rectangulo $CDB$ per 21. *I.* Conicor. Ex $B$ & $F$ cadant perpendiculares ad asymptoton $BI$ & $FH$. Dico, $AH$ esse ad $AI$, ut $BI$ ad $FH$.

Demonstratio. Sit $AB = 1 = AC$

$BC = AB + AC = 2$

$BD = a$

$AD = AB + BD = 1 + a = DE$

$CD = BC + BD = 2 + a$

$CD * BD = \overline{2+a}$ in $a = 2a + aa = Q : DF$

$DF = \sqrt{2a+aa} = DG$

$AG = AD + DG = 1 + a + \sqrt{2a+aa}$

$\sqrt{2} . 1 :: AG . AH$

$AH = \dfrac{1 + a + \sqrt{2a+aa}}{\sqrt{2}}$

$EF = DE - DF = 1 + a - \sqrt{2a+aa}$

$\sqrt{2} . 1 :: EF . FH$

FH

$$FH = \frac{1+a-\sqrt{2a+aa}}{\sqrt{2}}$$

Ducatur $AH$ in $FH$;

ponendo $1+a=c$, & $\sqrt{2a+aa}=d$

$$\left.\begin{array}{ll} \text{erit} & 1+2a+aa=cc \\ \& & 2a+aa=dd \end{array}\right\}\text{subtrahe}$$

$$1 \quad = cc-dd$$

$$\frac{cc-dd}{\sqrt{2}*\sqrt{2}} = \frac{1}{2} = AH*FH \qquad \alpha$$

$$\sqrt{2} . 1 :: AB . AI$$

$$AI = \frac{1}{\sqrt{2}}$$

$$AI*BI = \frac{1}{\sqrt{2}} * \frac{1}{\sqrt{2}} = \frac{1}{2} \qquad \beta$$

Ergo per $\alpha$ & $\beta$, $AH*FH = AI*BI$

& $AH . AI :: BI\ FH$ q.e.d.

Propositio XV.

In diagrammate præcedenti, positâ $AI=BI=1$, & $HI=a$; oporteat invenire $FH$.

Dic per præcedentem: ut $AH$ ad $AI$, ita $BI$ ad $FH$; hoc est, $1+a . 1 :: 1 . \frac{1}{1+a}$; nimirum $FH$ æqualis est unitati divisæ per $1+a$. Perficitur autem divisio ipso opere sic:

b c d | e
$1+a$) $1$ | $1$

f g
$1+a$

h i
$0-a$ | k $-a$

l m
$-a-aa$

n o
$0+aa$ | p $+aa$

q r
$aa+a^3$

s t
$0-a^3$ | u $-a^3$

Ap-

Applica $\overset{b}{1}\overset{c}{+a}$ ad $\overset{d}{1}$, oritur $\overset{e}{1}$; tum $\overset{e}{1}$ in $\overset{b}{1}\overset{c}{+a}$ producit $\overset{f}{1}\overset{g}{+a}$ ſubducendum ex $\overset{d}{1}$, & reſtat $\overset{h}{o}\overset{i}{-a}$. Rurſus $\overset{b}{1}\overset{c}{+a}$ applicetur ad $\overset{h}{o}\overset{i}{-a}$, oritur $\overset{k}{-a}$; tum $\overset{k}{-a}$ in $\overset{h}{o}\overset{i}{-a}$ producit $\overset{l}{-a}\overset{m}{-aa}$, ſubducendum ex $\overset{h}{o}\overset{i}{-a}$, & reſtat $\overset{n}{o}\overset{o}{+aa}$. Ad hoc applica $\overset{b}{1}\overset{c}{+a}$, oritur $\overset{p}{+aa}$; quod ductum in $\overset{b}{1}\overset{c}{+a}$ gignit $\overset{q}{aa}\overset{r}{+a^3}$, ſubducendum ex $\overset{n}{o}\overset{o}{+aa}$, & reſtat $\overset{s}{o}\overset{t}{-a^3}$. Atque ita continuatâ operatione, deprehenditur $\frac{1}{1+a} = 1-a+aa-a^3+a^4$ (&c.) $= FH$.

## Propoſitio XVI.

Quovis numero in partes æquales innumeras diſcerpto; invenire ſummam quarumvis poteſtatum ab innumeris iſtis numeris genitarum.

Numeri dati poteſtas proximè ſuperior poteſtatibus quæſitis, ſi dividatur per exponentem ſuum, extabit ſumma poteſtatum quæſita.

*V. gr.* Numevus datus ſit 21, hic ſi diſcerpatur in partes innumeras, continebit non modò hos numeros 20, 19, 18, 17 &c. ſed & innumeros interjectos, quorum quiſque intelligitur ductus in unam partem infinitiſſimam numeri 21, Horum igitur omnium productorum ſummam ſi quæras; quoniam ipſa producta ſunt poteſtates primæ (ſive lineæ;) erit poteſtas proximè ſuperior quadratica; & ejus exponens 2, Ergo dati numeri 21 quadratum 441, ſi dividatur per exponentem 2, extabit ſumma omnium primarum poteſtatum, genitarum ab innumeris iſtis numeris, qui in dato numero 21 continentur, nimirum 220[5. Rurſus quævis poteſtas prima intelligatur ducta in ſeipſam, & oporteat nos invenire ſummam omnium iſtorum quadratorum. Poteſtas proximè ſuperior eſt cubicà, & ejus exponens 3, Ergo dati numeri 21 Cubus 9261, ſi dividatur per exponentem 3, extabit ſumma omnium quadratorum 3087. Horum quadratorum quodvis ducatur in ſuum latus, & oporteat nos invenire ſummam omnium iſtorum cuborum. Poteſtas proximè ſuperior eſt quadrato-quadratica, & ejus exponens 4. Ergo dati numeri 21 quadrato-quadratum 194481, ſi dividatur per exponentem 4, extabit ſumma omnium cuborum 48620[25.

Demonſtratio.

Demonſtratio. Summa omnium ab unitate imparium æqualis eſt quadrato numeri terminorum ſic numerus terminorum omnium imparium ab unitate uſque ad 21 eſt 11, cujus quadratum 121 æquale eſt ſummæ omnium horum imparium; 1,3,5,7,9,11,13,15,17,19,21. At idem quadratum 121 duplicatum, nimirum 242, excedit ſummam omnium eorundem imparium unà cum paribus incluſis ipſo numero terminorum 11; deficit autem á ſumma omnium parium æque àc imparium eodem numero terminorum 11. Ergo quadratum duplicatum numeri terminorum imparium non poteſt excedere vel deficere à ſumma omnium tam parium, quàm imparium, pluſquam ipſo numero terminorum imparium, hoc eſt (ſi termini ſint innumeri) eodem numero terminorum ſive dimidio termini maximi, ducto in partem infinitiſſimam numeri dati. Quod productum ſi quis putet, adhuc rationem aliquam obtinere ad ſummam omnium terminorum; nondum utique diviſus eſt numerus datus in partes innumeras, quod eſt contra hypotheſin. Ergo quadratum dimidii numeri terminorum (tam parium quam imparium) duplicatum; vel, quod idem eſt; Dimidium quadrati numeri omnium terminorum (tam parium quàm imparium) æquale eſt ſummæ omnium terminorum.

Rurſus; Numerus pyramidalis ultimi ab unitate imparium, æqualis eſt ſummæ omnium quadratorum ab iiſdem imparibus factorum. Sic numeri 21, tanquam ultimi imparium, pyramidalis 1771, æqualis eſt ſummæ omnium quadratorum factorum ab his imparibus, 1, 3, 5, 7, 9, 11, 13, 15, 17, 19, 21. Unde haud ſecùs, ac modò, conficietur; eundem pyramidalem duplicatum (ſi termini ſint innumeri) vel, quod idem eſt; trientem cubi facti à numero dato, æqualem eſſe ſummæ omnium quadratorum ab imparibus æquè ac paribus factorum.

Item; Ultimi cujuſvis Trigonus in ſe ductus, æqualis eſt ſummæ omnium cuborum ab imparibus æquè ac paribus factorum. Sed Trigonus iſte, ſive ſumma terminorum, ſuprà æqualis erat $\frac{\text{Quadrato}}{2}$, ergo ejuſdem. Trigoni quadratum æquale eſt $\frac{\text{Quadrato-quadrato}}{4}$ $=$ ſummæ omnium Cuborum. Atqne ita deinceps.

## Propoſitio XVII.

### *Quadrare Hyperbolam.*

In diagrammate præcedenti, poſitio $AI = 1$; intelligatur aſymptotos inde ab $I$ verſus $E$ diviſa in partes æquales innumeras, quæ ſint *v.gr.*

*I*

$Ip = pq = qr = a$. Erit, per XIV & XV hujus, $ps = 1 - a + aa - a^3 + a^4$, &c. & $qt = 1 - 2a + 4aa - 8a^3 + 16a^4$, &c. & $ru = 1 - 3a + 9aa - 27a^3 + 81a^4$, &c. Sed $ps + qt + ru =$ areæ $BIru =$

$$= \left\{ \begin{array}{l} 1 - a + aa - a^3 + a^4 \\ 1 - 2a + 4aa - 8a^3 + 16a^4 \\ 1 - 3a + 9aa - 27a^3 + 81a^4 \end{array} \right\} \text{\&c.} = \\ = 3 - 6a + 14aa - 36a^3 + 98a^4,$$

hoc est, = numero terminorum contentorum in linea $Ir$, minus summâ eorundem terminorum, plus summâ quadratorum ab iisdem, minus summâ cuborum, plus summâ quadrato-quadratorum, &c.

Hinc posito, ut antè, $IA = 1$; sed $Ip = 0|1 =$ numero terminorum: invenio, per XV & XVI hujus, aream $BIps =$ numero terminorum $= 0|1$, minus summa eorundem terminorum $= 0|005$, plus summa quadratorum ab iisdem $= 0|000333333$, minus summa cuborum $= 0|000025$, plus summa quadrato-quadratorum $= 0|000002$, minus summa quadrato-cuborum $= 0|000000166$, plus summa cubo-cuborum $= 0|000000014$, &c.

$$\begin{array}{rl} + \left\{ \begin{array}{l} 0|1 \\ 0|000333333 \\ 0|000002 \\ 0|000000014 \end{array} \right. & \Bigg\| \quad - \left\{ \begin{array}{l} 0|005 \\ 0|000025 \\ 0|000000166 \end{array} \right. \\ \hline + \ 0|100335347 & \quad - \ 0|005025166 \\ - \ 0|005025166 & \\ \hline + \ 0|095310181 & = \text{areæ } BIps. \end{array}$$

Sic posito $Iq = 0|21 =$ numero terminorum: invenio, per XV & XVI hujus, aream $BIqt =$ numero terminorum $= 0|21$, minus summa eorundem terminorum $= 0|02205$, plus summa quadratorum ab iisdem $= 0|003087$, minus summa cuborum $= 0|000486202$, plus summa quadrato-quadratorum $= 0|00008168 2$, minus summa quadrato-cuborum

cuborum = $0|000014294$, plus summa cubo-cuborum = $0|000002572$, minus summa quadrato-quadrato-cuborum = $0|000000472$ plus summa quadrato-cubo-cuborum = $0|000000088$.

$$
\begin{array}{rl}
+\left\{\begin{array}{l} 0|21 \\ 0|003087 \\ 0|000081682 \\ 0|000002572 \\ 0|000000088 \\ 0|000000003 \end{array}\right. \\
+ & 0|213171345 \\
- & 0|022550984 \\
+ & 0|190620361 = \text{areæ } BIqt.
\end{array}
\qquad\Bigg\|\qquad
\begin{array}{rl}
-\left\{\begin{array}{l} 0|02205 \\ 0|000486202 \\ 0|000014294 \\ 0|000000472 \\ 0|000000016 \end{array}\right. \\
- & 0|022550984
\end{array}
$$

Unde apparet, ut ratio *AI* ad *Ap* (1 ad $1\lfloor 1$) eſt dimidiata rationis *AI* ad *Aq* (1 ad $1\lfloor 21$;) ita aream *BIps* eſſe dimidiam areæ *BIqt*. Cæterum proclive eſt hunc calculum extendere ad quotvis loca, quod mihi tentanti, prodiit area *BIps* = $0\lfloor 0953101798043248600439521232807650922206053 4$; & area *BIqt* = $0\lfloor 1906203596086497200879042465615301844412107 2$, quam cùm exactè duplam deprehenderem iſtius ſuperioris ſcivi inde me calculum rectè poſuiſſe.

## Propoſitio XVIII.

*Comparare areolas Hyperbolicas cum ratiunculis abſolutorum æquidifferentium.*

In diagrammate præcedenti, poſitâ $AI = 1$, & aſymptoto inde ab *I* verſus *E* diviſâ in partes æquales innumeras, quæ ſint *v*, *gr*. *Ip*, *pq*, *qr*: erit areola *BI ps* menſura ratiunculæ, quam *AI* obtinet ad *Ap*; & areola 5 *pqt* menſura ratiunculæ, quam *Ap* obtinet ad *Aq*; & areola *tqru* menſura ratiunculæ, quam *Aq* obtinet *Ar*, &c. Atque areolæ iſtæ ſupputantur prorſus eodem modo, quo ſuprà Propoſitione VIII & IX. rationes terminorum æquidifferentium. Id quod paucis indicare, oportunum duxi.

## Propositio XIX.

*Invenire summam Logarithmorum.*

In eodem diagrammate positâ $AI = 1$, & asymptoto inde ab $I$ versus $E$ divisâ in partes æquales innumeras, quæ sint *v. gr.* $Ip$, $pq$, $qr$. oportet invenire summam areolarum; $BIps + BIqt + BIru$ (&c.) = summæ Logarithmorum = solido, constanti ex areola $BIps$ perpendiculariter insistente lineæ $ps$, & areola $BIqt$ perpendiculariter insistente lineæ $qt$, & areola $B\,1\,ru$ perpendiculariter insistente lineæ $ru$, &c. ductis nimirum singulis in unam infinitissimam lineæ datæ.

Constructio hujus Problematis congruit cum constructione propositionis XVII. substituendo nimirum pro numero terminorum, summam eorundem; & pro summa terminorum, summam quadratorum; & pro summa quadratorum, summam cuborum; &c. Sic positâ $AI = 1$, & $Ip = 0|1$, oporteat nos invenire summam omnium Logarithmorum inde ab 1 ad $0|1$.

$$\begin{array}{rl} + & \left\{\begin{array}{l} 0|005 \\ 0|000008333 \\ 0|000000033 \end{array}\right. \\ + & \quad 0|005008366 \\ - & \quad 0|000167168 \\ & \quad 0|004841198 \end{array} \qquad \begin{array}{rl} - & \left\{\begin{array}{l} 0|000166666 \\ 0|0000005 \\ 0|000000002 \end{array}\right. \\ - & \quad 0|000167168 \end{array}$$

$$0|004841198 = \text{summæ omnium Log-orum.}$$

Hinc patet, quomodo productum continuum omnium à 0 ad numerum datum Arithmeticè progredientium inveniri queat. Nam summa Log-orum, est Log-us producti continui.

Patet quoque ex præcedentibus, quo pacto Problema *Mersennianum*, si non Geometricè saltem in numeris, ad quotvis usque locos solvi possit. Atque hîc jam filum abrumpere cogor, tantisper dum otium pertexendi reliqua largiatur Deus. *FINIS.*

---

*Sequitur*

*MICHAELIS ANGELI RICCII*
GEOMETRICA Exercitatio.

Præfatio.