



Verwendung  
der  
sphärischen Trigonometrie  
und  
der Koordinatengeometrie

für

den Unterricht in der mathematischen Geographie an höheren Lehranstalten,  
besonders an Gymnasien.

Von

**Professor Karl Graßmann.**

---

Königsberg Nm. 1901.

Druck von J. G. Striese.

No 79



Eine charakteristische Erscheinung unserer Zeit ist das wachsende Interesse für die Fragen des praktischen Lebens. Dieser Richtung, welche den Bestrebungen der Gegenwart ihr Gepräge verleiht, muß auch die Schule bei der Bestimmung ihrer Aufgaben und Ziele Rechnung tragen, und durch sie sind auch die in neuerer Zeit erfolgten Reformen des Unterrichts an unseren höheren Lehranstalten beeinflusst worden.

Die Realien treten in den neueren Lehrplänen in den Vordergrund und drängen die mehr den idealen Zielen dienenden Unterrichtsgegenstände zurück. Selbst am humanistischen Gymnasium hat die Beschäftigung mit dem klassischen Altertum eine erhebliche Beeinträchtigung durch die eingehendere Behandlung der für das praktische Leben so wichtigen neueren Sprachen, der neueren Geschichte und der Naturwissenschaften erfahren.

Nur ein Gegenstand ist von dieser Neuordnung äußerlich nicht betroffen worden. Die Mathematik hat seit Jahrzehnten ihre alte Stundenzahl behalten, und die von ihr zu behandelnden Gebiete sind im wesentlichen unverändert geblieben.

Diese Nichtbeteiligung des mathematischen Unterrichts an dem allgemeinen Fortschritte der Zeit ist aber nur scheinbar. Die Behandlung des Gegenstandes auf der Schule hat in den letzten Jahren eine wesentliche Umgestaltung erfahren, die der neuen realistischen Richtung Rechnung trägt. Die Besprechung der Trigonometrie des rechtwinkligen Dreiecks und der Elemente der Körperlehre in Untersekunda bezweckt, die aus dieser Klasse ins Leben tretenden Schüler zu befähigen, ihre mathematischen Kenntnisse praktisch zu verwerten; und die durch besondere Verfügungen angeordnete Beseitigung schwierigerer, rein theoretischer Entwicklungen, wie die Ableitung der Kardanischen Formel oder des allgemeinen Beweises vom binomischen Lehrsatz, aus dem Unterrichte in den oberen Klassen des Gymnasiums soll dem Lehrer Gelegenheit bieten, die Kenntnisse seiner Schüler durch fortgesetzte Übungen zu befestigen und praktisch nutzbar zu machen.

Die Ansichten über den Zweck und das Ziel des mathematischen Unterrichts haben sich in der letzten Zeit recht erheblich geändert. Die Anzahl der Fachlehrer, welche in ihm lediglich ein vorzügliches Mittel zur formalen Schulung des Verstandes erblicken, und welche die Mathematik nur um ihrer selbst willen auf der Schule treiben wollen, wird immer kleiner. Man gelangt mehr und mehr zu der Erkenntnis, daß die einseitige Fertigkeit im Lösen von komplizierteren Konstruktionsaufgaben, die Reduktion verwickelter algebraischer Ausdrücke zu einfacheren Formen und die Berechnung rein analytischer Gebilde nicht das Ziel des mathematischen Unterrichts sein kann. Die Mehrzahl der Schüler bleibt bei einer rein theoretischen Behandlung der Mathematik ohne Interesse, und nur wenige für den Gegenstand begabte Schüler empfinden wirkliche Befriedigung. Wie oft kommt es vor, daß nach einer komplizierten Berechnung, die wunderschön glatt verlief, der Einwand ausgesprochen wird: „Ja, aber wozu

nützt denn dies Alles?“ Der Schüler will mit den ausgeführten algebraischen Operationen irgend einen praktischen Zweck verbinden und giebt sich mit rein theoretischen Entwicklungen nur dann zufrieden, wenn ihm vom Lehrer die Versicherung gegeben wird, daß derartige Übungen notwendig einer späteren Nutzbarmachung der Mathematik voraufgehen müssen.

Die Aufgaben können dem praktischen Leben unmittelbar entnommen sein und gehören dann irgend einer der komplizierteren bürgerlichen Rechnungsarten an; sie werden durch Gleichungen interpretiert und durch deren Berechnung gelöst. Zum größten Teil aber sind sie den verschiedenen Gebieten des physikalischen und geographischen Unterrichts zu entnehmen. Derartige Aufgaben gewähren neben dem Zweck, daß sie den mathematischen Unterricht beleben, auch den Vorteil, daß sie mittelbar auch den anderen Gegenständen zu gute kommen. Indem der Schüler gezwungen wird, gewisse physikalische Gesetze in eine mathematische Form zu bringen und diese dem vorliegenden Falle gemäß umzugestalten, wird er veranlaßt, sich mit diesen Gesetzen und den ihnen zu Grunde liegenden Erscheinungen eingehend zu beschäftigen und tiefer in ihren Sinn einzudringen. Auf diese Weise können die wenigen Stunden, welche der Naturlehre zugebilligt sind, ganz zur Besprechung der physikalischen Vorgänge verwandt werden, während der mathematischen Stunde ihre rechnungsmäßige Anwendung auf bestimmte, besonders interessante Fälle überlassen bleibt.

Nach meinen Erfahrungen will der Schüler in den Physikstunden möglichst wenig rechnen. Dagegen weiß er, daß dies in der mathematischen Stunde geschehen muß, und da gewährt es ihm Befriedigung, wenn er die in der physikalischen Lehrstunde gewonnene Erkenntnis der Naturerscheinungen nun durch die Rechnung nutzbar machen kann.

Um einen gewissen auch in den oberen Klassen ganz heilsamen Druck auf nachlässige Schüler auszuüben, ist es zweckmäßig, mehrfach für das Abiturientenexamen derartige Aufgaben aus dem Gebiete der angewandten Mathematik zu stellen und so die Schüler von der Notwendigkeit, sich mit ihnen zu beschäftigen, zu überzeugen. Freilich wird der Lehrer auf die rein theoretischen Aufgaben aus praktischen Gründen nicht verzichten können, da sie bedeutend leichter sind, und daher einen glatteren Ausfall der Prüfung verbürgen. Während er aber hier volle Originalität verlangen kann, wird er dort die schwierigeren Fragen entsprechend vorzubereiten haben. Die geistige Arbeit, welche der Schüler bei der teilweisen Reproduktion der Lösung einer derartigen komplizierten Aufgabe zu zeigen hat, ist oft größer, als wenn er eine leichtere geometrische oder trigonometrische Aufgabe völlig selbständig löst.

Zu den Gebieten, welche sich ganz besonders zur Auswertung im mathematischen Unterrichte eignen, gehört die mathematische Geographie. Eine rechnerische Verwertung der in diesem Fache ermittelten Beziehungen und Gesetze ist schon deshalb notwendig, weil diese ganz besonders ein mathematisches Gewand tragen und daher ohne Übung kaum verstanden und im Gedächtnisse festgehalten werden können.

Die Verwendung der Mathematik für die Erläuterung gewisser einfacher Verhältnisse der astronomischen Geographie, welche keine besonderen sachlichen Vorkenntnisse erfordern, kann schon auf einer ziemlich tiefen Stufe geschehen. So läßt sich die Aussichtsweite von hohen Bergen schon in Obertertia nach der Durchnahme des Pythagoräischen Lehrsatzes und nach der Besprechung der Ausziehung der Quadratwurzel nach der Formel  $x = \lim \sqrt{(x+r)^2 - r^2} = \sqrt{2rh}$  leicht ausführen. Auch die in der Nautik so wichtige Konstruktion der Pothenotschen Aufgabe

läßt sich nach der Ermittlung der Abschnittswinkelbeziehungen leicht vollziehen, und die gesuchte Strecke durch Nachmessen mit dem Millimetermaße mit einer auch für praktische Zwecke ausreichenden Genauigkeit ermitteln. In den beiden Sekunden kann dann die Kenntnis der ebenen Trigonometrie zur Berechnung einer Anzahl von einfachen Aufgaben aus der Geodäsie und der Nautik verwertet werden.

Die schwierigeren der Schule zugänglichen Fragen aus dem Gebiete der mathematischen Geographie und der Nautik müssen allerdings in Prima beantwortet werden, da erst in dieser Klasse die eingehendere Besprechung der Erde als Himmelskörper im physikalischen Unterrichte erfolgt, und die zur Verwertung der dabei ermittelten Gesetze notwendigen mathematischen Disciplinen, die Coordinatengeometrie und die sphärische Trigonometrie auch hier erst ihre Behandlung finden. Die Art der Verwendung dieser Hilfswissenschaften und die Tiefe des Eindringens in die schwierigeren Gebiete der astronomischen Geographie wird dabei lediglich von dem Charakter der betreffenden Anstalt und der Durchschnittsbeschaffenheit der Klasse abhängen.

Die neueren Lehrpläne vom Jahre 1892 führen die Coordinatengeometrie für alle höheren Lehranstalten als obligatorischen Unterrichtsgegenstand ein. Nun aber gehört diese Disciplin wegen ihrer engen Beziehung zur Infinitesimalrechnung schon dem Gebiete der höheren Mathematik an und kann daher erst auf der Universität eine erschöpfende Behandlung erfahren. Deshalb können die höheren Schulen diese Wissenschaft nur in beschränktem Maße betreiben, indem sie die zu benutzenden Sätze aus der Differentialrechnung, wie bei dem Tangentenproblem, durch elementare Betrachtungen zu ersetzen suchen. Mit dieser Beschränkung ist daher auch natürlich eine eingehendere rechnerische Verwendung der analytischen Geometrie zur Ermittlung der Bewegung und gegenseitigen Lage der Himmelskörper ausgeschlossen.

Günstiger liegen die Verhältnisse bei der anderen Hilfswissenschaft für die rechnende Astronomie, der sphärischen Trigonometrie. Ihrer vollkommen wissenschaftlichen Behandlung auf den höheren Schulen, selbst auf dem humanistischen Gymnasium, stehen keinerlei sachliche Schwierigkeiten entgegen. Auf vielen Anstalten wurde sie früher auch wirklich in diesem Sinne besprochen; doch verhinderte die Kürze der Zeit, welche diesem Gegenstande eingeräumt werden konnte, eine durch numerische Rechnungen vermittelte Einübung der gewonnenen Formeln, welche ihre praktische Verwendung ermöglicht hätte. Daher erwies sich für Gymnasien und Realgymnasien eine genauere Besprechung und wissenschaftliche Behandlung der sphärischen Trigonometrie als durchaus unzweckmäßig. Dies war wohl auch der Grund, weshalb sie auf diesen Anstalten untersagt wurde.

Sieht man aber von den Entwicklungen ab, die lediglich die Eleganz und Genauigkeit der Rechnung bezwecken, und beschränkt man sich auf die notwendigsten Sätze, so bietet die Behandlung der sphärischen Trigonometrie selbst am humanistischen Gymnasium keine wesentlichen Schwierigkeiten und kann ein recht brauchbares Hilfsmittel zur Befestigung und Klärung der im geographischen Unterricht gewonnenen Begriffe werden. Deshalb ist auch in den neuen Lehrplänen die Behandlung der sphärischen Trigonometrie von diesem Gesichtspunkt aus empfohlen. Die allgemeine Anteilnahme an den unser Leben beeinflussenden Bewegungen der Gestirne, besonders der Sonne und des Mondes, und das immer mehr wachsende Interesse

für die auf diesen Vorgängen beruhende Nautik lassen eine rege Beteiligung der Schüler der oberen Klassen an diesem Unterricht als gesichert erscheinen.

Die Aufgabe der Schule ist es, lediglich Interesse und Verständnis für die wichtigeren Fragen der Himmelskunde und ihre Beantwortung zu erwecken. Deshalb wird auch die Behandlung einer Aufgabe auf einem mehr umständlichen Wege, welcher sich für den Astronomen oder Seemann von Beruf als unzweckmäßig erweisen würde, auf der Schule zu empfehlen sein, wenn sie in den Entwicklungen elementar und daher dem Verständnisse zugänglicher ist. Ob dabei die Resultate bis zu einer für praktische Zwecke notwendigen Genauigkeit ermittelt werden oder wegen gewisser der Methode anhaftenden Fehlerquellen nur einen theoretischen Wert haben, wie es beispielsweise bei der Berechnung der Refraktionstabellen aus den Höhenbeobachtungen der Gestirne vorkommen kann, bleibt dabei völlig gleichgiltig. Wenn der Schüler nur einen klaren Einblick in die betreffenden Verhältnisse gewinnt, so hat die Schule ihre Schuldigkeit gethan; denn sie hat das ideale Ziel einer allgemeinen Bildung zu erstreben und nicht für einen speciellen Beruf vorzubereiten.

Ich will nun versuchen, den Nachweis zu führen, wie unter Voraussetzung der in den allgemeinen Bestimmungen geforderten Kenntnisse in den verschiedenen Gebieten des mathematischen Wissens ein Primaner in wenigen Stunden mit den Sätzen der sphärischen Trigonometrie und der Koordinatengeometrie vertraut gemacht werden kann, die ihn befähigen, die wichtigsten und interessantesten Aufgaben aus der mathematischen Geographie und der damit verwandten Nautik zu lösen. Angeregt wurde ich zu dieser Arbeit durch die Lektüre der astronomischen Geographie von Martus, welche der Verfasser selbst als ein Lehrbuch der angewandten Mathematik bezeichnet.

Es ist selbstverständlich, daß wenn die Absicht vorliegt, dem mathematischen Unterricht ein gewisses praktisches Ziel zu geben, schon von vornherein die betreffenden Zweige, welche diesem nutzbar gemacht werden sollen, auf einer früheren Stufe sorgfältiger ausgebildet werden müssen, als es vielleicht bei einer rein theoretischen Behandlung des Faches notwendig ist. So wird schon in Obersekunda die Goniometrie eine eingehendere Behandlung zu erfahren haben. Der Schüler muß schon in dieser Klasse eine gewisse Gewandtheit in der Behandlung goniometrischer Ausdrücke erwerben. Er ist daran zu gewöhnen, mit einer möglichst geringen Anzahl von fest einzuprägenden Grundformeln auszukommen und mit ihrer Hilfe jede geforderte Umformung zu vollziehen. Das erst vor kurzem erschienene Übungsbuch für den Unterricht in der Goniometrie und der ebenen Trigonometrie von F. v. Lümann bietet eine reiche Auswahl von komplizierten Ausdrücken, welche mit Hilfe einiger algebraischer Operationen auf Grund weniger goniometrischer Relationen sich auf eine einfache Gestalt zurückführen lassen, und ist daher zu diesem Zwecke als Aufgabensammlung zu empfehlen.

Da in der sphärischen Trigonometrie häufig für logarithmische Behandlung ungeeignete Ausdrücke numerisch ermittelt werden sollen, so ist der Schüler schon frühzeitig in der Anwendung des Hilfswinkels zur praktischen Durchführung derartiger Berechnungen zu üben. Vor allen Dingen müssen ihm aber die Umformungen geläufig werden, welche an dieser Stelle ganz besonders in Betracht kommen.

Die Mehrzahl der schwierigeren Aufgaben aus der sphärischen Trigonometrie führt auf einen Ausdruck von der Form  $r = p \cos \vartheta + q \sin \vartheta$ , in welchem  $r$  oder  $\vartheta$ , je nach der Art des vorliegenden Falles, zu berechnen ist. Soll  $r$  gefunden werden, so kann dies dadurch geschehen, daß man beide Glieder des rechts stehenden Ausdrucks für sich ermittelt und ihre Summe bildet. Diese Art der Berechnung, die dem Schüler wenig Belehrung bietet, ist mit mehreren Fehlerquellen behaftet, die mit dem mehrmaligen Aufschlagen des Numerus aus dem ermittelten Logarithmus unzertrennlich sind. Durch Einführung eines Hilfswinkels wird aber dieser Übelstand zum großen Teile beseitigt. Der Schüler erkennt, daß sich der Ausdruck  $p \cos \vartheta + q \sin \vartheta$  auf die Form  $t \cos (\vartheta - \varepsilon)$  bringen läßt, wenn man  $p = t \cos \varepsilon$  und  $q = t \sin \varepsilon$  setzt. Denn man erhält, da  $p$ ,  $q$  und  $\vartheta$  bekannt sind, zwei Gleichungen mit zwei Unbekannten  $t$  und  $\varepsilon$ , welche aufzulösen sind. Die Division beider Gleichungen ergibt:  $\operatorname{tg} \varepsilon = \frac{q}{p}$ , und durch Quadrieren und Addieren von ihnen erhält man:  $t^2 = p^2 + q^2 = p^2 \left(1 + \frac{q^2}{p^2}\right) = p^2 (1 + \operatorname{tg}^2 \varepsilon) = \frac{p^2}{\cos^2 \varepsilon}$  oder  $t = \frac{p}{\cos \varepsilon}$ . Es wird also die gesuchte Größe  $r = t \cos (\vartheta - \varepsilon) = \frac{p \cos (\vartheta - \varepsilon)}{\cos \varepsilon}$  und kann daher, weil sich  $\varepsilon$  aus der Formel  $\operatorname{tg} \varepsilon = \frac{q}{p}$  bestimmt, leicht berechnet werden.

Sind die beiden Summanden positiv, so läßt sich  $r = p \cos \vartheta + q \sin \vartheta$  auch leicht dadurch bestimmen, daß man  $r = p \cos \vartheta \left(1 + \frac{q \sin \vartheta}{p \cos \vartheta}\right)$  setzt; führt man hier einen Hilfswinkel  $\sigma$  derartig ein, daß  $\frac{q \sin \vartheta}{p \cos \vartheta} = \operatorname{tg}^2 \sigma$  ist, so wird  $r = \frac{p \cos \vartheta}{\cos^2 \sigma}$ . Dieser dem Verständnis des Schülers leichter zugängliche Weg läßt sich aber nur so lange benutzen, als das positive Zeichen beider Glieder der Summe unbedingt feststeht; wird aber, was mehrfach vorkommt, einer der beiden Summanden negativ, so sind besondere Überlegungen notwendig. Es ist daher in der Regel die zuerst gezeigte Methode vorzuziehen. Diese ist allgemein gültig und erfordert nur unter Umständen einige Aufmerksamkeit bei der Bestimmung des Vorzeichens der Größe  $\varepsilon$  und, wenn  $r$  die Funktion eines Winkels ist, bei der Ermittlung seines Quadranten.

Aus der Gleichung  $r = p \cos \vartheta + q \sin \vartheta$  kann auch der Winkel  $\vartheta$  berechnet werden, wenn alle Größen außer ihm bekannt sind. Denn nach Ermittlung der Größe  $\varepsilon$  mittels der Formel  $\operatorname{tg} \varepsilon = \frac{q}{p}$  wird  $\cos (\vartheta - \varepsilon) = \frac{r \cos \varepsilon}{p}$ , woraus sich  $\vartheta - \varepsilon$  und mithin auch  $\vartheta$  ergibt.

Da der Behandlung der sphärischen Trigonometrie die der ebenen vorausgeht, so dürfte es sich, wenn es die Zeit gestattet, empfehlen, leicht kontrollierbare Aufgaben auf diesem Gebiete, bei deren Lösung ein derartiger Hilfswinkel zur Anwendung kommt, voranzuschicken. So führt die Aufgabe: Ein Dreieck zu berechnen aus der Summe der beiden Schenkelseiten  $a + b = 304$ , der Differenz der Höhe zur Grundlinie und des Radius des eingeschriebenen Kreises  $b_c - \rho = 61$  und dem Winkel an der Spitze  $\gamma = 72^\circ 12'$ , nach einigen leicht auszuführenden Umgestaltungen auf die Gleichung:  $\cos \frac{\alpha - \beta}{2} = 2 \frac{(h_c - \rho)}{a + b} \cos \frac{\gamma}{2} + \sin \frac{\gamma}{2}$ . Diese hat also die

Form  $r = p \cos \vartheta + q \sin \vartheta$ , wenn man  $p = 2 \frac{(h - \rho)}{a + b} q = 1$  und  $\vartheta = \frac{\gamma}{2}$  setzt. Die Berechnung ergibt:  $\varepsilon = 68^\circ 8' 2''$  und  $\vartheta - \varepsilon = \frac{\gamma}{2} - \varepsilon = -32^\circ 2' 2''$ . Hieraus folgt:  $\frac{\alpha - \beta}{2} = 24^\circ 0' 49''$ .

Auf die Bestimmung von  $\vartheta$  aus der Gleichung  $r = p \cos \vartheta + q \sin \vartheta$  führt die Berechnung des Dreiecks, von dem die Differenz der beiden Schenkelseiten  $a - b = 34$ , der Radius des eingeschriebenen Kreises  $\rho = 39$  und der Winkel an der Spitze  $\gamma = 72^\circ 12'$  gegeben sind. Man findet:  $(a - b) \sin \frac{\gamma}{2} = (a - b) \cos \frac{\alpha - \beta}{2} - 2 \rho \sin \frac{\alpha - \beta}{2}$ . Hieraus geht die obige Form hervor,

wenn man  $r = (a - b) \sin \frac{\gamma}{2}$ ,  $p = a - b$ ,  $q = -2 \rho$  und  $\vartheta = \frac{\alpha - \beta}{2}$  setzt. Man findet  $\varepsilon = -39^\circ 41' 7''$ ,  $\vartheta - \varepsilon = 63^\circ 1' 55''$  und daraus durch Addition  $\vartheta$  oder  $\frac{\alpha - \beta}{2} = 23^\circ 20' 48''$ .

Ist auf diese Weise durch gründliche Behandlung der Goniometrie und der ebenen Trigonometrie der Boden vorbereitet, so bieten die Beweise der Sätze der sphärischen Trigonometrie, welche zu ihrer praktischen Verwendung notwendig sind, nur geringe Schwierigkeiten. An den gröfseren Anstalten mit getrennten Primen sind die stereometrischen Grundbegriffe so weit befestigt, dafs die üblichen in den Lehrbüchern gegebenen Entwicklungen in der Klasse zum Verständnis gebracht werden können. An einer grofsen Anzahl von Gymnasien sind aber die Primen in einem Cötus vereinigt, und der Lehrer hat in seinem Unterrichte mit einer Anzahl von Schülern zu rechnen, welche nur die elementären Grundbegriffe aus der Körperlehre die für die Versetzung nach Obersekunda verlangt werden, kennen. Diese aber reichen bei weitem nicht aus, um an der Figur die stereometrischen Beziehungen zu übersehen, welche zur üblichen Ableitung der meisten Sätze bekannt sein müssen. Die Verwendung guter Modelle, kann allerdings hier augenblicklich in gewisser Weise Abhilfe schaffen, doch treten später bei der Reproduktion der Beweise dem Schüler Schwierigkeiten entgegen, wenn er entscheiden soll, welche Winkel in der perspektivisch gezeichneten Figur rechte und welche schiefe sind. Je weniger also in diesem Falle von Sätzen, die sich auf die gegenseitige Lage der einzelnen körperlichen Gebilde beziehen, gefordert wird, desto leichter macht sich der Lehrer der Gesamtheit der Klasse verständlich.

Die Definition der Ecke und des daraus hervorgehenden sphärischen Dreiecks setzt zu ihrem Verständnis nur die Kenntnis des Neigungswinkels zweier Ebenen voraus; denn aus ihr folgt die Unterscheidung zwischen den Seiten und Winkeln einer sphärischen Figur unmittelbar. Der Schüler erkennt ohne weiteres, dafs der Winkel an einer Ecke eines sphärischen Dreiecks von den beiden an die einschließenden Seitenbögen gelegten Tangenten gebildet wird; denn diese sind die beiden in zwei benachbarten Seitenflächen in einem Punkte ihrer Durchschnittskante auf ihr errichteten Senkrechten, welche nach der Definition konstruiert werden müssen.

Aus der Definition des Neigungswinkels zweier Ebenen läfst sich nun leicht zeigen, dafs wenn man auf diesen in irgend einem Punkte der Durchschnittskante nach aufsen Senkrechte errichtet, der von ihnen gebildete Winkel den ursprünglichen zu zwei Rechten ergänzt. Daraus, dafs je zwei der Kanten einer Polarecke mit zwei solchen Senkrechten für einen Neigungswinkel



der ursprünglichen Ecke zusammenfallen, ergibt sich der Satz von der Ergänzung der Winkel einer Ecke und der entsprechenden Seiten der Polarecke zu zwei Rechten. Daß jede Ecke die Polarecke ihrer Polarecke ist, und infolgedessen auch die Seiten der Ecke die entsprechenden Winkel ihrer Polarecke zu zwei Rechten ergänzen, erkennt der Schüler mit Hilfe von guten Modellen ohne eingehendere stereometrische Kenntnisse.

Diese Sätze reichen vollkommen zur Aufstellung der für die Rechnung notwendigen Formeln aus.

Abweichend von dem gebräuchlichen Gange beginnen wir nicht mit dem rechtwinkligen sondern dem schiefwinkligen Dreiecke. Ist (Fig. 1)  $\triangle ABC$  ein beliebiges sphärisches Dreieck und  $O$  der Mittelpunkt seiner Kugel, so bezeichnen wir die Neigungswinkel bei  $A$ ,  $B$  und  $C$  mit  $\alpha$ ,  $\beta$  und  $\gamma$  und die ihnen gegenüberliegenden Seiten mit  $a$ ,  $b$  und  $c$ . Legt man nun an die Kugel im Punkte  $C$  die beiden Tangenten, welche die Bögen  $CA$  und  $CB$  berühren, und verlängert sie, bis sie die Verlängerungen von  $OA$  und  $OB$  in  $D$  und  $E$  schneiden, so ist  $\angle DCE = \gamma$ . Zieht man noch  $DE$ , so ist nach dem Cosinussatz der ebenen Trigonometrie im Dreieck  $DEC$ .

$$\overline{DE}^2 = \overline{DC}^2 + \overline{EC}^2 - 2 DC \cdot EC \cos \gamma, \text{ ebenso ist im Dreieck } DEO:$$

$$\overline{DE}^2 = \overline{DO}^2 + \overline{EO}^2 - 2 DO \cdot EO \cos c; \text{ mithin entsteht die Gleichung:}$$

$$\overline{DE}^2 + \overline{EC}^2 - 2 DC \cdot EC \cos \gamma = \overline{DO}^2 + \overline{EO}^2 - 2 DO \cdot EO \cos c \text{ oder}$$

$$2 DO \cdot EO \cos c = \overline{DO}^2 - \overline{DC}^2 + \overline{EO}^2 - \overline{EC}^2 + 2 DC \cdot EC \cos \gamma \text{ oder}$$

$$2 DO \cdot EO \cos c = 2 r^2 + 2 DC \cdot EC \cos \gamma, \text{ da } \overline{DO}^2 - \overline{DC}^2 = r^2 \text{ und } \overline{EO}^2 - \overline{EC}^2 = r^2 \text{ ist,}$$

Durch Division der Gleichung durch  $2 DO \cdot EO$  erhält man:

$$\cos c = \frac{r}{DO} \cdot \frac{r}{EO} + \frac{DC}{DO} \cdot \frac{EC}{EO} \cos \gamma \text{ oder}$$

$$I_a \cos c = \cos b \cos a + \sin b \sin a \cos \gamma. \text{ Durch cyclische Vertauschung erhält man ebenso:}$$

$$I_b \cos a = \cos b \cos c + \sin b \sin c \cos \alpha \text{ und}$$

$$I_c \cos b = \cos c \cos a + \sin c \sin a \cos \beta.$$

Nun berechnen wir  $\cos \alpha = \frac{\cos a - \cos b \cos c}{\sin b \sin c}$  und

$$1 - \cos^2 \alpha = \sin^2 \alpha = \frac{\sin^2 b \sin^2 c - (\cos a - \cos b \cos c)^2}{\sin^2 b \sin^2 c} \text{ und}$$

$$\sin^2 \beta = \frac{\sin^2 a \sin^2 c - (\cos b - \cos a \cos c)^2}{\sin^2 a \sin^2 c}$$

Subtrahieren wir den Zähler des zweiten der rechts stehenden Brüche von dem des ersten, so erhalten wir:

$$\begin{aligned} & \sin^2 b \sin^2 c - (\cos a - \cos b \cos c)^2 - \sin^2 a \sin^2 c + (\cos b - \cos a \cos c)^2 \\ &= \sin^2 b \sin^2 c - \cos^2 a + 2 \cos a \cos b \cos c - \cos^2 b \cos^2 c - \sin^2 a \sin^2 c + \cos^2 b - 2 \cos b \cos a \\ & \cos c + \cos^2 a \cos^2 c \end{aligned}$$

$$= \sin^2 c (\sin^2 b - \sin^2 a) + 2 \cos^2 c (\cos^2 a - \cos^2 b) + \cos^2 b - \cos^2 a. \text{ Dieser Ausdruck geht aber, da } \sin^2 b - \sin^2 a = \cos^2 a - \cos^2 b \text{ ist, über in:}$$

$$(\cos^2 a - \cos^2 b) (\sin^2 c + \cos^2 c - 1) = (\cos^2 a - \cos^2 b) \cdot (1 - 1) = 0.$$

Die Zähler der beiden für  $\sin^2 \alpha$  und  $\sin^2 \beta$  gebildeten Brüche sind also gleich; bildet man daher den Quotienten  $\frac{\sin^2 \alpha}{\sin^2 \beta}$ , so heben sie sich fort, und man erhält  $\frac{\sin^2 \alpha}{\sin^2 \beta} = \frac{\sin^2 a \sin^2 c}{\sin^2 b \sin^2 c}$   
 $= \frac{\sin^2 a}{\sin^2 b}$  oder  $\frac{\sin \alpha}{\sin \beta} = \frac{\sin a}{\sin b}$ . Das Zeichen kann nur positiv sein, da im sphärischen Dreiecke nur Winkel und Seiten vorkommen, die kleiner als  $\pi$  sind.

Man erhält also:

$$\text{II} \quad \frac{\sin a}{\sin \alpha} = \frac{\sin b}{\sin \beta} = \frac{\sin c}{\sin \gamma}.$$

Wendet man nun den Satz I auf das Polardreieck des ursprünglichen an, und bezeichnet man seine Seiten und Winkel mit  $a', b', c', \alpha', \beta', \gamma'$ , so ist:

$$\cos c' = \cos b' \cos a' + \sin b' \sin a' \cos \gamma' \text{ oder}$$

$$\cos(\pi - \gamma) = \cos(\pi - \beta) \cos(\pi - \alpha) + \sin(\pi - \beta) \sin(\pi - \alpha) \cos(\pi - c). \text{ Hieraus entsteht:}$$

$$-\cos \gamma = \cos \beta \cos \alpha - \sin \beta \sin \alpha \cos c \text{ oder}$$

$\text{III}_a \quad \cos \gamma = -\cos \beta \cos \alpha + \sin \beta \sin \alpha \cos c.$  Aus dieser Formel erhält man durch cyklische Vertauschung:

$$\text{III}_b \quad \cos \alpha = -\cos \beta \cos \gamma + \sin \beta \sin \gamma \cos a$$

$$\text{III}_c \quad \cos \beta = -\cos \alpha \cos \gamma + \sin \alpha \sin \gamma \cos b.$$

Um auch die Formeln für das rechtwinklige Dreieck, welche man kaum für manche Aufgaben wird entbehren können, herzustellen, setzt man am besten in den vorhin entwickelten  $\gamma = 90^\circ$ . Dann sind in dem bei  $\gamma$  rechtwinkligen Dreieck  $a$  und  $b$  die Katheten,  $c$  die Hypotenuse und  $\alpha$  und  $\beta$  die ihr anliegenden Winkel. Für  $\gamma = 90^\circ$  gehen die Formeln  $\text{I}_a$ ,  $\text{II}$ ,  $\text{III}_a$  und  $\text{III}_b$  über in

$$\text{IV}_a \quad \cos c = \cos a \cos b,$$

$$\text{IV}_b \quad \sin a = \sin c \sin \alpha \text{ und } \sin b = \sin c \sin \beta,$$

$$\text{IV}_c \quad \cos c = \text{ctg } a \text{ ctg } \beta,$$

$$\text{IV}_d \quad \cos \alpha = \cos a \sin \beta. \text{ Aus dieser entsteht durch cyklische Vertauschung } \cos \beta = \cos b \sin \alpha.$$

Diese vier aufgestellten Formeln stellen  $\cos c$  auf zweifache,  $\sin a$  und  $\cos a$  aber nur auf einfache Weise als Produkt zweier Funktionen dar. Es liegt also für den Schüler die Frage nahe, ob es nicht möglich ist, auch für  $\sin a$  und  $\cos a$  einen zweiten derartigen Produktausdruck zu erhalten. Die Spezialisierung der Formeln für das schiefwinklige Dreieck dadurch, daß man  $\gamma = 90^\circ$  setzt, ergibt keine neuen Beziehungen. Man wird also versuchen müssen, aus den schon für das rechtwinklige Dreieck erhaltenen Formeln die beiden neuen gesuchten Ausdrücke abzuleiten. Um  $\sin a$  umzugestalten, gehe man von der schon gefundenen Gleichung

$$\text{IV}_b \text{ aus. Es ist } \sin a = \sin c \sin \alpha; \text{ setzt man in dieser Formel nach } \text{IV}_b, \sin c = \frac{\sin b}{\sin \beta} \text{ und}$$

$$\text{nach } \text{IV}_d, \sin \alpha = \frac{\cos \beta}{\cos b}, \text{ so erhält man } \text{IV}_e, \sin a = \text{tg } b \text{ ctg } \beta \text{ und durch cyklische Vertauschung}$$

$$\sin b = \text{tg } a \text{ ctg } \alpha. \text{ Um für } \cos \alpha \text{ einen neuen Ausdruck zu erhalten, setze man in der Formel } \text{IV}_d$$

$$\cos \alpha = \cos a \sin \beta \text{ nach } \text{IV}_a, \cos a = \frac{\cos c}{\cos b} \text{ und nach } \text{IV}_b, \sin \beta = \frac{\sin b}{\sin c} \text{ und erhält so } \text{IV}_f,$$

$$\cos \alpha = \text{ctg } c \text{ tg } b \text{ und durch cyklische Vertauschung } \cos \beta = \text{ctg } c \text{ tg } a.$$

Man erhält so die 6 Formeln für das rechtwinklige sphärische Dreieck und leitet nun aus ihnen die Nepersche Regel ab. Um aus ihr die sichere Ableitung der einzelnen Fälle einzuüben, lasse ich zuerst von dem Schüler die Regel genau nach dem Wortlaute anwenden und dann in der so erhaltenen falschen Formel, die einzuklammern ist, erst nachträglich statt der Katheten ihre Komplemente einsetzen. Soll z. B.  $c$  durch  $a$  und  $b$  ausgedrückt werden, so bildet der Schüler zuerst  $(\cos c = \sin a \sin b)$  und leitet daraus die richtige Gleichung  $\cos c = \cos a \cos b$  her. Auf diese Weise wird zur Zeit nur eine Gedankenoperation ausgeführt und die Anwendung der Regel auch von dem Ungeübten sicher ausgeführt.

Der soeben eingeschlagene Weg ermöglicht es, die soeben abgeleiteten Sätze ohne Benutzung der Beziehungen der Lage der Ebenen und geraden Linien im Raume zu entwickeln. Sind diese aber bekannt, oder glaubt der Lehrer, sie durch anschauliche Modelle seinen Schülern klar machen zu können, so ist die Ableitung der Formel II oder des Sinussatzes aus der betreffenden Figur bedeutend einfacher und natürlicher zu führen. Sie ist deshalb dann auf jeden Fall der oben gegebenen Ableitung vorzuziehen.

Unter Beibehaltung der früheren Bezeichnung für das sphärische Dreieck  $ABC$  (Fig. 2) falle man von  $C$  auf die Ebene  $ABO$  und auf die Kanten  $OA$  und  $OB$  die Lote  $CD$ ,  $CF$  und  $CE$  und ziehe  $DF$  und  $DE$ ; dann ist  $CD = CF \sin \alpha = r \sin b \sin \alpha$  und

$$CD = CE \sin \beta = r \sin a \sin \beta, \text{ mithin ist}$$

$$r \sin b \sin \alpha = r \sin a \sin \beta \text{ und also}$$

$$\sin a : \sin b = \sin \alpha : \sin \beta.$$

Auch für den Beweis der Formel I oder des Cosinussatzes läßt sich die soeben benutzte Figur mit Hinzufügung einiger Hilfslinien verwenden.

Zieht man (Fig. 3)  $FH \perp OB$  und  $DG \parallel BO$ , so ist  $\angle DFG = AOB = c$ , da die Schenkel des einen Winkels auf denen des andern senkrecht stehen. Nun ist  $EH = DG = DF \sin c = CF \cos \alpha \sin c = r \sin b \cos \alpha \sin c$  und  $HO = OF \cos c = r \cos b \cos c$ . Ferner ist  $EO = r \cos a$ ; da nun  $EO = EH + HO$  ist, so wird  $r \cos a = r \cos b \cos c + r \sin b \sin c \cos \alpha$  oder  $\cos a = \cos b \cos c + \sin b \sin c \cos \alpha$ .

Dieser Beweis, der sehr einfach ist, hat dem zuerst angeführten gegenüber den Vorzug, daß er keine besonderen trigonometrischen Kenntnisse voraussetzt und sehr kurz ist. Aber er verlangt eine kompliziertere und darum weniger leicht verständliche Figur und bringt den schwächeren Schüler leicht in Gefahr, bei der Reproduktion des Satzes, besonders wenn die Figur nicht perspektivisch richtig gezeichnet ist, sich in der Ablesung der betreffenden Stücke zu irren. Auch ist der Beweis nur für ein spitzwinkliges Dreieck richtig und verlangt für den Fall, daß es stumpfwinklig wird, noch eine besondere Betrachtung. Der oben angeführte Beweis beansprucht nur eine einfachere Figur und ist für alle Dreiecke und demnach allgemein gültig; er empfiehlt sich daher besonders zur Durchnahme in weniger durchgebildeten Klassen und bei beschränkter Zeit.

Auch die Ableitung der Formeln für das rechtwinklige Dreieck aus denen des schiefwinkligen durch Spezialisierung, indem man  $\gamma = 90^\circ$  setzt, dürfte wohl unter allen Umständen der gewöhnlich üblichen unmittelbaren Entwicklung aus der Figur vorzuziehen sein. Denn wenn auch die Herleitung der betreffenden geometrischen Verhältnisse an der Zeichnung selbst für den Schüler eine gute Übung ist, so bereitet doch ihre Reproduktion namentlich in späteren

Semestern zum Zwecke des Examens dem Schüler große Schwierigkeiten, und dieser praktische Zweck ist bei den wenigen Stunden, die dem Gegenstand am Gymnasium eingeräumt sind, sicherlich auch bei der Beurteilung der verschiedenen Methoden im Auge zu behalten.

Bevor nun zur numerischen Berechnung der einzelnen Aufgaben übergegangen werden kann, ist es noch notwendig, einige Sätze über sphärische Dreiecke im allgemeinen vorauszuschicken. In der Mehrzahl der Fälle wird dann, wenn die betreffenden Sätze aus der Stereometrie noch nicht bekannt sind, ein Anschauungsbeweis ohne eingehendere Begründung ausreichen.

Der zur Diskussion einzelner Aufgaben notwendige Satz, daß in einem sphärischen Dreieck die Winkelsumme größer als zwei Rechte ist, läßt sich leicht durch Ausgehen von den entsprechenden planimetrischen Beziehungen zeigen. Wenn die Seiten sehr klein sind, so geht ein sphärisches Dreieck in ein ebenes über, für welches die Winkelsumme zwei Rechte beträgt. Mit dem Wachsen der Seiten gehen aber, wie die Anschauung lehrt, auch die Bögen auseinander, mithin müssen auch die Winkel wachsen; ihre Summe ist daher stets größer als zwei Rechte. Der Satz, daß in einem sphärischen Dreieck die Summe der drei Seiten kleiner als vier Rechte ist, folgt daraus, daß wenn man die Seiten wachsen läßt, sie schließlich in eine Ebene fallen und in ihr einen einzigen größten Kreis darstellen. In dieser Grenzlage ist aber ihre Summe gleich vier Rechten, also muß diese in einem sphärischen Dreieck kleiner sein.

Daß der größeren Seite auch der größere Winkel gegenüberliegt, zeigt sich leicht ähnlich wie in der Planimetrie. Ist (Fig. 4) im Dreieck  $ABC$   $\angle A > B$ , so lege man an  $AB$  in  $A$  den Winkel  $CBA$  an, der freie Schenkel treffe  $CB$  in  $E$ . Dann ist  $\triangle AEB$  gleichschenkelig, also ist  $AE = BE$  und daher  $BC = AE + EC > AC$ . Der zu diesem Beweise notwendige Satz, daß die Summe zweier Seiten größer als die dritte ist, folgt daraus, daß auf einer Kugel der zwei Punkte verbindende größte Kreis der kürzeste Weg zwischen ihnen ist.

Eine besondere Schwierigkeit bietet oft bei sphärisch trigonometrischen Berechnungen der Fall, daß ein Winkel oder eine Seite aus ihrem vorher berechneten Sinus zu bestimmen ist; denn man kann in diesem Falle zweifelhaft sein, ob der zu der Funktion gehörende spitze oder stumpfe Winkel zu wählen ist. In der ebenen Trigonometrie erledigt sich diese Frage infolge der Konstanz der Winkelsumme ohne Schwierigkeiten. In der sphärischen Trigonometrie ist die Entscheidung oft nicht ohne verwickelte Überlegungen zu treffen. Häufig, wie in der Nautik, ergibt der praktische Verstand die Entscheidung zwischen den beiden möglichen Winkeln. In einzelnen Fällen liefert die Berechnung auf einem anderen Wege die verlangte Antwort. Indessen ist man dann gezwungen, auf den bequemen Sinussatz zu verzichten und große Umwege zu machen. Um ihn daher möglichst häufig anwenden zu können, ist es notwendig, noch einige Sätze aus der Sphärik zu kennen. Es läßt sich leicht zeigen, daß je nachdem die Summe zweier Seiten eines Dreiecks größer oder kleiner als zwei Rechte ist, auch die Summe der gegenüberliegenden Winkel über oder unter diesem Betrage bleibt.

Ist (Fig. 5) im Dreieck  $ABC$  Seite  $BC + AB > \pi$ , so verlängere man die beiden Kreise  $CA$  und  $CB$ , bis sie sich in  $D$  schneiden; dann ist  $\angle D = C$  und  $BD = \pi - BC$ . Da nun  $BC + AB > \pi$  ist, so muß  $AB > \pi - BC$  oder  $AB > BD$  sein. Im Dreieck  $DBA$  ist mithin  $\angle D > DAB$ , mithin ist  $\angle ADB + BAC > DAB + BAC$ , oder da  $\angle DAB + BAC = \pi$  ist,

so muß  $\angle ADB + BAC > \pi$  also auch  $\angle ACB + BAC > \pi$  sein. Ähnlich beweist man, daß, wenn  $BC + AB < \pi$  ist, auch  $\angle ACB + BAC < \pi$  wird.

Umgekehrt läßt sich zeigen, daß je nachdem die Summe zweier Winkel eines Dreiecks größer oder kleiner als zwei Rechte ist, dasselbe für die Summe der beiden gegenüberliegenden Seiten gilt.

Aus diesem Satze folgt, daß wenn von zwei Seiten in einem Dreiecke sich der Wert der einen von einem Rechten weiter entfernt, als der der anderen, der ihr gegenüberliegende Winkel gleichartig ist. Das heißt: Beide bilden entweder einen spitzen oder einen stumpfen Winkel.

Liegt von den beiden Seiten  $a$  und  $b$  eines Dreiecks  $a$  näher an  $\frac{\pi}{2}$  als  $b$ , so können drei Fälle eintreten, entweder ist  $a + b > \pi$  oder  $a + b = \pi$  oder  $a + b < \pi$ . Ist  $a + b > \pi$ , so könnte  $b \begin{matrix} < \\ \leq \\ > \end{matrix} \frac{\pi}{2}$  sein. Wäre  $b < \frac{\pi}{2}$ , so müßte  $a > \frac{\pi}{2}$  sein, da ja  $a + b > \pi$  ist, also wären  $\frac{\pi}{2} - b$  und  $a - \frac{\pi}{2}$  positive Größen, und zwar müßte, da nach unserer Annahme  $a$  näher an  $\frac{\pi}{2}$  als  $b$  liegt,  $\frac{\pi}{2} - b > a - \frac{\pi}{2}$  oder  $\pi > a + b$  sein, was unserer Annahme widerspricht.

Wäre  $b = \frac{\pi}{2}$ , so müßte auch  $a = \frac{\pi}{2}$  sein, da es ja näher an  $\frac{\pi}{2}$  als  $b$  liegt, also wäre  $a + b = \pi$ , und dies widerspricht gleichfalls unserer Annahme. Es ist also  $b > \frac{\pi}{2}$ , und da sein Wert weiter von  $\frac{\pi}{2}$  entfernt liegt als der von  $a$ , so ist  $b > a$ , also auch  $\beta > \alpha$ . Ist nun aber  $a + b > \pi$ , so ist auch  $\alpha + \beta > \pi$ , und da  $\beta > \alpha$  ist, so ist  $\beta > \frac{\pi}{2}$ , mithin sind  $b$  und  $\beta$  stumpfe Winkel. Wäre  $a + b < \pi$ , so ließe sich zeigen, daß unter gleicher Annahme  $b$  sowohl als  $\beta$  spitze Winkel sind.

Umgekehrt läßt sich nun auch der Satz beweisen, daß wenn von zwei Winkeln im Dreieck sich der Wert des einen weiter von einem Rechten entfernt, als der des andern, er mit der ihm gegenüberliegenden Seite gleichartig ist.

Da sich nun von den drei Seiten eines Dreiecks immer zwei in ihren Werten weiter von einem Rechten entfernen als die dritte, so folgt, daß sie mit ihren gegenüberliegenden Winkeln gleichartig sind. Im rechtwinkligen Dreiecke gilt dies von den beiden Katheten, daher müssen diese mit ihren Gegenwinkeln gleichzeitig spitz oder stumpf sein.

Die Kenntnis dieser Sätze erlaubt es, den für die Rechnung so bequemen Sinussatz häufiger anzuwenden, als es sonst möglich wäre, da nun in zwei von den drei Fällen, in welchen man Seiten oder Winkel ermitteln will, auch die Art des gegenüberliegenden Stückes bestimmt ist. Es dürfte sich empfehlen, diese Sätze dem Schüler als Thatsachen mitzuteilen, da sie sich sehr leicht merken lassen. Auf den Beweis wird man aber wohl verzichten müssen, weil die soeben durchgeführten Schlüsse für den Durchschnitt der Schüler zu schwer verständlich wären. Da man die Logarithmen benutzt, ohne sich darum zu kümmern, wie sie berechnet werden, so

wird auch wohl hier ein gewisser Mangel an Gründlichkeit im Unterrichte gestattet sein, wenn dadurch praktische Vorteile erzielt werden.

Die Berechnung des rechtwinkligen Dreiecks erfolgt in der gewöhnlichen Weise. Man hat die beiden gegebenen Stücke nach der Neperschen Regel in einer Gleichung mit dem gesuchten Stücke zu vereinen und dies dann aus ihr zu berechnen. Der Schüler sieht sehr bald, daß, wenn die drei in Frage kommenden Stücke zusammen liegen, das mittlere, wenn sie nicht zusammen liegen, das allein stehende Stück nach der Regel durch die beiden andern auszudrücken ist. Der oben angeführte Satz von der Gleichartigkeit der Katheten mit den gegenüberliegenden Winkeln gestattet es, sämtliche Formeln unmittelbar anzuwenden. Soll zum Beispiel aus der Hypotenuse  $c = 132^{\circ} 7'$  und der Kathete  $b = 168^{\circ} 12'$  der dieser gegenüberliegende Winkel  $\beta$  berechnet werden, so kann man ohne weiteres  $\sin \beta = \frac{\sin b}{\sin c}$  setzen. Denn da

$b$  ein stumpfer Winkel ist, so folgt, daß auch  $\beta$  ein solcher sein muß. Die Rechnung ergibt  $\beta = 163^{\circ} 59' 52''$ . Ohne Kenntnis des oben zitierten Satzes hätte man noch ein anderes vermittelndes Stück berechnen müssen, das keine Zweideutigkeit zuläßt. Es ist z. B.  $\cos a = \operatorname{ctg} c \operatorname{tg} b$ . Da hier die beiden rechts stehenden Funktionen negativ sind, so folgt, daß  $\cos a$  positiv ist, also  $a$  im ersten Quadranten liegt. Man findet  $a = 79^{\circ} 6' 45''$ . Man erhält dann:  $\cos \beta = \sin a \cos b$ . Da der erste Faktor rechts positiv, und der zweite negativ ist, so folgt, daß  $\cos \beta$  negativ wird, also  $\beta$  ein stumpfer Winkel ist. Man erhält wie oben  $\beta = 163^{\circ} 59' 52''$ .

Bei der Berechnung des schiefwinkligen Dreiecks ist immer von dem Cosinussatz für die Seiten oder für die Winkel, also von den Formeln I oder III auszugehen. Wir wollen die Fälle genauer untersuchen.

1. Fall: Es seien die drei Seiten  $a$ ,  $b$  und  $c$  gegeben.

Es ist  $\cos c = \cos a \cos b + \sin a \sin b \cos \gamma$ ,

$$\text{also } \cos \gamma = \frac{\cos c - \cos a \cos b}{\sin a \sin b}.$$

Um den Ausdruck für logarithmische Berechnung bequem zu machen, schreiben wir den Zähler:  $\cos c - \sin c \frac{\cos a \cos b}{\sin c}$ , dann hat er die Form  $p \cos c + q \sin c$ , wenn  $p = 1$  und  $q = -\frac{\cos a \cos b}{\sin c}$  gesetzt wird. Mithin ist  $\operatorname{tg} \varepsilon = -\frac{\cos a \cos b}{\sin c}$ , und der Zähler geht über in  $\frac{\cos(c - \varepsilon)}{\cos \varepsilon}$ ; mithin ist der gesuchte Ausdruck  $\cos \gamma = \frac{\cos(c - \varepsilon)}{\cos \varepsilon \sin a \sin b}$ .

Hier ist auch das allgemein übliche Verfahren ohne Hilfswinkel zu empfehlen.

Subtrahiert man beide Seiten der Gleichung  $\cos \gamma = \frac{\cos c - \cos a \cos b}{\sin a \sin b}$  von 1, so

$$\text{erhält man unmittelbar: } \sin \frac{\gamma}{2} = \frac{\sqrt{\sin \frac{c + (a-b)}{2} \sin \frac{c - (a-b)}{2}}}{\sin a \sin b}$$

Ist nur die Berechnung eines Winkels verlangt, so wendet man auf ihn unmittelbar eine der beiden soeben entwickelten Methoden an. Sollen aber mehrere Winkel berechnet werden, so gehe man von der Seite aus, welche sich am wenigsten von  $90^{\circ}$  entfernt; denn nun

ergiebt sich der gegenüberliegende Winkel eindeutig durch die Berechnung. Die übrigen Stücke können dann ohne weiteres nach dem Sinussatze berechnet werden, da sie mit ihren gegenüberliegenden Seiten gleichartig sind.

Ist z. B.  $a = 134^{\circ} 12'$ ,  $b = 128^{\circ} 7'$  und  $c = 92^{\circ} 4'$ , so ist mit der Berechnung von  $\gamma$  zu beginnen; man erhält nach der ersten Methode  $\varepsilon = -23^{\circ} 17' 52''$  und  $c - \varepsilon = 115^{\circ} 21' 52''$ ; daraus erhält man in der Tafel:  $180^{\circ} - \gamma = 34^{\circ} 13' 6''$ ; denn  $\gamma$  ist im zweiten Quadranten zu nehmen, da  $\frac{\cos(c - \varepsilon)}{\cos \varepsilon \sin a \sin b}$  negativ wird; mithin ist  $\gamma = 145^{\circ} 46' 54''$ . Nach der zweiten Methode erhält man  $\frac{\gamma}{2} = 72^{\circ} 53' 29''$  und daraus  $\gamma = 145^{\circ} 46' 58''$ .

Der zweite Wert ist der genauere, da er ohne Benutzung eines Hilfswinkels gefunden ist.

Die Anwendung des Sinussatzes ergibt:

$$\alpha = 156^{\circ} 12' 31'' \text{ und } \beta = 153^{\circ} 43' 23''.$$

2. Fall. Sind die drei Winkel  $\alpha, \beta$  und  $\gamma$  gegeben, so ergibt sich wie im ersten Falle, aus:  $\cos \gamma = -\cos \alpha \cos \beta + \sin \alpha \sin \beta \cos c$ :

$$\cos c = \frac{\cos \gamma + \cos \alpha \cos \beta}{\sin \alpha \sin \beta}, \text{ also } \operatorname{tg} \varepsilon = \frac{\cos \alpha \cos \beta}{\sin \gamma} \text{ und } \cos c = \frac{\cos(\varepsilon - \gamma)}{\cos \varepsilon \sin \alpha \sin \beta}, \text{ oder}$$

man bildet analog wie oben:

$$\sin \frac{c}{2} = \frac{\sqrt{-\cos \frac{\gamma + (\beta - \alpha)}{2} \cos \frac{\gamma - (\beta - \alpha)}{2}}}{\sin \alpha \sin \beta}.$$

Ist z. B.  $\alpha = 167^{\circ} 12'$ ,  $\beta = 162^{\circ} 54'$  und  $\gamma = 153^{\circ} 44'$  gegeben, so hat man, da sich  $\gamma$  am wenigsten von  $90^{\circ}$  entfernt, zuerst  $c$  zu berechnen.

Der erste Weg ergibt  $\varepsilon = 64^{\circ} 36' 3''$  und  $\gamma - \varepsilon = 89^{\circ} 7' 57''$ .

Hieraus folgt  $c = 57^{\circ} 11' 32''$ .

Nach der zweiten Methode folgt:  $\frac{c}{2} = 28^{\circ} 35' 46''$ , und mithin ist  $c = 57^{\circ} 11' 32''$ .

Auch hier ist der zweite Wert der genauere.

Da die beiden anderen Seiten den ihnen gegenüberliegenden Winkeln gleichartig sind, so berechnen wir sie nach dem Sinussatze.

Man erhält  $a = 155^{\circ} 7'$  und  $b = 146^{\circ} 3'$ .

3. Fall. Sind zwei Seiten und der eingeschlossene Winkel  $a, b$  und  $\gamma$  gegeben, so ist:  $\cos c = \cos a \cos b + \sin a \sin b \cos \gamma = p \cos b + q \sin b$ , wo  $p = \cos a$  und  $q = \sin a \cos \gamma$  gesetzt wird.

$$\text{Dann ist } \operatorname{tg} \varepsilon = \operatorname{tga} \cos \gamma, \text{ und } \cos c = \frac{\cos a \cos(b - \varepsilon)}{\cos \varepsilon}.$$

Die Berechnung von  $\varepsilon$  und  $c$  ist eindeutig, da sich der Quadrant der gesuchten Seite nach dem Vorzeichen des rechts stehenden Ausdrucks bestimmt.

Ist zum Beispiel  $a = 155^{\circ} 7'$ ,  $b = 146^{\circ} 3'$  und  $\gamma = 153^{\circ} 44'$ , so wird  $\varepsilon = 22^{\circ} 35' 3,4''$  und  $b - \varepsilon = 123^{\circ} 27' 57''$ , woraus sich  $c = 57^{\circ} 11' 40''$  ergibt.

Da  $c$  näher an  $90^{\circ}$  liegt als  $a$  und  $b$ , so ist für die Berechnung der übrigen Winkel der Sinussatz anzuwenden, und man erhält  $\alpha = 167^{\circ} 12'$  und  $\beta = 162^{\circ} 54'$ .

Läge eine der Seiten  $a$  oder  $b$  näher an  $90^\circ$  als  $c$ , so wären für diese besondere Untersuchungen notwendig. (Vergleiche den 5. Fall).

4. Fall. Sind eine Seite und die beiden anliegenden Winkel  $c$ ,  $\alpha$  und  $\beta$  gegeben, so wird

$$\cos \gamma = -\cos \alpha \cos \beta + \sin \alpha \sin \beta \cos c = p \cos \beta + q \sin \beta,$$

wenn  $p = -\cos \alpha$  und  $q = \sin \alpha \cos c$  gesetzt wird.

Dann ist  $\operatorname{tg} \varepsilon = -\operatorname{tg} \alpha \cos c$  und  $\cos \gamma = -\frac{\cos \alpha \cos (\beta - \varepsilon)}{\cos \varepsilon}$ .

Auch hier ist die Berechnung von  $\varepsilon$  und  $c$  eindeutig. Ist z. B.  $c = 57^\circ 11' 40''$ ,  $\alpha = 167^\circ 54'$  und  $\beta = 162^\circ 54'$  gegeben, so ist  $\varepsilon = 7^\circ 1' 2, 3''$  und  $\beta - \varepsilon = 155^\circ 52' 57,7''$ . Hieraus folgt  $\gamma = 153^\circ 44'$ . Es liegt  $\gamma$  im zweiten Quadranten, da der rechts für  $\cos \gamma$  stehende Ausdruck negativ wird. Auch hier liegen  $\alpha$  und  $\beta$  weiter von  $90^\circ$  als  $\gamma$  entfernt, also können  $a$  und  $b$  unmittelbar bestimmt werden.

Es ist  $b = 146^\circ 3'$  und  $a = 155^\circ 7'$ .

5. Fall. Sind zwei Seiten und der der einen gegenüberliegende Winkel  $a$ ,  $b$  und  $\alpha$  gegeben, so ist:

$$\cos a = \cos b \cos c + \sin b \sin c \cos \alpha = p \cos c + q \sin c, \text{ wenn}$$

$p = \cos b$  und  $q = \sin b \cos \alpha$  gesetzt wird. Hierin ist  $c$  die Unbekannte; folglich hat

man  $\operatorname{tg} \varepsilon = \operatorname{tg} b \cos \alpha$  und  $\cos (c - \varepsilon) = \frac{\cos a \cos \varepsilon}{\cos b}$ . Da  $c - \varepsilon$  positiv und negativ sein kann,

so erhält man im allgemeinen für  $c$  zwei Werte. Ob beide oder nur einer zur Berechnung des gesuchten Dreiecks brauchbar sind, entscheidet man nach ihrer Ermittlung, indem man untersucht, ob ihr Betrag zu  $a$  und  $b$  addiert unter  $360^\circ$  bleibt, und den Wert als ungeeignet ausschließt, bei dem  $a + b + c > 360$  wird; oder man berücksichtigt nach der üblichen Weise, daß zwei Dreiecke möglich sind, wenn gleichzeitig  $a < b$  und  $a + b < 180^\circ$ , oder  $a > b$  und  $a + b > 180^\circ$  wird.

Bei der numerischen Berechnung von  $c$  beachte man, ob  $a$  von den drei Seiten  $\frac{\pi}{2}$  am nächsten liegt; dann kann man zur Ermittlung von  $\beta$  und  $\gamma$  den Sinussatz unmittelbar anwenden, während sonst für einen der Winkel besondere Untersuchungen notwendig werden.

Ist z. B.  $a = 155^\circ 7'$ ,  $b = 146^\circ 3'$  und  $\alpha = 167^\circ 12'$  gegeben, so ist  $\varepsilon = 33^\circ 17'$ , also  $c - \varepsilon = \pm 23^\circ 54' 27''$  und hieraus folgt  $c_1 = 57^\circ 11' 27''$  und  $c_2 = 9^\circ 22' 33''$ .

Da in beiden Fällen  $a + b + c < 360^\circ$ , oder da gleichzeitig  $a + b > 180^\circ$  und  $a > b$  ist, so sind zwei Dreiecke vorhanden, welche die gegebenen Stücke enthalten, also sind beide Werte von  $c$  zu berücksichtigen.

Im ersten Falle ist es unbestimmt, ob  $\gamma$  spitz oder stumpf wird, da sich  $c$  dem Werte von  $90^\circ$  am meisten nähert; daher läßt sich nur zur Berechnung von  $\beta$  der Sinussatz anwenden. Man erhält  $\beta = 162^\circ 54'$ .

$\gamma$  berechnet man entweder aus den drei Seiten nach dem ersten Fall, oder man zieht (Fig. 6)  $BD \perp CA$ ; dann ist  $\operatorname{tg} AD = \operatorname{tg} c \cos \alpha$ ,  $CD = b - AD$  und  $\cos \gamma = \operatorname{ctg} a \operatorname{tg} CD$ .

Bei der numerischen Berechnung wird  $\operatorname{tg} c \cos \alpha$  negativ. Daher ist  $AD = 123^\circ 28' 6''$ , mithin wird  $CD = 22^\circ 34' 54''$ .



Da  $\operatorname{ctg} a \operatorname{tg} CD$  negativ wird, so wird  $\gamma$  ein stumpfer Winkel. Die Rechnung ergibt  $\gamma = 153^\circ 44'$ .

Für den Fall, daß  $c = 9^\circ 22' 33''$  ist, können wir zur Berechnung von  $\gamma$  unmittelbar den Sinussatz anwenden; da Seite  $c$  spitz ist, so folgt  $\gamma = 4^\circ 55' 4''$ .

Da  $b$  von den drei Seiten  $90^\circ$  am nächsten liegt, so ist seine Beschaffenheit nicht unmittelbar aus der des gegenüberliegenden Stückes zu bestimmen. Da wir aber aus den gegebenen Daten  $\sin \beta = \frac{\sin b \sin \alpha}{\sin a}$  unmittelbar berechnen konnten, so sind für  $\beta$  nur zwei Supplementwinkel möglich, und da der stumpfe Winkel  $162^\circ 54'$  dem ersten Dreiecke angehört, so muß der supplementare Wert  $17^\circ 6'$  zum zweiten gehören.

6. Fall. Sind zwei Winkel und die dem einen gegenüberliegende Seite  $\alpha, \beta$  und  $a$  gegeben, so findet man aus der Formel III<sub>b</sub>  $\cos \alpha = -\cos \beta \cos \gamma + \sin \beta \sin \gamma \cos a$   $\operatorname{tg} \varepsilon = -\operatorname{tg} \beta \cos a$  und  $\cos(\gamma - \varepsilon) = -\frac{\cos \alpha \cos \varepsilon}{\cos \beta}$ .

Die Entscheidung der Frage, ob beide oder nur einer der für  $\gamma$  gefundenen Werte brauchbare Lösungen ergeben, erfolgt ähnlich wie bei dem 5. Falle. Wir erhalten für jeden Wert von  $\gamma$  ein Dreieck, welches der Ungleichung  $\alpha + \beta + \gamma > 180^\circ$  genügt, oder die Aufgabe läßt eine doppelte Lösung zu, wenn gleichzeitig  $\alpha < \beta$  und  $\alpha + \beta < 180^\circ$  oder  $\alpha > \beta$  und  $\alpha + \beta > 180^\circ$  ist.

Ist z. B.  $\alpha = 167^\circ 12'$ ,  $\beta = 162^\circ 54'$  und  $a = 155^\circ 7'$ , so wird  $\varepsilon = 164^\circ 24' 30''$  und  $\gamma - \varepsilon = \pm 10^\circ 40' 30''$ , also  $\gamma_1 = 153^\circ 44'$  und  $\gamma_2 = 175^\circ 5'$ .

Beide Werte von  $\gamma$  geben mit  $\alpha$  und  $\beta$  ein Dreieck, da ihre Winkelsummen größer als  $180^\circ$  sind.

Nach ähnlichen Überlegungen wie bei dem 5. Fall erhält man für das erste Dreieck  $c_1 = 57^\circ 11' 27''$  und  $b_1 = 146^\circ 3'$  und für das zweite Dreieck  $c_2 = 170^\circ 37' 28''$ ,  $b_2 = 33^\circ 57'$ . So lassen sich die sämtlichen Fälle durch die aus der Gleichung  $r = p \cos \vartheta + q \sin \vartheta$  folgenden goniometrischen Umformungen lösen.

Der Ausführlichkeit wegen habe ich diese Möglichkeit der Berechnung allgemein gezeigt, ohne zu behaupten, daß diese Entwicklungen im Unterrichte der Reihe nach durchgeführt werden sollen. Im Gegenteil wird man hier von konkreten Beispielen, wie sie der Unterricht in der mathematischen Geographie darbietet, auszugehen und dadurch das Interesse des Schülers zu beleben haben. Hier aber fallen die für die Erörterungen schwierigen Berechnungen nach dem 5. und 6. Falle vollständig fort. In den wenigen zweifelhaften Fragen wird häufig eine praktische Überlegung die Entscheidung treffen und eine schwierigere Diskussion vermeiden lassen. Nur selten, wie bei der Berechnung der Kurse in nautischen Aufgaben, ist diese nicht zu umgehen.

Will man nun die im Unterrichte ermittelten Sätze der sphärischen Trigonometrie zur Befestigung der in der mathematischen Geographie gewonnenen Kenntnisse verwerten, so müssen diese vor allen Dingen durch häufige Repetitionen so befestigt werden, daß sie vollkommenes

Eigentum der Schüler sind und diesen bei etwaigen Überlegungen keine Schwierigkeiten mehr bereiten.

Zur Erleichterung des Verständnisses will ich nun kurz die wenigen für unsere Zwecke notwendigen Definitionen zusammenstellen.

Man denkt sich den Sternhimmel als eine große Hohlkugel, in deren Mittelpunkt wir uns befinden. Der Punkt der Weltkugel, welcher senkrecht über dem Beobachter liegt, heißt Zenit, ihm diametral gegenüber liegt das Nadir. Eine Ebene, welche senkrecht zur Verbindungslinie beider Punkte durch den Mittelpunkt gelegt wird, schneidet die Weltkugel im Horizont. Jeder auf dem Horizont senkrecht stehende größte Kreis ist ein Vertikalkreis.

Die Verbindungslinie der beiden Punkte der Himmelskugel, welche bei der scheinbaren Bewegung der Gestirne fest bleiben, heißt Weltaxe, und der Winkel, den sie mit der Ebene des Horizontes bildet, die Polhöhe des Beobachtungsortes. Sie wird in der Regel durch  $\varphi$  bezeichnet.

Ein Halbkreis der Weltkugel, der die Axe zum Durchmesser hat, heißt Meridian; fällt er mit dem Vertikalkreis eines Ortes zusammen, so nennt man ihn seinen Ortsmeridian. Dieser schneidet den Horizont im Nord- und Südpunkte.

Die Anzahl der Stunden, die ein Stern bei seiner scheinbaren Bewegung braucht, um zwei Meridiane zu passieren, erhält man, indem man den zwischen beiden liegenden Winkel in Graden ausdrückt und durch 15 dividiert. Ist der eine Meridian der Ortsmeridian, so heißt der Winkel der Stundenwinkel des betreffenden Sternes.

Derjenige größte Kreis der Himmelskugel, welcher senkrecht auf der Weltaxe steht, heißt Äquator, und derjenige größte Kreis, den der Sonnenmittelpunkt alljährlich an der Himmelskugel unter den Sternbildern durchwandert, führt den Namen Ekliptik. Der Punkt des Äquators, den der Sonnenmittelpunkt im Frühjahre passiert, wird Widderpunkt genannt.

Verstehen wir unter dem Strahl eines Sternes den vom Mittelpunkt seiner Scheibe nach dem Auge des Beobachters gezogenen Radiusvektor, dann ist die Höhe  $h$  eines Sternes der Winkel, den sein Strahl mit der Ebene des Horizontes, und sein Azimut  $a$  der, den seine Projektion auf den Horizont mit der vom Beobachter nach dem Nordpunkt gehenden Richtung bildet.

Die Deklination  $\delta$  eines Sternes ist der Winkel, den sein Strahl mit der Ebene des Äquators, und seine Rektascension  $\alpha$  der, den seine Projektion auf diese Ebene mit der vom Beobachter nach dem Widderpunkt gehenden Richtung bildet. Sie wird in der Regel durch die Anzahl der Stunden ausgedrückt, die man erhält, wenn man die Anzahl der Grade dieses Winkels durch 15 dividiert.

Die Breite eines Sternes ist der Winkel, den sein Strahl mit der Ebene der Ekliptik, und seine Länge der, den seine Projektion auf diese Ebene mit der vom Beobachter nach dem Widderpunkte gehenden Richtung bildet.

Das Azimut wird in dem Sinne der Bewegung des Uhrzeigers, die Rektascension und Länge in der entgegengesetzten Richtung gezählt. Die Rektascension giebt daher, da der Ausgangspunkt der Sternzeit durch die Kulmination des Widderpunktes bestimmt wird, die Zeit an, um welche der betreffende Stern kulminiert.

Die soeben gegebenen Definitionen der Koordinaten eines Sterns weichen von der gewöhnlichen Darstellung etwas ab, sie eignen sich aber wegen ihrer Kürze, und weil sie wenige Vorbegriffe verlangen, für den Unterricht. Der Schüler faßt sie schneller auf und behält sie sicherer; er ist dann auch im stande, leicht die Kreisbögen zu finden, welche sie messen, und durch welche sie auch in der Regel definiert werden.

Bei den meisten Rechnungen, wie sie die Praxis verlangt, und wie sie auch für die Zwecke des Unterrichts ausreichen, kann man in Anbetracht der großen Entfernungen der Gestirne von der Erde den Ort der Beobachtung mit dem Mittelpunkt der Erde identifizieren.

In besonderen Fällen, wo bei ganz genauen Ermittlungen die Sonne, der Mond oder die Planeten in Betracht kommen, sind die sich auf den Ort der Beobachtung beziehenden Koordinaten von den geocentrischen zu unterscheiden. Die Korrektion geschieht mit Hilfe der Parallaxe, d. h. des Winkels, unter dem der nach dem Orte des Beobachters gehende Erdradius von dem betreffenden Stern aus erscheint.

Man geht nun wohl am besten von der scheinbaren Bewegung der Gestirne aus, da sie sich unter den astronomischen Vorgängen dem Schüler im Leben am meisten bemerkbar gemacht haben, und bei ihnen hierfür schon von Hause aus großes Interesse erwartet werden kann.

Da es sich um sphärische Dreiecke handelt, und durch sie die Bewegung eines Gestirnes verfolgt werden soll, so findet der Schüler sehr bald, daß dieses der eine Eckpunkt des in Betracht kommenden Dreiecks wird; als der zweite Eckpunkt hat bei der Betrachtung der scheinbaren Bewegung der Himmelskörper ohne Zweifel der einzige feste Punkt auf unserer Hemisphäre, der Nordpol, zu dienen. Der dritte Eckpunkt wird durch den Ort des betreffenden Beobachters bestimmt und ist gewissermaßen der Pol seines Horizontes oder sein Zenit.

Wir nennen (Fig. 7) das Dreieck PZS, wo Z das Zenit, P den Pol und S den Stern bezeichnet. Benennen wir die Seiten mit den kleinen lateinischen Buchstaben, die den gegenüberliegenden großen entsprechen, so ergibt sich ohne schwierige Betrachtungen, daß  $PZ = s = 90^\circ - \varphi$ ,  $PS = z = 90^\circ - \delta$  und  $ZS = p = 90^\circ - h$  wird.  $\angle PZS = a$  ist das Azimut und  $\angle ZPS = \tau$  der Stundenwinkel. Man erhält aus ihm, wenn man ihn durch 15 dividirt, bei westlicher Lage des Sterns die Zeit, die seit seiner Kulmination verflossen ist, und bei östlicher die, welche bis zu seiner Kulmination noch verfließt. Der Winkel ZSP, der parallaktische genannt, giebt an, wie der durch den Stern gehende Vertikalkreis gegen seinen Meridian geneigt ist.

Diese Verhältnisse sind von dem Schüler womöglich zu Anfang jeder mathematischen Stunde so lange zu wiederholen, bis sie ihm völlig geläufig geworden sind.

Das den Schüler am meisten interessierende Gestirn ist die Sonne; daher wird man wohl im Unterrichte bei der rechnenden Astronomie von ihrer scheinbaren Bewegung auszugehen haben. Vor allem aber erregen hier die Erscheinungen die allgemeine Teilnahme, welche durch die verschiedene Stellung der Sonne dem Horizont gegenüber verursacht werden, die Länge der Tage und Nächte; sie eignet sich umsomehr zum Ausgangspunkte der Rechnung, als sie ohne komplizierte Apparate, wie Theodoliten oder Sextanten, beobachtet, und daher die ihnen zu Grunde liegenden Verhältnisse leicht verstanden werden können.

Um die Länge des Tages an einem bestimmten Datum und unter einer beliebigen

Breite zu berechnen, berücksichtige man, daß bei dem Aufgange und Untergange der Sonne ihr Mittelpunkt im Horizonte steht. Wählt man nun die zweite Stellung zu dem einen Eckpunkte des Polzenitsterndreiecks, so erhält man durch Division des Stundenwinkels durch 15 die Zeit, welche die Sonne von ihrer Kulmination ab braucht, um den Horizont zu erreichen, oder die Länge des betreffenden Nachmittags. Da aber die Polhöhe des Ortes bekannt ist, und die Deklination der Sonne für jeden Tag ermittelt werden kann, so kennt man die beiden Seiten  $s$  und  $z$ . Die Seite  $p$  würde, da der Zenit der Pol des Horizonts ist, einen Rechten betragen, wenn man die Strahlenbrechung vernachlässigen wollte. Die Berechnung würde dann, da man es mit einem rechtseitigen Dreiecke zu thun hätte, sehr einfach, aber so ungenau werden, daß die Vergleichung, welche der Schüler mit den Angaben des Kalenders vornimmt, für ihn nicht mehr eine befriedigende Übereinstimmung ergeben würde. Nimmt man aber als Durchschnittswert für den Winkel, um welchen der Horizont gehoben erscheint,  $34' 54''$  an und nennt ihn  $\beta$ , so hat man allgemein  $ZS = 90^\circ + \beta = 90^\circ 35' 54''$  zu setzen. Man kennt also vom Dreieck PZS die drei Seiten und kann daher die fehlenden Stücke berechnen. Es sei z. B. die Zeit zu berechnen, um welche die Sonne in Königsberg Nm., das unter einer Breite von  $52^\circ 58'$  gelegen ist, am 14. Juni untergeht, wenn die Deklination an diesem Tage um 8 Uhr abends  $23^\circ 14' 50''$  beträgt. Es ist im Dreieck PZS Seite  $z = 66^\circ 45' 10''$   $s = 37^\circ 2'$  und  $p = 90^\circ 34' 54''$ .

In ihm ist  $p$  immer sehr nahe an  $90^\circ$  gelegen. Man wird daher zunächst den gegenüberliegenden Winkel  $ZPS = \tau$  zu berechnen haben. Dann sind die beiden andern Winkel mit ihren gegenüberliegenden Seiten gleichartig und können daher nach dem Sinussatze ermittelt werden. Die Rechnung ergibt  $\angle P$  oder  $\tau = 125^\circ 59' 22''$  und daraus  $t = 8 \text{ h } 23 \text{ m } 57,5 \text{ s}$ . Man erhält das Azimut SZP gleich  $48^\circ 1' 42''$ , also geht die Sonne an diesem Tage in Königsberg (N  $48^\circ 1, 42''$  W.) oder fast im Nordwesten unter.

Bei dieser Berechnung ist in doppelter Hinsicht eine Ungenauigkeit begangen. Einmal haben wir die Sternzeit gleich der mittleren Zeit gesetzt, und dann ist die Änderung der Rektascension gar nicht berücksichtigt. Um sie in Rechnung zu ziehen, bezeichnen wir die Vergrößerung der Rektascension im Laufe von 24 Stunden mit  $s$ , die Anzahl der Sekunden eines Tages  $24 \cdot 60 \cdot 60$  mit  $p$  und die Zeit, welche von der Kulmination der Sonne bis zu ihrem Untergange verfließen wäre, wenn sich die Rektascension während dieser Zeit nicht geändert hätte, mit  $t$ , dann ist die Rektascensionsänderung der Sonne während einer Sekunde  $\frac{s}{p}$ , also nach  $t$  Sekunden  $t \frac{s}{p}$ . Wir erhalten also die Rektascensionsänderung in  $t$  Sekunden, indem wir die Zeit  $t$  mit  $\frac{s}{p}$  multiplizieren. Da nun die Sonne um diesen Betrag von  $t \frac{s}{p}$  Sekunden rückwärts gegangen ist, so braucht sie noch diese Zeit, um den Horizont zu erreichen. Wir müssen also diesen Betrag zu den berechneten  $t$  Sekunden addieren. Während dieser  $t \left(\frac{s}{p}\right)$  Sekunden ändert sich aber die Rektascension wieder um  $t \left(\frac{s}{p}\right)$ .  $\left(\frac{s}{p}\right) = t \left(\frac{s}{p}\right)^2$  Sekunden u. s. w.

Es ist also die wahre Zeit des Untererganges durch die unendliche geometrische Reihe  $t + t\left(\frac{s}{p}\right) + t\left(\frac{s}{p}\right)^2 + \dots = t\left(1 + \frac{s}{p} + \left(\frac{s}{p}\right)^2 + \dots\right)$  dargestellt. Diese ist stark konvergent, da  $\frac{s}{p}$  sehr klein ist, sodafs man sie auch bei sehr genauen Berechnungen schon bei dem zweiten Gliede abbrechen kann.

Beachtet man nun, dafs die Bewegung der Sonne unter den Gestirnen der scheinbaren aus der Umdrehung der Erde um ihre Axe folgenden Bewegung entgegengesetzt ist, und dafs dadurch der Tag um einige Minuten verlängert wird, während die Umrechnung der Sternzeit in mittlere Sonnenzeit den Tag um eine entsprechende Anzahl Minuten kleiner ergeben würde, so erkennt man sehr bald, dafs beide Fehler sich zum Teil kompensieren. Die genaue Rechnung zeigt nun in der That, dafs man bei dem oben beobachteten Verfahren nur einen Fehler von höchstens 6 Sekunden begeht.\*

Berechnet man nun die Sonnenuntergangszeit für Königsberg am längsten Tage, dem 21. Juni, wo dieser Fehler am grössten ist, und für einen Ort, der auf demselben Meridian um  $1^\circ$  weiter südlich liegt, so erhält man für den ersten Ort 8 h 25 m 35 s und für den zweiten 8 h 19 m 42 s. Die Sonne geht also hier 5 Minuten 47 Sekunden früher unter, also erhält man für jede Bogenminute oder 1,852 km südlich einen Zeitunterschied von 5,9 s. Daher ist die ungenaue Rechnung noch für einen Ort innerhalb der betreffenden Stadt richtig. Da die so erhaltenen Werte nach Hinzufügung der Zeitgleichung sich mit den im Kalender gegebenen Angaben genau decken, so befriedigen sie den Schüler vollständig.

In der Gleichung, aus welcher wir die Sonnenuntergangszeit berechnet haben, kommen im ganzen 4 Gröfsen  $\tau$ ,  $\varphi$ ,  $\delta$  und  $\beta$  vor, von denen wir die eine  $\tau$  aus den übrigen berechnet haben. Indem wir nun die andern der Reihe nach als Unbekannte setzen und sie aus der Gleichung bestimmen, erhalten wir drei neue Aufgaben. Die interessanteste von diesen ist unstreitig die Berechnung der Polhöhe eines Ortes aus der beobachteten Tageslänge. Ein Schüler, der die Ferien an der See zubringt, ist unter günstigen Umständen im stande, genau die Auf- und Untergangszeit der Sonne im Meere nach seiner Uhr zu bestimmen und daraus die Breite des Ortes ohne Benutzung komplizierter Apparate zu berechnen. Ist z. B. am 24. Juni die Deklination der Sonne  $23^\circ 25' 48''$ , und hat man die Tageslänge 16 h 24 m 40 s beobachtet, so ist  $p = 90^\circ 34' 54''$ ,  $z = 66^\circ 34' 12''$  und  $\angle SPZ = \tau = 123^\circ 42' 30''$ . Setzen wir  $PZ = s = x$ , so wird  $\cos p = \cos z \cos x + \sin z \sin x \cos \tau$ , und hieraus nach dem 4. Fall  $\varepsilon = -52^\circ 1'$ ,  $x - \varepsilon = 90^\circ 54'$  und also  $x = 38^\circ 53'$ . Hieraus ergiebt sich  $\varphi = 90^\circ - x = 51^\circ 7'$ . Welcher von den beiden sich durch die Rechnung ergebenden Werten der richtige ist, entscheidet sich dadurch, dafs die ungefähre Lage des Beobachtungsortes bekannt ist. Auch die Deklination der Sonne zur Auf- und Untergangszeit und der Refraktionswinkel am Horizont lassen sich unter der Voraussetzung, dafs die anderen Gröfsen bekannt sind, bestimmen.

Im Anschluss hieran läfst sich die interessante Frage aus der Meteorologie beantworten: „Welchen Einflufs übt die Refraktion am Horizonte auf die Verlängerung der Tage aus?“ Selbstverständlich ist diese am geringsten am Äquator zur Zeit der Tagundnacht-

\* Vergl. Martus, Astronomische Geographie. Zweite Auflage, Seite 89. Dresden, C. A. Kochs Verlagsbuchhandlung 1888.

gleiche. Dann geht die Gleichung  $\cos \tau = \frac{\cos p - \cos s \cos z}{\sin s \sin z}$  für den Fall, daß wir die Refraktion vernachlässigen, über in  $\cos \tau = 0$  oder  $\tau = 90^\circ$ . D. h. es ist  $t = 6$  h. Berücksichtigen wir aber diese, so erhalten wir, da  $\cos s = 0$ ,  $\cos z = 0$ ,  $\sin t = 1$  und  $\sin z = 1$  wird,  $\cos \tau = \cos p$  oder  $\tau = p$ . D. h. es ist  $\tau = 90^\circ 34' 54''$  oder  $t = 6$  h 2 m 20 s. Es wird hier also der Tag durch die Wirkung der Refraktion um 4 m 40 s länger.

Zur Zeit des Sommersolstitiums ist auch hier  $s = 90^\circ$ , aber es wird  $z = 66^\circ 33'$ , da  $\delta = 23^\circ 27'$  ist. Vernachlässigt man die Strahlenbrechung, so muß  $p = 90^\circ$  gesetzt werden. Man erhält  $\cos \tau = 0$  oder  $\tau = 90^\circ$ , d. h.  $t = 6$  h. Man erkennt also hier das schon im geographischen Unterricht gewonnene Gesetz, daß am Äquator die Sonne alle Tage um 6 Uhr den wahren Horizont passiert. Berücksichtigt man die Refraktion, indem man  $p = 90^\circ 34' 54''$  setzt, so erhält man  $\cos \tau = \frac{\cos p}{\sin z}$ . Man findet  $\tau = 90^\circ 38' 2''$  und  $t = 6$  h 2 m 32 s. Mit hin ist der Tag am Äquator zur Zeit des Sommersolstitiums um 5 m 4 s durch die Strahlenbrechung verlängert.

In unseren Breiten ist diese Verlängerung bedeutender. In Königsberg, wo  $\varphi = 52^\circ 58'$  ist, wird zur Zeit der Tagundnachtgleiche  $s = 37^\circ 2'$  und  $t = 90^\circ$ , also für den Fall, daß die Refraktion verschwindet, wird  $\cos \tau = 0$  oder  $t = 6$  h, wie schon im geographischen Unterricht ermittelt war. Berücksichtigt man die Refraktion, so ist  $\cos \tau = \frac{\cos p}{\sin s}$ . Man erhält  $\tau = 90^\circ 57' 57''$ , also  $t = 6$  h 3 m 52 s, also ist der Tag um 7 m 44 s länger. Für den Fall des Sommersolstitiums ist in Königsberg bei Vernachlässigung der Refraktion  $\cos \tau = -\operatorname{ctg} z \operatorname{ctg} s$ , wo  $z = 66^\circ 33'$  und  $s = 37^\circ 2'$  wird. Es ist  $\tau = 125^\circ 5, 43''$ , also  $t = 8$  h 20 m 23 s. Es wird also die Länge des astronomischen Tages 16 h 40 m 46 s. Da aber die Länge des wahren Tages mit Berücksichtigung der Refraktion schon gleich 16 h 51 m 10 s bestimmt war, so folgt, daß an diesem Tage durch den Einfluß der Strahlenbrechung die Sonne 10 m 24 s länger scheint, als sie es nach ihrer räumlichen Stellung zur Erde thun würde.

In noch höherem Maße macht sich der Einfluß der Refraktion auf die Verlängerung der Tage in höheren Breiten bemerkbar, und zwar weniger zur Zeit der Äquinoktion, als zur Zeit der Solstitien.

Ermitteln wir den Breitengrad, auf welchem am längsten Tage um Mitternacht der Mittelpunkt der Sonne sich im Horizonte befindet, so geht, da dort  $\tau = 180^\circ$  wird, die Gleichung  $\cos p = \cos z \cos s + \sin z \sin s \cos \tau$  über in:  $\cos p = \cos(z + s)$  oder  $p = z + s$  oder  $s = p - z$ . Da an diesem Tage  $z = 66^\circ 33'$  und  $p = 90^\circ 25'$  ist, so wird  $s = 24^\circ 2'$  oder  $\varphi = 65^\circ 58'$ . Es wird also durch die Refraktion die Grenze der Mitternachtssonne über einen halben Grad nach dem Äquator zu verlegt.

Ohne die Wirkung der Refraktion würde hier die Sonne um 11 h 6 m 23 s wahrer Ortszeit untergehen, der Tag also 22 h 12 m 46 s dauern. Er wird also durch den Einfluß der Strahlenbrechung um 1 h 47 m 14 s verlängert.

Eine interessante Erweiterung erfahren die Aufgaben, welche sich mit der Berechnung der Tageslänge beschäftigen, wenn man diese Zeit für den Fall ermitteln will, daß der Beobachter sich nicht zu ebener Erde, sondern in einer gewissen Höhe befindet. Da sich in

diesem Falle der Horizont senkt, so muß der Tag um einen der Höhe entsprechenden Betrag länger werden.

Für den Fall, daß man von der Strahlenbrechung absieht, läßt sich dieser Betrag nach einer einfachen geometrischen Erwägung genau bestimmen. Ist (Fig. 12) CO die Höhe, und benennen wir  $\angle ABX$  mit  $\rho$ , so ist die Aussichtsweite  $CA = \rho$  Seemeilen, wenn  $\rho$  in Minuten ausgedrückt wird. Nun ist  $CA = \sqrt{2rh}$ , wo der Erdradius  $r$  und die Höhe  $h$  gleichfalls in Seemeilen gegeben sind.

Andrerseits aber sinkt der Horizont um den Winkel XOA oder  $\rho$ , also habe ich im Dreieck ZPS die Seite  $p = 90^\circ + \rho$  zu setzen. Es werde z. B. nach der Zeit gefragt, um welche die Sonne in Arcona ( $53^\circ 42'$  nördlicher Breite) am 8. Juni 1901 in einer Höhe von 61 m früher untergeht als unten in einer Augeshöhe von 1,5 m. Man erhält, da  $\delta = 22^\circ 46' 33''$  ist, oben  $t = 8\text{ h } 21\text{ m } 41\text{ s}$  und unten  $t = 8\text{ h } 19\text{ m } 46\text{ s}$ , also geht die Sonne oben 1 m 55 s später unter, als unten.

Berücksichtigt man die Refraktion, so ist die genaue Berechnung des Winkels, um den der Horizont sinkt, wenn sich der Beobachter um eine bestimmte Höhe erhebt, die sogenannte Kimmtiefe, erheblich schwerer.

Er wird nach den nautischen Jahrbüchern in der Praxis dadurch ermittelt, daß man aus der in Metern ausgedrückten Höhe die Quadratwurzel zieht und diese mit 106,82 multipliziert. Bezeichnen wir diesen Winkel mit  $i$  und die Refraktion am Horizonte mit  $\beta$ , so ist für den Auf- und Untergang  $p = 90 + \beta + i$ . Es ergibt sich für den Beobachter oben  $i = 13' 53''$  und  $p = 90^\circ 48' 47''$ , unten  $i = 2' 11''$  oder  $p = 90^\circ 37' 5''$ , mithin geht die Sonne oben um 8 h 26 m 48 s und unten um 8 h 25 m, also um 1 m 46 s später unter.

Dieser Unterschied wird auf hohen Bergen natürlich bedeutender. Soll z. B. die Zeit ermittelt werden, um welche einem auf der Höhe des Athosgebirges 1953 m über dem Meere befindlichen Beobachter die Sonne am 21. Juni 1901 früher aufgeht, als einem am Strande stehenden, so ist, da  $\varphi = 40^\circ 10'$  und  $\delta = 23^\circ 27'$  wird, und sich  $i = 1^\circ 18' 14,4''$  bestimmt, oben  $\tau = 114^\circ 23' 46''$  und unten  $\tau = 112^\circ 22'$ ; es wird also oben  $t = 7\text{ h } 37\text{ m } 35\text{ s}$  und unten  $t = 7\text{ h } 29\text{ m } 28\text{ s}$ , mithin geht die Sonne oben um 8 m 7 s früher auf als unten.

Die bei der Besprechung des Sonnenuntergangs und Aufgangs in Betracht kommenden Verhältnisse lassen sich verallgemeinern, wenn man die Stellung der Sonne in einer bestimmten Höhe zu Grunde legt. Am interessantesten und am leichtesten verständlich sind die Fälle, wo es sich um die negativen Höhen bis zu  $6^\circ$  handelt, da dieser Winkel die Grenze bezeichnet, bis zu welcher der Reflex des Sonnenlichtes in der Atmosphäre ausreicht, um nicht zu kleine Schrift noch lesbar erscheinen zu lassen. Die Länge dieser sogenannten bürgerlichen Dämmerung läßt sich nun gleichfalls leicht in gegebenen Fällen berechnen, indem man im Dreieck ZPS die Seite  $p = 96^\circ 35'$  setzt und von dem daraus berechneten Stundenwinkel die vorher berechnete halbe Tageslänge abzieht.

Die Breite, bis zu welcher am längsten Tage die bürgerliche Dämmerung um Mitternacht reicht, erhält man, indem man in der Formel  $\cos p = \cos z \cos s + \sin z \sin s \cos \tau$   $p = 96^\circ 35'$  und  $\tau = 180^\circ$  setzt. Man erhält  $\cos p = \cos(z + s)$  oder  $p = z + s$ , mithin ist  $s = p - z = 30^\circ 2'$  und  $\varphi = 59^\circ 58'$ . Also kann man unter dem 60. Grade, z. B. in St. Petersburg, am 21. Juni die ganze Nacht hindurch lesen.

Sehr interessant sind die Dämmerungsverhältnisse unter dem Äquator. Für die Tagundnachtgleiche erhält man, wenn man  $p = 96^{\circ} 35'$  setzt,  $\tau = p$  oder  $\tau = 96^{\circ} 35'$ . Die Zeit also, welche von der Kulmination der Sonne bis zum Ende der bürgerlichen Dämmerung verfließt, beträgt 6 h 26 m 20 s. Da nun der halbe Tag eine Länge von 6 h 2 m 20 s besitzt, so beträgt die Dämmerung 24 m. Für die Zeit der Sonnenwende findet man sie etwa um anderthalb Minuten länger. Sie wird noch dadurch verkürzt, daß für die Rechnung ihr Beginn von dem Moment an zählt, wo der Mittelpunkt der Sonne im Horizont steht; da aber etwa noch eine Minute vergeht, bis die ganze Scheibe versunken ist, so folgt eine Länge von 23 bis 24 Minuten für die ganze Dämmerung. Dies Ergebnis widerlegt die übertriebenen Schilderungen von dem plötzlichen Eintritt der Dunkelheit nach dem Untergange der Sonne in den Tropen und wird auch durch die Beobachtungen von zuverlässigen Reisenden, wie von Peschuel Lösche bestätigt.\*

Es ist zweckmäßig, Dämmerungsberechnungen für verschiedene Zeiten des Jahres und für den Ort der Anstalt in der Klasse oder zu Hause ausführen zu lassen, da sie den Schüler sehr interessieren.

Für die astronomische Dämmerung hat dieser geringeres Interesse. Es genügt hier zu erwähnen, daß  $p = 108^{\circ}$  zu setzen ist, und einzelne besonders einfache Fälle zu ermitteln. Will man z. B. die Breite berechnen, bis zu welcher die astronomische Dämmerung um Mitternacht reicht, so erhält man  $s = p - z = 39^{\circ} 27'$ , also  $\varphi = 48^{\circ} 33'$ , also giebt in Deutschland etwa die Donau die Grenze an, bis zu welcher am längsten Tage die Mitternachtsdämmerung auftritt.

Besonders interessant sind die in höheren Breiten durch die Stellung der Sonne verursachten Beleuchtungsverhältnisse. Da sich die Mehrzahl der Schüler über diese im Unklaren befindet, so empfiehlt es sich, auch Aufgaben zu stellen, welche gewisse Erscheinungen des Polartages oder der Polarnacht ermitteln sollen.

Es sei z. B. folgende Frage zu beantworten: „Wie lange dauert am Nordkap ( $71^{\circ} 10'$  nördlicher Breite) der Polartag?“ Wir haben die Zeit des Jahres zu bestimmen, in welcher die Sonne hier um Mitternacht im Horizont steht. Man erhält, da in der Gleichung  $\cos p = \cos s \cos z + \sin s \sin z \cos \tau$ , die Größe  $\tau = 180^{\circ}$  wird,  $p = z + s$  oder  $z = p - s$ . Man findet  $p - s = z = 71^{\circ} 44' 54''$  und mithin  $\delta = 18^{\circ} 15' 6''$ . Nach den nautischen Tafeln besitzt die Sonne am 13. Mai und am 1. August die Deklination  $18^{\circ} 15' 6''$ . Ein Reisender also, der nach dem Nordkap fahren will, um die Mitternachtssonne zu sehen, muß seine Reise im Mai, Juni oder Juli unternehmen. In Böödö südlich von den Lofoten auf dem Polarkreise ( $66^{\circ} 33'$  nördlicher Breite), wo am 21. Juni die Sonne um Mitternacht im Horizonte steht, geht sie am 13. Mai um 9 h 27 m 40 s wahrer Ortszeit unter dem Azimut (N  $36^{\circ} 51' 34''$  W.) unter. Um Mitternacht, wo  $p = z + s$  wird, erhält man  $p = 95^{\circ} 11' 54''$  oder die Höhe  $h = 90^{\circ} - p = -5^{\circ} 11' 54''$ ; also hat man am 13. Mai und am 21. August in Böödö um Mitternacht noch bürgerliche Dämmerung und kann ohne Anstrengung lesen.

Um auch einige die Polarnacht betreffende Erscheinungen zu verfolgen, fragen wir zunächst nach der Breite, bis zu der die volle Polarnacht am kürzesten Tage, dem 21. Dezember, reicht. Hier muß also, damit zum Beobachter um 12 Uhr mittags der letzte Lichtschimmer von der Sonne gelangt, ihre Höhe um diese Zeit  $-18^{\circ}$  sein. Da dann in der

\* Umlauf, Das Luftmeer. Wien, A. Harlebens Verlag 1891. Seite 400.



Gleichung  $\cos p = \cos s \cos z + \sin s \sin z \cos \tau$  die GröÙe  $\tau$  verschwindet, so ist  $\cos p = \cos(z - s)$ , d. h.  $p = z - s$  oder  $s = z - p$ . Es ist  $p = 108^\circ$ ,  $z = 90^\circ - \delta = 113^\circ 27'$ ; mithin wird  $s = 5^\circ 27'$  oder  $\varphi = 84^\circ 33'$ . In dieser Breite tritt also während des Wintersolstitiums um Mittag am klaren Südhimmel ein schwacher Reflex des Sonnenlichtes auf. Erst nördlich von dieser Grenze verschwindet dieser vollständig.

Nimmt man nun an, daß die Grenze der bürgerlichen Dämmerung bei einer Höhe der Sonne von  $-6^\circ 35'$  erreicht wird, so erstreckt sie sich am 21. Dezember bis zu der Breite von  $73^\circ 8'$ . Also etwas südlich von der Bäreninsel wird es auch am kürzesten Tage um Mittag so hell, daß man noch lesen kann.

Es sei nun, um die Verhältnisse der Polarnacht an einem beliebigen Datum zu erforschen, nach der Breite gefragt, in welcher die Sonne am 20. Januar um 12 Uhr mittags im Horizont steht. Da  $\delta = -20^\circ 13'$  ist, so erhält man  $\varphi = 70^\circ 22'$ , also geht etwa 10. Meilen südlich vom Nordkap die Sonne am 20. Januar gleichzeitig auf und unter.

Am Bellsund in Spitzbergen ( $\varphi = 77^\circ 50' W$ ) wird an diesem Tage  $p = z - s = 108^\circ 3'$ , daher ist die Höhe der Sonne um Mittag  $h = -8^\circ 3'$ .

Berechnet man den Zeitpunkt des Eintretens und die Richtung der astronomischen Dämmerung, so wird im Dreieck ZPS Seite  $p = 108^\circ$ ,  $z = 110^\circ 13'$  und  $s = 12^\circ 10'$ , also erhält man, indem man die gesuchten Stücke aus den drei Seiten berechnet:  $\tau = 81^\circ 37' 48''$  oder  $t = 5h 26m 31s$  und das Azimut  $\angle SZP = 102^\circ 32' 40''$ .

Also um 6h 33m 29s vormittags beginnt der Himmel sich gegen OSO zu färben, der Schein nimmt zu und wandert gegen Süden, wo er um 12 Uhr mittags seine grösste Helligkeit erreicht, er wendet sich dann schwächer werdend gegen Westen, wo er gegen WSW um 5h 26m 31s nachmittags verschwindet. Da die Sonne um 12 Uhr mittags nur bis zur Höhe  $-8^\circ 3'$  gelangt, so reicht das Dämmerungslicht selbst zu dieser Zeit noch nicht aus, um nicht zu große Schrift lesbar erscheinen zu lassen. Die Dämmerung dauert am 20. Januar am Bellsund 10h 53m also beinahe 11 Stunden.\*

Ist die Höhe eines Gestirns positiv, so kann sie praktisch nur durch ein kompliziertes Winkelinstrument, wie einen Theodoliten oder einen Sextanten, ermittelt werden. Die Aufgaben sind ähnlich wie die, welche sich auf die Berechnung des Sonnenaufganges oder Unterganges beziehen, nur daß hier  $p$  nicht  $90^\circ + \beta$ , sondern gleich der gesuchten oder der beobachteten Höhe, diese vermindert um die dort herrschende Refraktion, wird. Sie kann nach der Formel  $\cos p = \cos z \cos s + \sin z \sin s \cos \tau$  aus der bekannten Polhöhe des Ortes, dem Stundenwinkel des betreffenden Gestirns zur Zeit der Beobachtung und der aus den astronomischen Tafeln bekannten Deklination desselben berechnet werden. Es sei z. B. die wahre Höhe des Aldebaran im Stier eine Stunde nach seiner Kulmination am 27. November 1901 für Königsberg Nm. (Breite  $52^\circ 58' N$ .) zu berechnen, wenn die Deklination des Sternes  $16^\circ 18' 43''$  beträgt.

Es ergibt sich  $s = 37^\circ 2'$ ,  $z = 73^\circ 41' 17''$  und  $\tau = 15^\circ$ . Die Berechnung nach dem 3. Fall liefert  $\varepsilon = 36^\circ 4' 59''$ ,  $z - \varepsilon = 37^\circ 36' 18''$  und daraus  $p = 38^\circ 30' 19''$  und mithin  $h = 51^\circ 29' 41''$ .

\* Vergl. Das Luftmeer von Dr. Friedrich Umlauf. Wien, Verlag von Hartleben, 1891. Seite 44.

Man kann die Berechnung der wahren Höhe benutzen, um daraus die Refraktion für sie zu bestimmen; denn da mit dem Theodoliten  $51^{\circ} 30' 28''$  beobachtet wird, so findet man die Refraktion gleich  $47''$ . Wenn nun auch bei der großen Genauigkeit, welche die Aufstellung der Refraktionstabellen verlangt, nur mit Hilfe der Neperschen Analogien für die Praxis brauchbare Resultate erhalten werden, so genügt doch die Methode des Hilfswinkels für die Schule vollständig.

Außer der Höhe kann aus der Gleichung  $\cos p = \cos z \cos s + \sin z \sin s \cos \tau$  die Deklination, der Stundenwinkel für die betreffende Stellung des Sterns und die Polhöhe des Beobachtungsortes berechnet werden.

In der Nautik wird häufig bei bekannter Polhöhe der Stundenwinkel des beobachteten Sterns und dadurch die Zeit ermittelt, die seit seiner Kulmination verflossen ist oder noch bis zu seiner Kulmination verfließt. Daraus wird die mittlere Ortszeit zur Zeit der Beobachtung und durch Vergleichung mit einem guten auf Greenwicher Zeit eingestellten Chronometer der Längengrad bestimmt, auf dem sich das Schiff befindet.

Ist z. B. in einer Breite von  $52^{\circ} 58'$  der Stern  $\alpha$  Geminorum (Castor), dessen Deklination  $\delta 32^{\circ} 6' 12''$  beträgt um 11 h 42 m 33 s abends mittlerer Greenwicher Zeit am 21. Januar 1901 in einer Höhe von  $60^{\circ} 1' 1''$  östlich vom Ortsmeridian beobachtet, so soll daraus die Länge des Beobachtungsortes ermittelt werden. Es ist, da die Refraktion in einer Höhe von  $60^{\circ}$  gleich  $34''$  ist, die wahre Höhe  $h = 60^{\circ} 0' 27''$ , mithin ist im Dreieck ZPS Seite  $s = 37^{\circ} 2'$ ,  $z = 57^{\circ} 53' 48''$  und  $p = 29^{\circ} 59' 33''$ . Es ergibt sich  $\tau = 30^{\circ}$  oder  $t = 2$  h. Es erfolgte also die Beobachtung zwei Stunden vor der Kulmination des Sterns. Nun aber kulminiert nach den nautischen Tafeln der Stern am 21. Januar 1901 um 7 h 28 m 20 s Sternzeit, mithin fand die Aufnahme, da sie zwei Stunden früher erfolgte, um 5 h 28 m 20 s statt. Nun ist zur Zeit des mittleren Greenwicher Mittags an demselben Datum die Sternzeit 20 h 0 m 37 s, also wurde die Beobachtung 9 h 27 m 43 s Sternzeit nach dem mittleren Mittag des Ortes oder 9 h 26 m 10 s nachmittags mittlerer Ortszeit aufgenommen. Nun wird die geographische Länge dadurch erhalten, daß man die mittlere Greenwicher Zeit um die mittlere Ortszeit vermindert. Man erhält 2 h 16 m 23 s oder im Winkelmaß  $34^{\circ} 5' 45''$ . Die Länge ist westlich, da die Greenwicher Zeit größer ist als die Ortszeit. Das Schiff befindet sich also im Atlantischen Ocean in der Nähe der irischen Küste. Umgekehrt hätte man auch bei bekannter Länge des Ortes auf Grund der Beobachtungen die mittlere Ortszeit berechnen und nach ihr die Uhr regulieren können.

Die Bestimmung der Polhöhe aus der ermittelten Höhe eines Sterns bietet Schwierigkeiten, weil in der Regel der Stundenwinkel auch unbekannt ist. Man sieht sich daher genötigt zwei Beobachtungen zu kombinieren. Sehr einfach gestalten sich die Verhältnisse, wenn man den Stern in zwei ausgezeichneten Lagen, z. B. vor und nach seiner Kulmination in derselben Höhe betrachtet. Es entspricht dann die Aufgabe der oben erwähnten Berechnung der Polhöhe aus der beobachteten Tageslänge; nur daß statt des Horizontes eine bestimmte Niveaulinie zweimal von dem Mittelpunkte des betreffenden Gestirns passiert wird. Hat man bei horizontaler Stellung des Grundkreises eines Theodoliten den Stern zur Zeit  $t_1$  und  $t_2$  vor und nach seiner Kulmination in der Höhe  $h$  beobachtet, so ergibt die halbe Differenz  $\frac{t_2 - t_1}{2}$  der

Beobachtungszeiten den Stundenwinkel  $\tau$ . Man kennt also vom Dreieck ZPS Seite  $z = 90^\circ - \delta$ ,  $p = 90^\circ - h$  und  $\angle P = \tau$ , man kann also  $90^\circ - s$  oder die Polhöhe berechnen.

Sind  $a_1$  und  $a_2$  die Stellungen, die der Vernier bei den beiden Beobachtungen auf dem Horizontalkreise angab, so findet man noch für die Mittagslinie die Stellung  $\frac{a_1 + a_2}{2}$ .

Da die Sonne das einzige Gestirn ist, welches sich praktisch während der Schulzeit beobachten läßt, so kann man mit einem Theodoliten etwa um 9 Uhr vormittags und um 3 Uhr nachmittags an diesem Gestirn Aufnahmen machen und nach ihnen die gesuchten Größen bestimmen.

Von den anderen Stücken des Dreiecks ZPS bietet der Winkel  $z$  noch einiges Interesse, da er das Azimut darstellt und mithin die Richtung angibt, in der sich das betreffende Gestirn zur Zeit der Aufnahme gegen den Beobachter befindet. Bei der Sonne ist diese der Lage des Schattens entgegengesetzt.

Es sei z. B. die Frage zu beantworten: „Wie lange wird ein im Suezkanal unter der Breite  $30^\circ 5' 21''$  von Westen nach Osten gelegenes Schleusenthor am 21. Mai 1901 vom Norden und vom Süden her von der Sonne beleuchtet, wenn ihre durchschnittliche Deklination an diesem Tage  $20^\circ$  beträgt?“ Man findet  $\tau = 51^\circ 5' 8''$  und daraus  $t = 3\text{h } 24\text{m } 20,5\text{s}$  als die Zeit vor oder nach der Kulmination, wo die Sonne genau im Osten oder Westen steht. Da sich für den Aufgang und Untergang der Sonne  $\tau = 102^\circ 24' 48''$  oder  $t = 6\text{h } 49\text{m } 38\text{s}$  ergibt, so wird das Thor von Süden her  $6\text{h } 48\text{m } 41\text{s}$  und von Norden  $6\text{h } 50\text{m } 35\text{s}$ , also von beiden Seiten fast gleich lange beleuchtet.

Soll z. B. die Länge und Richtung des Schattens ermittelt werden, welchen der 96 m hohe Königsberger Kirchturm um 3 Uhr wahrer Sonnenzeit nachmittags am 14. Juni 1901 wirft, wo die Deklination  $\delta = 21^\circ 45' 20''$  beträgt, so ist, da  $\varphi = 52^\circ 58'$  beträgt, im Dreieck ZPS Seite  $z = 68^\circ 14' 40''$ ,  $s = 37^\circ 2'$  und  $\tau = 45^\circ$ . Man findet nach dem 3. Fall  $\varepsilon = 68^\circ 14' 40''$ ,  $z - \varepsilon = 40^\circ 9' 54''$  und daraus  $p = 46^\circ 15' 25''$  oder die Höhe der Sonne gleich  $43^\circ 44' 35''$ . Fügt man hierzu noch die Refraktion  $1' 1''$  hinzu, so wird  $h = 43^\circ 45' 36''$ . Ist nun  $l = 96\text{m}$ , so wird die Länge des Schattens  $l \operatorname{ctg} h = 100,25\text{m}$ .

Da sich Seite  $z$  dem Werte von  $90^\circ$  am meisten nähert, so dürfte man zur Bestimmung des ihm gegenüberliegenden Winkels  $Z$ , der das Azimut darstellt, eigentlich nicht den Sinussatz anwenden. Da aber aus der Stellung der Sonne zu dieser Zeit in unseren Breiten notwendig folgt, daß ihr Azimut um 3 Uhr nachmittags größer als  $90^\circ$  ist, so giebt die Anwendung des Sinussatzes keine Zweideutigkeit. Man erhält durch ihn  $\angle SZP = 114^\circ 37' 33,8''$ , also fällt der Schatten N  $65^\circ 22' 26,2''$  O.

Die Berechnung des Azimuts eines Sterns, besonders der Sonne, zu einer bestimmten Zeit wird in der Nautik zur Ermittlung der Gesamtmißweisung der Magnetnadel ausgeführt. In der Praxis wählt man gern die Lage der Sonne, in welcher diese den wahren Horizont, also etwa  $30'$  über dem scheinbaren, passiert, und bestimmt ihren Abstand vom Ostpunkte, die sogenannte Amplitude. Zur bequemeren Verwendung für den Seemann sind diese in einer besonderen Tafel zusammengestellt. Man findet die Mißweisung, indem man die Differenz des gepeilten und berechneten Azimuts bildet und den Sinn der Abweichung berücksichtigt.

Einen besonders interessanten Fall bietet die Sonne, wenn sie durch den ersten Vertikal geht, wenn also ihr Azimut  $90^\circ$  ist. In diesem (Fig. 8) Falle ist  $\triangle ZPS$  rechtwinklig.

Da ähnlich wie in der Planimetrie Seite PS sich als die Tangente erweist, die man von P aus an den Kreis legt, der mit p als Radius um S geschlagen wird, so folgt analog den Beziehungen an der entsprechenden ebenen Figur, daß ein kleiner Fehler in der Größe der Polzenitdistanz nur eine Verschiebung des Punktes Z auf dem Kreise in der Richtung nach P zu verursacht, also für  $\angle ZPS$  ohne merklichen Einfluß ist. Man kann also den Stundenwinkel bei ungefährem Kenntnis der Breite eines Ortes, wie sie sich für den Seemann aus der Besteckrechnung ergibt, ermitteln und daraus die Länge ziemlich genau finden.

Es sei z. B. am 21. Mai 1901 bei einer durchschnittlichen Deklination der Sonne von  $20^\circ$  in etwa  $30^\circ 5'$  nördlicher Breite und  $41^\circ$  westlicher Länge um 6 h 5 m 12 s mittlerer Greenwicher Zeit der Sonnenunterrand in einer Höhe von  $42^\circ 46' 13''$  beobachtet worden. Es soll ermittelt werden, unter welcher Länge sich das Schiff befindet.

Nachdem der Seemann den scheinbaren Sonnenradius  $15' 49''$  addiert und die Refraktion  $1' 2''$  subtrahiert hat, erhält er die wahre Höhe des Sonnenmittelpunktes  $43^\circ 1'$  und findet daher für  $\triangle ZPS$  Seite  $s = 50^\circ 55'$ ,  $z = 70^\circ$  und  $p = 46^\circ 59'$ . Die Berechnung ergibt  $\frac{\tau}{2} = 25^\circ 32' 32''$  oder  $\tau = 51^\circ 5' 4''$ ; hieraus folgt die seit der Kulmination verstrichene Zeit  $t = 3$  h 24 m 20 s und nach Hinzufügung der Zeitgleichung — 3 m 37 s ergibt sich, daß die Beobachtung um 3 h 20 m 43 s mittlerer Ortszeit stattgefunden hat. Da aber nach dem Chronometer die mittlere Greenwicher Zeit 6 h 5 m 12 s betrug, so befindet sich das Schiff 2 h 44 m 29 s oder  $41^\circ 7' 15''$  westlicher Länge, also etwa in der Mitte des Atlantischen Oceans.

Hätte man  $\varphi$  um einen halben Grad größer genommen, d. h.  $\varphi = 30^\circ 35'$  benutzt, d. h. wäre die Beobachtung 30 Seemeilen weiter nördlich vorgenommen, so würde sich  $\tau = 51^\circ 4' 59''$  also  $t = 3$  h 24 m 19,93 s ergeben haben. Hätte man  $\varphi$  um einen halben Grad kleiner genommen, also wäre die Beobachtung 30 Seemeilen weiter südlich erfolgt, so würde man  $\tau = 51^\circ 4' 58''$  also auch  $t = 3$  h 24 m 19 s ermittelt haben. In beiden Fällen hätte man also fast denselben Wert erhalten.

Besonders einfach gestaltet sich das Dreieck ZPS, wenn der Stern auf dem Ortsmeridian liegt. In diesem Falle ist  $\tau = 0$  und  $s + p = z$ . Man kann dann mit einer einfachen Höhenbeobachtung eines Gestirns die Polhöhe unmittelbar ablesen, ohne daß man die Höhe des Meridians kennt. Man braucht nur um die Mittagszeit den Theodoliten auf den unteren Sonnenrand einzustellen und zu beobachten, bis das scheinbare Fallen der Sonne im Fernrohr aufhört und sich in die umgekehrte Bewegung verwandelt. Diese Methode der Bestimmung der Polhöhe empfiehlt sich deshalb besonders für die Schule, weil sie mit Hilfe eines brauchbaren Theodoliten ohne große Schwierigkeit von dem Schüler selbst ausgeführt werden kann. Wir beobachteten auf dem Klosterplatze hinter dem Gymnasium in Königsberg Nm. am 14. Dezember 1900 bei dem höchsten Stande der Sonne den Unterrand mit unserem Theodoliten in der Höhe  $13^\circ 37'$ . Da nach den nautischen Jahrbüchern der scheinbare Halbmesser der Sonne  $16' 17''$  und die Strahlenbrechung  $2' 52''$  beträgt, so erhält man nach Addition des ersten und Subtraktion des letzten Winkels als die wirkliche Höhe des Sonnenmittelpunktes  $13^\circ 50' 25''$ . Es ist also  $p = 76^\circ 9' 35''$ . Aus der Deklination der Sonne um die Mittagszeit, die  $23^\circ 13'$  beträgt,

erhält man  $z = 112^{\circ} 13'$  und mithin  $s = z - p = 37^{\circ} 3' 25''$ . Hieraus folgt die Polhöhe  $\varphi = 52^{\circ} 56' 35''$ . Obgleich diese Breite nicht genau der Lage der Stadt, sondern einem etwa 3 km weiter südlich gelegenen Orte entspricht, so kann sie für den Schüler doch als ausreichend gelten.

Wie oben gezeigt wurde, läßt sich die Breite eines Ortes bei unbekannter Länge oder unbekannter Breite nur bei ganz besonderen Lagen des beobachteten Gestirns aus einer Beobachtung bestimmen. Denn da alle Orte der Erde, für welche ein Stern eine bestimmte Höhe hat, auf dem Kreise liegen, der um den Punkt, über dem der Stern senkrecht steht mit der Zenitdistanz oder dem Komplement der Höhe geschlagen wird, so folgt, daß erst die Kenntnis zweier Höhen desselben oder verschiedene Sterne zu verschiedenen Zeiten die Lage eines bestimmten Ortes als einen der beiden Durchschnittspunkte der in Betracht kommenden Kreise ergibt. Diese Möglichkeit der Ortsbestimmung aus zwei getrennten Beobachtungen ist für die Nautik wichtig, da sie dem Navigationsoffizier gestattet, seine Aufnahmen und Berechnungen zu jeder beliebigen Zeit vorzunehmen. Es ist diese Aufgabe nur eine Verallgemeinerung des schon oben behandelten besonderen Falles, in welchem wir die Polhöhe und den Stundenwinkel aus zwei Beobachtungen desselben Gestirns in derselben Höhe ermittelten.

Es werde z. B. der Aldebaran im Stier am 27. November 1901 in der Höhe  $51^{\circ} 30' 28''$  und 5 Stunden später in der Höhe  $13^{\circ} 1' 32''$  in Königsberg Nm. beobachtet; es soll daraus die Polhöhe und die mittlere Ortszeit ermittelt werden. Die durch die Strahlenbrechung reduzierten Höhen sind  $h = 51^{\circ} 29' 41''$  und  $h_1 = 12^{\circ} 57' 24''$ , und die daraus folgenden Zenitdistanzen  $p = 38^{\circ} 30' 14''$  und  $p_1 = 77^{\circ} 2' 36''$ . Sind daher (Fig. 11) S und  $S_1$  die beiden Stellungen, in denen sich der Stern in den beiden Momenten der Beobachtung befindet, so ist  $\angle SPS_1 = 75^{\circ}$  und  $PS = S_1P = 73^{\circ} 41' 17''$ , da die Deklination  $16^{\circ} 18' 43''$  beträgt. Man kennt also von dem Dreieck  $SPS_1$  zwei Seiten und den eingeschlossenen Winkel. Es ergibt sich  $SS_1 = 71^{\circ} 30' 6''$  und  $\angle PS_1S = 77^{\circ} 50' 16''$ .

Von dem Dreieck  $ZS_1S$  kenne ich nun, da  $ZS = 38^{\circ} 30' 19''$  und  $ZS_1 = 77^{\circ} 2' 36''$  durch die Beobachtung bekannt sind, und  $SS_1 = 71^{\circ} 30' 6''$  vorhin gefunden wurde, die drei Seiten; es ergibt die Rechnung:  $\angle ZS_1S = 39^{\circ} 40' 4''$ , mithin ist  $PS_1Z = PS_1S - ZS_1S = 38^{\circ} 10' 12''$ .

Vom Dreiecke  $PS_1Z$  kenne ich nun  $\angle PS_1Z = 38^{\circ} 10' 12''$ , wie wir soeben gefunden haben,  $PS_1 = 73^{\circ} 41' 17''$ , und  $ZS_1 = 77^{\circ} 2' 36''$ , also zwei Seiten und den eingeschlossenen Winkel; ich erhalte also  $PZ = 37^{\circ} 2'$ . Mithin ist die Polhöhe von Königsberg  $52^{\circ} 58'$ . Berechnet man den Stundenwinkel  $ZPS_1$ , aus dem Dreieck  $ZPS_1$ , so erhält man für die zweite Beobachtung  $90^{\circ}$ , also fand sie 6 Stunden nach der Kulmination und die erste Beobachtung 5 Stunden früher statt, also erfolgten beide um 1 h 5 m 22 s und 6 h 4 m 33 s morgens mittlerer Ortszeit. Bei bekannter mittlerer Greenwicher Zeit, hätte man hieraus auch die Länge des Beobachtungsortes ermitteln können.

Für den Seemann, der während der Fahrt seinen Ort wechselt, ist es vorteilhafter, die beiden Beobachtungen schnell hinter einander vorzunehmen. Er muß dann statt eines Gestirns zwei verschiedene beobachten. Indem er dann je nach ihrer gegenseitigen Lage von der Differenz ihrer Rektascensionen die in Sternzeit ausgedrückte Zeitdifferenz bei den Beobachtungen

subtrahiert oder diese zu ihr addiert, erhält er den Winkel, den die von beiden Gestirnen zur Zeit der Beobachtungen passierten Meridiane miteinander bilden.

Auf die Methode der Sumnerschen Standlinien,\* durch welche das Zweihöhenproblem praktisch in einfacherer Weise gelöst wird, einzugehen, würde für die Schule kaum zu empfehlen sein, da die Schlüsse, welche diese Methode zum Verständnis bringen, verhältnismäßig kompliziert sind. Dagegen läßt sich die oben angegebene Behandlungsweise des Problems leicht auch dem ungebübten Schüler klar machen, und sie eignet sich ganz besonders als Aufgabe zu häuslichen Arbeiten. Es würde sich dann empfehlen, vorher durch Messungen der Sonnenhöhe in zwei weit von einander liegenden Unterrichtsstunden, etwa um 7 Uhr und um 11 Uhr die praktischen Daten zu gewinnen.

Die Mehrzahl der soeben besprochenen Aufgaben sind, da sie nur spezielle Fälle des Dreiecks Polzenitstern behandeln und sich im wesentlichen nur durch die verschiedene Größe der Zenitdistanz so voneinander unterscheiden, dem Schüler nicht schwer verständlich zu machen. Ihre Besprechung wird noch dadurch erleichtert, daß von den sechs Fällen der Berechnung eines sphärischen Dreiecks aus gegebenen Stücken nur drei zur Anwendung kommen, die daher im Unterrichte auch nur besprochen zu werden brauchen. Die Aufgaben könnten daher, wenn es die Zeit gestattete, sämtlich sogar am Gymnasium behandelt werden. Ein Teil von ihnen eignet sich zu selbständiger Behandlung in häuslichen Arbeiten, und hier kann durch geeignete Wahl oder Umgestaltungen der Aufgaben auch das mathematische Erfindungsvermögen der besseren Schüler in hohem Maße geweckt werden.

Wenn es die Zeit gestattet, so sind noch einige Koordinatentransformationen in der Klasse auszuführen.

Die Überführung aus dem Horizontalsystem in das Äquatorialsystem und umgekehrt ist mit Hilfe des Polzenitsterndreiecks schon in den früher besprochenen Aufgaben ausgeführt. So ist die Berechnung der Höhe und des Azimuts eines Sterns aus der Deklination und dem aus der Rektascension folgenden Stundenwinkel ein spezieller Fall einer solchen Transformation.

Bei Betrachtung der Bewegungen der Planeten ist es oft vorteilhaft, ihre Koordinaten im ekliptischen System zu erhalten, da man in ihm die Bewegungen besser übersehen kann. Nun aber enthält die Mehrzahl der Tabellen nur die Koordinaten der Sterne im Äquatorialsystem, ihre Rektascensionen und Deklinationen. Man wird also jene aus diesen ableiten müssen.

Die gewöhnliche Methode, nach der man in dem von dem Stern und den beiden Polen, dem des Äquators und der Ekliptik, gebildeten sphärischen Dreieck zwischen den gesuchten und den gegebenen Stücken Beziehungen ableitet, ist wohl für die praktische Rechnung vorteilhaft, aber in ihrer Ausführung schwerer verständlich. Es ist einfacher, hier auf rechtwinklige Dreiecke zurückzugehen. Ist (Fig. 9) S der Stern W x die Ekliptik und W y der Äquator und sind SP und SQ die auf die beiden Kreise von S aus gefällten senkrechten größten Kreise, so ist WQ die Rektascension und SQ die Deklination des Sterns. Ist  $\angle xWy = \varepsilon$ , so stellt er die Neigung der Ekliptik gegen den Äquator dar. Nun ist im rechtwinkligen Dreieck WQS:  $\cos WS = \cos WQ \cos SQ$  und  $\cos SWQ = \text{ctg} WStg WQ$ . Mithin  $\angle SWP = SWQ - \varepsilon$ . Endlich erhalten wir im Dreieck SWP die Gleichung:  $\sin SP = \sin WS \sin SWP$ .

Vergl. die Nautik in elementarer Behandlung von Dr. Bolte. Stuttgart, Verlag von Julius Maier 1900 Seite 143.

Soll z. B. die Länge und Breite von  $\alpha$  Persei (Algenib) am 31. Januar 1901 ermittelt werden, so ist die Rektascension  $WQ = 49^{\circ} 18' 16,5''$  und die Deklination  $SQ = 49^{\circ} 30' 35''$ . Es folgt  $WS = 64^{\circ} 57' 9''$ ,  $\angle SWQ = 57^{\circ} 5' 6''$ , und da  $\varepsilon = 23^{\circ} 27' 3''$  ist, so folgt  $\angle SWP = 33^{\circ} 38' 3''$  und hieraus die Breite  $SP = 30^{\circ} 7' 8''$  und die Länge  $WP = 60^{\circ} 41' 44''$ .

Auch die Größe der Neigung der Ekliptik gegen den Äquator kann leicht aus der beobachteten Rektascension und Deklination des Sonnenmittelpunktes erhalten werden. Ist  $\alpha$  die Rektascension und  $\delta$  die Deklination, so erhält man (Fig. 10):  $\text{ctg } \varepsilon = \sin \alpha \text{ ctg } \delta$ . Man findet für den Juni 1901 stets  $\varepsilon = 23^{\circ} 27' 3''$ . Indem man  $\varepsilon$  für einige andere Termine berechnet, läßt sich das Abnehmen des Winkels der Ekliptik zeigen.

Eine sehr interessante Anwendung der sphärischen Trigonometrie bietet die Nautik in der Besteckrechnung, in welcher nach der kürzesten Entfernung zweier gegebenen Orte und dem Kurse gefragt wird, den man verfolgen muß, um von dem einen zu dem anderen auf dem kürzesten Wege zu gelangen. Da dieser der größte Kreis ist, welcher die beiden Orte verbindet, so ist es, wenn man die Orte so wählt, daß der sie verbindende größte Kreis in der Nähe eines Poles vorübergeht, dem Schüler leicht zum Verständnis zu bringen, daß dieser Kreis in seinem Verlaufe nicht dieselbe Himmelsrichtung beibehalten kann.

Es habe z. B. ein Schiff von Lissabon ( $38^{\circ} 42' N$  und  $9^{\circ} 11' W$ ) nach New York ( $40^{\circ} 44' N$  und  $74^{\circ} W$ ) zu segeln; es soll die Entfernung beider Orte auf dem größten Kreise und der Anfangs- und Endkurs bestimmt werden.

Bildet man (Fig. 13) auf der Erdoberfläche ein Dreieck, von dem der eine Eckpunkt P der Nordpol und dessen andere Eckpunkte N und L die beiden Orte New York und Lissabon sind, und bezeichnet man PL mit n, PN mit l, NL mit p und den Winkel NPL mit P, dann ist  $\angle P = 64^{\circ} 49'$ ,  $n = 51^{\circ} 18'$  und  $l = 49^{\circ} 16'$ . Nun berechnet man die Entfernung  $p = 48^{\circ} 43' 39'' = 2923,5$  Bogenminuten, also beträgt der Abstand beider Orte 2923,5 Seemeilen. Um noch die beiden Kurse zu bestimmen, muß man die beiden Winkel N und L berechnen. Die Vergleichung von n, l und p mit  $90^{\circ}$  ergibt aber, daß sich n dieser Größe am meisten nähert, mithin läßt sich nur L nach dem Sinussatze berechnen. Man erhält  $L = 65^{\circ} 50' 22''$ . Zur Ermittlung von p falle man von P auf NL das Lot PG, dann ist  $\text{ctg } GPL = \cos n \text{ tg } L$  und  $\text{ctg } N = \cos l \text{ tg } NPG$ . Man erhält  $\angle GPL = 35^{\circ} 39' 28''$ ,  $\angle NPG = 29^{\circ} 9' 32''$  und  $\angle N = 69^{\circ} 59' 40''$  oder  $70^{\circ}$ . Es ist also der Anfangskurs (N  $65^{\circ} 50' W$ ) und der Endkurs (S  $70^{\circ} W$ ).

Wichtig ist noch die Ermittlung des Ortes, wo das Schiff den Scheitelpunkt seiner Bahn erreicht, d. h. wo es genau von Ost nach West segelt. Es ist dies offenbar G, da hier der Meridian PG senkrecht gekreuzt wird.

Man erhält aus dem rechtwinkligen Dreieck PGL die Seiten  $PG = 45^{\circ} 24' 10''$ . Mithin befindet sich dann das Schiff unter der Breite  $44^{\circ} 35' 50''$ . Da vorhin schon  $\angle GPL = 35^{\circ} 39' 28''$  ermittelt war, so erfahren wir die Länge, indem wir hierzu die Länge von L gleich  $9^{\circ} 11'$  addieren. Das Schiff befindet sich also  $44^{\circ} 50' 28''$  westlicher Länge von Greenwich.

Da es für den Seemann auch wichtig ist, zu wissen, in welcher Richtung und in welcher Breite er die einzelnen Meridiane durchschneidet, so werde auch bestimmt, unter welchem Winkel das Schiff den Meridian  $20^{\circ} W$  passiert, und unter welcher Breite dies geschieht.

Es sei PR der betreffende Meridian. Wir bezeichnen  $\angle$  GRP mit  $\rho$  und  $\angle$  GPR mit  $\sigma$ ; dann ist  $\text{ctg PR} = \cos \sigma \text{ctg PG}$  und  $\cos \rho = \sin \sigma \cos PG$ . Man erhält:  $PR = 48^\circ 10' 39''$  und  $\rho = 72^\circ 50' 41''$ . Also wird der Meridian in der Breite  $41^\circ 49' 21''$  durchschnitten unter dem Kurse (N  $72^\circ 50' 41''$  W).

Die Koordinatengeometrie gestattet, wie schon oben bemerkt wurde, eine bedeutend geringere Verwendung für die Lösung von Aufgaben aus dem Gebiete der mathematischen Geographie.

Da von den Kegelschnitten hier nur die Ellipse in Betracht kommt, so will ich die zur Anwendung gelangenden Sätze dieser Kurve, welche an unserer Anstalt besprochen werden, kurz zusammenstellen.

1. Die Gleichung der Ellipse, deren Halbachsen  $a$  und  $b$  sind, und welche auf diese als Koordinatenachsen bezogen ist, lautet:  $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1$ .

2. Die Gleichung der im Punkte  $x_1 y_1$  an die Ellipse gelegten Tangente ist  $y - y_1 = -\frac{b^2 x_1}{a^2 y_1} (x - x_1)$ .

3. Die Gleichung der im Punkte  $x_1 y_1$  an die Ellipse gelegten Normale lautet  $y - y_1 = \frac{a^2 y_1}{b^2 x_1} (x - x_1)$ .

4. Bezeichnet man den über der großen Axe als Durchmesser geschlagenen Kreis als Hauptkreis und legt man in zwei Punkten P und R der Ellipse und des Kreises, welche dieselbe Abscisse OQ haben, die beiden Tangenten an die Curven, so schneiden sich beide in einem Punkte C welcher auf der Abscissenaxe liegt.

6. Verbindet man den beliebig auf dem Hauptkreise gelegenen Punkt R mit dem Mittelpunkte O und bezeichnet den Winkel ROQ, den diese Verbindungslinie mit der Hauptaxe bildet, mit  $\vartheta$ , so sind die Koordinaten  $x$  und  $y$  des Punktes P der Ellipse, welcher mit dem Punkte R dieselbe Abscisse hat und mit ihm auf derselben Seite dieser Axe liegt,  $x = a \cos \vartheta$  und  $y = b \sin \vartheta$ .

Nun sei F die Sonne und P die Erde, dann ist unter Voraussetzung des ersten Keplerschen Gesetzes, nach welchem sich P auf einer Ellipse bewegt:  $PF + PF_1 = 2a$ ; oder wenn ich  $PF = r$  und  $PF_1 = r'$  setze, so ist  $r + r' = 2a$ . Bezeichne ich nun  $\angle$  PFF<sub>1</sub> mit  $\alpha$ , so ist im Dreieck FPF<sub>1</sub>:  $F_1P^2 = PF^2 + FF_1^2 - 2PF \cdot FF_1 \cos \alpha$  oder:  $r'^2 = r^2 + 4e^2 - 4er \cos \alpha$ . Mithin ist  $r'^2 - r^2 = 4e^2 - 4er \cos \alpha$ .

Nun aber ist  $r'^2 - r^2 = (r' + r)(r' - r) = 2a \cdot 2(a - r)$ , mithin wird:  $4a(a - r) = 4e^2 - 4er \cos \alpha$ , oder  $a^2 - ar = e^2 - er \cos \alpha$ , oder  $a^2 - e^2 = r(a - e \cos \alpha)$  oder  $(a + e)(a - e) = r(a - e \cos \alpha)$ .

Nun aber ist  $a + e = r_1$  der grösste Wert und  $a - e = r_2$  der kleinste Wert, den  $r$  annehmen kann. Ist nun R der wirkliche Halbmesser der Sonne in Kilometern ausgedrückt, und



erscheint sie in der Entfernung  $r$  unter einem Winkel von  $\rho^0$  und in der größten und kleinsten Entfernung  $r_1$  und  $r_2$  unter einem Winkel von  $\rho_1^0$  und  $\rho_2^0$ , so ist:

$$\rho : 360^0 = R : 2 r \pi; \text{ mithin ist } r = \frac{180 R}{\rho \pi}.$$

Also ist  $a + e = \frac{180 R}{\rho_1 \pi}$  und  $a - e = \frac{180 R}{\rho_2 \pi}$ ; mithin wird,

$$a = \frac{180 R}{2 \pi} \left( \frac{1}{\rho_1} + \frac{1}{\rho_2} \right) \text{ und } e = \frac{180 R}{2 \pi} \left( \frac{1}{\rho_1} - \frac{1}{\rho_2} \right).$$

Also geht die Gleichung  $(a + e)(a - e) = r(a - e \cos \alpha)$  über in:

$$\frac{180 R}{\rho_1 \pi} \cdot \frac{180 R}{\rho_2 \pi} = \frac{180 R}{\rho \pi} \left( \frac{180 R}{2 \pi} \left( \frac{1}{\rho_1} + \frac{1}{\rho_2} \right) - \frac{180 R}{2 \pi} \left( \frac{1}{\rho_1} - \frac{1}{\rho_2} \right) \cos \alpha \right),$$

oder, indem wir die Gleichung durch  $\left( \frac{180 R}{\pi} \right)^2$  heben:

$$\frac{1}{\rho_1 \rho_2} = \frac{1}{\rho} \left( \frac{1}{2} \left( \frac{1}{\rho_1} + \frac{1}{\rho_2} \right) - \frac{1}{2} \left( \frac{1}{\rho_1} - \frac{1}{\rho_2} \right) \cos \alpha \right), \text{ d. h. indem man die}$$

Gleichung mit  $\rho \rho_1 \rho_2$  multipliziert:

$$\rho = \frac{\rho_2 + \rho_1}{2} - \frac{\rho_2 - \rho_1}{2} \cos \alpha.$$

Nehmen wir statt  $\alpha$  sein Supplement  $\beta$ , so ist  $\rho = \frac{\rho_2 + \rho_1}{2} + \frac{\rho_2 - \rho_1}{2} \cos \beta$ . Diese Gleichung bleibt auch bestehen, wenn die Winkel statt in Graden in Sekunden ausgedrückt werden.

Es soll nun diese Gleichung für die zwei Stellungen der Erde am 9. März und 10. November 1891 geprüft werden.

In der Sonnennähe steht die Erde am 1. Januar. Dann beträgt ihr scheinbarer Halbmesser  $\rho_2$  nach den nautischen Tabellen  $16' 18''$ , d. h.  $978''$ .

In der Sonnenferne steht die Erde am Anfang des Juli, dann ist ihr scheinbarer Halbmesser  $\rho_1 = 15' 45'' = 945''$ . Mithin ist  $\frac{\rho_1 + \rho_2}{2} = 961,5''$  und  $\frac{\rho_2 - \rho_1}{2} = 16,5''$ .

Der Winkel  $\beta$ , den der Radiusvektor der Erdbahn am 9. März mit dem am 1. Januar bildet, ist gleich der Differenz der Längen für diese beiden Tage. Benennen wir nun die Rektascensionen am 1. Januar, am 9. März und am 10. November mit  $\alpha_1$ ,  $\alpha_2$  und  $\alpha_3$ , die Deklinationen mit  $\delta_1$ ,  $\delta_2$  und  $\delta_3$  und die Längen mit  $l_1$ ,  $l_2$  und  $l_3$ , so ist allgemein  $\cos l = \cos \alpha \cos \delta$ . Man findet also für den 1. Januar, wo  $\alpha_1 = 18^h 45^m 20^s$  und  $\delta_1 = -23^0 2' 30''$  ist,  $l_1 = 280^0 25' 7''$ . Für den 9. März ergibt sich:  $l_2 = 348^0 14' 30''$ . Nun ist für diesen Tag  $\beta = l_2 - l_1 = 67^0 49' 23''$ .

Die Berechnung nach den Formeln ergibt:  $\rho = 961,5'' + 6,228'' = 967,728'' = 16' 7,73''$ . Man findet in der nautischen Tafel  $16' 8''$  angegeben.

Für den 10. November ergibt sich  $l_3$ , wenn man es auf denselben Anfangspunkt wie am 1. Januar bezieht, der Wert  $587^0 24' 17''$ . Subtrahiert man hiervon  $l_1$ , so erhält man:  $\beta = 306^0 59' 10''$ . Man findet  $\rho = 971,4''$  oder  $16' 11,4''$ . Auch dieser Wert deckt sich mit dem in den nautischen Tafeln stehenden  $16' 11''$  genau.

Diese Übereinstimmung der berechneten Werte mit den für die Beobachtung gegebenen beweist dem Schüler, daß die Erde sich in einer Ellipse bewegt, und giebt ihm gewissermaßen eine experimentelle Bestätigung des ersten Keplerschen Gesetzes.

Um dem Schüler einen Begriff von den Methoden zu geben, durch welche es dem Geodäten ermöglicht wird, die Abplattung der Erde zu berechnen, leitet man eine Formel ab, welche die Excentricität durch zwei Krümmungsradien und die zugehörigen Polhöhen wiedergiebt.

Es seien  $a$  und  $b$  die Halbachsen der Ellipse welche einen Erdmeridian darstellt. Dann ist die Gleichung der Kurve  $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1$ . Nun ist die gemessene Breite  $\varphi$  eines Ortes ( $x, y$ ) oder der Winkel, den die Erdaxe mit dem Horizont bildet, gleich dem Winkel, den die Normale zur Erde mit der großen Axe  $A_1A$  oder der Ebene des Äquators bildet.

Da nun in diesem Punkte die Gleichung der Normale:  $y - y_1 = \frac{a^2 y_1}{b^2 x_1} (x - x_1)$  ist, so wird  $\operatorname{tg} \varphi = \frac{a^2 y_1}{b^2 x_1}$ .

Der Krümmungsmittelpunkt, d. h. der Mittelpunkt des Kreises, der sich am Beobachtungsorte dem Meridian möglichst eng anschmiegt, ist der Schnittpunkt zweier unmittelbar benachbarten Normalen.

Wir wollen nun den Krümmungsradius, d. h. den Halbmesser dieses Kreises durch die Breite  $\varphi$  des Beobachtungsortes, durch die Halbachsen  $a$  und  $b$ , und durch die Excentricität ausdrücken. Zu diesem Zwecke brauchen wir nur die eine der Koordinaten, etwa die Abscisse  $HJ$  des Krümmungsmittelpunktes zu kennen, da dann von dem rechtwinkligen Dreieck  $HDG$  leicht die Seite  $HG$  und hieraus  $\rho = \frac{GH}{\cos \varphi}$  bestimmt werden kann. Wir bestimmen daher zunächst die Abscisse  $x$  des Durchschnittspunktes der beiden Normalen in den Punkten  $P_1 (x_1, y_1)$  und  $P_2 (x_2, y_2)$  der Ellipse.

Man erhält für den ersten Punkt als Gleichung der Normale:  $y_1 - y = \frac{a^2 y_1}{b^2 x_1} (x_1 - x)$  und für den zweiten  $y_2 - y = \frac{a^2 y_2}{b^2 x_2} (x_2 - x)$ .

Man eliminiert  $y$  durch Subtraktion beider Gleichungen und erhält:

$$y_1 - y_2 = \frac{a^2}{b^2} (y_1 - y_2) - x \frac{a^2}{b^2} \left( \frac{y_1}{x_1} - \frac{y_2}{x_2} \right)$$

oder  $x \frac{a^2}{b^2} \left( \frac{y_1}{x_1} - \frac{y_2}{x_2} \right) = \frac{e^2}{b^2} (y_1 - y_2)$ , wo  $e^2 = a^2 - b^2$  ist.

Rücken wir nun die beiden Punkte  $P_1$  und  $P_2$  unendlich nahe, so geht der Schnittpunkt ihrer Normalen in den Krümmungsmittelpunkt über, und wir erhalten in dem sich für  $x$  ergebenden Ausdruck den Faktor  $\frac{0}{0}$ , dessen Wert zu ermitteln ist.

Um dies zu erreichen, setzen wir

$$x_1 = a \cos \vartheta_1, y_1 = b \sin \vartheta_1, x_2 = a \cos \vartheta_2, y_2 = b \sin \vartheta_2,$$

Dann geht die oben stehende Gleichung über in:

$$x \frac{a^2}{b^2} \frac{b}{a} (\operatorname{tg} \vartheta_1 - \operatorname{tg} \vartheta_2) = \frac{e^2}{b^2} b (\sin \vartheta_1 - \sin \vartheta_2) \text{ oder}$$

$$x \cdot a \cdot \sin \frac{\vartheta_1 - \vartheta_2}{2} \frac{\cos \vartheta_1 - \cos \vartheta_2}{\cos \vartheta_1 \cos \vartheta_2} = e^2 \cos \frac{\vartheta_1 + \vartheta_2}{2} \sin \frac{\vartheta_1 - \vartheta_2}{2},$$

oder wenn die beiden Punkte  $P_1$  und  $P_2$  zusammenfallen:

$$x a = e^2 \cos^3 \vartheta, \text{ also } x = \frac{e^2 \cos^3 \vartheta}{a} = \frac{e^2 x_1 \cos^2 \vartheta}{a^2}, \text{ da } \cos \vartheta = \frac{x_1}{a} \text{ ist.}$$

$$\text{Mithin ist die Strecke } HG = x_1 - x = x_1 - \frac{e^2 x_1 \cos^2 \vartheta}{a^2} = x_1 \frac{(a^2 - e^2 \cos^2 \vartheta)}{a^2}$$

$$= \frac{x_1}{a^2} \left( a^2 - \frac{e^2}{1 + \operatorname{tg}^2 \vartheta} \right).$$

Nun aber schneiden sich die beiden Tangenten in den Punkten R und P des Hauptkreises und der Ellipse in einem Punkte C, der auf der Hauptaxe gelegen ist; mithin ist:

$$RQ : PQ = \operatorname{tg} RCQ : \operatorname{tg} PCQ = \operatorname{ctg} \vartheta : \operatorname{ctg} \varphi.$$

Andrerseits ist:  $RQ : PQ = a \sin \vartheta : b \sin \varphi = a : b$ , mithin ist:  $a : b = \operatorname{ctg} \vartheta : \operatorname{ctg} \varphi = \operatorname{tg} \varphi : \operatorname{tg} \vartheta$ , also ist  $\operatorname{tg} \vartheta = \frac{b \operatorname{tg} \varphi}{a}$ . Mithin geht die Gleichung  $HG = \frac{x_1}{a^2} \left( a^2 - \frac{e^2}{1 + \operatorname{tg}^2 \vartheta} \right)$  über in

$$HG = \frac{x_1}{a^2} \left( a^2 - \frac{e^2 a^2}{a^2 + b^2 \operatorname{tg}^2 \varphi} \right) = \frac{x_1 (a^2 + b^2 \operatorname{tg}^2 \varphi - e^2)}{a^2 + b^2 \operatorname{tg}^2 \varphi} = \frac{x_1 (b^2 + b^2 \operatorname{tg}^2 \varphi)}{a^2 + b^2 \operatorname{tg}^2 \varphi}$$

$$= \frac{x_1 b^2 (1 + \operatorname{tg}^2 \varphi)}{a^2 + b^2 \operatorname{tg}^2 \varphi} = \frac{x_1 b^2}{\cos^2 \varphi (a^2 + b^2 \operatorname{tg}^2 \varphi)}.$$

$$\text{Mithin ist } HG = \rho \cos \varphi = \frac{b^2 x_1}{\cos^2 \varphi (a^2 + b^2 \operatorname{tg}^2 \varphi)} \text{ oder } \rho = \frac{b^2 x_1}{\cos^3 \varphi (a^2 + b^2 \operatorname{tg}^2 \varphi)}, \text{ und}$$

$$\text{hieraus folgt } x_1 = \rho \frac{\cos^3 \varphi (a^2 + b^2 \operatorname{tg}^2 \varphi)}{b^2}.$$

Drücken wir nun auch  $y_1$  durch  $\rho$  aus und setzen wir ihre Werte in die Gleichung der Ellipse ein, so erhalten wir die gesuchte Relation zwischen  $\rho$  und  $\varphi$ .

$$\text{Es wird } \frac{y_1}{x_1} = \frac{b}{a} \operatorname{tg} \vartheta = \frac{b^2}{a^2} \operatorname{tg} \varphi, \text{ oder } y_1 = \frac{b^2 x_1}{a^2} \operatorname{tg} \varphi, \text{ mithin geht die Gleichung der}$$

$$\text{Ellipse } \frac{x_1^2}{a^2} + \frac{y_1^2}{b^2} = 1 \text{ über in:}$$

$$\frac{x_1^2}{a^2} + \frac{b^4 x_1^2 \operatorname{tg}^2 \varphi}{a^4 b^2} = 1 \text{ oder in } \frac{x_1^2}{a^2} \left( \frac{a^2 + b^2 \operatorname{tg}^2 \varphi}{a^2} \right) = 1.$$

Setze ich nun für  $x_1$  den oben gefundenen Wert ein, so erhalte ich:

$$1 = \rho^2 \frac{\cos^6 \varphi (a^2 + b^2 \operatorname{tg}^2 \varphi)^2}{b^4 a^2} \frac{(a^2 + b^2 \operatorname{tg}^2 \varphi)}{a^2} \text{ oder}$$

$$1 = \rho^2 \frac{\cos^6 \varphi (a^2 + b^2 \operatorname{tg}^2 \varphi)^3}{b^4 a^4} \text{ oder}$$

$$1 = \rho^2 \frac{(a^2 \cos^2 \varphi + b^2 \sin^2 \varphi)^3}{b^4 a^4} \text{ oder}$$

$$1 = \frac{\rho^2 (\cos^2 \varphi + \frac{b^2}{a^2} \sin^2 \varphi)^3}{\frac{b^4}{a^2}}$$

Setzen wir nun  $\frac{c}{a} = \varepsilon$ , so wird  $\frac{b^2}{a^2} = 1 - \varepsilon^2$  und  $b^2 = a^2(1 - \varepsilon^2)$ ; mithin ist:

$$1 = \rho^2 \frac{[\cos^2 \varphi + (1 - \varepsilon^2) \sin^2 \varphi]^3}{a^2 (1 - \varepsilon^2)^2}$$

$$\text{oder } 1 = \frac{\rho^2 (1 - \varepsilon^2 \sin^2 \varphi)^3}{a^2 (1 - \varepsilon^2)^2} \text{ oder } a = \frac{\rho (1 - \varepsilon^2 \sin^2 \varphi)^{\frac{3}{2}}}{1 - \varepsilon^2} \text{ oder } \rho = \frac{a (1 - \varepsilon^2)}{(1 - \varepsilon^2 \sin^2 \varphi)^{\frac{3}{2}}}$$

Kennt man nun den Krümmungsradius für zwei Punkte eines Meridians, so kann man aus ihnen und den beiden zugehörigen Werten von  $\varphi$  die Größe  $\varepsilon$  oder die Excentricität bestimmen.

Setzt man die sich aus beiden Stellungen ergebenden Werte von  $a$  einander gleich, so erhält man, indem man noch gleichzeitig mit  $1 - \varepsilon^2$  multipliziert:

$$\rho_1 (1 - \varepsilon^2 \sin^2 \varphi_1)^{\frac{3}{2}} = \rho_2 (1 - \varepsilon^2 \sin^2 \varphi_2)^{\frac{3}{2}} \text{ oder}$$

$$\rho_1^{\frac{2}{3}} (1 - \varepsilon^2 \sin^2 \varphi_1) = \rho_2^{\frac{2}{3}} (1 - \varepsilon^2 \sin^2 \varphi_2); \text{ mithin ist}$$

$$\rho_1^{\frac{2}{3}} - \rho_2^{\frac{2}{3}} = \varepsilon^2 (\rho_1^{\frac{2}{3}} \sin^2 \varphi_1 - \rho_2^{\frac{2}{3}} \sin^2 \varphi_2) \text{ oder}$$

$$\varepsilon^2 = \frac{\rho_1^{\frac{2}{3}} - \rho_2^{\frac{2}{3}}}{\rho_1^{\frac{2}{3}} \sin^2 \varphi_1 - \rho_2^{\frac{2}{3}} \sin^2 \varphi_2}$$

Da man nun die Polhöhen  $\varphi_1$  und  $\varphi_2$  für zwei Orte der Erde bestimmen und die zugehörigen Krümmungsradien dadurch, daß man für einen gewissen Meridianbogen den betreffenden Kreisbogen setzt, berechnen kann, ist es möglich  $\varepsilon$  oder die numerische Excentricität der Erde und daraus die Axen zu finden.

Durch die russischen Gradmessungen von 1818 — 1870 wurde nach dieser Formel  $\varepsilon = \frac{1}{12,160}$ ,  $a = 6378,3$  km und  $b = 6356,8$  km bestimmt.



