Michaelis Angeli Riccii

EXERCITATIO GEOMETRICA

De MAXIMIS & MINIMIS.

LONDINI,
Typis *Guilielmi Godbid*, & Impensis *Mosis Pitt* Bibliopolæ, in vico vulgo vocato *Little Britain*. Anno M. DC. LXVIII.

ABBATI
STEPHANO GRADIO
Michael Angelus Riccius S. P. D.

SCRIPTIONEM *hanc meam argumenti, ut vides, inter Mathematica difficillimi, ſed æquè ad difficiliora quæque Problematum efficienda, & obſcuriora Theorematum cognoſcenda vtiliſſimi, cùm in Geometrico, tùm in Analytico pulvere, ad te mittendam duxi, vir ornatiſſime,* STEPHANE GRADI, *quem ego vnum omnium hujus Civitatis plurimi facio, ob egregias animi laudes, præſertim verò propter acre his de rebus exiſtimandi judicium, quotidianis graviſſimarum inter nos diſputationum experimentis mihi perſpectum & cognitum.* Lege *quæſo illam diligenter, & vbi diù exactiſſimæ tuæ cenſuræ ſubjectam habueris, ecquid reſpondeat ſolitæ tuæ de meis hoc in genere cogitationibus, opinioni, pronuncia.* Nam *ſi hoc aſſequar, ut tibi cæteriſque Amicis earundem Diſciplinarum intelligentibus probetur, minus erit in poſterum quam ob rem humaniſſimis tuis hortationibus oblucter, cùm autor mihi eſſe perſeverabis edendi alia quæ tecum jampridem communicavi, de præceptis univerſæ Artis analyticæ, geometricâ methodo breviter & expeditè demonſtratis, vnà cum animadverſione erratorum quæ in ipſis tradendis magni nominis Auctores erraſſe deprehendi;*

hendi; faciliúsq; obtinebis ne diutiùs premam apud me quæcumque de Geometria in genere disputata & literis consignata incertas propositiones redegi; & ex his illam præcipuè à Torricellio *, & à te quoq; tan topere commendatam, quæ integram doctrinam triginta propositionum* Archimedis, Lucæ Valerii, *& aliorum, vna complectitur; duasque præterea, quibus totam penè* Jo. Caroli de la Faille *de centro gravitatis partium circuli, & ellipseos doctrinam [justo volumine ab ipso explicatam] absolvo. Statui autem pauca aliquot hujus scripti exemplaria typis imprimere, quò commodiùs possint ad peritos hujusmodi scientiarum Amicos, tùm per* Italiam, *tùm exteras apud gentes pervenire, accenso potiùs ea in re tuo studio obsecutus, quàm ingenio meo. Neque enim is ego sum, cui nomen famæ per ambitionem ingerere libeat; aut quem non magis indagatæ veritatis cognitio, quàm cognitæ ostentatio delectet. Interim hunc amicitiæ nostræ jampridem institutæ, & literario præcipuè commercio nunquam coli intermissæ, fructum jucundissimum feram, vt quæ hac in re de me sentis amicè, hoc est [ut* Euripidi *placet] liberè, te loquentem audiam; eoque, quid cæteri & sentiant & loquantur, securus fiam. Vale,* Romæ *octavo Idus* Julii 1666.

MICHAELIS ANGELI RICCII
GEOMETRICA EXERCITATIO.

DEFINITIONES.

1 Poteſtatem quamlibet, ejuſque radicem, voco dignitatem.

2 Si Dignitas in Dignitatem ducatur, ut A 2 in, B 3, fiet productum A 2 in B 3; cui producto illud ſimile dicimus, quod gignitur ex Dignitatibus graduum eorumdem. Ita, in facta hypotheſi, productum E 2 in C 3, ex quadrato & cubo, ſimile eſt producto A 2 in B 3.

3 Homogenea producta ſunt quæ ad eundem gradum pertinent; ut duo rectangula, quippè quæ ad ſecundum gradum pertinent; & duo ſolida, quæ ad tertium.

4 Terminos cùm dico, intelligi volo duos numeros ſeu æquales ſeu inæquales, vel numerum & unitatem, vel duas unitates. Terminos inæquales appello duos numeros inæquales, vel numerum & unitatem. Terminos autem æquales, duos æquales numeros, vel duas unitates.

5 Productum in linea fieri ſecundum terminos datos, aut poſitos, dicimus, quum illud fit ex duabus dignitatibus, quarum exponentes ſunt ipſi termini dati vel poſiti; radices verò ſegmenta illius rectæ lineæ ſectæ in proportione terminorum eorumdem.

Sit verbi cauſa, quæpiam recta linea, cujus majus ſegmentum ad minus ſit in ratione 3 ad 2; productum ex cubo ſegmenti majoris in quadratum minoris erit factum in linea data ſecundum terminos poſitos 3, & 2; quia ſegmenta quæ ſunt dignitatum radices habent rationem numeri 3 ad 2, & exponentes earumdem dignitatum ſunt etiam 3, & 2.

Rurſus

Rursus esto, quemadmodum segmentum majus ad minus ejusdem lineæ, sic 3 ad 1, productum ex cubo majoris segmenti in segmentum ipsum minus, erit productum in linea factum secundum terminos positos, numerum & unitatem. Ita, A 3 in B 1 [si A vocetur majus segmentum, B verò, minus] est productum factum in linea A + B secundum terminos 3, & unitatem, quia radices A & B sic sunt, ut est numerus 3 ad unitatem; & dignitatis A 3 exponens est, 3, numerus datus; dignitatis B 1 exponens est, unitas, item data.

Lemma Primum.

SI duæ rectæ in eadem ratione secentur, producta similia facta ex segmentis tanquam ex radicibus, erunt proportionalia productis homogeneis quæ fient ex totis.

Fig. I.

Sint A B, D E, rectæ, in punctis C, & F ita sectæ, ut quam rationem A C ad C B habet, eandem habeat D F ad F E, & fiant ex illarum segmentis producta A C 2 in C B 3, & D F 2 in F E 3, quæ sunt similia per secundam definitionem; iisque homogenea producta fiant ex totis A B, D E, nimirum A B 5, D E 5 per tertiam definitionem. Dico A C 2 in C B 3 eandem rationem habere ad A B 5, ac D F 2 in F E 3 ad D E 5. Quia rationes ex quibus ratio producti A C 2 in C B 3 ad A B 5 componitur, eædem sunt, ac componentes rationem producti D F 2 in F E 3 ad D E 5, ob sectionem linearum proportionalem, & inde proportionales dignitates ex quibus producta illa resultant. Quod, &c.

Lemma Secundum.

IIsdem positis, Dico, A C 2 in C B 3 fuerit maximum omnium similium productorum ex binis segmentis rectæ A B, etiam D F 2 in F E 3 fore maximum productorum similium ex binis segmentis rectæ D E, tanquam ex radicibus.

Singulis enim productis ex segmentis rectæ D E alia respondent orta ex segmentis rectæ A B in eadem proportione sectæ; & illa ad homogeneum suum D E 5 eandem rationem habent, atque ista ad suum A B 5, ex primo Lemmate. Ratio quidem A C 2 in C B 3 ad A B 5, ex hypothesi, est eadem, ac ratio D F 2 in F E 3 ad D E 5: cæterorum verò productorum ex segmentis ipsius D E ad D E 5, eadem est atque ratio

productorum

productorum ſibi reſpondentium, quæ fiunt ex ſegmentis rectæ A B, ad A B 5. Cùm igitur ratio A C 2 in C B 3 [quod maximum eſſe ponitur] ad A B 5 ſit major, per octavam quinti Elem., ratione cæterorum productorum ſibi ſimilium ad A B 5; major etiam erit ratio D F 2 in F E 3 ad D E 5, quàm ratio cæterorum ſimilium productorum ex ſegmentis rectæ D E ad D E 5; ac proinde ipſum D F 2 in F E 3 per decimam quinti Elem. eſt maximum. Quod, &c.

Lemma Tertium.

SI data recta linea ſecetur in ratione terminorum inæqualium, & dividendo, fiat ſegmentorum differentia ad minus ſegmentum, ut differentia terminorum ad minorem terminum; hæc inventa proportionalitas vel ipſa erit proportionalitas æqualitatis, vel alia, in quam incidemus, iterum dividendo, & ſic deinceps; & in eâ terminorum differentia æquabitur minori termino, & differentia ſegmentorum ſegmento minori.

Eſto A C ad C B, ut *9* ad *6*, & A D differentia ſegmentorum A C, C B: erit dividendo, 3 ad *6*, ut A D ad C B, vel ad ſegmentum ſibi æquale, D C: Quoniam verò hæc proportio non eſt proportio æqualitatis, fiat D E differentia ſegmentorum A D, & D C; *3*, differentia numerorum *6* & 3; & dividendo, erit, ut 3 ad 3, ſic D E ad A D, proportio æqualitatis. Fig. II.

Rurſus A C ſit ad C B, ut 5 ad 3; & A D ſegmentorum differentia; dividendo erit, A D ad C B, ſeu ad ſibi æquale ſegmentum D C, ut 2 ad 3. Et iterum dividendo [ſegmentorum A D & D C, eſto, differentia, E C,] 1 ad 2 ut E C ad A D ſeu D E; & tertiò [facta F E terminorum D E & E C differentia] dividendo inveniemus, ut 1 ad 1, ita F E ad E C. Quod, &c. Fig. III.

Ratio Lemmatis eſt, quod duorum quorumcumque numerorum differentia, vel differentia numeri & unitatis, ſemper eſt numerus aut unitas, ut per ſe patet: & nos dividendo, ſemel atque iterum, ac ſæpius, demimus ſemper minorem terminum diviſæ proportionalitatis qui eſt numerus vel unitas, de majori termino ſeu numero, utimurquè deinceps reſiduo tantùm [quod eſt eorum terminorum differentia] & comparamus illud cum minori termino proportionalitatis diviſæ: at non poſſumus ſic demendo progredi in infinitum, quia unitates in terminis ſunt finitæ, ſed exhauritur tandem omnis differentia, reſiduumque majoris termini proportionalitatis diviſæ æquatur termino minori. Ita fit proportio æqualitatis, in qua unitas ad unitatem, vel numerus ad ſibi æqualem numerum, eſt ut ſegmentum ad aliud æquale ſegmentum. Quod oſtendere oportebat.

Quod ſi ab ea proportione æqualitatis, in qua deſitum eſt rurſus incipiamus, Dico nos componendo gradatim, venturos per veſtigia diviſionis ad terminos primæ proportionalitatis, in qua ſegmenta datæ lineæ erant in ratione inæqualium terminorum. Cujus propoſitionis rationem facilè intelliget Geometra, quem latere non poteſt, in Geometria omnia quæ dividendo concluduntur, ex contrario converti poſſe, & componendo concludi illud ipſum, quod ponebatur ante diviſionem, ut in quinto Elementorum oſtenditur. Exempli gratia, ſit majus ſegmentum datæ rectæ ad minus, ut 2 ad 1. Igitur Dividendo 1 ad 1, eſt ut differentia ſegmentorum ad minus ſegmentum. Ex hac porrò æqualitatis proportione componendo redimus ad primam proportionem, in qua ſegmenta erant in ratione 2 ad 1. Quod, &c.

Lemma Quartum.

SI duo quælibet producta orta ſint ex duabus dignitatibus ductis in aliam communem dignitatem; quam rationem habent illæ duæ dignitates inter ſe, eandem habent duo producta. Sic productum A B 3 in B C 5 eam rationem habet ad productum A B 3 in E F 5, quam habet dignitas B C 5 ad dignitatem E F 5; in quas duas dignitates ducta communis dignitas A B 3 illa producta effecit.

Ex definitione multiplicationis probatur hoc Lemma, quod alii in numeris demonſtrarunt.

Lemma Quintum.

DAtis quatuor quantitatibus, quarum prima ad ſecundam habeat minorem rationem, quam tertia ad quartam, productum quod gignitur ex duabus extremis eſt minis producto ex mediis.

Augeatur prima donec fiant quatuor geometricè proportionales; tunc prima in quartam ducta efficiet productum æquale producto ex mediis. Igitur productum quod efficiebat ante quàm augeretur, erat productum minus eodem producto ex quantitatibus mediis. Quod &c.

THEOREM

THEOREMA PRIMUM.

PRoductum in aliqua recta linea factum secundum positos terminos æquales, maximum est omnium similium productorum, quæ fieri possunt ex binis lineæ datæ segmentis tanquam ex radicibus.

Recta linea A B secetur æqualiter in puncto C, & sit A C ad C B ut 3 ad 3 [termini æquales positi] Dico productum A C 3 in C B 3, quod sit in linea A B secundum positos terminos, esse omnium similium productorum maximum. Sumpto quolibet alio puncto D, faciamus aliud simile productum A D 3. in D B 3. Cùm autem sint quatuor lineæ arithmeticè proportionales cum excessu C D, nimirum A D, A C, C B, & B D, minor est ratio maximæ A D ad A C, quàm C B ad B D; & triplicata ratio ipsius A D ad A C [seu ratio A D 3 ad A C 3] minor est, quàm triplicata ipsius C B ad B D [seu C B 3 ad B D 3] & per quintum Lemma, productum ex mediis quantitatibus, A C 3, in C B 3, majus est producto A D 3 in B D 3 facto ex duabus extremis. Eodem pacto demonstatur A C 3 in C B 3 esse alio quocumque simili producto majus, & consequenter omnium similium maximum. Quod, &c. Fig. IV.

THEOREMA SECUNDUM.

SI duo rectæ lineæ segmenta fuerint in ratione terminorum inæqualium, & per consequens, dividendo, sit differentia segmentorum ad minus segmentum, ut differentia terminorum ad minorem terminum; quoties ex dignitate differentiæ segmentorum ducta in dignitatem minoris segmenti fit productum maximum, toties fit etiam maximum ex eadem dignitate minoris segmenti ducta in dignitatem majoris; atque ita, si dignitates segmentorum pro exponentibus habeant terminos positos, & dignitas differentiæ, differentiam terminorum.

Sit A B recta linea inæqualiter secta in puncto C, & B C ad A C, ut 5 ad 3, qui sint termini positi. Producatur B A in F, donec æquetur F C ipsi C B, & A F erit differentia segmentorum B C & A C. Quoniam verò segmentum majus B C sic est ad minus C A, ut 5 est ad 3, erit dividendo A F ad C A, ut est 2 ad 3. Nunc fiant duo producta qualia diximus, primum F A 2 in A C 3, ex dignitate ipsius F A, differentiæ segmentorum, ducta in dignitatem minoris segmenti. A C. Secundum A C 3 in C B 5, ortum ex eadem dignitate minoris segmenti ducta in Fig. V.

 dignitatem

dignitatem majoris. Prima dignitais F A 2 habet pro exponente, 2; differentiam datorum terminorum, reliquæ habent 3 & 5, terminos positos, ut imperabatur. Dico, si productum primum est maximum omnium similium ex binis segmentis rectæ F C [esse autem ejusmodi supponamus], etiam secundum fore productum maximum omnium similium ex binis segmentis rectæ positæ A B.

Sumatur in A B alius punctus præter punctum C, & esto, D; qui accipi à nobis potest infra punctum C, vel supra. In vtroque casu, F A nequit habere eam rationem ad A C, quam habet ad A D, sed majorem aut minorem habebit, atque adeò F D non est secta in puncto A secundum rationem ipsius F A ad C A: fiat porrò FE ad E D, ut F A ad A C, & productum F E 2 in E D 3, per secundum Lemma, erit maximum [æque ac productum F A 2 in A C 3] & consequenter majus simili producto FA 2 in A D 3, facto ex segmentis ejusdem rectæ F D. Quod maximum F E 2 in E D 3 habet eandem rationem ad F D 5, dignitatem sibi homogeneam, quam F A 2 in A C 3 ad F C 5, ut ex duobus primis Lemmatibus colligitur; igitur F A 2 in A D 3 [quod diximus esse minus producto F E 2 in E D 3] minorem rationem habet ad F D 5, quàm F E 2 in E D 3 ad idem F D 5, seu minorem, quàm F A 2 in A C 3 ad F C 5; & permutando, F A 2 in A D 3 minorem habet rationem ad F A 2 in A C 3 [seu, per Lemma quartum, A D 3 minorem habet rarad A C 3] quàm F D 5 ad F C 5, & longè minorem, quàm C B 5 ad B D 5. Quippe sunt rectæ D B, C B, F C, & F D, arithmeticè proportionales cum excessu, D C; ac propterea in primo casu, F D maxima, in secundo casu, F D minima, est ad F C in minori ratione quam C B ad D B, & quintuplicata ratio F D ad F C, nempe ratio ipsius F D 5 ad F C 5, est minor quintuplicatâ ratione C B ad D B, seu C B 5 ad D B 5.

Igitur cùm quatuor quantitatum, A D 3, A C 3, C B 5, & D B 5, prima ad secundam habeat minorem rationem, quàm tertia ad quartam, per quintum Lemma, productum A D 3 in D B 5 factum ex duabus extremis erit minus producto A C 3 in C B 5 ex mediis. Similiter ostendes, aliud quodcumque productum simile minus esse producto A C 3 in B B 5, quia punctus D ad libitum sumitur. Ergo A C 3 in C B 5 productum est maximum omnium. Quod &c.

Hactenus de recta linea A B inæqualiter secta, quum est segmentum majus ad minus, uti numerus ad numerum. Restaret altera pars Theorematis, quum est quemadmodum majus segmentum ad minus, sic numerus ad ad unitatem. Hoc tamen constructione ac ratione tam similibus modò factis concluditur, ut id sibi quisque invenire, explicare ac dilatare facillimè possit. Lectoribus autem scribimus à Geometria & ab Algebra instructioribus, quos hujuscemodi rerum intellectu facilium explicatione frustra defatigaremus; Quare pergimus ad reliqua usum præstantissimum habentia ad inveniendas plurium linearum tangentes, figurarum centra gravitatis & quadraturas, & ad alia item multa, quæ justo servamus Operi; ubi dabimus novam solidorum Conicorum seriem, qui secti exhibent infinitas, uti vocant, hyperbolas, infinitas parabolas, infinitas ellipses, &, analogiam servando, circulos etiam infinitos. Unde Lectoribus manifestè apparebit, de Conicis me plus multò adinvenisse, quàm cæteros, eosque ingeniosissimos Viros, qui communem tantùm hyperbolen, parabolen, ellipsim, & circulum [figuras Conici in nostra nova serie prædicta, secundi gradus] agnoverunt: alias tertii & quarti & cæterorum non item; nisi quod de parabolis infinitis per puncta in plano descriptis pauca, licèt cognitione dignissima, tradidere nonnulli, quos inter, duo præcellentes ingenio Viri, *Fermatius*, ac *Torricellius*, Præceptor meus, inventorum præstantiâ & numero commendabiles, ac Veteribus proximi; qui novum insuper excogitarunt hyperbolarum infinitarum genus. Neque prætereundum puto, quamplures *Apollonii* propositiones atque demonstrationes aptari sectionibus nostris & per omnia congruere, affectasque multipliciter æquationes harum sectionum ope resolvi facillimè, & determinari posse. Nunc revertor ad rem.

THEOREMA TERTIUM.

Datâ rectâ lineâ, & duobus terminis, secundum quos fiat in linea data productum: hoc erit maximum omnium similium productorum, quæ fieri possunt ex binis ejusdem rectæ segmentis, velut ex radicibus.

Propositionem seco in partes duas. Primùm dico, productum, quale descripsimus, esse omnium similium maximum, quum dantur termini æquales; quod in primo Theoremate demonstravimus.

Deinde si dantur termini inæquales, sic rem ostendo.

Esto AB recta data, & termini dati 5 & 2. Secetur recta in puncto C sitque BC ad CA, ut 5 ad 2. Dico productum BC 5 in CA 2 factum in linea data secundum terminos datos esse maximum. Producatur BA in F, ut AF sit differentia segmentorum, & dividendo primam proportionalitatem, nempe BC ad CA, ut 5 ad 2 [sicut in tertio Fig. VI.

 Lemmate

Lemmate præſcribitur] pergamus uſque dum incidamus in proportionem æqualitatis. In noſtra hypotheſi, primum erit, dividendo, 3 ad 2, ut F A differentia ſegmentorum ad A C minus ſegmentum; quam ſecundam proportionalitatem exhibet ſecunda figura, in qua fiat C E differentia ſegmentorum C A, F A; per conſequens erit, dividendo, 1 ad 2, ut C E ad A C; quam quidem proportionalitatem ſeorſim exhibet tertia figura. Fiat E H differentia ſegmentorum C E & A C, dividendo erit 1 ad 1, ut E H ad E C; quæ eſt demum proportio æqualitatis; ſemper autem minus ſegmentum producimus ut æquemus majori, & ſegmentorum differentiam conſtituamus.

At retrorſum viciſſim, incipiendo à recta E A tertiæ figuræ cujus majus ſegmentum A C eſt 2, minus ſegmentum C E eſt 1, & illorum differentia H E itidem 1. Quoniam productum H E 1 in C E 1 eſt maximum in linea C H, per primum Theorema noſtrum, erit proinde, per ſecundum Theorema, E C 1 in C A 2 maximum in drecta E A.

Deinde in recta F C ſecundæ figuræ, majus ſegmentum A F eſt 3; minus A C eſt 2, & ſegmentorum differentia E C eſt 1; porrò cùm E C 1 in C A 2 ſit maximum, erit per ſecundum Theorema, etiam maximum in recta F C productum A F 3 in A C 2.

Poſtremò in lineà A B primæ figuræ, productum A F 3 in A C 2 eſt maximum, ut modò oſtendimus, ergo per ſecundum Theorema eſt etiam maximum A C 2 in B C 5. Quod demonſtrandum erat.

Si loco duorum numerorum detur numerus, & unitas, fit ſimilis conſtructio, & demonſtratio.

SCHOLION.

ID quod in ſecundo Theoremate ſupponebamus; datâ rectâ lineâ,& datis, numeris, 3 & 2, maximum fore productum in ea linea factum ſecundum numeros illos datos; nunc demonſtravimus in Theoremate hoc. Erat porrò illius Theorematis propoſitio conditionalis, ex poſita illa hypotheſi, non abſoluta, ut patebit conſideranti.

COROLLARIUM.

SI productum genitum ex dignitate ducta in dignitatem quamcumque; maximum fuerit, illarum dignitatum radices & exponentes erunt geometricè metice proportionales. Quippe in Theoremate ostendimus, productum in linea factum secundum terminos datos esse omnium maximum; at productum ejusmodi, ex 5. definitione nostra, gignitur ex duabus dignitatibus, quarum exponentes rationem eam habent, quam dignitatum earundem radices.

PROBLEMA PRIMUM.

Datam lineam rectam ita secare, ut productum ex dignitatibus segmentorum sit omnium similium maximum.

Sumantur exponentes duarum illarum dignitatum, rectaque dividatur in ratione horum exponentium, & factum erit quod imperatur; quia productum erit in linea data factum secundum terminos positos, nimirum secundum exponentes; ac proinde erit maximum per Theorema tertium.

PROBLEMA SECUNDUM.

Æquationem determinare, in qua potestas quæsita radicis negatur de homogeneo sub radice data, & dignitate sua parodica, ut B in A—A 2 || Z 2 : vel B in A 3—A 4 || Z 4, &c.

Oritur hujusmodi æquatio ex dicta parodica dignitate potestatis negatæ ducta in B—A, differentiam datæ & quæsitæ radicis, Rem probo. Illa parodica dignitas affirmata, si primùm ducatur in A, radicem quæsitam negatam, gignet potestatem negatam uno gradu altiorem, quàm sit ea parodica dignitas [ut patet ex natura multiplicationis] deinpe in † B radicem datam affirmatam ducta, gignet homogeneum affirmatum, sub eadem dignitate parodica & radice data: Quæ duo producta, sunt ipsa pars æquationis, de qua in Problemate. Pars altera est homogeneum comparationis.

Rursus, per Lemma quartum, ratio homogenei ad potestatem negatam est eadem, ac radicis datæ ad quæsitam; sed minor est potestas homogeneo, de quo ipsa negatur & demitur. Ergo etiam radix quæsita minor est datâ; In qua proinde radice datâ nos rectè sumimus segmentum æquale radici quæsitæ A, ut alterum segmentum sit B—A, differentia datæ ac quæsitæ radicis.

Quoniam igitur prima pars æquationis oritur ex B—A uno radicis datæ segmento, ducto in altero segmentum A, vel in hujus potestatem, efficitur [per tertium Theorema] ut inde resultans productum sit maximum omnium similium, quotiescunque A, & B—A, segmenta ratio-nem

nem habent eam, quam exponentes suarum dignitatum. Sic in æquatione B in A3 —A4 || Z 4; si A, & B—A fuerint ut 3 ad 1, cubus segmenti A in B A ductus gignet partem æquationis B in A 3—A 4; quæ est productum in linea data B, omnium similium maximum; cujus proinde magnitudinem non potest unquam excedere homogeneum comparationis, quod semper æquari necesse est illi alteri æquationis parti. Unde canon pro determinanda problematis æquatione conficitur.

Fiat in radice maximum productum secundum terminos, qui sunt exponentes ejusdem radicis & parodicæ dignitatis, sub quibus est homogeneum. Illius producti magnitudinem excedere non potest homogeneum comparationis.

Idem procedit in alia æquatione orta ex multiplicatione ipsius, A, in B—A, vel in hujus potestatem; semper enim est idem casus tertii Theorematis nostri, in quo productum factum in linea [seu datâ radice B] secundum terminos datos est maximum, termini verò sunt exponentes dignitatum segmenti A & alterius B—A.

Sed uno vel altero exemplo de Geometricis nostris Opusculis deprompto methodi facilitatem comprobemus.

Fig. VII. E singulis punctis datæ rectæ A B ducantur rectæ C D, E F &c. rectæ inter se parallelæ, cum data A B angulum quemcumque efficientes. Sint autem harum parallelarum dignitates, & dignitates abcissarum A C, A E, &c. geometricè proportionales (id quod tripliciter contingere posse mox patebit) Transibit per extrema parallelarum puncta, D, F, &c. perimeter figuræ, cujus diameter aut axis erit A B, vertex A, ordinatim verò ad diametrum applicatæ erunt ipsæ parallelæ.

Fig. VIII. Nam parallelarum absciſſarumque dignitates si fuerint ejusdem gradus, exempli gratiâ F E 1 ad D C 1, ut A E 1 ad C A 1: vel cubi parallelarum ut cubi absciſſarum, figura erit triangulum, cujus proprietas notiſſima est, non parallelas modò & absciſſas esse geometricè proportionales, sed parallelarum & absciſſarum earumdem potestates omnes homogeneas; quarum ratio æquè multiplex est rationis linearum seu radicum; ita ut cubi, & quadrato quadrata, &c. absciſſarum sint ut cubi, quadrato quadrata, &c. parallelarum; & illorum quoque radices geometricè proportionales.

Sin autem diversorum graduum fuerint dignitates parallelarum & absciſſarum, linea descripta erit curua, habens suum axem, & ad illum ordinatim applicatas, quarum dignitas est gradu superior dignitate absciſſarum: at contrà dignitas applicatarum ordinatim ad rectam [quæ curuam in vertice contingit] sumptam pro axe, gradu inferior est dignitate absciſſarum tangentis. De quo alibi latiùs dicam.

Esto

Esto igitur AGDB una ex præfatis figuris, ejusque axis AB, & vertex A; in qua quidem gradus dignitatis parallelarum sit altior gradu dignitatis abscissarum; quæratur autem linea recta contingens figuram in puncto dato C. Ducatur ex hoc puncto linea ad axem ordinatim applicata, ut CD, & ponantur exponentes dignitatum, 3, & 2. Erunt consequenter in figura parallelarum cubi ut quadrata abscissarum. Fiat abscissa AD, inter verticem & ordinatim applicatam, ad AF, axem productum, ut minor numerus 2 ad 1, differentiam exponentium, ductaque FC; Dico hanc esse tangentem quæsitam. Fig. IX.

Productum enim FA 1 in AD 2 in linea DF, factum secundum terminos positos 1 & 2, est maximum, per Theorema tertium; semperque homogeneum dignitati parallelarum; (cùm parallelarum dignitatem exponat major datorum numerorum, maximum verò productum illud oriatur ex dignitatibus quas exponunt minor numerus & differentia numerorum, quæ duo simul efficiunt numerum majorem.) Ergo si accipiamus alium punctum G in axe supra D, aut infra, & ducamus ordinatim applicatam GH, quæ secet E rectam FC (ubi opus fuerit productam,) productum FA 1 in AG 2 non erit maximum in linea FG, quale est FA 1 in AD 2 in recta FD; propterea quòd major est vel minor ratio ipsius FA ad AG quàm ad AD, & consequenter FG, FD non sunt proportionaliter divisæ. Ergo majorem rationem habet FA 1 in AD 2 ad FD 3 sibi homogeneum, quàm FA 1 in AG 2 ad FG 3, & permutando, majorem rationem habet FA 1 in AD 2 ad FA 1 in AG 2, (vel ex Lemmate quarto, AD 2 ad AG 2) quàm FD 3 ad FG 3. Sed AD 2 ad AG 2 ponitur in figura; ut CD 3 ad HG 3: FD 3 ad FG 3, ob similitudinem triangulorum, ut CD 3 ad EG 3. Ergo majorem rationem habet CD 3 ad HG 3; quàm CD 3 ad EG 3; & consequenter CD majorem rationem habet ad HG, quàm ad EG, ac proinde HG recta est minor quam EG, & punctus E cadit extra datam curvam AHCH. Eodem pacto de singulis punctis ductæ lineæ FC demonstratur illos cadere semper extrà curvam. Ergo FC est illius tangens. Quod, &c.

Hæ sunt parabolæ, ut vocant, infinitæ, quarum contingentes lineæ, quo modo ad datum punctum duci possint, ostendimus. Nunc eandem methodum in hyperbolis quoque libet experiri. Præmittimus autem hoc necessarium Lemma.

Lemma

Lemma Sextum,

Fig. X. DAto angulo A B C utcumque ſecto per rectam B D, & puncto E in alterutro laterum comprehendentium angulum datum; ex eo puncto ducere lineam rectam quæ angulum A B C ſubtendat & à recta B D ſecetur in data ratione R ad S.

Fig. XI. Fiat H G F ſegmentum circuli capiens angulum æqualem dato, & compleatur circulus; deinde ut R ad S, ita fiat F L ad L H; ut angulus A B D ad E B D, ſic arcus F I ad I H; ductaque I L producatur uſque dum pertingat ad K in circumferentia circuli, & connectantur puncta F, K, H. Ad datum punctum E fiat angulus B E A æqualis K H L, & E A ſecet B D in M & B A in puncto A. Dico rectam E A eſſe quæſitam, quæ à B D in M dividitur in ratione data.

Siquidem anguli H & E: K & B ſunt æquales, & hi ſecti proportionaliter [per trigeſimam tertiam ſexti Elementorum] à K L I, & B D. Ergo triangula F H K, A B E ſunt æquiangula, & A E ad E B, ut H F ad H K. Rurſus æquiangula fecimus triangula M B E, L K H, & conſequenter E B eſt ad E M, ut H K ad H L, & ex æqualitate ordinata A E ad E M, ut H F ad H L, & dividendo F L ad L H [ſeu R ad S] ut A M ad M E. Quod, &c.

Quòd ſi punctus datus ſit extrà, ut in O, ducemus B O rectam [punctus autem O ſic detur oportet, ut O B recta cum A B angulum faciat, nec ſit ad lineam poſita] & faciemus angulum B O L æqualem differentiæ angnlorum, H, & E B O; & O L producta ſatisfaciet quæſito.

Fig. XII. Sit hyperbole A C L, cujus diameter A B, vertex A, & dignitates ordinatim applicatarum habentes eam proportionem quam producta illis dignitatibus homogenea, orta ex dignitate abſciſſæ ducta in dignitatem, abſciſſæ & diametri, ex quibus una recta conflata intelligatur. Exempli gratiâ, quadrato cubi ordinatarum, hoc eſt L I 5 ad C D 5, ſint, ut producta B I 3 in A I 2 ad B D 3 in A D 2, genita ex quadratis abſciſſarum A I, A D, & cubis rectarum B I, B D, quippe quas efficiunt eædem abſciſſæ & diameter.

Detur punctus C, ad quem ducenda ſit tangens, & ordinatim applicetur C D. Porrò ducatur B C, producta ad partes C, quoad oportuerit, & ex Lemmate præcedenti, A E [ſecans C D in F, & in F item ſecta pro ratione 2 ad 3, qui numeri exponunt dignitates gignentes producta

producta B I 3 in A I 2, & B D 3 in A D 2, ſubtendens angulum E C A] & tandem G C parallela rectæ A E, occurrens ipſi AB in G. Dico tangentem quæſitam eſſe C G.

Sumatur in C G alius punctus K ſupra & infra C, &, ordinatim applicatis K I ſecantibus hyperbolen in L, ab I puncto ducatur I C incidens in rectam H B in puncto M, & ſecans A E in N; quæ H B ipſi A E parallela in H occurrit D C productæ.

Quoniam verò A E ſecatur in F in ratione 2 ad 3, F A 2 in F E 3, per tertium Theorema, eſt productum maximum, & ratio F E 3 ad N E 3, ſeu H B 3 ad M B 3 [propter ſimilitudinem triangulorum H C B, E C F : M B C, C E N] major eſt ratione N A 2 ad A F 2. Ergo per Lemma quintum majus eſt H B 3 in A F 2 ipſo M B 3 in N A 2; que duo producta ſi comparentur cum C G 5, primum habebit majorem rationem ad C G 5, quàm ſecundum. Sed ratio primi, quod eſt H B 3 in A F 2, ad C G 5 eadem eſt ac ratio B D 3 in A D 2 ad G D 5 [cum H B ad C G ſit ut B D ad G D, ob ſimilitudinem triangulorum H B D, C G D; eandemque proportionem habeant earum linearum cubi: tùm C G 2 ad A F 2, ut G D 2 ad A D 2] ratio ſecundi, ſeu M B 3 in N A 2, ad C G 5 eſt eadem ac ratio B I 3 in A I 2 ad I G 5 [quia ſimilia ſunt triangula M B I, C G I; & M B, C G, B I, I G rectæ earumque cubi proportionales: rurſùs ut G I 2 ad I A 2, ſic C G 2 ad A N 2] Ergo majorem rationem habet B D 3 in A D 2 ad G D 5, quàm B I 3 in I A 2 ad G I 5, & permutando, B D 3 in A D 2 ad B I 3 in A I 2 [ſeu ex natura hyperboles, C D 5 ad L I 5] majorem rationem habet, quàm D G 5 ad G I 5, ſeu [ob ſimilitudinem triangulorum K G I, C G D] C D 5 ad I K 5, & per decimam quinti Elem. dignitas, L I 5 minor eſt quàm K I 5, & ſua radix, L I recta, minor recta K I; quare punctus K eſt extra curuam. Sic de certeris punctis oſtendetur cadere extra curuam, atque adeo C G hyperbolen tangere in ſolo C puncto. Quod &c.

Hæc porrò demonſtratio etiam ad ellipſes, & circulos accommodari poteſt.

Jam verò quàm latè pateat uſus noſtri Theorematis tertii, ex propoſitis exemplis licet intelligere; nec ita multum diſſimili aut difficiliori via centra gravitatis, & quadraturas, quorum problematum paulò ante meminimus, invenimus. Interim, ſi quis Apollonii conſtructionem atque demonſtrationem trigeſimæ quartæ propoſitionis primi Conicorum libri cum noſtris comparabit, nonnihil fortaſſe proficiet in arte dilatandi propo-

ſitiones

ſitiones & demonſtrationes. Nam id quod ille de qnadratica tantum hyperbole, ellipſi, & circulo ſtatuit, nos ad omnes porrigimus hyperbolas, ellipſes, circuloſque infinitos. Quam viam placuit indicare, & ſupradicto exemplo confirmare.

LAUS DEO.

Fig: 1.

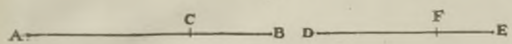

Fig: 2.

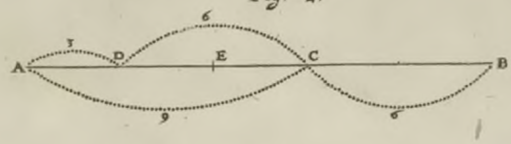

Fig: 3.

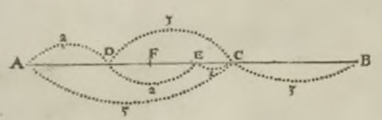

Fig: 4.

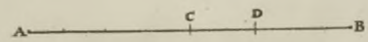

Fig: 5.

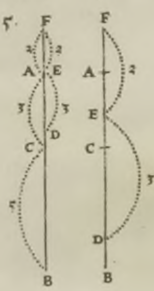

Fig: 6.

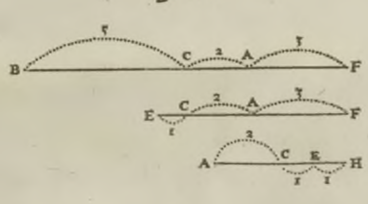

Fig: 7.

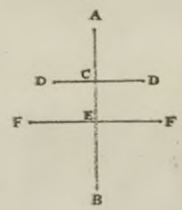

Fig: 8.

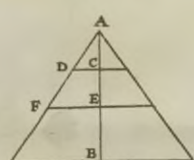

Fig: 9.

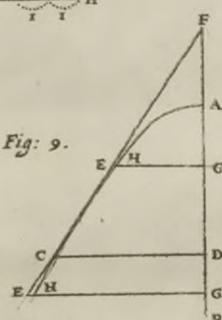

Fig: 12.

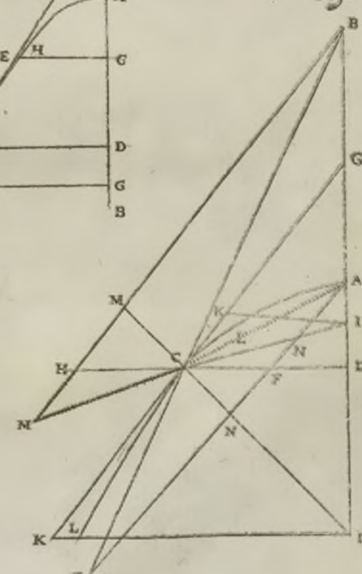

Fig: 10.

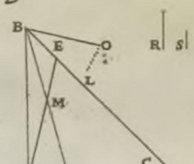

Fig: 11.