PROGRAMM,

womit

zu der auf Dienstag, den 3. April 1855, angesetzten

öffentlichen Prüfung der Zöglinge

des

städtischen Gymnasiums
zu Danzig

ergebenst einladet

Dr. Fr. Wilh. Engelhardt,

Director.

Inhalt.

1) Mathematische Abhandlung vom Oberlehrer Czwalina.
2) Schulnachrichten vom Director.

Danzig.
Druck von Edwin Groening.
1855.

Es seien zwei Gleichungen zweiter Ordnung von der Form

$$0 = a + bx + cy + dx^2 + exy + fy^2$$
$$0 = a' + b'x + c'y + d'x^2 + e'xy + f'y^2$$

gegeben, und es sollen auf zweckmässige Weise die Wurzeln derselben bestimmt werden.

Es bieten sich uns verschiedene Wege, die zum Ziele führen; doch wollen wir einen, der der beste scheint, herauswählen; denn unser Problem führt auf ihm auf die Lösung einer kubischen Gleichung und lehrt zugleich, die Werthe der Grössen x und y so finden, dass dieselben sich in 4 Reihen zusammen stellen lassen. Ausserdem wird uns unsere Methode bei der Untersuchung der gefundenen Werthe noch besondere Vortheile gewähren.

Man multiplicire die eine Gleichung mit dem unbestimmten Factor λ und addire sie zu der andern; dann findet man

$$0 = a + \lambda a' + (b + \lambda b')\, x + (c + \lambda c')\, y + (d + \lambda d')\, x^2 + (e + \lambda e')\, xy + (f + \lambda f')\, y^2$$

oder $\quad 0 = \alpha + \beta x + \gamma y + \delta x^2 + \varepsilon xy + \zeta y^2$

und wir müssen nun die Bedingungsgleichung suchen, die stattfinden muss zwischen $\alpha, \beta, \gamma, \ldots$, wenn sich die Gleichung

$$0 = \alpha + \beta x + \gamma y + \delta x^2 + \varepsilon xy + \zeta y^2$$

in zwei lineare Factoren von der Form

$$0 = (\mu + \mu' x + \mu'' y)\,(\nu + \nu' x + \nu'' y)$$

soll theilen lassen. Aus einer Vergleichung dieser Ausdrücke folgen die Gleichungen

$$\begin{array}{ll}
\alpha = \mu\nu & \qquad \delta = \mu'\nu' \\
\beta = \mu'\nu + \mu\nu' & \qquad \varepsilon = \mu''\nu' + \mu'\nu'' \\
\gamma = \mu''\nu + \mu\nu'' & \qquad \zeta = \mu''\nu''
\end{array}$$

Zugleich sehen wir, dass die Werthe von $\alpha, \beta, \gamma, \ldots$ sich nicht ändern, wenn wir statt μ, μ', μ'' setzen $\mu\nu, \mu'\nu, \mu''\nu$ und zu gleicher Zeit statt ν, ν', ν'' die Werthe $\frac{\nu}{\nu}, \frac{\nu'}{\nu}, \frac{\nu''}{\nu}$.

Nennen wir die neuen Coefficienten $\mu_{,}, \mu_{,}', \mu_{,}''$ $\nu_{,}, \nu_{,}', \nu_{,}''$, so wird

$$\begin{array}{lll}
\alpha = \mu_{,} & & \text{oder da aus } \beta = \mu_{,}' + \alpha\nu_{,}' \\
\beta = \mu_{,}' + \mu_{,}\nu_{,}' & \beta = \mu_{,}' + \alpha\nu_{,}' & \text{sein wird} \quad \mu' = \beta - \alpha\nu_{,}' \\
\gamma = \mu_{,}'' + \mu_{,}\nu_{,}'' & \gamma = \mu_{,}'' + \alpha\nu_{,}'' & \gamma = \mu_{,}'' + \alpha\nu_{,}'' \\
\delta = \mu_{,}'\nu_{,}' & \delta = \mu_{,}'\nu_{,}' & \delta = \beta\nu_{,}' - \alpha\nu_{,}'^{2} \\
\varepsilon = \mu_{,}''\nu_{,}' + \mu_{,}'\nu_{,}'' & \varepsilon = \mu_{,}''\nu_{,}' + \mu_{,}'\nu_{,}'' & \varepsilon = \mu_{,}''\nu_{,}' + \beta\nu_{,}'' - \alpha\nu_{,}'\nu_{,}'' \\
\zeta = \mu_{,}''\nu_{,}'' & \zeta = \mu_{,}''\nu_{,}'' & \zeta = \mu_{,}''\nu_{,}''
\end{array}$$

Ferner

$$\mu_{,}'' = \gamma - \alpha\nu_{,}''$$
$$\delta = \beta\nu_{,}' - \alpha\nu_{,}'^{2}$$
$$\varepsilon = \gamma\nu_{,}' + \beta\nu_{,}'' - 2\,\alpha\nu_{,}'\nu_{,}''$$
$$\zeta = \gamma\nu_{,}'' - \alpha\nu_{,}''^{2}$$

Aus $\varepsilon = \gamma\nu_{,}' + \beta\nu_{,}'' - 2\,\alpha\nu_{,}'\nu_{,}''$ folgt $\nu_{,}'' = \dfrac{\varepsilon - \gamma\nu_{,}'}{\beta - 2\,\alpha\nu_{,}'}$, woher

$$\zeta\,.\,(\beta - 2\,\alpha\nu_{,}')^{2} = (\varepsilon - \gamma\nu_{,}')\,(\beta - 2\,\alpha\nu_{,}')\,\gamma - \alpha\,(\varepsilon - \gamma\nu_{,}')^{2} \quad \text{oder}$$

$$\beta^{2}\zeta - 4\,\alpha\beta\zeta\nu_{,}' + 4\,\alpha^{2}\zeta\nu_{,}'^{2} = \beta\gamma\varepsilon - 2\,\alpha\gamma\varepsilon\nu_{,}' - \beta\gamma^{2}\nu_{,}' + 2\,\alpha\gamma^{2}\nu_{,}'^{2} - \alpha\varepsilon^{2} + 2\,\alpha\gamma\varepsilon\nu_{,}' - \alpha\gamma^{2}\nu_{,}'^{2}$$

oder

$$\alpha\varepsilon^{2} + \beta^{2}\zeta - \beta\gamma\varepsilon = \beta\,(4\,\alpha\zeta - \gamma^{2})\,\nu_{,}' - \alpha\,(4\,\alpha\zeta - \gamma^{2})\,\nu_{,}'^{2}\,.$$

Es war $\delta = \beta\nu_{,}' - \alpha\nu_{,}'^{2}$
und wenn man diese letztere Gleichung multiplicirt mit $(4\,\alpha\zeta - \gamma^{2})$,
so erhält man folgende Bedingungsgleichung:

$$\alpha\varepsilon^{2} - \beta^{2}\zeta + \gamma^{2}\delta - \beta\gamma\varepsilon - 4\,\alpha\delta\zeta = 0$$

Setzt man nun in diese die Werthe der Coefficienten α, β, γ . ., so findet man die kubische Gleichung, die in ihren Wurzeln den Werth des Factors λ giebt.

Es wird

$$\alpha\varepsilon^{2} = ae^{2} + e\,(ea' + 2\,e'a)\,\lambda + e'\,(e'a + 2\,ea')\,\lambda^{2} + a'e'^{2}\lambda^{3}$$
$$\beta^{2}\zeta = b^{2}f + b\,(bf' + 2\,b'f)\,\lambda + b'\,(b'f + 2\,bf')\,\lambda^{2} + b'^{2}f'\lambda^{3}$$
$$\gamma^{2}\delta = c^{2}d + c\,(cd' + 2\,c'd)\,\lambda + c'\,(c'd + 2\,cd')\,\lambda^{2} + c'^{2}d'\lambda^{3}$$
$$-\,\beta\gamma\varepsilon = -\,bce - (ecb' + ec'b + e'cb)\,\lambda - (eb'c' + e'bc' + e'b'c)\,\lambda^{2} - b'c'e'\lambda^{3}$$
$$-\,4\,\alpha\delta\zeta = -\,4\,adf - 4\,(adf' + ad'f + a'df)\,\lambda - 4\,(ad'f' + a'df' + a'd'f)\,\lambda^{2} - 4\,a'd'f'\lambda^{3}$$

Und hieraus

$$\begin{aligned}
&[a'e'^{2} + b'^{2}f' + c'^{2}d' - b'c'e' - 4\,a'd'f']\,\lambda^{3} - [bc'e' + b'ce' + b'c'e + 4\,(ad'f' + a'df' + a'd'f)\\
&- e'\,(e'a + 2\,ea') - b'\,(b'f + 2\,bf') - c'\,(c'd + 2\,cd')]\,\lambda^{2} + [e\,(ea' + 2\,e'a) + b\,(bf' + 2\,b'f)\\
&\quad + c\,(cd' + 2\,c'd) - bce' - bc'e - b'ce - 4\,(adf' + ad'f + a'df)]\,\lambda\\
&\quad - [bce + 4\,adf - ae^{2} - b^{2}f - c^{2}d] = 0
\end{aligned}$$

Dieselbe Gleichung können wir auch auf einem andern Wege erhalten, den wir, da er uns im Folgenden von Nutzen sein wird, hier andeuten wollen.

Aus den Gleichungen

$$\alpha = \mu\nu \qquad \delta = \mu'\nu'$$
$$\beta = \mu'\nu + \mu\nu' \qquad \varepsilon = \mu''\nu' + \mu'\nu''$$
$$\gamma = \mu''\nu + \mu\nu'' \qquad \zeta = \mu''\nu''$$

aus denen $\nu = \dfrac{1}{\mu}\,\alpha$ ist, wird: $\beta = \dfrac{\mu'}{\mu}\,\alpha + \dfrac{\mu}{\mu'}\,\delta$

$$\nu' = \frac{1}{\mu'}\,\delta \qquad \gamma = \frac{\mu''}{\mu}\,\alpha + \frac{\mu}{\mu''}\,\zeta$$

$$\nu'' = \frac{1}{\mu''}\,\zeta \qquad \varepsilon = \frac{\mu'}{\mu''}\,\zeta + \frac{\mu''}{\mu'}\,\delta$$

Setzen wir nun $\frac{\mu'}{\mu} = z_0 \quad \frac{\mu''}{\mu} = z_,$ so finden wir

$$z_0{}^2 - \frac{\beta}{\alpha} z_0 = - \frac{\delta}{\alpha}$$

$$z_,{}^2 - \frac{\gamma}{\alpha} z_, = - \frac{\zeta}{\alpha} \quad \text{oder}$$

$$z_0 = \frac{\beta + R}{2\alpha}$$

$$z_, = \frac{\gamma + R'}{2\alpha},$$

wo $R^2 = \beta^2 - 4\alpha\delta$; $R'^2 = \gamma^2 - 4\alpha\zeta$ gesetzt ist.

Das Zeichen von R und R' ist noch nicht bestimmt. Setzt man nun die Werthe von z_0 und $z_,$ in die Gleichung

$$\varepsilon = \frac{z_0}{z_,}\zeta + \frac{z_,}{z_0}\delta,$$

so wird sie

$$\varepsilon = \frac{\beta + R}{\gamma + R'} . \zeta + \frac{\gamma + R'}{\beta + R} . \delta.$$

Aber es war

$$\delta = - \frac{(R + \beta)(R - \beta)}{4\alpha}$$

$$\zeta = - \frac{(R' + \gamma)(R' - \gamma)}{4\alpha}$$

und setzt man diese Werthe in die vorige Gleichung, so wird

$$4\alpha\varepsilon = (\beta + R)(\gamma - R') + (\gamma + R')(\beta - R)$$

oder

$$2\alpha\varepsilon = \beta\gamma - RR'$$

Die früher unterlassene Bestimmung der Zeichen von R und R' ist in dieser Gleichung enthalten. Erhebt man diese Gleichung zum Quadrat und dividirt durch 4α, so ist

$$\alpha\varepsilon^2 + \beta^2\zeta + \gamma^2\delta - \beta\gamma\varepsilon - 4\alpha\delta\zeta = 0$$

woraus sich wiederum die kubische Gleichung für λ ergiebt.

Es seien nun $\lambda_,$, λ_2, λ_3 die 3 Wurzeln dieser Gleichung, und wir sehen, dass die Zerlegung des Ausdrucks

$$0 = \alpha + \beta x + \gamma y + \delta x^2 + \varepsilon xy + \zeta y^2$$

in lineare Factoren wegen der 3 Wurzeln $\lambda_,$, λ_2, λ_3 auf 3 Arten gemacht werden könne. Desshalb aber wird es auch noch nöthig, die Coefficienten μ, μ', μ'', ν, ν', ν'' zu finden als Factoren von λ.

Weil $\frac{\mu'}{\mu} = z_0 = \frac{\beta + R}{2\alpha}$ $\quad \frac{\mu''}{\mu} = z_, = \frac{\gamma + R'}{2\alpha}$, so wird

$$\nu = \alpha . \frac{1}{\mu}$$

$$\mu' = \mu \left(\frac{\beta + R}{2}\right)\frac{1}{\alpha}, \qquad \nu' = \frac{2\alpha\delta}{\mu(\beta + R)}$$

$$\mu'' = \mu \left(\frac{\gamma + R'}{2}\right)\frac{1}{\alpha}, \qquad \nu'' = \frac{2\alpha\zeta}{\mu(\gamma + R')}$$

Setzen wir nun $\mu\nu = \alpha \cdot \frac{\alpha}{\alpha}$, woher wir $\mu = \alpha$, $\nu = \frac{\alpha}{\alpha}$ annehmen können, so ändern sich die Werthe von μ', μ'', ν', ν'', wenn wir

$$2\,\alpha\delta = \frac{(\beta + R)\,(\beta - R)}{2}$$

$$2\,\alpha\zeta = \frac{(\gamma + R')\,(\gamma - R')}{2} \quad \text{setzen, in}$$

$$\mu = \alpha \qquad \nu = \alpha \cdot \frac{1}{\alpha}$$

$$\mu' = \frac{\beta + R}{2} \qquad \nu' = \frac{\beta - R}{2} \cdot \frac{1}{\alpha}$$

$$\mu'' = \frac{\gamma + R'}{2} \qquad \nu'' = \frac{\gamma - R'}{2} \cdot \frac{1}{\alpha}$$

Dann nimmt die Zerlegung unseres Ausdrucks folgende Form an:

$$\frac{1}{\alpha}\left(\alpha + \frac{\beta + R}{2} \cdot x + \frac{\gamma + R'}{2} \cdot y\right)\left(\alpha + \frac{\beta - R}{2} \cdot x + \frac{\gamma - R'}{2} \cdot y\right) = 0$$

Setzen wir nun hier der Reihe nach statt α, β, γ, ... die Werthe

$$a + \lambda_{,}a', \quad b + \lambda_{,}b' \ldots$$

dann $$a + \lambda_2 a', \quad b + \lambda_2 b' \ldots$$

endlich $$a + \lambda_3 a', \quad b + \lambda_3 b' \ldots$$

so finden wir folgende, in lineare Factoren zerlegte Gleichungen

für $\lambda_{,}$ ... $\quad 0 = (p + qx + ry)\,(s + tx + uy)$

λ_2 ... $\quad 0 = (p' + q'x + r'y)\,(s' + t'x + u'y)$

λ_3 ... $\quad 0 = (p'' + q''x + r''y)\,(s'' + t''x + u''y)$

wo

$$p = a + \lambda_{,}a'$$

$$q = b + \lambda_{,}b' + \sqrt{[(b + \lambda_{,}b')^2 - 4\,(a + \lambda_{,}a')\,(d + \lambda_{,}d')]}$$

$$r = c + \lambda_{,}c' + \sqrt{[(c + \lambda_{,}c')^2 - 4\,(a + \lambda_{,}a')\,(f + \lambda_{,}f')]}$$

$$s = (a + \lambda_{,}a')\,\frac{1}{a + \lambda_{,}a'}$$

$$t = \frac{b + \lambda_{,}b' - \sqrt{[(b + \lambda_{,}b')^2 - 4\,(a + \lambda_{,}a')\,(d + \lambda_{,}d')]}}{a + \lambda_{,}a'}$$

$$u = \frac{c + \lambda_{,}c' - \sqrt{[(c + \lambda_{,}c')^2 - 4\,(a + \lambda_{,}a')\,(f + \lambda_{,}f')]}}{a + \lambda_{,}a'}$$

Die übrigen Coefficienten p', q', r' ... p'', q'', r'', s'' ... werden dieselben Functionen von $\lambda_{,}$ wenn wir nur für $\lambda_{,}$ setzen λ_2 und λ_3.

Wenn wir aus den drei Gleichungen zwei zusammenstellen, so hat eine solche Combination immer denselben Werth, den die Gleichungen

$$0 = a + bx + cy + dx^2 + exy + fy^2$$

$$0 = a' + b'x + c'y + d'x^2 + e'xy + f'y^2 \quad \text{haben,}$$

wesshalb auch aus der Lösung zweier Gleichungen, wie

$$0 = (p + qx + ry)(s + tx + uy)$$
$$0 = (p' + q'x + r'y)(s' + t'x + u'y)$$

zugleich die Lösung jener folgt. Aus diesen erhalten wir aber, wenn wir folgende Gleichungen auflösen

$$\begin{array}{ll} p + qx + ry = 0 & p' + q'x + r'y = 0 \\ p + qx + ry = 0 & s' + t'x + u'y = 0 \\ s + tx + uy = 0 & p' + q'x + r'y = 0 \\ s + tx + uy = 0 & s' + t'x + u'y = 0 \end{array}$$

die Werthe

$$\begin{cases} x = \dfrac{pr' - p'r}{q'r - qr'} \\ y = \dfrac{p'q - pq'}{q'r - qr'} \end{cases} \quad \begin{cases} x = \dfrac{pu' - s'r}{t'r - qu'} \\ y = \dfrac{pt' - s'q}{t'r - qu'} \end{cases} \quad \begin{cases} x = \dfrac{sr' - p'u}{qu' - tr'} \\ y = \dfrac{p't - sq'}{q'u - tr'} \end{cases} \quad \begin{cases} x = \dfrac{su' - s'u}{t'u - tu'} \\ y = \dfrac{s't - st'}{t'u - tu'} \end{cases}$$

Eine andere Combination zweier Gleichungen, welche aus den 3 Werthen von λ sich ergeben, kann keine neuen Werthe von x und y geben, wesshalb die gefundenen sich auch nicht ändern können, wenn wir statt λ_1 und λ_2 irgend zwei andere Wurzeln der kubischen Gleichung setzen.

Den zuletzt gefundenen Werthen von x und y fehlt aber noch jene elegante und symmetrische Form, deren Anblick allein schon zeigt, dass die Werthe von x und y sich nicht ändern, wie wir auch die Wurzeln λ_1, λ_2, λ_3 mit einander verwechseln. Um diese Form zu finden, wollen wir eine Betrachtung aus dem Gebiete der Geometrie zu Hülfe nehmen. Unser Problem giebt uns drei Systeme von geraden Linien, die so beschaffen sind, dass immer drei Linien, und zwar aus jedem System eine, in einen Punkt zusammenlaufen. Desshalb existiren 4 Punkte, deren Coordinaten unsere Grössen x und y werden. Wenn daher eine Linie aus dem einen, die andere aus dem andern System, in einem Puncte sich schneiden, so muss auch die dritte aus dem dritten System in diesen Punct treffen. Oder, was dasselbe sagt, die Gleichung des einen Systems kann immer aus zwei Gleichungen der andern Systeme abgeleitet werden. In Folge dieser Betrachtung nehmen unsere Gleichungen folgende Form an:

$$u^2 - v^2 = 0$$
$$v^2 - w^2 = 0$$
$$w^2 - u^2 = 0$$

wo u, v, w lineare Functionen von x und y bezeichnen.

Setzt man statt dieser Form folgende:

$$(u - v)(u + v) = 0$$
$$(v - w)(v + w) = 0$$
$$(w - u)(w + u) = 0$$

so ergiebt sich augenblicklich eine Combination von zwei Gleichungen, welche auch zugleich die dritte involvirt; es ist folgende:

$$
\begin{array}{llll}
u - v = 0 & v - w = 0, & \text{woraus folgt:} & w - u = 0 \\
u + v = 0 & v - w = 0, & & w + u = 0 \\
u - v = 0 & v + w = 0, & & u + w = 0 \\
u + v = 0 & v + w = 0, & & u - w = 0
\end{array}
$$

Wenn nun die Functionen u, v, w, bestimmt sind, so wird daraus folgen, dass in Bezug auf die Wurzeln λ_1, λ_2, λ_3 die Werthe von x und y symmetrisch werden.

Man erhält:

$$
\begin{array}{lll}
u^2 - v^2 = \alpha' + \beta' x + \gamma' y + \delta' x^2 + \varepsilon' xy + \zeta' y^2 & \text{für die Wurzel} & \lambda_1 \\
v^2 - w^2 = \alpha'' + \beta'' x + \gamma'' y + \delta'' x^2 + \varepsilon'' xy + \zeta'' y^2 & ,, & \lambda_2 \\
w^2 - u^2 = \alpha''' + \beta''' x + \gamma''' y + \delta''' x^2 + \varepsilon''' xy + \zeta''' y^2 & ,, & \lambda_3
\end{array}
$$

wo α', β', . . . die bekannten Functionen $a + \lambda_1 a'$, $b + \lambda_1 b'$, . . . sind. Damit aber unsere Gleichungen die gewünschte Gestalt annehmen können, ist es nöthig, dass ihre Summe $= 0$ werde. Zu dem Ende wollen wir eine jede Gleichung mit einem constanten Factor, der jedoch vorher gefunden werden muss, multipliciren. — Es sei nun

$$
\begin{aligned}
u &= g + hx + iy \\
v &= g' + h'x + i'y \\
w &= g'' + h''x + i''y
\end{aligned}
$$

und unsere drei Gleichungen werden:

$$
\begin{array}{ll}
\text{I.} & (g + hx + iy + g' + h'x + i'y)\,(g + hx + iy - g' - h'x - i'y) = 0 \\
\text{II.} & (g' + h'x + i'y + g'' + h''x + i''y)\,(g' + h'x + i'y - g'' - h''x - i''y) = 0 \\
\text{III.} & (g'' + h''x + i''y + g + hx + iy)\,(g'' + h''x + i''y - g - hx - iy) = 0
\end{array}
$$

Aus den beiden ersten erhalten wir sogleich:

$$
\begin{array}{ll}
g + g' + (h + h')x + (i + i')y = 0; & g' + g'' + (h' + h'')x + (i' + i'')y = 0 \\
g + g' + (h + h')x + (i + i')y = 0; & g' - g'' + (h' - h'')x + (i' - i'')y = 0 \\
g - g' + (h - h')x + (i - i')y = 0; & g' + g'' + (h' + h'')x + (i' + i'')y = 0 \\
g - g' + (h - h')x + (i - i')y = 0; & g' - g'' + (h' - h'')x + (i' - i'')y = 0
\end{array}
$$

Und hieraus ergeben sich die Werthe von x und y:

$$
\left\{
\begin{array}{ll}
\text{I.} & x = \dfrac{(g' + g'')(i + i') - (g + g')(i' + i'')}{(h + h')(i' + i'') - (h' + h'')(i + i')} = \dfrac{(g'i - gi') + (g''i - gi'') + (g''i' - g'i'')}{(i'h - ih') + (i''h - ih'') + (i''h' - i'h'')} \\[2ex]
\text{I.} & y = \dfrac{(g + g')(h' + h'') - (g' + g'')(h + h')}{(h + h')(i' + i'') - (h' + h'')(i + i')} = \dfrac{(gh' - g'h) + (gh'' - g''h) + (g'h'' - g''h')}{(i'h - ih') + (i''h - ih'') + (i''h' - i'h'')}
\end{array}
\right.
$$

$$
\left\{
\begin{array}{ll}
\text{II.} & x = \dfrac{(g' - g'')(i + i') - (g + g')(i' - i'')}{(h + h')(i' - i'') - (h' - h'')(i + i')} = \dfrac{(ig' - i'g) - (g''i - gi'') - (g''i' - g'i'')}{(i'h - ih') - (i''h - ih'') - (i''h' - i'h'')} \\[2ex]
\text{II.} & y = \dfrac{(g + g')(h' - h'') - (g' - g'')(h + h')}{(h + h')(i' - i'') - (h' - h'')(i + i')} = \dfrac{(gh' - g'h) - (gh'' - g''h) - (g'h'' - g''h')}{(i'h - ih') - (i''h - ih'') - (i''h' - i'h'')}
\end{array}
\right.
$$

$$\left\{\begin{array}{l} \text{III.} \quad x = \dfrac{(g' + g'')(i - i') - (g - g')(i' + i'')}{(h - h')(i' + i'') - (h' + h'')(i - i')} = \dfrac{(g'i - gi') + (g''i - gi'') - (g''i' - g'i'')}{(i'h - ih') + (i''h - ih'') - (i''h' - i'h'')} \\ \text{III.} \quad y = \dfrac{(g - g')(h' + h'') - (g' + g'')(h - h')}{(h - h')(i' + i'') - (h' + h'')(i - i')} = \dfrac{(gh' - g'h) + (gh'' - g''h) - (g'h'' - g''h')}{(i'h - ih') + (i''h - ih'') - (i''h' - i'h'')} \end{array}\right.$$

$$\left\{\begin{array}{l} \text{IV.} \quad x = \dfrac{(g' - g'')(i - i') - (g - g')(i' - i'')}{(h - h')(i' - i'') - (h' - h'')(i - i')} = \dfrac{(g'i - gi') - (g''i - gi'') + (g''i' - g'i'')}{(i'h - ih') - (i''h - ih'') + (i''h' - i'h'')} \\ \text{IV.} \quad y = \dfrac{(g - g')(h' - h'') - (g' - g'')(h - h')}{(h - h')(i' - i'') - (h' - h'')(i - i')} = \dfrac{(gh' - g'h) - (gh'' - g''h) + (g'h'' - g''h')}{(i'h - ih') - (i''h - ih'') + (i''h' - i'h'')} \end{array}\right.$$

Aus diesen Formeln sehen wir sogleich, dass die Werthe von x und y folgende Gestalt annehmen:

$$x = \frac{b \pm b' \pm b''}{a \pm a' \pm a''} \qquad y = \frac{c \pm c' \pm c''}{a \pm a' \pm a''}, \quad \text{wo}$$

$$\begin{array}{lll} b = ig' - gi' & c = gh' - g'h & a = i'h - ih' \\ b' = g''i - gi'' & c' = gh'' - g''h & a' = i''h - ih'' \\ b'' = g''i' - g'i'' & c'' = g'h'' - g''h' & a'' = i''h' - i'h'' \end{array}$$

Es bleibt nun zur Lösung der Aufgabe noch die Bestimmung der Coefficienten a ..., b ..., c ... übrig. — Aus folgenden Gleichungen:

$$(g + hx + iy)^2 - (g' + h'x + i'y)^2 = (\alpha' + \beta'x + \gamma'y + \delta'x^2 + \varepsilon'xy + \zeta'y^2)\,\pi_{,}$$

$$(g' + h'x + i'y)^2 - (g'' + h''x + i''y)^2 = (\alpha'' + \beta''x + \gamma''y + \delta''x^2 + \varepsilon''xy + \zeta''y^2)\,\pi_2$$

$$(g'' + h''x + i''y)^2 - (g + hx + iy)^2 = (\alpha''' + \beta'''x + \gamma'''y + \delta'''x^2 + \varepsilon'''xy + \zeta'''y^2)\,\pi_3$$

erhalten wir die nachstehenden Bedingungsgleichungen:

$$\begin{array}{lll} g^2 - g'^2 = \alpha'\pi_{,} & g'^2 - g''^2 = \alpha''\pi_2 & g''^2 - g^2 = \alpha'''\pi_3 \\ 2(gh - g'h') = \beta'\pi_{,} & 2(g'h' - g''h'') = \beta''\pi_2 & 2(g''h'' - gh) = \beta'''\pi_3 \\ 2(gi - g'i') = \gamma'\pi_{,} & 2(g'i' - g''i'') = \gamma''\pi_2 & 2(g''i'' - gi) = \gamma'''\pi_3 \\ h^2 - h'^2 = \delta'\pi_{,} & h'^2 - h''^2 = \delta''\pi^2 & h''^2 - h^2 = \delta'''\pi_3 \\ 2(hi - h'i') = \varepsilon'\pi_{,} & 2(h'i' - h''i'') = \varepsilon''\pi_2 & 2(h''i'' - hi) = \varepsilon'''\pi_3 \\ i^2 - i'^2 = \zeta'\pi_{,} & i'^2 - i''^2 = \zeta''\pi_2 & i''^2 - i^2 = \zeta'''\pi_3 \end{array}$$

aus denen sich unsere Coefficienten a . . ., b . . ., c . . . bestimmen werden.

$\pi_{,}$, π_2, π_3 sind jene constanten Factoren, deren früher Erwähnung geschah, und welche bewirken, dass:

$$\begin{array}{lcl} \alpha'\pi_{,} + \alpha''\pi_2 + \alpha'''\pi_3 = 0 & \text{oder} & a(\pi_{,} + \pi_2 + \pi_3) + a'(\lambda_{,}\pi_{,} + \lambda_2\pi_2 + \lambda_3\pi_3) = 0 \\ \beta'\pi_{,} + \beta''\pi_2 + \beta'''\pi_3 = 0 & „ & b(\pi_{,} + \pi_2 + \pi_3) + b'(\lambda_{,}\pi_{,} + \lambda_2\pi_2 + \lambda_3\pi_3) = 0 \\ \gamma'\pi_{,} + \gamma''\pi_2 + \gamma'''\pi_3 = 0 & „ & c(\pi_{,} + \pi_2 + \pi_3) + c'(\lambda_{,}\pi_{,} + \lambda_2\pi_2 + \lambda_3\pi_3) = 0 \\ \text{etc.} & & \text{etc.} \end{array}$$

werden. Es leuchtet nun ein, dass diesen Bedingungsgleichungen Genüge geschieht, wenn

$$\pi_{,} + \pi_2 + \pi_3 = 0 \qquad \text{oder} \qquad \frac{\pi_{,}}{\pi_3} + \frac{\pi_2}{\pi_3} + 1 = 0$$

$$\lambda_{,}\pi_{,} + \lambda_2\pi_2 + \lambda_3\pi_3 = 0 \qquad \text{"} \qquad \frac{\lambda_{,}\pi_{,}}{\pi_3} + \frac{\lambda_2\pi_2}{\pi_3} + \lambda_3 = 0 \qquad \text{ist.}$$

Hieraus ergiebt sich aber

$$\frac{\pi_{,}}{\pi_3} = \frac{\lambda_2 - \lambda_3}{\lambda_{,} - \lambda_2} \qquad \text{und} \qquad \frac{\pi_2}{\pi_3} = \frac{\lambda_3 - \lambda_{,}}{\lambda_{,} - \lambda_2}$$

oder $\pi_{,} = \lambda_2 - \lambda_3; \quad \pi_2 = \lambda_3 - \lambda_{,}; \quad \pi_3 = \lambda_{,} - \lambda_2.$

Der Kürze wegen wollen wir jedoch die Bezeichnungen $\pi_{,}$, π_2, π_3, nachdem wir ihre Werthe kennen gelernt haben, beibehalten.

Auf diesem Wege werden wir nun die Grössen a . . ., b . . ., c . . . finden.

Wenn wir die Grössen $(g^2 - g'^2)$ und $(i^2 - i'^2)$ und die Werthe derselben mit einander multipliciren und das Product 4 mal nehmen, so erhalten wir:

$$4\,g^2i^2 - 4\,g^2i'^2 - 4\,g'^2i^2 + 4\,g'^2i'^2 = 4\,\alpha'\zeta'\pi_{,}^2$$

Erheben wir ferner die Grösse $2\,(gi - g'i')$ zum Quadrat, so wird:

$$4\,g^2i^2 - 8\,gig'i' + 4\,g'^2i'^2 = \gamma'^2\pi_{,}^2$$

und die Subtraction dieser Gleichungen von einander ergiebt:

$$4\,(g'i - gi')^2 = (\gamma'^2 - 4\,\alpha'\zeta')\,\pi_{,}^2, \qquad \text{woraus}$$

$$g'i - gi' = \frac{\pi'}{2}\sqrt{(\gamma'^2 - 4\,\alpha'\zeta')} = \frac{\pi_{,}}{2}\,R'$$

Auf ganz ähnliche Weise finden wir aus den andern Bedingungsgleichungen:

$$g''i' - g'i'' = \frac{\pi_2}{2}\sqrt{(\gamma''^2 - 4\,\alpha''\zeta'')} = \frac{\pi_2}{2}\,R''$$

$$g''i - gi'' = \frac{\pi_3}{2}\sqrt{(\gamma'''^2 - 4\,\alpha'''\zeta''')} = \frac{\pi_3}{2}\,R'''$$

Wenn wir ferner zusammenstellen $(g^2 - g'^2)$ und $(h^2 - h'^2)$, so ergiebt sich:

$$4\,(gh - g'h')^2 - 4\,(g^2 - g'^2)\,(h^2 - h'^2) = \frac{\pi_{,}^2}{2}\,(\beta'^2 - 4\,\alpha'\delta')$$

und hieraus $\quad gh' - g'h = \frac{\pi_{,}}{2}.\sqrt{(\beta'^2 - 4\,\alpha'\delta')} = \frac{\pi_{,}}{2}\,P'$

ebenso $\quad g'h'' - g''h' = \frac{\pi_2}{2}.\sqrt{(\beta''^2 - 4\,\alpha''\delta'')} = \frac{\pi_2}{2}\,P''$

$$gh'' - g''h = \frac{\pi_3}{2}.\sqrt{(\beta'''^2 - 4\,\alpha'''\delta''')} = \frac{\pi_3}{2}\,P'''$$

Eine dritte Combination der Grössen $(h^2 - h'^2)$ und $(i^2 - i'^2)$ wird uns endlich geben:

$$4\,(hi - h'i')^2 - 4\,(h^2 - h'^2)\,(i^2 - i'^2) = \pi_{,}^2\,(\varepsilon'^2 - 4\,\delta'\zeta')$$

oder $\quad i'h - ih' = \frac{\pi_{,}}{2}\sqrt{(\varepsilon'^2 - 4\,\delta'\zeta')} = \frac{\pi'}{2}\,.\,Q'$

ebenso $\quad i''h' - i'h'' = \frac{\pi_2}{2} \sqrt{(\varepsilon''^2 - 4\,\delta''\zeta'')} = \frac{\pi_2}{2} Q''$

und $\quad i''h - ih'' = \frac{\pi_3}{2} \sqrt{(\varepsilon'''^2 - 4\,\delta'''\zeta''')} = \frac{\pi_3}{2} Q'''$

Wir könnten nun wohl auch die Grössen $Q', \ldots$ durch die Grössen $P', \ldots$ und $R', \ldots$ ausdrücken, indem wir leicht die Gleichung

$$\frac{1}{2} Q' = (\gamma' P' - \beta' R') \frac{1}{4\,\alpha'}$$

erhalten; da jedoch die Formeln dadurch nicht an Eleganz gewinnen möchten, so wollen wir die Grösse $Q', \ldots$ beibehalten. Dann erst finden wir, wenn wir die für $(g'i - gi') \ldots (gh' - g'h) \ldots (i'h - ih') \ldots$ gefundenen Werthe substituiren, folgende symmetrische Werthe für x und y:

$$x = \frac{R'\pi_1 \pm R''\pi_2 \pm R'''\pi_3}{Q'\pi_1 \pm Q''\pi_2 \pm Q'''\pi_3}$$

$$y = \frac{P'\pi_1 \pm P''\pi_2 \pm P'''\pi_3}{Q'\pi_1 \pm Q''\pi_2 \pm Q'''\pi_3} \; {}^{*)}$$

Schon im ersten Abschnitte gaben wir eine Gleichung, die uns andeutete, welcher Zeichen wir uns bei den Grössen P und R bedienen sollten; es war

$$PR = \gamma\beta - 2\,\alpha\varepsilon .$$

Um ähnliche Bedingungen für die Grössen QR und PQ zu erhalten, wollen wir jene 6 Bedingungsgleichungen zu Hülfe nehmen, aus denen h, g, i, etc. sich bestimmten, und zwar in der Form

$$(g - g')(g + g') = \alpha'\pi_1, \qquad (g + g')(h - h') + (g - g')(h + h') = \beta'\pi,$$

$$(h - h')(h + h') = \delta'\pi_1, \qquad (g + g')(i - i') + (g - g')(i + i') = \gamma'\pi,$$

$$(i - i')(i + i') = \zeta'\pi_1, \qquad (h + h')(i - i') + (h - h')(i + i') = \varepsilon'\pi,$$

Hieraus:

$$1. \quad \frac{g + g'}{h + h'} \delta' + \frac{h + h'}{g + g'} \alpha' = \beta'$$

$$2. \quad \frac{g + g'}{i + i'} \zeta' + \frac{i + i'}{g + g'} \alpha' = \gamma'$$

$$3. \quad \frac{i + i'}{h + h'} \delta' + \frac{h + h'}{i + i'} \zeta' = \varepsilon'$$

---

*) Wenn wir die Werthe für die einzelnen Grössen setzen, so erhalten wir die vollständigen Ausdrücke für x und y, und zwar werden die Zähler für

$$x \ldots (\lambda_2 - \lambda_3)\sqrt{[c^2 - 4af + 2\lambda_1(cc' - 2af' - 2a'f) + \lambda_1^2(c'^2 - 4a'f')]} \pm (\lambda_3 - \lambda_1)\sqrt{[c^2 - 4af + 2\lambda_2(cc' - 2af' - 2a'f) + \lambda_2^2(c'^2 - 4a'f')]}$$
$$\pm (\lambda_1 - \lambda_2)\sqrt{[c^2 - 4af + 2\lambda_3(cc' - 2af' - 2a'f) + \lambda_3^2(c'^2 - 4a'f')]}$$

$$y \ldots (\lambda_2 - \lambda_3)\sqrt{[b^2 - 4ad + 2\lambda_1(bb' - 2a'd - 2ad') + \lambda_1^2(b'^2 - 4a'd')]} \pm (\lambda_3 - \lambda_1)\sqrt{[b^2 - 4ad + 2\lambda_2(bb' - 2a'd - 2ad') + \lambda_2^2(b'^2 - 4a'd')]}$$
$$\pm (\lambda_1 - \lambda_2)\sqrt{[b^2 - 4ad + 2\lambda_3(bb' - 2a'd - 2ad') + \lambda_3^2(b'^2 - 4a'd')]}$$

Der Nenner für beide Grössen wird:

$$(\lambda_2 - \lambda_3)\sqrt{[e^2 - 4df + 2\lambda_1(ee' - 2df' - 2d'f) + \lambda_1^2(e'^2 - 4d'f')]} \pm (\lambda_3 - \lambda_1)\sqrt{[e^2 - 4df + 2\lambda_2(ee' - 2df' - 2d'f) + \lambda_2^2(e'^2 - 4d'f')]}$$
$$\pm (\lambda_1 - \lambda_2)\sqrt{[e^2 - 4df + 2\lambda_3(ee' - 2df' - 2d'f) + \lambda_3^2(e'^2 - 4d'f')]}$$

Suchen wir aus 1. und 2. die Werthe von $\frac{i + i'}{h + h'}$ und $\frac{h + h'}{i + i'}$ und setzen dieselben in die dritte Gleichung, so erhalten wir, wie wir schon oben gesehen haben, die Gleichung

$$P'R' = \gamma'\beta' - 2\,\alpha'\varepsilon'.$$

Aus der dritten Gleichung erhalten wir $\frac{h + h'}{i + i'} = \frac{\varepsilon' \pm Q'}{2\zeta'}$,

wo $Q' = \sqrt{(\varepsilon'^2 - 4\delta'\zeta')}$ bezeichnet, und aus der zweiten wird $\frac{g + g'}{i + i'} = \frac{\gamma' \pm R'}{2\zeta'}$,

woraus $\frac{h + h'}{g + g'} = \frac{\varepsilon' \pm Q'}{\gamma' \pm R'}$; ausserdem wird

$$\delta' = \frac{(\varepsilon' - Q')(\varepsilon' + Q')}{4\zeta'}$$

$$\alpha' = \frac{(\gamma' - R')(\gamma' + R')}{4\zeta'}.$$

Diese Werthe in die erste Gleichung gesetzt ergeben

$$\frac{\gamma' \pm R'}{\varepsilon' \pm Q'} \cdot \frac{(\varepsilon' - Q')(\varepsilon' + Q')}{4\zeta'} + \frac{\varepsilon' \pm Q'}{\gamma' \pm R'} \cdot \frac{(\gamma' - R')(\gamma' + R')}{4\zeta'} = \beta',$$

woraus $R'Q' = \gamma'\varepsilon' - 2\,\beta'\zeta'$.

Wenn wir endlich die aus der ersten und dritten Gleichung gefundenen Werthe in die zweite setzen, so finden wir

$$P'Q' = \beta'\varepsilon' - 2\,\gamma'\delta'.$$

Daher sind die Bedingungsgleichungen für die Zeichen der Grössen P', Q', R' folgende:

$$P'R' = bc - 2\,ae + [bc' + b'c - 2\,(ae' + a'e)]\,\lambda_{,} + (b'c' - 2\,a'e')\,\lambda_{,}^2 = \gamma'\beta' - 2\,\alpha'\varepsilon'$$

$$Q'R' = ce - 2\,bf + [ce' + c'e - 2\,(bf' + b'f)]\,\lambda_{,} + (c'e' - 2\,b'f')\,\lambda_{,}^2 = \varepsilon'\gamma' - 2\,\beta'\zeta'$$

$$P'Q' = be - 2\,cd + [be' + b'e - 2\,(cd' + c'd)]\,\lambda_{,} + (b'e' - 2\,c'd')\,\lambda_{,}^2 = \beta'\varepsilon' - 2\,\gamma'\delta'$$

Es bedarf wohl kaum besonders erwähnt zu werden, dass für R'', P'' . . . die andern Wurzeln der kubischen Gleichung gesetzt werden müssen. — Ausserdem bestehen zwischen den Grössen P, Q, R auch noch folgende im Vorigen angedeutete Beziehungen:

$$Q' = \frac{\gamma'P' - \beta'R'}{2\,\alpha'}; \quad P' = \frac{\gamma'Q' - \varepsilon'R'}{2\,\zeta'}; \quad R' = \frac{\varepsilon'P' - \beta'Q'}{2\,\delta'}.$$

Wir dürfen nur die Ableitung irgend einer von denselben darthun, und wir werden augenblicklich sehen, wie auch die andern darzustellen sind.

Aus den oben angeführten Gleichungen 1. und 2. finden wir

aus 1. $\frac{h + h'}{g + g'} = \frac{\beta' \pm P'}{2\,\alpha'}$

aus 2. $\frac{i + i'}{g + g'} = \frac{\gamma' \pm R'}{2\,\alpha'}$.

Wenn wir nun den einen Werth mit β', den andern mit γ' multipliciren und subtrahiren, so wird

$$\frac{i+i'}{g+g'}.\beta' - \frac{h+h'}{g+g'}.\gamma' = \pm\frac{\beta'R' - \gamma'P'}{2\alpha'} \quad \text{oder}$$

$$\beta' - \frac{h+h'}{i+i'}.\gamma' = \pm\frac{\beta'R' - \gamma'P'}{2\alpha'}.\frac{g+g'}{i+i'}.$$

Setzt man nun für $\frac{h+h'}{i+i'}$ und $\frac{g+g'}{i+i'}$ die aus den Gleichungen 3. und 2. erhaltenen Werthe, so wird

$$\beta' - \frac{\gamma'(\varepsilon' \pm Q')}{2\zeta'} = \pm\frac{\beta'R' - \gamma'P'}{2\alpha'}.\frac{\gamma' \pm R'}{2\zeta'}.$$

Da aber $\quad 2\zeta'\beta' - \gamma'\varepsilon' = -Q'R' \quad$ ist, so wird

$$\mp Q'(\gamma' \pm R') = \pm\frac{(\beta'R' - \gamma'P')}{2\alpha'}(\gamma' \pm R')$$

oder

$$Q' = \frac{\gamma'P' - \beta'R'}{2\alpha'}.$$

Wenn wir ferner die Werthe von $\frac{h+h'}{i+i'}.\gamma'$ und $\frac{g+g'}{i+i'}.\varepsilon'$ von einander subtrahiren, so erhalten wir die zweite und aus der Subtraction der Werthe für $\frac{g+g'}{h+h'}.\varepsilon'$ und $\frac{i+i'}{h+h'}.\beta'$ von einander endlich die dritte der angegebenen Relationen.

Die nächste Untersuchung, zu der wir jetzt kommen, ist die über die Realität der Werthe von x und y.

Wir werden diesen Werthen folgende Form geben können:

$$x = \frac{(\lambda_2 - \lambda_3)\sqrt{f(\lambda_1)} \pm (\lambda_3 - \lambda_1)\sqrt{f(\lambda_2)} \pm (\lambda_1 - \lambda_2)\sqrt{f(\lambda_3)}}{(\lambda_2 - \lambda_3)\sqrt{\pi(\lambda_1)} \pm (\lambda_3 - \lambda_1)\sqrt{\pi(\lambda_2)} \pm (\lambda_1 - \lambda_2)\sqrt{\pi(\lambda_3)}}$$

$$y = \frac{(\lambda_2 - \lambda_3)\sqrt{\varphi(\lambda_1)} \pm (\lambda_3 - \lambda_1)\sqrt{\varphi(\lambda_2)} \pm (\lambda_1 - \lambda_2)\sqrt{\varphi(\lambda_3)}}{(\lambda_2 - \lambda_3)\sqrt{\pi(\lambda_1)} \pm (\lambda_3 - \lambda_1)\sqrt{\pi(\lambda_2)} \pm (\lambda_1 - \lambda_2)\sqrt{\pi(\lambda_3)}},$$

wo $f(\lambda_1)$; $\pi(\lambda_1)$; $\varphi(\lambda_1)$ bestimmte, aber verschiedene Functionen von λ_1 bezeichnen.

Zunächst mögen nun zwei Wurzeln der kubischen Gleichung imaginair werden, und zwar λ_2 und λ_3. Dann wird λ_2 immer die Form $p + qi$ und λ_3 die Form $p - qi$ annehmen, wo $i = \sqrt{-1}$ ist, und es wird

$$x = \frac{2qi\sqrt{f(\lambda_1)} \pm [(p-qi) - \lambda_1]\sqrt{f(p+qi)} \pm [\lambda_1 - (p+qi)]\sqrt{f(p-qi)}}{2qi\sqrt{\pi(\lambda_1)} \pm [(p-qi) - \lambda_1]\sqrt{\pi(p+qi)} \pm [\lambda_1 - (p+qi)]\sqrt{\pi(p-qi)}}.$$

In dieser Zusammenstellung erkennen wir bald, dass zwei Werthe von x möglich, die beiden andern aber imaginair sein werden, und zwar nach folgender Zeichenzusammenstellung:

$$\left.\begin{matrix} + \ldots + \ldots + \ldots \\ + \ldots - \ldots - \ldots \end{matrix}\right\} \text{für die realen}$$

$$\left.\begin{matrix} + \ldots + \ldots - \ldots \\ + \ldots - \ldots + \ldots \end{matrix}\right\} \text{für die imaginairen.}$$

Dieselbe Zusammenstellung gilt wie für x, so auch für y, und ist zu gleicher Zeit für den Zähler und den Nenner anzuwenden, wenn $f(\lambda_,)$ eine positive Grösse wird; erhält dagegen $f(\lambda_,)$ einen negativen Werth, so muss folgende Combination:

$$\left.\begin{array}{l} + \ldots + \ldots - \ldots \\ + \ldots - \ldots + \ldots \end{array}\right\} \text{für die realen}$$

$$\left.\begin{array}{l} + \ldots + \ldots + \ldots \\ + \ldots - \ldots - \ldots \end{array}\right\} \text{für die imaginairen}$$

genommen werden.

Wenn ferner alle drei Wurzeln der kubischen Gleichung $\lambda_,$, λ_2, λ_3 möglich werden, so werden auch alle Werthe für x und y real sein, wenn ausserdem alle Functionen $f(\lambda_,)$, $f(\lambda_2)\ldots$ $\varphi(\lambda_,)$, $\varphi(\lambda_2)\ldots$ $\pi(\lambda_,)$, $\pi(\lambda_2)\ldots$ positive oder alle diese Functionen negative Grössen sind.

Endlich werden alle Werthe für x und y imaginair sein, wenn einige von den Functionen wie $f(\lambda_,)\ldots.$ positiv, die andern negativ werden.

Die ganze Untersuchung über die Lösung der Gleichungen

$$0 = a + bx + cy + dx^2 + exy + fy^2$$
$$0 = a' + b'x + c'y + d'x^2 + e'xy + f'y^2$$

kann auch angewendet werden bei der Lösung eines Ausdrucks von der Form

$$0 = a + b\,\mathrm{Cos}\varphi + c\,\mathrm{Sin}\varphi + d\,\mathrm{Cos}^2\varphi + e\,\mathrm{Sin}\varphi\,\mathrm{Cos}\varphi + f\,\mathrm{Sin}^2\varphi\,.$$

Denn wenn wir $b' = 0$; $c' = 0$; $e' = 0$
$a' = -1$; $d' = 1$; $f' = 1$ setzen,

so können wir auch

$x = \mathrm{Cos}\varphi$ und $y = \mathrm{Sin}\varphi$ annehmen,

und unsere erste Gleichung verwandelt sich sofort in den angegebenen Ausdruck.

Unsere obige kubische Gleichung wird, wenn wir diese Substitutionen einführen, folgende Gestalt annehmen:

$$0 = \lambda^3 - \lambda^2(a - f - d) + \frac{1}{4}\lambda\,[b^2 + c^2 - e^2 + 4\,(df - ad - af)] - \frac{1}{4}(-fb^2 - ae^2 - dc^2 + bce + 4afd)$$

Wir können nun nach der zuerst angewendeten Theilung unseres Ausdrucks in lineare Factoren auch unsern jetzigen Ausdruck

$$0 = a + b\,\mathrm{Cos}\varphi + c\,\mathrm{Sin}\varphi + d\,\mathrm{Cos}^2\varphi + e\,\mathrm{Sin}\varphi\,\mathrm{Cos}\varphi + f\,\mathrm{Sin}^2\varphi$$

zerlegen in die linearen Factoren

$$(p + q\,\mathrm{Cos}\varphi + r\,\mathrm{Sin}\varphi)\,(s + t\,\mathrm{Cos}\varphi + u\,\mathrm{Sin}\varphi) = 0$$
$$(p' + q'\,\mathrm{Cos}\varphi + r'\,\mathrm{Sin}\varphi)\,(s' + t'\,\mathrm{Cos}\varphi + u'\,\mathrm{Sin}\varphi) = 0$$
$$(p'' + q''\,\mathrm{Cos}\varphi + r''\,\mathrm{Sin}\varphi)\,(s'' + t''\,\mathrm{Cos}\varphi + u''\,\mathrm{Sin}\varphi) = 0\,.$$

p, q, r . . . sind die schon bestimmten Factoren von λ.

Aber die Werthe werden hier, wie die für x und y keineswegs eine symmetrische Gestalt annehmen. Wenn wir dagegen die letzten und bessern Werthe für x und y anwenden, so werden wir, wenn wir

$$\alpha = a - \lambda \qquad \beta = b$$
$$\delta = d + \lambda \qquad \gamma = c$$
$$\zeta = f + \lambda \qquad \varepsilon = e \qquad \text{setzen,}$$

erhalten:

$$\mathrm{Cos}\varphi = \frac{(\lambda_2-\lambda_3)\sqrt{[c^2-4af-4\lambda_1(a-f)+4\lambda_1{}^2]} \pm (\lambda_3-\lambda_1)\sqrt{[c^2-4af-4\lambda_2(a-f)+4\lambda_2{}^2]} \pm (\lambda_1-\lambda_2)\sqrt{[c^2-4af-4\lambda_3(a-f)+4\lambda_3{}^2]}}{(\lambda_2-\lambda_3)\sqrt{[e^2-4df-4\lambda_1(d+f)-4\lambda_1{}^2]} \pm (\lambda_3-\lambda_1)\sqrt{[e^2-4df-4\lambda_2(d+f)-4\lambda_2{}^2]} \pm (\lambda_1-\lambda_2)\sqrt{[e^2-4df-4\lambda_3(d+f)-4\lambda_3{}^2]}}$$

$$\mathrm{Sin}\varphi = \frac{(\lambda_2-\lambda_3)\sqrt{[b^2-4ad-4\lambda_1(a-d)+4\lambda_1{}^2]} \pm (\lambda_3-\lambda_1)\sqrt{[b^2-4ad-4\lambda_2(a-d)+4\lambda_2{}^2]} \pm (\lambda_1-\lambda_2)\sqrt{[b^2-4ad-4\lambda_3(a-d)+4\lambda_3{}^2]}}{(\lambda_2-\lambda_3)\sqrt{[e^2-4df-4\lambda_1(d+f)-4\lambda_1{}^2]} \pm (\lambda_3-\lambda_1)\sqrt{[e^2-4df-4\lambda_2(d+f)-4\lambda_2{}^2]} \pm (\lambda_1-\lambda_2)\sqrt{[e^2-4df-4\lambda_3(d+f)-4\lambda_3{}^2]}}$$

wo wegen der Gleichung $\mathrm{Cos}^2\varphi + \mathrm{Sin}^2\varphi = 1$ noch verschiedene Relationen stattfinden werden.

Wir wollen uns jetzt einer andern Untersuchung, die in Betreff unserer Gleichungen angestellt werden kann, zuwenden. Es wird nämlich die Aufgabe gestellt, zwei Gleichungen von der Form:

$$0 = a + 2bx + 2cy + dx^2 + 2exy + fy^2$$
$$0 = a' + 2b'x + 2c'y + d'x^2 + 2e'xy + f'y^2$$

in andere, einfachere zu transformiren, und zwar in solche von der Form:

$$0 = G + G_1p^2 + G_2q^2$$
$$0 = H + H_1p^2 + H_2q^2$$

Jene bekannte und so höchst wichtige Substitution

$$x = \frac{k' + l'p + m'q}{k + lp + mq}$$

$$y = \frac{k'' + l''p + m''q}{k + lp + mq}$$

wird auch hier für unsere Untersuchung von der höchsten Bedeutung sein.

Wenn wir nämlich diese Werthe für x und y substituiren, und dann die ganze Gleichung mit dem Quadrate des Nenners der Substitution multipliciren, so wird die Ordnung der Gleichung nicht geändert. Die Gleichungen werden:

$$0 = a + 2b\frac{k' + l'p + m'q}{k + lp + mq} + 2c\frac{k'' + l''p + m''q}{k + lp + mq} + \text{etc.} \ldots$$

Die Multiplication mit dem Quadrat des Nenners wird ergeben:

$$\begin{aligned}
0 = {} & ak^2 + al^2p^2 + am^2q^2 + 2aklp + 2akmq + 2almpq \\
& + 2bkk' + 2bll'p^2 + 2bmm'q^2 + 2b(kl' + k'l)p + 2b(km' + k'm)q + 2b(lm' + l'm)pq \\
& + 2ckk'' + 2cll''p^2 + 2cmm''q^2 + 2c(kl'' + k''l)p + 2c(km'' + k''m)q + 2c(lm'' + l''m)pq \\
& + dk'^2 + dl'^2p^2 + dm'^2q^2 + 2dk'l'p + 2dk'm'q + 2dl'm'pq \\
& + 2ek'k'' + 2el'l''p^2 + 2em'm''q^2 + 2e(k'l'' + k''l')p + 2e(k'm'' + k''m')q + 2e(l'm'' + l''m')pq \\
& + fk''^2 + fl''^2p^2 + fm''^2q^2 + 2fk''l''p + 2fk''m''q + 2fl''m''pq
\end{aligned}$$

Die andere Gleichung wird dieser ganz ähnlich sein, nur werden die Constanten a, b, c . . . den Index erhalten.

Durch unsere Substitution sind acht unbestimmte Grössen k, l, m . . . eingeführt, welche uns zur Vereinfachung unserer Gleichungen verschiedene Bedingungen geben werden. Wenn wir aber die Coefficienten von p, q, $pq = 0$ setzen und auf diese Weise unsern Gleichungen die gewünschte Form geben, so erhalten wir nur sechs Gleichungen zur Bestimmung der Grössen k, l, m . . . Zwei dieser Grössen bleiben demnach noch willkührlich, was sich auch aus der Natur der Sache sogleich ergiebt. Denn setzen wir für p und q . . . αp und βq, so sehen wir, dass die Form der Gleichung sich durchaus nicht ändert, wesshalb von den acht Grössen zwei noch nothwendig willkührlich bleiben müssen. Desshalb steht es auch frei, für den Nenner die Form

$1 + p + q$ anzunehmen.

Setzen wir nun die Coefficienten von p, q, pq . . . = 0, so erhalten wir sechs Bedingungsgleichungen, welche uns die nothwendigen Bestimmungen für k, l, m . . . geben. Es wird

$$0 = alk + dl'k' + fl''k'' + b\,(kl' + k'l) + c\,(kl'' + k''l) + e\,(k'l'' + k''l')$$
$$0 = akm + dk'm' + fk''m'' + b\,(km' + k'm) + c\,(km'' + k''m) + e\,(k'm'' + k''m')$$
$$0 = alm + dl'm' + fl''m'' + b\,(lm' + l'm) + c\,(lm'' + l''m) + e\,(l'm'' + l''m')$$
$$0 = a'kl + d'k'l' + f'k''l'' + b'\,(kl' + k'l) + c'\,(kl'' + k''l) + e'\,(k'l'' + k''l')$$
$$0 = a'km + d'k'm' + f'k''m'' + b'\,(km' + k'm) + c'\,(km'' + k''m) + e'\,(k'm'' + k''m')$$
$$0 = a'lm + d'l'm' + f'l''m'' + b'\,(lm' + l'm) + c'\,(lm'' + l''m) + e'\,(l'm'' + l''m')$$

Da aber die Auflösung dieser Gleichungen doch immer noch complicirt sein wird, weil in einer jeden Gleichung sich alle Coefficienten a, b, c . . . finden, so wollen wir noch einen anderen Weg einzuschlagen versuchen.

So wie x und y durch p und q, so kann man auch p und q durch x und y auf ähnliche Weise wiedergeben. Es sei daher

$$p = \frac{\varkappa' + \lambda' x + \mu' y}{\varkappa + \lambda x + \mu y}$$
$$q = \frac{\varkappa'' + \lambda'' x + \mu'' y}{\varkappa + \lambda x + \mu y}$$

Es seien ferner die schon transformirten Gleichungen

$$0 = G + G_{,}p^2 + G_2 q^2$$
$$0 = H + H_{,}p^2 + H_2 q^2$$

Setzen wir hier für p und q die durch x und y ausgedrückten, angeführten Werthe, so erhalten wir aus einer Vergleichung, die wir mit den zu transformirenden Gleichungen anstellen, zwölf Bedingungsgleichungen in Bezug auf $\varkappa$, λ, μ . . . G, $G_{,}$, G_2; H, $H_{,}$, H_2 und zur Bestimmung dieser Grössen. Von den neun Grössen $\varkappa$, λ, μ . . . bleiben demnach drei willkührlich, wofür die Ursache schon angegeben ist, und desshalb werden die erwähnten zwölf Gleichungen zur Auffindung der unbestimmten Grössen ausreichen.

Die Bedingungsgleichungen werden:

1. $G\varkappa^2 + G_1\varkappa'^2 + G_2\varkappa''^2 = a$	7. $H\varkappa^2 + H_1\varkappa'^2 + H_2\varkappa''^2 = a'$
2. $G\lambda^2 + G_1\lambda'^2 + G_2\lambda''^2 = d$	8. $H\lambda^2 + H_1\lambda'^2 + H_2\lambda''^2 = d'$
3. $G\mu^2 + G_1\mu'^2 + G_2\mu''^2 = f$	9. $H\mu^2 + H_1\mu'^2 + H_2\mu''^2 = f'$
4. $G\varkappa\lambda + G_1\varkappa'\lambda' + G_2\varkappa''\lambda'' = b$	10. $H\varkappa\lambda + H_1\varkappa'\lambda' + H_2\varkappa''\lambda'' = b'$
5. $G\varkappa\mu + G_1\varkappa'\mu' + G_2\varkappa''\mu'' = c$	11. $H\varkappa\mu + H_1\varkappa'\mu' + H_2\varkappa''\mu'' = c'$
6. $G\lambda\mu + G_1\lambda'\mu' + G_2\lambda''\mu'' = e$	12. $H\lambda\mu + H_1\lambda'\mu' + H_2\lambda''\mu'' = e'$

Zur Auflösung dieser Gleichungen nehme man die Gleichungen 1., 4., 5. und stelle sie in folgender Form zusammen:

$$\varkappa G\varkappa + \varkappa' G_1\varkappa' + \varkappa'' G_2\varkappa'' = a$$
$$\lambda G\varkappa + \lambda' G_1\varkappa' + \lambda'' G_2\varkappa'' = b$$
$$\mu G\varkappa + \mu' G_1\varkappa' + \mu'' G_2\varkappa'' = c$$

Aus diesen drei Gleichungen finden wir die Werthe von $G\varkappa$, $G_1\varkappa'$, $G_2\varkappa''$. Setzen wir nämlich

$$\varkappa(\lambda'\mu'' - \lambda''\mu') + \varkappa'(\lambda''\mu - \lambda\mu'') + \varkappa''(\lambda\mu' - \lambda'\mu) = \Pi,$$

so wird

$$\Pi . G\varkappa = (\lambda'\mu'' - \lambda''\mu')\,a + (\mu'\varkappa'' - \mu''\varkappa')\,b + (\varkappa'\lambda'' - \varkappa''\lambda')\,c$$
$$\Pi . G_1\varkappa' = (\lambda''\mu - \lambda\mu'')\,a + (\mu''\varkappa - \mu\varkappa'')\,b + (\varkappa''\lambda - \varkappa\lambda'')\,c$$
$$\Pi . G_2\varkappa'' = (\lambda\mu' - \lambda'\mu)\,a + (\mu\varkappa' - \mu'\varkappa)\,b + (\varkappa\lambda' - \varkappa'\lambda)\,c$$

Auf dieselbe Weise erhalten wir aus den Gleichungen 2., 4., 6.

$$\Pi . G\lambda = (\lambda'\mu'' - \lambda''\mu')\,b + (\mu'\varkappa'' - \mu''\varkappa')\,d + (\varkappa'\lambda'' - \varkappa''\lambda')\,e$$
$$\Pi . G_1\lambda' = (\lambda''\mu - \lambda\mu'')\,b + (\mu''\varkappa - \mu\varkappa'')\,d + (\varkappa''\lambda - \varkappa\lambda'')\,e$$
$$\Pi . G_2\lambda'' = (\lambda\mu' - \lambda'\mu)\,b + (\mu\varkappa' - \mu'\varkappa)\,d + (\varkappa\lambda' - \varkappa'\lambda)\,e$$

Aus den Gleichungen 5., 6., 3.

$$\Pi . G\mu = (\lambda'\mu'' - \lambda''\mu')\,c + (\mu'\varkappa'' - \mu''\varkappa')\,e + (\varkappa'\lambda'' - \varkappa''\lambda')\,f$$
$$\Pi . G_1\mu' = (\lambda''\mu - \lambda\mu'')\,c + (\mu''\varkappa - \mu\varkappa'')\,e + (\varkappa''\lambda - \varkappa\lambda'')\,f$$
$$\Pi . G_2\mu'' = (\lambda\mu' - \lambda'\mu)\,c + (\mu\varkappa' - \mu'\varkappa)\,e + (\varkappa\lambda' - \varkappa'\lambda)\,f$$

Ganz ähnliche Gleichungen erhalten wir aus den andern sechs Gleichungen von 7 . . . 12, und zwar folgende:

$$\Pi . H\varkappa = (\lambda'\mu'' - \lambda''\mu')\,a' + (\mu'\varkappa'' - \mu''\varkappa')\,b' + (\varkappa'\lambda'' - \varkappa''\lambda')\,c'$$
$$\Pi . H_1\varkappa' = (\lambda''\mu - \lambda\mu'')\,a' + (\mu''\varkappa - \mu\varkappa'')\,b' + (\varkappa''\lambda - \varkappa\lambda'')\,c'$$
$$\Pi . H_2\varkappa'' = (\lambda\mu' - \lambda'\mu)\,a' + (\mu\varkappa' - \mu'\varkappa)\,b' + (\varkappa\lambda' - \varkappa'\lambda)\,c'$$
$$\Pi . H\lambda = (\lambda'\mu'' - \lambda''\mu')\,b' + (\mu'\varkappa'' - \mu''\varkappa')\,d' + (\varkappa'\lambda'' - \varkappa''\lambda')\,e'$$
$$\Pi . H_1\lambda' = (\lambda''\mu - \lambda\mu'')\,b' + (\mu''\varkappa - \mu\varkappa'')\,d' + (\varkappa''\lambda - \varkappa\lambda'')\,e'$$
$$\Pi . H_2\lambda'' = (\lambda\mu' - \lambda'\mu)\,b' + (\mu\varkappa' - \mu'\varkappa)\,d' + (\varkappa\lambda' - \varkappa'\lambda)\,e'$$

$$\Pi . H\mu = (\lambda'\mu'' - \lambda''\mu')\, c' + (\mu'\varkappa'' - \mu''\varkappa')\, e' + (\varkappa'\lambda'' - \varkappa''\lambda')\, f'$$
$$\Pi . H_{,}\mu' = (\lambda''\mu - \lambda\mu'')\, c' + (\mu''\varkappa - \mu\varkappa'')\, e' + (\varkappa''\lambda - \varkappa\lambda'')\, f'$$
$$\Pi . H_2\mu'' = (\lambda\mu' - \lambda'\mu)\, c' + (\mu\varkappa' - \mu'\varkappa)\, e' + (\varkappa\lambda' - \varkappa'\lambda)\, f'$$

Wenn wir nun diese neun Gleichungen zusammenstellen mit den neun frühern, so finden wir sogleich aus den Gleichungen 1., 4., 7.

$$0 = (aH - a'G)\,[\lambda'\mu'' - \lambda''\mu'] + (bH - b'G)\,[\mu'\varkappa'' - \mu''\varkappa'] + (cH - c'G)\,[\varkappa'\lambda'' - \varkappa''\lambda']$$
$$0 = (bH - b'G)\,[\lambda'\mu'' - \lambda''\mu'] + (dH - d'G)\,[\mu'\varkappa'' - \mu''\varkappa'] + (eH - e'G)\,[\varkappa'\lambda'' - \varkappa''\lambda']$$
$$0 = (cH - c'G)\,[\lambda'\mu'' - \lambda''\mu'] + (eH - e'G)\,[\mu'\varkappa'' - \mu''\varkappa'] + (fH - f'G)\,[\varkappa'\lambda'' - \varkappa''\lambda']$$

Aus den Gleichungen 2., 5., 8.

$$0 = (aH_{,} - a'G_{,})\,[\lambda''\mu - \lambda\mu''] + (bH_{,} - b'G_{,})\,[\mu''\varkappa - \mu\varkappa''] + (cH_{,} - c'G_{,})\,[\varkappa''\lambda - \varkappa\lambda'']$$
$$0 = (bH_{,} - b'G_{,})\,[\lambda''\mu - \lambda\mu''] + (dH_{,} - d'G_{,})\,[\mu''\varkappa - \mu\varkappa''] + (eH_{,} - e'G_{,})\,[\varkappa''\lambda - \varkappa\lambda'']$$
$$0 = (cH_{,} - c'G_{,})\,[\lambda''\mu - \lambda\mu''] + (eH_{,} - e'G_{,})\,[\mu''\varkappa - \mu\varkappa''] + (fH_{,} - f'G_{,})\,[\varkappa''\lambda - \varkappa\lambda'']$$

Aus den Gleichungen 3., 6., 9.

$$0 = (aH_2 - a'G_2)\,[\lambda\mu' - \lambda'\mu] + (bH_2 - b'G_2)\,[\mu\varkappa' - \mu'\varkappa] + (cH_2 - c'G_2)\,[\varkappa\lambda' - \varkappa'\lambda]$$
$$0 = (bH_2 - b'G_2)\,[\lambda\mu' - \lambda'\mu] + (dH_2 - d'G_2)\,[\mu\varkappa' - \mu'\varkappa] + (eH_2 - e'G_2)\,[\varkappa\lambda' - \varkappa'\lambda]$$
$$0 = (cH_2 - c'G_2)\,[\lambda\mu' - \lambda'\mu] + (eH_2 - e'G_2)\,[\mu\varkappa' - \mu'\varkappa] + (fH_2 - f'G_2)\,[\varkappa\lambda' - \varkappa'\lambda]$$

Wenn wir jetzt in einem jeden dieser drei Systeme durch Elimination die Grössen $(\lambda'\mu'' - \lambda''\mu')$, $(\mu'\varkappa'' - \mu''\varkappa')$, $(\varkappa'\lambda'' - \varkappa''\lambda')$, $(\lambda''\mu - \lambda\mu'')$ . . . . . wegschaffen, so erhalten wir folgende Bedingungsgleichungen:

$$\begin{aligned} 0 = {} & (aH - a'G)(dH - d'G)(fH - f'G) - (aH - a'G)(eH - e'G)^2 \\ & + (bH - b'G)(eH - e'G)(cH - c'G) - (fH - f'G)(bH - b'G)^2 \\ & + (bH - b'G)(eH - e'G)(cH - c'G) - (dH - d'G)(cH - c'G)^2 \end{aligned}$$

Dann:
$$\begin{aligned} 0 = {} & (aH_{,} - a'G_{,})(dH_{,} - d'G_{,})(fH_{,} - f'G_{,}) - (aH_{,} - a'G_{,})(eH_{,} - e'G_{,})^2 \\ & + (bH_{,} - b'G_{,})(eH_{,} - e'G_{,})(cH_{,} - c'G_{,}) - (fH_{,} - f'G_{,})(bH_{,} - b'G_{,})^2 \\ & + (bH_{,} - b'G_{,})(eH_{,} - e'G_{,})(cH_{,} - c'G_{,}) - (dH_{,} - d'G_{,})(cH_{,} - c'G_{,})^2 \end{aligned}$$

Endlich:
$$\begin{aligned} 0 = {} & (aH_2 - a'G_2)(dH_2 - d'G_2)(fH_2 - f'G_2) - (aH_2 - a'G_2)(eH_2 - e'G_2)^2 \\ & + (bH_2 - b'G_2)(eH_2 - e'G_2)(cH_2 - c'G_2) - (fH_2 - f'G_2)(bH_2 - b'G_2)^2 \\ & + (bH_2 - b'G_2)(eH_2 - e'G_2)(cH_2 - c'G_2) - (dH_2 - d'G_2)(cH_2 - c'G_2)^2 \end{aligned}$$

Diese Gleichungen zeigen uns von Neuem, dass die Grössen $\frac{H}{G}$, $\frac{H'}{G'}$, $\frac{H_2}{G_2}$ die drei Wurzeln einer kubischen Gleichung sein werden von der Form:

$$\begin{aligned} 0 = {} & (ax - a')(dx - d')(fx - f') - (ax - a')(ex - e')^2 + (bx - b')(ex - e')(cx - c') - (fx - f')(bx - b')^2 \\ & + (bx - b')(cx - c')(ex - e') - (dx - d')(cx - c')^2 \end{aligned}$$

oder

$$\begin{aligned} 0 = {} & (ax - a')(dx - d')(fx - f') + 2(bx - b')(ex - e')(cx - c') - (ax - a')(ex - e')^2 - (fx - f')(bx - b')^2 \\ & - (dx - d')(cx - c')^2 \end{aligned}$$

Die früheren Gleichungen, in denen $\Pi . G\varkappa$, $\Pi . G\mu$ . . . . . ausgedrückt wurden, erhalten eine elegantere Form, wenn man die frühern Relationen zwischen k, l, m, . . . und $\varkappa$, λ, μ . . . anwendet.

Es war

$$p = \frac{\varkappa' + \lambda' x + \mu' y}{\varkappa + \lambda x + \mu y} \qquad q = \frac{\varkappa'' + \lambda'' x + \mu'' y}{\varkappa + \lambda x + \mu y}$$

$$x = \frac{k' + l' p + m' q}{k + l p + m q} \qquad y = \frac{k'' + l'' p + m'' q}{k + l p + m q}$$

oder wenn wir die Werthe für p und q substituiren

$$x = \frac{k'(\varkappa + \lambda x + \mu y) + l'(\varkappa' + \lambda' x + \mu' y) + m'(\varkappa'' + \lambda'' x + \mu'' y)}{k(\varkappa + \lambda x + \mu y) + l(\varkappa' + \lambda' x + \mu' y) + m(\varkappa'' + \lambda'' x + \mu'' y)}$$

$$y = \frac{k''(\varkappa + \lambda x + \mu y) + l''(\varkappa' + \lambda' x + \mu' y) + m''(\varkappa'' + \lambda'' x + \mu'' y)}{k(\varkappa + \lambda x + \mu y) + l(\varkappa' + \lambda' x + \mu' y) + m(\varkappa'' + \lambda'' x + \mu'' y)}$$

oder

$$\left.\begin{array}{l} x . k\varkappa + x^2 . k\lambda + xy . k\mu \\ + x . l\varkappa' + x^2 . l\lambda' + xy . l\mu' \\ + x . m\varkappa'' + x^2 . m\lambda'' + xy . m\mu'' \end{array}\right\} = \left\{\begin{array}{l} k'\varkappa + k'\lambda x + k'\mu y + \\ l'\varkappa' + l'\lambda' x + l'\mu' y + \\ m'\varkappa'' + m'\lambda'' x + m'\mu'' y \end{array}\right.$$

und

$$\left.\begin{array}{l} y . k\varkappa + xy . k\lambda + y^2 . k\mu \\ + y . l\varkappa' + xy . l\lambda' + y^2 . l\mu' \\ + y . m\varkappa'' + xy . m\lambda'' + y^2 . m\mu'' \end{array}\right\} = \left\{\begin{array}{l} k''\varkappa + k''\lambda x + k''\mu y + \\ l''\varkappa' + l''\lambda' x + l''\mu' y + \\ m''\varkappa'' + m''\lambda'' x + m''\mu'' y \end{array}\right.$$

Eine einfache Vergleichung giebt uns hier

$$\lambda k + \lambda' l + \lambda'' m = 0 \quad \text{oder} \quad \lambda + \lambda' . \frac{l}{k} + \lambda'' . \frac{m}{k} = 0$$

$$\mu k + \mu' l + \mu'' m = 0 \qquad \mu + \mu' . \frac{l}{k} + \mu'' . \frac{m}{k} = 0$$

Ebenso wird sein

$$\varkappa + \varkappa' . \frac{l'}{k'} + \varkappa'' . \frac{m'}{k'} = 0 \quad \text{und} \quad \varkappa + \varkappa' . \frac{l''}{k''} + \varkappa'' . \frac{m''}{k''} = 0$$

$$\mu + \mu' . \frac{l'}{k'} + \mu'' . \frac{m'}{k'} = 0 \qquad \lambda + \lambda' . \frac{l''}{k''} + \lambda'' . \frac{m''}{k''} = 0$$

Hieraus finden wir

$$\begin{array}{lll} k = \lambda'\mu'' - \lambda''\mu' & k' = \mu'\varkappa'' - \mu''\varkappa' & k'' = \varkappa'\lambda'' - \varkappa''\lambda' \\ l = \lambda''\mu - \lambda\mu'' & l' = \mu''\varkappa - \mu\varkappa'' & l'' = \varkappa''\lambda - \varkappa\lambda'' \\ m = \lambda\mu' - \lambda'\mu & m' = \mu\varkappa' - \mu'\varkappa & m'' = \varkappa\lambda' - \varkappa'\lambda \, , \end{array}$$

wodurch unsere frühere Gleichungen folgende Gestalt annehmen werden:

$$\begin{array}{ll} \Pi . G\varkappa = ka + k'b + k''c \, ; & \Pi . H\varkappa = ka' + k'b' + k''c' \\ \Pi . G_1\varkappa' = la + l'b + l''c \, ; & \Pi . H_1\varkappa' = la' + l'b' + l''c' \\ \Pi . G_2\varkappa'' = ma + m'b + m''c \, ; & \Pi . H_2\varkappa'' = ma' + m'b' + m''c' \end{array}$$

$$\Pi\,.\,G\lambda = kb + k'd + k''e; \qquad \Pi\,.\,H\lambda = kb' + k'd' + k''e'$$
$$\Pi\,.\,G_{,}\lambda' = lb + l'd + l''e; \qquad \Pi\,.\,H_{,}\lambda' = lb' + l'd' + l''e'$$
$$\Pi\,.\,G_{2}\lambda'' = mb + m'd + m''e; \qquad \Pi\,.\,H_{2}\lambda'' = mb' + m'd' + m''e'$$

$$\Pi\,.\,G\mu = kc + k'e + k''f; \qquad \Pi\,.\,H\mu = kc' + k'e' + k''f'$$
$$\Pi\,.\,G_{,}\mu' = lc + l'e + l''f; \qquad \Pi\,.\,H_{,}\mu' = lc' + l'e' + l''f'$$
$$\Pi\,.\,G_{2}\mu'' = mc + m'e + m''f; \qquad \Pi\,.\,H_{2}\mu'' = mc' + m'e' + m''f'$$

Hier können auch die Coefficienten k, l, m, ... durch die Grössen G und H ausgedrückt werden.

Wenn wir von den frühern zwölf Bedingungsgleichungen die erste und die siebente auf passende Art verbinden, so finden wir

$$(G_{,}H - GH_{,})\,\varkappa'\varkappa' + (G_{2}H - GH_{2})\,\varkappa''\varkappa'' = aH - a'G$$
$$(G_{,}H - GH_{,})\,\lambda'\lambda' + (G_{2}H - GH_{2})\,\lambda''\lambda'' = dH - d'G$$
$$(G_{,}H - GH_{,})\,\varkappa'\lambda' + (G_{2}H - GH_{2})\,\varkappa''\lambda'' = bH - b'G$$

Die zweite und dritte dieser Gleichungen erhalten wir durch die Zusammenstellung der zweiten und achten, und dann der vierten und zehnten Bedingungsgleichung. Ziehen wir hier das Quadrat der dritten Gleichung von dem Producte der beiden ersten ab, so erhalten wir

$$(G_{,}H - GH_{,})(G_{2}H - GH_{2})(k'')^{2} = (aH - a'G)(dH - d'G) - (bH - b'G)^{2},$$

wo (k'') gesetzt ist für $\varkappa'\lambda'' - \varkappa''\lambda'$, und hieraus ergiebt sich

$$k'' = \pm \sqrt{\left\{\frac{(aH - a'G)(dH - d'G) - (bH - b'G)^{2}}{(G_{,}H - GH_{,})(G_{2}H - GH_{2})}\right\}}$$

$$k' = \pm \sqrt{\left\{\frac{(aH - a'G)(fH - f'G) - (cH - c'G)^{2}}{(G_{,}H - GH_{,})(G_{2}H - GH_{2})}\right\}}$$

$$k = \pm \sqrt{\left\{\frac{(dH - d'G)(fH - f'G) - (eH - e'G)^{2}}{(G_{,}H - GH_{,})(G_{2}H - GH_{2})}\right\}}$$

$$l'' = \pm \sqrt{\left\{\frac{(aH_{,} - a'G_{,})(dH_{,} - d'G_{,}) - (bH_{,} - b'G_{,})^{2}}{(GH_{,} - G_{,}H)(G_{2}H_{,} - G_{,}H_{2})}\right\}}$$

$$l' = \pm \sqrt{\left\{\frac{(aH_{,} - a'G_{,})(fH_{,} - f'G_{,}) - (cH_{,} - c'G_{,})^{2}}{(GH_{,} - G_{,}H)(G_{2}H_{,} - G_{,}H_{2})}\right\}}$$

$$l = \pm \sqrt{\left\{\frac{(dH_{,} - d'G_{,})(fH_{,} - f'G_{,}) - (eH_{,} - e'G_{,})^{2}}{(GH_{,} - G_{,}H)(G_{2}H_{,} - G_{,}H_{2})}\right\}}$$

$$m'' = \pm \sqrt{\left\{\frac{(aH_{2} - a'G_{2})(dH_{2} - d'G_{2}) - (bH_{2} - b'G_{2})^{2}}{(GH_{2} - G_{2}H)(G_{,}H_{2} - G_{2}H_{,})}\right\}}$$

$$m' = \pm \sqrt{\left\{\frac{(aH_{2} - a'G_{2})(fH_{2} - f'G_{2}) - (cH_{2} - c'G_{2})^{2}}{(GH_{2} - G_{2}H)(G_{,}H_{2} - G_{2}H_{,})}\right\}}$$

$$m = \pm \sqrt{\left\{\frac{(dH_{2} - d'G_{2})(fH_{2} - f'G_{2}) - (eH_{2} - e'G_{2})^{2}}{(GH_{2} - G_{2}H)(G_{,}H_{2} - G_{2}H_{,})}\right\}}$$

Ausser diesen erhält man auch andere Formeln für die Producte kk', kk'' . . . ., welche wir aufzustellen versuchen wollen. Wenn wir von den frühern zwölf angeführten Bedingungsgleichungen zuerst 6. und 12., dann 5 und 11 zusammenstellen, so finden wir

$$(HG_, - H_,G)\lambda'\mu' + (HG_2 - H_2G)\lambda''\mu'' = eH - e'G$$
$$(HG_, - H_,G)\varkappa'\mu' + (HG_2 - H_2G)\varkappa''\mu'' = cH - c'G$$

Ferner erhalten wir aus den Gleichungen 3. und 9., dann aus 4. und 10.

$$(HG_, - H_,G)\mu'\mu' + (HG_2 - H_2G)\mu''\mu'' = fH - f'G$$
$$(HG_, - H_,G)\varkappa'\lambda' + (HG_2 - H_2G)\varkappa''\lambda'' = bH - b'G$$

Subtrahiren wir nun das Product dieser Gleichungen von dem Producte der vorigen, so erhalten wir sogleich

$$(\lambda'\mu'' - \lambda''\mu')(\varkappa''\mu' - \varkappa'\mu'') = \frac{(eH - e'G)(cH - c'G) - (fH - f'G)(bH - b'G)}{(HG_, - H_,G)(HG_2 - H_2G)}$$

Da nun aber $(\lambda'\mu'' - \lambda''\mu')(\varkappa''\mu' - \varkappa'\mu'') = kk'$ ist, so erhalten wir kk' und auf ähnliche Weise folgende Relationen:

$$kk' = \frac{(eH - e'G)(cH - c'G) - (fH - f'G)(bH - b'G)}{(HG_, - H_,G)(HG_2 - H_2G)}$$

$$kk'' = \frac{(eH - e'G)(bH - b'G) - (dH - d'G)(cH - c'G)}{(HG_, - H_,G)(HG_2 - H_2G)}$$

$$k'k'' = \frac{(bH - b'G)(cH - c'G) - (aH - a'G)(eH - e'G)}{(HG_, - H_,G)(HG_2 - H_2G)}$$

$$ll' = \frac{(eH_, - e'G_,)(cH_, - c'G_,) - (fH_, - f'G_,)(bH_, - b'G_,)}{(H_,G - HG_,)(H_,G_2 - H_2G_,)}$$

$$ll'' = \frac{(eH_, - e'G_,)(bH_, - b'G_,) - (dH_, - d'G_,)(cH_, - c'G_,)}{(H_,G - HG_,)(H_,G_2 - H_2G_,)}$$

$$l'l'' = \frac{(bH_, - b'G_,)(cH_, - c'G_,) - (aH_, - a'G_,)(eH_, - e'G_,)}{(H_,G - HG_,)(H_,G_2 - H_2G_,)}$$

$$mm' = \frac{(eH_2 - e'G_2)(cH_2 - c'G_2) - (fH_2 - f'G_2)(bH_2 - b'G_2)}{(H_2G - HG_2)(H_2G_, - H_,G_2)}$$

$$mm'' = \frac{(eH_2 - e'G_2)(bH_2 - b'G_2) - (dH_2 - d'G_2)(cH_2 - c'G_2)}{(H_2G - HG_2)(H_2G_, - H_,G_2)}$$

$$m'm'' = \frac{(bH_2 - b'G_2)(cH_2 - c'G_2) - (aH_2 - a'G_2)(eH_2 - e'G_2)}{(H_2G - HG_2)(H_2G_, - H_,G_2)}$$

Wir sehen nun bald, dass jene kubische Gleichung, deren Wurzeln $\frac{H}{G}$ oder auch $\frac{G}{H}$ waren, vollständig übereinstimmt mit jener andern kubischen Gleichung, welche uns am Anfange unserer Betrachtungen die Wurzeln $\lambda_,$, λ_2, λ_3 gab. Wir dürfen nur in der letztern Gleichung für $\frac{G}{H}$, $\frac{G_,}{H_,}$, $\frac{G_2}{H_2}$ setzen $-\lambda_,$, $-\lambda_2$, $-\lambda_3$, und wir erhalten dann unsere Gleichung

$$\alpha\varepsilon^2 + \beta\,\zeta + \gamma^2\delta - \beta\gamma\varepsilon - 4\alpha\delta\zeta = 0\ .$$

Nachdem wir die Werthe der Grössen k, k', k''; l, l', l''; m, m', m'' gefunden haben, wird unsere Untersuchung leicht zum gewünschten Ziele führen. Suchen wir zunächst aus den Gleichungen

$$0 = G + G_,p^2 + G_2q^2$$
$$0 = H + H_,p^2 + H_2q^2$$

die Werthe von p^2 und q^2, so erhalten wir

$$p^2 = \frac{HG_2 - H_2G}{H_2G_, - H_,G_2}$$
$$q^2 = \frac{GH_, - G_,H}{H_2G_, - H_,G_2}\ .$$

Und wenn wir diese Werthe in die für x und y angenommene Substitution setzen, nämlich in

$$x = \frac{k' + l'p + m'q}{k + lp + mq}$$
$$y = \frac{k'' + l''p + m''q}{k + lp + mq},$$

so erhalten wir die gesuchten Werthe für x und y. Damit wir diese um so leichter finden, wollen wir uns denken, dass für k, l, m . . . . p und q gesetzt seien die Quadrate dieser Grössen. Wenn wir dann allen einzelnen Gliedern den gemeinschaftlichen Nenner geben und für die Grössen $\frac{G}{H}$, $\frac{G_,}{H_,}$ etc. . . setzen die Grössen $-\lambda_,$, $-\lambda_2$, $-\lambda_3$, so erhalten wir aus der Gleichung für k'

$$H\,.\,H\,.\,H_,\,.\,H_2\,.\,H\,.\,H_,\,.\,H_,\,.\,H_2\,.\,H\,.\,H_2\,.\,H_,\,.\,H_2\ [(\lambda_3-\lambda_2)(\lambda_2-\lambda_,)(\lambda_2-\lambda_3)(\lambda_3-\lambda_,)(\lambda_3-\lambda_2)]$$
$$.\,[(a+a'\lambda_,)(f+f'\lambda_,)-(c+c'\lambda_,)^2]$$

oder

$$H\,.\,H\,.\,H\,.\,H\,.\,H_,\,.\,H_,\,.\,H_,\,.\,H_,\,.\,H_2\,.\,H_2\,.\,H_2\,.\,H_2\ (\lambda_3-\lambda_2)(\lambda_3-\lambda_,)(\lambda_2-\lambda_,)\,.\,[(\lambda_2-\lambda_3)^2]$$
$$.\,[(c+c_,\lambda_,)^2-(a+a'\lambda_,)(f+f'\lambda_,)]$$

Die Grösse l'^2p^2 giebt uns folgenden Ausdruck:

$$H\,.\,H\,.\,H\,.\,H\,.\,H_,\,.\,H_,\,.\,H_,\,.\,H_,\,.\,H_2\,.\,H_2\,.\,H_2\,.\,H_2\ (\lambda_,-\lambda_2)(\lambda_,-\lambda_3)(\lambda_3-\lambda_2)\,.\,[(\lambda_3-\lambda_,)^2]$$
$$.\,[(c+c'\lambda_2)^2-(a+a'\lambda_2)(f+f'\lambda_2)]$$

Auch bei den andern Gliedern finden wir sowohl im Zähler als auch im Nenner den gemeinschaftlichen Factor

$$\sqrt{[H\,.\,H\,.\,H\,.\,H\,.\,H_,\,.\,H_,\,.\,H_,\,.\,H_,\,.\,H_2\,.\,H_2\,.\,H_2\,.\,H_2\ (\lambda_3-\lambda_2)(\lambda_3-\lambda_,)(\lambda_2-\lambda_,)]}$$

Desshalb hebt sich derselbe überall auf, und unsere Werthe für x und y werden sofort folgende Gestalt annehmen:

$$x = \frac{(\lambda_2 - \lambda_3)\sqrt{[\gamma'^2 - \alpha'\zeta']} \pm (\lambda_3 - \lambda_,)\sqrt{[\gamma''^2 - \alpha''\zeta'']} \pm (\lambda_, - \lambda_2)\sqrt{[\gamma'''^2 - \alpha'''\zeta''']}}{(\lambda_2 - \lambda_3)\sqrt{[\varepsilon'^2 - \delta'\zeta']} \pm (\lambda_3 - \lambda_,)\sqrt{[\varepsilon''^2 - \delta''\zeta'']} \pm (\lambda_, - \lambda_2)\sqrt{[\varepsilon'''^2 - \delta'''\zeta''']}}$$

$$y = \frac{(\lambda_2 - \lambda_3)\sqrt{[\beta'^2 - \alpha'\delta']} \pm (\lambda_3 - \lambda_,)\sqrt{[\beta''^2 - \alpha''\delta'']} \pm (\lambda_, - \lambda_2)\sqrt{[\beta'''^2 - \alpha'''\delta''']}}{(\lambda_2 - \lambda_3)\sqrt{[\varepsilon'^2 - \delta'\zeta']} \pm (\lambda_3 - \lambda_,)\sqrt{[\varepsilon''^2 - \delta''\zeta'']} \pm (\lambda_, - \lambda_2)\sqrt{[\varepsilon'''^2 - \delta'''\zeta''']}}$$

Hier ist α, β, γ, . . . gesetzt worden für $a + a'\lambda$, $b + b'\lambda$, $c + c'\lambda$ . . ., so wie bei der im Anfange angestellten Untersuchung.

Die hier gefundenen Werthe für x und y stimmen vollständig mit den frühern überein, wir dürfen nur für β, γ, ε jetzt schreiben $\frac{\beta}{2}$, $\frac{\gamma}{2}$, $\frac{\varepsilon}{2}$ oder in den frühern Werthen für c, b, e setzen 2c, 2b, 2e.

Wir sehen, dass unser Problem, wenn wir $\frac{p}{n}$ und $\frac{q}{n}$ setzen für p und q, und $\frac{x}{z}$ und $\frac{y}{z}$ für x und y vollständig übereinstimmt mit der folgenden Aufgabe:

Zwei homogene Functionen der zweiten Ordnung zwischen drei Variabeln so zu transformiren, dass nur die Quadrate anderer Veränderlichen in der Transformation vorkommen, vorausgesetzt, dass die ersten Veränderlichen auf folgende Weise ausgedrückt sind:

$$x = k'n + l'p + m'q \qquad y = k''n + l''p + m''q$$
$$z = kn + lp + mq$$

Aus diesem Problem folgen dann augenblicklich mehrere andere, z. B. folgendes:

Eine Oberfläche zweiter Ordnung, durch schiefwinklige Coordinaten ausgedrückt, soll zurückgeführt werden auf die ursprünglichen Axen.

x, y, z seien die schiefwinklichen Coordinaten, welche die Winkel η . . (yz), $\eta_,$ . . (xz), η_2 . . (xy) bilden.

Wenn ferner die rechtwinklichen Coordinaten p, q, n sein werden, so wird $p^2 + q^2 + n^2$ das Quadrat der Entfernung irgend eines beliebigen Punktes von dem Punkte bezeichnen, von dem ab die Coordinaten gezählt werden. Dieselbe Entfernung auf schiefwinkliche Coordinaten zurückgeführt, wird

$$= x^2 + y^2 + z^2 + 2yz\,\mathrm{Cos}\eta + 2xz\,\mathrm{Cos}\eta_, + 2xy\,\mathrm{Cos}\eta_2$$

sein. Und dieser Ausdruck sei nun einer der zu transformirenden, wenn man will, der zweite.

Dann wird in unsern frühern Formeln zu setzen sein

$$H, H_,, H_2 = 1; \quad a', d', f' = 1 \quad \text{und}$$
$$b', c', e', = \mathrm{Cos}\eta_,, \mathrm{Cos}\eta, \mathrm{Cos}\eta_2,$$

weil die zu transformirenden Gleichungen sein werden:

$$0 = az^2 + 2bzx + 2czy + dx^2 + 2exy + fy^2$$
$$0 = x^2 + y^2 + z^2 + 2yz\,\mathrm{Cos}\eta + 2xz\,\mathrm{Cos}\eta_, + 2xy\,\mathrm{Cos}\eta_2$$

und transformirt werden sie folgende Gestalt annehmen:

$$p^2 + q^2 + n^2 \quad \text{und}$$
$$Gn^2 + G_,p^2 + G_2q^2 .$$

Es seien ferner:

$$\begin{aligned} x &= k'n + l'p + m'q & \quad\text{und}\quad n &= \varkappa z + \lambda x + \mu y \\ y &= k''n + l''p + m''q & p &= \varkappa' z + \lambda' x + \mu' y \\ z &= kn + lp + mq & q &= \varkappa'' z + \lambda'' x + \mu'' y . \end{aligned}$$

Dann finden wir sogleich aus den frühern Gleichungen

$$\begin{aligned} \varkappa^2 + \varkappa'^2 + \varkappa''^2 &= 1 & \quad\text{und}\quad G\varkappa^2 + G_,\varkappa'^2 + G_2\varkappa''^2 &= a \\ \lambda^2 + \lambda'^2 + \lambda''^2 &= 1 & G\lambda^2 + G_,\lambda'^2 + G_2\lambda''^2 &= d \\ \mu^2 + \mu'^2 + \mu''^2 &= 1 & G\mu^2 + G_,\mu'^2 + G_2\mu''^2 &= f \\ \varkappa\lambda + \varkappa'\lambda' + \varkappa''\lambda'' &= \mathrm{Cos}\eta_, & G\varkappa\lambda + G_,\varkappa'\lambda' + G_2\varkappa''\lambda'' &= b \\ \varkappa\mu + \varkappa'\mu' + \varkappa''\mu'' &= \mathrm{Cos}\eta & G\varkappa\mu + G_,\varkappa'\mu' + G_2\varkappa''\mu'' &= c \\ \lambda\mu + \lambda'\mu' + \lambda''\mu'' &= \mathrm{Cos}\eta_2 & G\lambda\mu + G_,\lambda'\mu' + G_2\lambda''\mu'' &= e . \end{aligned}$$

Aus diesen zwölf Gleichungen erhalten wir achtzehn andere, von denen neun mit jenen in den frühern Betrachtungen angeführten übereinstimmen, neun aber einfacher werden.

$$\begin{aligned} \Pi . G\varkappa &= (\lambda'\mu'' - \lambda''\mu')\,a + (\mu'\varkappa'' - \mu''\varkappa')\,b + (\varkappa'\lambda'' - \varkappa''\lambda')\,c \\ \Pi . G_,\varkappa' &= (\lambda''\mu - \lambda\mu'')\,a + (\mu''\varkappa - \mu\varkappa'')\,b + (\varkappa''\lambda - \varkappa\lambda'')\,c \\ \Pi . G_2\varkappa'' &= (\lambda\mu' - \lambda'\mu)\,a + (\mu\varkappa' - \mu'\varkappa)\,b + (\varkappa\lambda' - \varkappa'\lambda)\,c \\ \Pi . G\lambda &= (\lambda'\mu'' - \lambda''\mu')\,b + (\mu'\varkappa'' - \mu''\varkappa')\,d + (\varkappa'\lambda'' - \varkappa''\lambda')\,e \\ \Pi . G_,\lambda' &= (\lambda''\mu - \lambda\mu'')\,b + (\mu''\varkappa - \mu\varkappa'')\,d + (\varkappa''\lambda - \varkappa\lambda'')\,e \\ \Pi . G_2\lambda'' &= (\lambda\mu' - \lambda'\mu)\,b + (\mu\varkappa' - \mu'\varkappa)\,d + (\varkappa\lambda' - \varkappa'\lambda)\,e \\ \Pi . G\mu &= (\lambda'\mu'' - \lambda''\mu')\,c + (\mu'\varkappa'' - \mu''\varkappa')\,e + (\varkappa'\lambda'' - \varkappa''\lambda')\,f \\ \Pi . G_,\mu' &= (\lambda''\mu - \lambda\mu'')\,c + (\mu''\varkappa - \mu\varkappa'')\,e + (\varkappa''\lambda - \varkappa\lambda'')\,f \\ \Pi . G_2\mu'' &= (\lambda\mu' - \lambda'\mu)\,c + (\mu\varkappa' - \mu'\varkappa)\,e + (\varkappa\lambda' - \varkappa'\lambda)\,f. \end{aligned}$$

Die neun einfachern Gleichungen werden sein:

$$\begin{aligned} \Pi\varkappa &= (\lambda'\mu'' - \lambda''\mu') + (\mu'\varkappa'' - \mu''\varkappa')\,\mathrm{Cos}\eta_, + (\varkappa'\lambda'' - \varkappa''\lambda')\,\mathrm{Cos}\eta \\ \Pi\varkappa' &= (\lambda''\mu - \lambda\mu'') + (\mu''\varkappa - \mu\varkappa'')\,\mathrm{Cos}\eta_, + (\varkappa''\lambda - \varkappa\lambda'')\,\mathrm{Cos}\eta \\ \Pi\varkappa'' &= (\lambda\mu' - \lambda'\mu) + (\mu\varkappa' - \mu'\varkappa)\,\mathrm{Cos}\eta_, + (\varkappa\lambda' - \varkappa'\lambda)\,\mathrm{Cos}\eta \\ \Pi\lambda &= (\lambda'\mu'' - \lambda''\mu')\,\mathrm{Cos}\eta_, + (\mu'\varkappa'' - \mu''\varkappa') + (\varkappa'\lambda'' - \varkappa''\lambda')\,\mathrm{Cos}\eta_2 \\ \Pi\lambda' &= (\lambda''\mu - \lambda\mu'')\,\mathrm{Cos}\eta_, + (\mu''\varkappa - \mu\varkappa'') + (\varkappa''\lambda - \varkappa\lambda'')\,\mathrm{Cos}\eta_2 \\ \Pi\lambda'' &= (\lambda\mu' - \lambda'\mu)\,\mathrm{Cos}\eta_, + (\mu\varkappa' - \mu'\varkappa) + (\varkappa\lambda' - \varkappa'\lambda)\,\mathrm{Cos}\eta_2 \end{aligned}$$

$$\Pi\mu = (\lambda'\mu'' - \lambda''\mu')\,\mathrm{Cos}\eta + (\mu'\varkappa'' - \mu''\varkappa')\,\mathrm{Cos}\eta_2 + (\varkappa'\lambda'' - \varkappa''\lambda')$$
$$\Pi\mu' = (\lambda''\mu - \lambda\mu'')\,\mathrm{Cos}\eta + (\mu''\varkappa - \mu\varkappa'')\,\mathrm{Cos}\eta_2 + (\varkappa''\lambda - \varkappa\lambda'')$$
$$\Pi\mu'' = (\lambda\mu' - \lambda'\mu)\,\mathrm{Cos}\eta + (\mu\varkappa' - \mu'\varkappa)\,\mathrm{Cos}\eta_2 + (\varkappa\lambda' - \varkappa'\lambda)$$

Ziehen wir diese neun Gleichungen, nachdem wir sie mit G, G, etc. . . . multiplicirt haben, von den frühern ab, so erhalten wir

$$0 = (G - a)(\lambda'\mu'' - \lambda''\mu') + (G\,\mathrm{Cos}\eta_, - b)(\mu'\varkappa'' - \mu''\varkappa') + (G\,\mathrm{Cos}\eta - c)(\varkappa'\lambda'' - \varkappa''\lambda')$$
$$0 = (G\,\mathrm{Cos}\eta_, - b)(\lambda'\mu'' - \lambda''\mu') + (G - d)(\mu'\varkappa'' - \mu''\varkappa') + (G\,\mathrm{Cos}\eta_2 - e)(\varkappa'\lambda'' - \varkappa''\lambda')$$
$$0 = (G\,\mathrm{Cos}\eta - c)(\lambda'\mu'' - \lambda''\mu') + (G\,\mathrm{Cos}\eta_2 - e)(\mu'\varkappa'' - \mu''\varkappa') + (G - f)(\varkappa'\lambda'' - \varkappa''\lambda')$$

$$0 = (G_, - a)(\lambda''\mu - \lambda\mu'') + (G_,\mathrm{Cos}\eta_, - b)(\mu''\varkappa - \mu\varkappa'') + (G_,\mathrm{Cos}\eta - c)(\varkappa''\lambda - \varkappa\lambda'')$$
$$0 = (G_,\mathrm{Cos}\eta_, - b)(\lambda''\mu - \lambda\mu'') + (G_, - d)(\mu''\varkappa - \mu\varkappa'') + (G_,\mathrm{Cos}\eta_2 - e)(\varkappa''\lambda - \varkappa\lambda'')$$
$$0 = (G_,\mathrm{Cos}\eta - c)(\lambda''\mu - \lambda\mu'') + (G_,\mathrm{Cos}\eta_2 - e)(\mu''\varkappa - \mu\varkappa'') + (G_, - f)(\varkappa''\lambda - \varkappa\lambda'')$$
$$0 = (G_2 - a)(\lambda\mu' - \lambda'\mu) + (G_2\mathrm{Cos}\eta_, - b)(\mu\varkappa' - \mu'\varkappa) + (G_2\mathrm{Cos}\eta - c)(\varkappa\lambda' - \varkappa'\lambda)$$
$$0 = (G_2\mathrm{Cos}\eta_, - b)(\lambda\mu' - \lambda'\mu) + (G_2 - d)(\mu\varkappa' - \mu'\varkappa) + (G_2\mathrm{Cos}\eta_2 - e)(\varkappa\lambda' - \varkappa'\lambda)$$
$$0 = (G_2\mathrm{Cos}\eta - c)(\lambda\mu' - \lambda'\mu) + (G_2\mathrm{Cos}\eta_2 - e)(\mu\varkappa' - \mu'\varkappa) + (G_2 - f)(\varkappa\lambda' - \varkappa'\lambda)$$

Aus je drei von den hier aufgestellten Gleichungen ergiebt sich immer eine Bedingungsgleichung des dritten Grades; und auf diese Weise finden wir drei kubische Gleichungen, die immer dieselben sind, wenn wir im Allgemeinen die Grössen G, $G_,$, G_2 mit x bezeichnen. Hieraus erkennen wir auch, dass die Grössen G, $G_,$, G_2 die Wurzeln einer kubischen Gleichung von folgender Form sein werden:

$$(x - a)(x - d)(x - f) - (x - a)(x\,\mathrm{Cos}\eta_2 - e)^2 - (x - d)(x\,\mathrm{Cos}\eta - c)^2 - (x - f)(x\,\mathrm{Cos}\eta_, - b)^2$$
$$+ 2\,[x\,\mathrm{Cos}\eta - c]\,.\,[x\,\mathrm{Cos}\eta_, - b]\,.\,[x\,\mathrm{Cos}\eta_2 - e] = 0$$

Wir könnten hier nun die Grössen $\lambda'\mu'' - \lambda''\mu'$, $\mu'\varkappa'' - \mu''\varkappa'$, $\varkappa'\lambda'' - \varkappa''\lambda'$ . . . . . auch durch G, $G_,$, G_2; a, b, c, d, e, f und $\mathrm{Cos}\eta$, $\mathrm{Cos}\eta_,$, $\mathrm{Cos}\eta_2$ ausdrücken; da wir aber früher diesen Fall schon ganz allgemein behandelt haben, möge es hier unterbleiben. —

Wenn nun die erste Function schon auf rechtwinklige Coordinaten zurückgeführt wäre, dann müsste $\mathrm{Cos}\eta = 0$, $\mathrm{Cos}\eta_, = 0$, $\mathrm{Cos}\eta_2 = 0$ gesetzt werden, und unsere kubische Gleichung wird dann:

$$(x - a)(x - d)(x - f) - (x - d)\,c^2 - (x - a)\,e^2 - (x - f)\,b^2 - 2bce = 0$$

oder

$$x^3 - x^2(a + d + f) + x(af + ad + fd - b^2 - c^2 - e^2) - adf + dc^2 + ae^2 + fb^2 - 2bce = 0$$

Wenn endlich ein zugeordnetes System gegeben ist, so muss man $b = 0$, $c = 0$, $e = 0$ setzen und die kubische Gleichung wird

$$(x-a)(x-d)(x-f) - (x-a)\,x^2\mathrm{Cos}^2\eta_2 - (x-d)\,x^2\mathrm{Cos}^2\eta - (x-f)\,x^2\mathrm{Cos}^2\eta_, + 2\,\mathrm{Cos}\eta\,\mathrm{Cos}\eta_,\,\mathrm{Cos}\eta_2\,x^3 = 0$$

und wenn man hier

$$1 - \mathrm{Cos}^2\eta - \mathrm{Cos}^2\eta_, - \mathrm{Cos}^2\eta_2 + 2\,\mathrm{Cos}\eta\,\mathrm{Cos}\eta_,\,\mathrm{Cos}\eta_2 = \Pi\,.\,\Pi$$

setzt, so wird die kubische Gleichung:

$$\Pi.\Pi x^3 - x^2\,[a\,\mathrm{Sin}^2\eta_2 + d\,\mathrm{Sin}^2\eta + f\,\mathrm{Sin}^2\eta_,] + x\,[ad + af + df] - adf = 0\,.$$

Es sei ferner der zu transformirende Ausdruck

$$1 - y^2 - x^2$$

und der transformirte soll die Form annehmen

$$1 - p^2 - q^2 .$$

Dann sind als die Ausdrücke, die transformirt werden sollen, aufzustellen

$$az^2 + 2bxz + 2cyz + dx^2 + 2exy + fy^2$$

und $$z^2 - x^2 - y^2$$

und sie sollen umgeformt werden in

$$Gn_2 + G_, p^2 + G_2 q^2$$

und $$n^2 - p^2 - q^2 .$$

Hier ist die Bedingung gegeben, dass ein Aggregat, aus den Quadraten der Veränderlichen bestehend, sich nicht ändert, woraus aus $n^2 - p^2 - q^2 = z^2 - x^2 - y^2$ verschiedene Bedingungen sich ergeben.

In dem allgemeinen Theorem ist dann zu setzen

$$b' = 0, \quad c' = 0, \quad e' = 0, \quad H = 1, \quad H_, = -1, \quad H_2 = -1,$$
$$a' = 1, \quad d' = -1, \quad f' = -1$$

und wenn
$$\left.\begin{aligned} n &= \varkappa z + \lambda x + \mu y \\ p &= \varkappa' z + \lambda' x + \mu' y \\ q &= \varkappa'' z + \lambda'' x + \mu'' y \end{aligned}\right\} \ldots \alpha,$$

so findet man aus jener Bedingung folgende Relationen

$$\varkappa^2 - \varkappa'^2 - \varkappa''^2 = 1; \quad \varkappa\lambda - \varkappa'\lambda' - \varkappa''\lambda'' = 0$$
$$\lambda^2 - \lambda'^2 - \lambda''^2 = 1; \quad \mu\varkappa - \mu'\varkappa' - \mu''\varkappa'' = 0$$
$$\mu^2 - \mu'^2 - \mu''^2 = 1; \quad \mu\lambda - \mu'\lambda' - \mu''\lambda'' = 0$$

Ferner war ebenso

$$\left.\begin{aligned} z &= kn + lp + mq \\ x &= k'n + l'p + m'q \\ y &= k''n + l''p + m''q \end{aligned}\right\} \ldots \beta.$$

Zwischen k, l, m und $\varkappa$, λ, μ finden die schon angeführten Relationen statt

$$k = \lambda'\mu'' - \lambda''\mu' \quad l = \mu\lambda'' - \mu''\lambda \quad m = \lambda\mu' - \lambda'\mu$$
$$k' = \mu'\varkappa'' - \mu''\varkappa' \quad l' = \varkappa\mu'' - \varkappa''\mu \quad m' = \mu\varkappa' - \mu'\varkappa$$
$$k'' = \varkappa'\lambda'' - \varkappa''\lambda' \quad l'' = \lambda\varkappa'' - \lambda''\varkappa \quad m'' = \varkappa\lambda' - \varkappa'\lambda .$$

Aus den Gleichungen . . . α und den folgenden findet sich

$$z = \varkappa n - \varkappa' p - \varkappa'' q$$
$$x = -\lambda n + \lambda' p + \lambda'' q$$
$$y = -\mu n + \mu' p + \mu'' q ,$$

woraus von Neuem diese andern Relationen sich ergeben:

$$\lambda'\mu'' - \lambda''\mu' = \varkappa; \quad \mu\lambda'' - \mu''\lambda = -\varkappa'; \quad \lambda\mu' - \lambda'\mu = -\varkappa''$$
$$\mu'\varkappa'' - \mu''\varkappa' = -\lambda; \quad \varkappa\mu'' - \varkappa''\mu = +\lambda'; \quad \mu\varkappa' - \mu'\varkappa = +\lambda''$$
$$\varkappa'\lambda'' - \varkappa''\lambda' = -\mu; \quad \lambda\varkappa'' - \lambda''\varkappa = +\mu'; \quad \varkappa\lambda' - \varkappa'\lambda = +\mu'' .$$

Dann erhalten wir aus den letzten zwischen x, y, z und p, q, n niedergeschriebenen Gleichungen diese neuen Relationen

$$\varkappa^2 - \lambda^2 - \mu^2 = 1 \qquad \varkappa\varkappa' - \lambda\lambda' - \mu\mu' = 0$$
$$\varkappa'^2 - \lambda'^2 - \mu'^2 = -1 \qquad \varkappa\varkappa'' - \lambda\lambda'' - \mu\mu'' = 0$$
$$\varkappa''^2 - \lambda''^2 - \mu''^2 = -1 \qquad \varkappa'\varkappa'' - \lambda'\lambda'' - \mu'\mu'' = 0.$$

Der eine zu transformirende Ausdruck ist nun in Wirklichkeit

$$\frac{az^2 + 2bxz + 2cyz + dx^2 + 2cxy + fy^2}{z^2} = 0$$

und der transformirte

$$\frac{Gn^2 + G_{,}p^2 + G_2q^2}{n^2} = 0$$

und wenn wir für n, p, q die Werthe substituiren, so finden wir

$$G\varkappa^2 + G_{,}\varkappa'^2 + G_2\varkappa''^2 = a; \qquad G\varkappa\lambda + G_{,}\varkappa'\lambda' + G_2\varkappa''\lambda'' = b$$
$$G\lambda^2 + G_{,}\lambda'^2 + G_2\lambda''^2 = d; \qquad G\varkappa\mu + G_{,}\varkappa'\mu' + G_2\varkappa''\mu'' = c$$
$$G\mu^2 + G_{,}\mu'^2 + G_2\mu''^2 = f; \qquad G\lambda\mu + G_{,}\lambda'\mu' + G_2\mu''\lambda'' = e.$$

Verbinden wir nun diese sechs Gleichungen mit den sechs vorhergehenden $\varkappa^2 - \varkappa'^2 - \varkappa''^2 = 1$ etc., so erhalten wir wiederum den Werth von G als die Wurzel folgender kubischen Gleichung:

$$(G + d)(G + f)(G - a) - (G - a)e^2 - 2bce + (G + f)b^2 + (G + d)c^2 = 0$$

oder

$$G^3 - G^2(a - d - f) + G(b^2 + c^2 - e^2 + df - ad - af) + e^2a + b^2f + c^2d - adf - 2bce = 0.$$

Diese Gleichung erhalten wir aber auch, wenn wir in der allgemeinen Gleichung

$$(a'G - aH)(d'G - dH)(f'G - fH) - (a'G - aH)[e'G - eH]^2 - (f'G - fH)[b'G - bH]^2$$
$$- (d'G - dH)[c'G - cH]^2 - 2(b'G - bH)(c'G - cH)(e'G - eH) = 0$$

setzen $\quad a' = 1; \quad d' = -1; \quad f' = -1; \quad b' = 0; \quad c' = 0; \quad e' = 0; \quad H = 1$

Um den Werth von $G_{,}$ zu bestimmen, nehme man die Gleichung

$$(a'G_{,} - aH_{,})(d'G_{,} - dH_{,})(f'G_{,} - fH_{,}) - (a'G_{,} - aH_{,})[e'G_{,} - eH_{,}]^2 - (f'G_{,} - fH_{,})[b'G_{,} - bH_{,}]^2$$
$$- (d'G_{,} - dH_{,})[c'G_{,} - cH_{,}]^2 - 2(b'G_{,} - bH_{,})(c'G_{,} - cH_{,})(e'G_{,} - eH_{,}) = 0$$

und wenn man dieselben Substitutionen anwendet, nur $H_{,} = -1$ setzt, so wird

$$G_{,}^3 - G_{,}^2(f + d - a) + G_{,}[df - af - ad + b^2 + c^2 - e^2] + adf + 2bce - ae^2 - fb^2 - dc^2 = 0.$$

Und wenn man statt $+G_{,}$ setzt $-G_{,}$

$$G_{,}^3 - G_{,}^2(a - d - f) + G_{,}(b^2 + c^2 - e^2 + df - af - ad) + ae^2 + fb^2 + dc^2 - afd - 2bce = 0\cdot$$

Wir sehen demnach, dass die Grösse $-G_{,}$ und auf gleiche Weise $-G_2$ die Wurzel einer kubischen Gleichung sei, als deren dritte Wurzel wir $+G$ gefunden haben. Allgemein wird die kubische Gleichung sein

$$x^3 - x^2(a - d - f) + x(b^2 + c^2 - e^2 + df - af - ad) + ae^2 + fb^2 + dc^2 - afd - 2bce = 0$$

und als ihre Wurzeln finden wir $G, -G_{,}, -G_2$.

Hieraus ersehen wir, dass der Ausdruck

$$az^2 + 2bxz + 2cyz + dx^2 + 2exy + fy^2$$

immer transformirt werden könne in einen andern von der Form

$$Gn^2 - G_{,}p^2 - G_2q^2$$

oder

$$\frac{az^2 + 2bxz + 2cyz + dx^2 + 2exy + fy^2}{z^2} = \frac{Gn^2 - G_{,}p^2 - G_2q^2}{(kn + lp + mq)^2}.$$

Da ferner $1 - x^2 - y^2$ und $1 - p^2 - q^2$ die andern Functionen sind, so wird es freistehen, wenn wir $1 - x^2 - y^2 = 0$ und $1 - p^2 - q^2 = 0$ setzen, x^2 und y^2 oder lieber $\frac{x^2}{z^2} = \operatorname{Cos}^2\varphi$, $\frac{y^2}{z^2} = \operatorname{Sin}^2\varphi$ und aus demselben Grunde $\frac{p^2}{n^2} = \operatorname{Cos}^2\psi$, $\frac{q^2}{n^2} = \operatorname{Sin}^2\psi$ anzunehmen. Und dann wird

$$\frac{az^2 + 2bxz + 2cyz + dx^2 + 2exy + fy^2}{z^2} = a + 2b\operatorname{Cos}\varphi + 2c\operatorname{Sin}\varphi + d\operatorname{Cos}^2\varphi + 2e\operatorname{Sin}\varphi\operatorname{Cos}\varphi + f\operatorname{Sin}^2\varphi$$

oder

$$a + 2b\operatorname{Cos}\varphi + 2c\operatorname{Sin}\varphi + d\operatorname{Cos}^2\varphi + 2e\operatorname{Sin}\varphi\operatorname{Cos}\varphi + f\operatorname{Sin}^2\varphi = \frac{(G - G_{,}\operatorname{Cos}^2\psi - G_2\operatorname{Sin}^2\psi)}{(k + l\operatorname{Cos}\psi + m\operatorname{Sin}\psi)^2},$$

wo also folgende Substitution angewendet ist:

$$\operatorname{Cos}\varphi = \frac{k' + l'\operatorname{Cos}\psi + m'\operatorname{Sin}\psi}{k + l\operatorname{Cos}\psi + m\operatorname{Sin}\psi}$$

$$\operatorname{Sin}\varphi = \frac{k'' + l''\operatorname{Cos}\psi + m''\operatorname{Sin}\psi}{k + l\operatorname{Cos}\psi + m\operatorname{Sin}\psi}$$

Wenn wir diese Substitution bei der Transformation der Integrale anwenden wollen, so müssen vorher die Werthe von $d\psi$ und $d\varphi$ ausgedrückt werden. Zu dem Zwecke differentiire man eine unserer Gleichungen, etwa:

$$\operatorname{Sin}\varphi = \frac{k'' + l''\operatorname{Cos}\psi + m''\operatorname{Sin}\psi}{k + l\operatorname{Cos}\psi + m\operatorname{Sin}\psi} \quad \text{und man findet:}$$

$$d\varphi = \frac{[(k + l\operatorname{Cos}\psi + m\operatorname{Sin}\psi)(m''\operatorname{Cos}\psi - l''\operatorname{Sin}\psi) - (k'' + l''\operatorname{Cos}\psi + m''\operatorname{Sin}\psi)(m\operatorname{Cos}\psi - l\operatorname{Sin}\psi)]\,d\psi}{(k + l\operatorname{Cos}\psi + m\operatorname{Sin}\psi)(k' + l'\operatorname{Cos}\psi + m'\operatorname{Sin}\psi)}$$

oder

$$d\varphi = \frac{[m''l - ml'' + (m''k - mk'')\operatorname{Cos}\psi + (lk'' - l''k)\operatorname{Sin}\psi]\,d\psi}{(k + l\operatorname{Cos}\psi + m\operatorname{Sin}\psi)(k' + l'\operatorname{Cos}\psi + m'\operatorname{Sin}\psi)}.$$

Aus den frühern Relationen ergiebt sich

$$-\lambda = m''l - ml''$$

$$\lambda' = m''k - mk''$$

$$\lambda'' = lk'' - l''k; \quad \text{also wird}$$

$$d\varphi = \frac{[-\lambda + \lambda'\operatorname{Cos}\psi + \lambda''\operatorname{Sin}\psi]\,d\psi}{(k + l\operatorname{Cos}\psi + m\operatorname{Sin}\psi)(k' + l'\operatorname{Cos}\psi + m'\operatorname{Sin}\psi)}.$$

Ebenso ergiebt sich aus dem Vorigen

$$\begin{array}{lll} k' = \mu'\varkappa'' - \mu''\varkappa' & \text{und} & \mu'\varkappa'' - \mu''\varkappa' = -\lambda \\ l' = \varkappa\mu'' - \varkappa''\mu & & \varkappa\mu'' - \varkappa''\mu = \lambda' \\ m' = \varkappa'\mu - \varkappa\mu' & & \mu\varkappa' - \mu'\varkappa = \lambda'' \end{array}$$

also

$$\begin{array}{lll} -\lambda = k'; & \lambda' = l'; & \lambda'' = m' \\ -\mu = k''; & \mu' = l''; & \mu'' = m'' \\ \varkappa = k; & -\varkappa' = l; & -\varkappa'' = m \end{array}$$

und desshalb

$$d\varphi = \frac{d\psi}{k + l\,\mathrm{Cos}\psi + m\,\mathrm{Sin}\psi}.$$

Hieraus ersehen wir, dass, wenn wir diese Substitution anwenden, der Ausdruck

$$\int \frac{d\varphi}{\sqrt{[a + 2b\,\mathrm{Cos}\varphi + 2c\,\mathrm{Sin}\varphi + d\,\mathrm{Cos}^2\varphi + 2e\,\mathrm{Sin}\varphi\,\mathrm{Cos}\varphi + f\,\mathrm{Sin}^2\varphi]}}$$

ohne weiteres sich transformiren lasse in

$$\int \frac{d\psi}{\sqrt{[G - G_1\mathrm{Cos}^2\psi - G_2\,\mathrm{Sin}^2\psi]}}$$

Wenn $\mathrm{Sin}\varphi$ und $\mathrm{Cos}\varphi$ sich zu gleicher Zeit rational ausdrücken lassen, dann wird man auch immer $\mathrm{Tg}\frac{1}{2}\varphi$ rational ausdrücken können, weil $\mathrm{Tg}\frac{1}{2}\varphi = \frac{\mathrm{Sin}\varphi}{1 + \mathrm{Cos}\varphi}$ gefunden wird. Auf diese Weise können wir dahin gelangen, zwischen $\mathrm{Tg}\frac{1}{2}(\varphi - \Theta)$ und $\mathrm{Tg}\frac{1}{2}(\psi - \Theta)$ eine einfache Relation aufzustellen. Wir werden aber durch die vorhergehenden Formeln das Gesuchte leichter erhalten. Denn mit Hülfe derselben wird

$$(h) \ldots \left\{ \begin{array}{l} \mathrm{Cos}\varphi = \dfrac{-\lambda + \lambda'\mathrm{Cos}\psi + \lambda''\mathrm{Sin}\psi}{\varkappa - \varkappa'\mathrm{Cos}\psi - \varkappa''\mathrm{Sin}\psi} \\ \mathrm{Sin}\varphi = \dfrac{-\mu + \mu'\mathrm{Cos}\psi + \mu''\mathrm{Sin}\psi}{\varkappa - \varkappa'\mathrm{Cos}\psi - \varkappa''\mathrm{Sin}\psi} \end{array} \right.$$

Ausserdem wird

$$\begin{array}{llll} k^2 - l^2 - m^2 = 1; & kk' - ll' - mm' = 0; & k^2 - k'^2 - k''^2 = 1; & kl - k'l' - k''l'' = 0 \\ k'^2 - l'^2 - m'^2 = 1; & kk'' - ll'' - mm'' = 0; & l^2 - l'^2 - l''^2 = -1; & km - k'm' - k''m'' = 0 \\ k''^2 - l''^2 - m''^2 = 1; & k'k'' - l'l'' - m'm'' = 0; & m^2 - m'^2 - m''^2 = -1; & lm - l'm' - l''m'' = 0 \end{array}$$

Aus den Gleichungen . . . h erhalten wir die folgenden:

$$\varkappa + \lambda\,\mathrm{Cos}\varphi + \mu\,\mathrm{Sin}\varphi = \frac{1}{\varkappa - \varkappa'\mathrm{Cos}\psi - \varkappa''\mathrm{Sin}\psi}$$

$$\varkappa' + \lambda'\mathrm{Cos}\varphi + \mu'\mathrm{Sin}\varphi = \frac{\mathrm{Cos}\psi}{\varkappa - \varkappa'\mathrm{Cos}\psi - \varkappa''\mathrm{Sin}\psi}$$

$$\varkappa'' + \lambda''\mathrm{Cos}\varphi + \mu''\mathrm{Sin}\varphi = \frac{\mathrm{Sin}\psi}{\varkappa - \varkappa'\mathrm{Cos}\psi - \varkappa''\mathrm{Sin}\psi}$$

und aus diesen wiederum:

$$\mathrm{Sin}\psi = \frac{\varkappa'' + \lambda''\mathrm{Cos}\varphi + \mu''\mathrm{Sin}\varphi}{\varkappa + \lambda\mathrm{Cos}\varphi + \mu\mathrm{Sin}\varphi}$$

$$\mathrm{Cos}\psi = \frac{\varkappa' + \lambda'\mathrm{Cos}\varphi + \mu'\mathrm{Sin}\varphi}{\varkappa + \lambda\mathrm{Cos}\varphi + \mu\mathrm{Sin}\varphi}.$$

Nun setze man

$$l^2 + m^2 = k'^2 + k''^2 = k^2 - 1 = \varepsilon^2,$$

so erhalten wir augenblicklich aus den Gleichungen

$$\mathrm{Cos}\varphi = \frac{k' + l'\mathrm{Cos}\psi + m'\mathrm{Sin}\psi}{k + l\mathrm{Cos}\psi + m\mathrm{Sin}\psi}$$

$$\mathrm{Sin}\varphi = \frac{k'' + l''\mathrm{Cos}\psi + m''\mathrm{Sin}\psi}{k + l\mathrm{Cos}\psi + m\mathrm{Sin}\psi}$$

$$k'\mathrm{Cos}\varphi + k''\mathrm{Sin}\varphi = \frac{\varepsilon^2 + kl\,\mathrm{Cos}\psi + mk\,\mathrm{Sin}\psi}{k + l\mathrm{Cos}\psi + m\mathrm{Sin}\psi} \quad \text{und}$$

$$k''\mathrm{Cos}\varphi - k'\mathrm{Sin}\varphi = \frac{m\,\mathrm{Cos}\,\psi - l\,\mathrm{Sin}\psi}{k + l\mathrm{Cos}\psi + m\mathrm{Sin}\psi}.$$

Setzen wir jetzt

$$k' = \varepsilon\mathrm{Cos}\Theta \qquad l = \varepsilon\mathrm{Cos}\Theta'$$
$$k'' = \varepsilon\mathrm{Sin}\Theta \qquad m = \varepsilon\mathrm{Sin}\Theta',$$

so erhalten wir sofort folgende Gleichungen:

$$\mathrm{Cos}\,(\varphi - \Theta) = \frac{\varepsilon + k\,\mathrm{Cos}(\psi - \Theta')}{k + \varepsilon\,\mathrm{Cos}(\psi - \Theta')}$$

$$\mathrm{Sin}\,(\varphi - \Theta) = \frac{\mathrm{Sin}(\psi - \Theta')}{k + \varepsilon\,\mathrm{Cos}(\psi - \Theta')}$$

und hieraus wiederum

$$1 + \mathrm{Cos}\,(\varphi - \Theta) = (k + \varepsilon).\frac{1 + \mathrm{Cos}(\psi - \Theta')}{k + \varepsilon\mathrm{Cos}(\psi - \Theta')}$$

oder

$$\frac{\mathrm{Sin}\,(\varphi - \Theta)}{1 + \mathrm{Cos}(\varphi - \Theta)} = \frac{1}{k + \varepsilon}\,.\,\frac{\mathrm{Sin}(\psi - \Theta')}{1 + \mathrm{Cos}\,(\psi - \Theta')}$$

oder

$$\mathrm{Tg}\tfrac{1}{2}\,(\varphi - \Theta) = \frac{1}{k + \varepsilon}\,.\,\mathrm{Tg}\tfrac{1}{2}\,(\psi - \Theta').$$

Endlich erkennen wir, dass unser Theorem auch bei der Transformation der Doppelintegrale wird angewendet werden können. Es sei z. B. ein Doppelintegral von der Form gegeben:

$$\iint dxdy.f[(a + 2bx + 2cy + dx^2 + 2exy + fy^2), (a' + 2b'x + 2c'y + d'x^2 + 2e'xy + f'y^2)],$$

so geht aus den vorigen Betrachtungen sofort hervor, dass es verwandelt werden könne in folgendes:

$$\iint dxdy.f\left\{\frac{G + G_1p^2 + G_2q^2}{(k + lp + mq)^2};\ \frac{H + H_1p^2 + H_2q^2}{(k + lp + mq)^2}\right\}$$

und dass uns nur die Bestimmung von dxdy noch übrig bleibt.

Wie oft man aber auch ein Doppelintegral von der Form

$$\iint Z.dxdy$$

wo Z irgend eine beliebige Function der Grössen x und y bezeichnet, mit Hülfe der Gleichungen

$$f(x, y) = \Pi(p, q)$$
$$F(x, y) = \Phi(p, q)$$

wird transformiren wollen, immer wird

$$\iint Z.dxdy = \iint Z.dpdq. \frac{\frac{d\Pi}{dp} \cdot \frac{d\Phi}{dq} - \frac{d\Pi}{dq} \cdot \frac{d\Phi}{dp}}{\frac{df}{dx} \cdot \frac{dF}{dy} - \frac{df}{dy} \cdot \frac{dF}{dx}}.$$

Nun wird aber, da f (x, y) hier sein wird

$$x = \frac{k' + l'p + m'q}{k + lp + mq} = \frac{Z_,}{N}$$

und $\quad F(x, y) \ldots y = \frac{k'' + l''p + m''q}{k + lp + mq} = \frac{Z_2}{N},$

$$\frac{df}{dy} \cdot \frac{dF}{dy} - \frac{df}{dy} \cdot \frac{dF}{dx} = 1 \quad \text{sein} \quad \text{und}$$

$$\frac{d\Pi}{dp} \cdot \frac{d\Phi}{dq} - \frac{d\Pi}{dq} \cdot \frac{d\Phi}{dp} = \frac{(l'N - lZ_,)(m''N - mZ_2) - (m'N - mZ_,)(l''N - lZ_2)}{N^4}$$
$$= \frac{(l'm'' - l''m')N^2 + (l''m - lm'')NZ_, + (lm' - l'm)NZ_2}{N^4}.$$

Setzen wir jetzt für N^2; $NZ_,$; NZ_2 die Werthe, so finden wir

$$k^2(l'm'' - l''m') + kk'(l''m - lm'') + kk''(lm' - l'm) +$$
$$[lk(l'm'' - l''m') + lk'(l''m - lm'') + lk''(lm' - l'm)]p +$$
$$[mk(l'm'' - l''m') + mk'(l''m - lm'') + mk''(lm' - l'm)]q,$$

welche ganze Summe aber noch durch N^4 dividirt werden muss. Diese Summe wird

$$\frac{(k + lp + mq)[k(l'm'' - l''m') + k'(l''m - lm'') + k''(lm' - l'm)]}{(k + lp + mq)^4}.$$

Und hiernach verwandelt sich unser zu transformirendes Integral in

$$C \iint \frac{dpdq}{(k + lp + mq)^3} f\left(\frac{G + G_,p^2 + G_2q^2}{(k + lp + mq)^2}; \frac{H + H_,p^2 + H_2q^2}{(k + lp + mq)^2}\right),$$

wo $\quad C = k(l'm'' - l''m') + k'(l''m - lm'') + k''(lm' - l'm) \quad$ gesetzt ist.

Imaginaire aber correspondirende Puncte müssen solche sein, deren Coordinaten folgende Form annehmen:

$a + ib = x'$; $\quad c + id = y'$ $\quad$ für den einen,

$a - ib = x''$: $\quad c - id = y''$ $\quad$ für den andern Punct.

Zwei imaginaire aber correspondirende gerade Linien seien solche, deren Constanten correspondirende, imaginaire Grössen sind, wie

$$(m+ni)x+(m'+n'i)y+m''+n''i=0 \quad \text{und}$$

$$(m-ni)x+(m'-n'i)y+m''-n''i=0,$$

wo i immer $\sqrt{-1}$ bedeutet.

Eine gerade Linie zwischen correspondirenden aber imaginairen Puncten wird reell.

Seien die Coordinaten des einen Punctes x', y', die des andern aber x'', y'', so wird die Gleichung, welche die zwischen ihnen liegende Linie andeutet

$$(y''-y')x-(x''-x')y=x'y''-x''y'.$$

Wenn wir aber die früher angegebenen Werthe für x', x''; y', y'' setzen, so wird

$$y'-y''=-2id; \qquad x'-x''=-2ib; \qquad x'y''-x''y'=-2i(ad-bc),$$

und die Gleichung der gesuchten Linie wird sein

$$dx-by=ad-bc, \quad \text{also reell.}$$

Der Durchschnittspunkt zweier imaginairer aber correspondirender Linien wird reell.

Aus den oben angegebenen Gleichungen solcher Linien finden wir

$$[(m-ni)(m'+n'i)-(m+ni)(m'-n'i)]y+(m-ni)(m''+n''i)-(m+ni)(m''-n''i)=0$$

$$[(m+ni)(m'-n'i)-(m-ni)(m'+n'i)]x+(m''+n''i)(m'-n'i)-(m'+n'i)(m''-n''i)=0,$$

woher

$$x=\frac{m''n-mn''}{mn'-m'n}; \qquad y=\frac{m'n''-m''n'}{mn'-m'n}.$$

Wir wollen nun in einer beliebigen vierseitigen Figur die Durchschnittspuncte suchen, welche immer zwei gegenüberliegende Seiten und die Diagonalen unter sich bilden.

Betrachten wir in einer vierseitigen Figur die zwei gegenüberstehenden Seiten, als sich correspondirende, und ebenso die Diagonalen, so können wir diese sechs Linien als in drei Systemen liegend ansehen. Ausserdem wird die Bedingung obwalten, dass immer drei Linien, die eine aus dem einen, die andere aus dem andern Systeme in einen Punct zusammenlaufen. Diese Bedingung fällt aber mit der andern zusammen, dass die Gleichung des einen Systems immer eine Folge der Gleichungen der andern Systeme wird. Die Gleichungen der drei Systeme werden daher folgende Gestalt annehmen müssen:

$$u^2-v^2=0, \qquad \text{wo} \qquad u=a+bx+cy$$

$$v^2-w^2=0, \qquad\qquad v=a'+b'x+c'y$$

$$w^2-u^2=0, \qquad\qquad w=a''+b''x+c''y.$$

Die Gleichungen der drei Systeme werden daher folgende sein:

$$\text{I.} \quad 0=[a+a'+(b+b')x+(c+c')y][a-a'+(b-b')x+(c-c')y]$$

$$\text{II.} \quad 0=[a'+a''+(b'+b'')x+(c'+c'')y][a'-a''+(b'-b'')x+(c'-c'')y]$$

$$\text{III.} \quad 0=[a''+a+(b''+b)x+(c''+c)y][a''-a+(b''-b)x+(c''-c)y]$$

Setzen wir ferner die Coordinaten der vier Puncte der vierseitigen Figur

$$x_{,}, y_{,}; \quad x_2, y_2; \quad x_3, y_3; \quad x_4, y_4;$$

so erhalten wir, um die Grössen $a+a'$, $b+b'$, $c+c'$, ... zu finden, folgende Gleichungen:

$$a+a'+(b+b')x_1+(c+c')y_1=0;\qquad a'+a''+(b'+b'')x_1+(c'+c'')y_1=0$$
$$a+a'+(b+b')x_2+(c+c')y_2=0;\qquad a'-a''+(b'-b'')x_2+(c'-c'')y_2=0$$
$$a-a'+(b-b')x_3+(c-c')y_3=0;\qquad a'-a''+(b'-b'')x_3+(c'-c'')y_3=0$$
$$a-a'+(b-b')x_4+(c-c')y_4=0;\qquad a'+a''+(b'+b'')x_4+(c'+c'')y_4=0.$$

Aus diesen folgt:

$$b+b'=y_1-y_2;\quad c+c'=x_2-x_1;\quad a+a'=x_1y_2-x_2y_1$$
$$b-b'=y_3-y_4;\quad c-c'=x_4-x_3;\quad a-a'=x_3y_4-x_4y_3$$
$$b'+b''=y_1-y_4;\quad c'+c''=x_4-x_1;\quad a'+a''=x_1y_4-x_4y_1$$
$$b'-b''=y_2-y_3;\quad c'-c''=x_3-x_2;\quad a'-a''=x_2y_3-x_3y_2.$$

Ausserdem finden wir

$$b-b''=y_1-y_3;\quad c-c''=x_3-x_1;\quad a-a''=x_1y_3-x_3y_1$$
$$b+b''=y_2-y_4;\quad c+c''=x_4-x_2;\quad a+a''=x_2y_4-x_4y_2,$$

wenn wir aus jenen acht Gleichungen vier andere ableiten, welche die Coefficienten des dritten Systems enthalten. Wenn wir jetzt je zwei beliebige, aber sich entsprechende Puncte der vierseitigen Figur nehmen und zugleich feststellen, dass alle imaginair werden, so können wir setzen

$$x_1=\alpha+\beta i;\qquad y_1=\delta+\gamma i$$
$$x_2=\alpha'+\beta' i;\qquad y_2=\delta'+\gamma' i$$
$$x_3=\alpha-\beta i;\qquad y_3=\delta-\gamma i$$
$$x_4=\alpha'-\beta' i;\qquad y_4=\delta'-\gamma' i.$$

Hieraus erhalten wir

$$a+a'=\alpha\delta'-\alpha'\delta+\beta'\gamma-\beta\gamma'+i[\beta\delta'-\beta'\delta+\alpha\gamma'-\alpha'\gamma]=m''+n''i$$
$$a-a'=\alpha\delta'-\alpha'\delta+\beta'\gamma-\beta\gamma'-i[\beta\delta'-\beta'\delta+\alpha\gamma'-\alpha'\gamma]=m''-n''i$$
$$c+c'=\alpha'-\alpha+i[\beta'-\beta]=m'+n'i$$
$$c-c'=\alpha'-\alpha-i[\beta'-\beta]=m'-n'i$$
$$b+b'=\delta-\delta'+i[\gamma-\gamma']=m+ni$$
$$b-b'=\delta-\delta'-i[\gamma-\gamma']=m-ni.$$

Also sehen wir, dass zwei Linien des ersten Systems unter der Bedingung, dass die vier Puncte des Vierecks imaginair werden, folgende Form erhalten:

$$0=m''+n''i+(m'+n'i)y+(m+ni)x\qquad\text{und}$$
$$0=m''-n''i+(m'-n'i)y+(m-ni)x,$$

und dass dieselben also imaginaire aber sich entsprechende oder correspondirende Linien sind, und wie wir oben gezeigt haben, immer einen reellen Durchschnittspunct erhalten. Ferner wird sein

$$a'+a''=[\alpha\delta'-\alpha'\delta+\beta\gamma'-\beta'\gamma]+i[\beta\delta'+\beta'\delta-\alpha'\gamma-\alpha\gamma']=l''+f''i$$
$$a'-a''=-[\alpha\delta'-\alpha'\delta+\beta\gamma'-\beta'\gamma]+i[\beta\delta'+\beta'\delta-\alpha'\gamma-\alpha\gamma']=if''-l''$$
$$c'+c''=+(\alpha'-\alpha)-i(\beta+\beta')=+l'-f'i$$
$$c'-c''=-(\alpha'-\alpha)-i(\beta+\beta')=-l'-f'i$$
$$b'+b''=(\delta-\delta')+i(\gamma+\gamma')=l+fi$$
$$b'-b''=-(\delta-\delta')+i(\gamma+\gamma')=-l+fi.$$

Daher werden die Linien des zweiten Systems in den Gleichungen

$$0 = l'' + f''i + (l' - f'i)\,y + (l + fi)\,x$$

$$0 = l'' - f''i + (l' + f'i)\,y + (l - fi)\,x$$

enthalten sein, und sie werden, wie wir sehen, auch einen reellen Durchschnittspunct haben.

Endlich wird sein:

$$\begin{aligned} a - a'' &= 2i(\delta\beta - \alpha\gamma); & a + a'' &= 2i(\delta'\beta' - \alpha'\gamma') \\ c - c'' &= -2i\beta; & c + c'' &= -2i\beta' \\ b - b'' &= 2i\gamma; & b + b'' &= 2i\gamma'. \end{aligned}$$

Und die Linien des dritten Systems werden sein

$$0 = \delta'\beta' - \alpha'\gamma' + \gamma'x - \beta'y$$

$$0 = \delta\beta - \alpha\gamma + \gamma x - \beta y$$

und auch sie werden einen reellen Schnittpunct haben.

Wenn ferner zwei Puncte der vierseitigen Figur imaginair, zwei reell sind, dann wird

$$\begin{aligned} x_{,} &= \alpha; & y_{,} &= \delta \\ x_2 &= \alpha' + \beta'i; & y_2 &= \delta' + \gamma'i \\ x_3 &= \alpha''; & y_3 &= \delta'' \\ x_4 &= \alpha' - \beta'i; & y_4 &= \delta' - \gamma'i \end{aligned}$$

und wir sehen, dass die Linien des ersten und zweiten Systems einen imaginairen Schnittpunct haben müssen, weil sie nicht correspondirend sind. Die Linien des dritten Systems aber werden sein:

$$0 = \delta'\beta' - \alpha'\gamma' + \gamma'x - \beta'y$$

$$0 = \alpha\delta'' - \alpha''\delta + (\delta - \delta'')\,x - (\alpha - \alpha'')\,y.$$

Wenn daher zwischen den vier Puncten einer vierseitigen Figur sechs Linien gezogen, und je zwei zusammengestellt werden, so werden sich drei Schnittpuncte ergeben; und diese werden alle reell sein, sowohl wenn alle vier Puncte der Figur reell, als auch wenn alle vier imaginair sind; wenn aber von jenen vier Puncten zwei reell sind und zwei imaginair, so werden zwei Durchschnittspuncte imaginair und einer reell sein. Von jenen sechs Linien werden immer zwei reell und die übrigen imaginair sein, einen Fall ausgenommen, den nämlich, wenn alle vier Puncte reell werden; dann müssen auch alle reell sein.

Wenn wir jetzt annehmen, die vier Puncte seien die Durchschnittspuncte zweier Kegelschnitte, so fanden wir für die Coordinaten der einzelnen Puncte früher die Werthe

$$x = \frac{(\lambda_2 - \lambda_3)\sqrt{[f(\lambda_{,})]} \pm (\lambda_3 - \lambda_{,})\sqrt{[f(\lambda_2)]} \pm (\lambda_{,} - \lambda_2)\sqrt{[f(\lambda_3)]}}{(\lambda_2 - \lambda_3)\sqrt{[f'(\lambda_{,})]} \pm (\lambda_3 - \lambda_{,})\sqrt{[f'(\lambda_2)]} \pm (\lambda_{,} - \lambda_2)\sqrt{[f'(\lambda_3)]}}$$

$$y = \frac{(\lambda_2 - \lambda_3)\sqrt{[f''(\lambda_{,})]} \pm (\lambda_3 - \lambda_{,})\sqrt{[f''(\lambda_2)]} \pm (\lambda_{,} - \lambda_2)\sqrt{[f''(\lambda_3)]}}{(\lambda_2 - \lambda_3)\sqrt{[f'(\lambda_{,})]} \pm (\lambda_3 - \lambda_{,})\sqrt{[f'(\lambda_2)]} \pm (\lambda_{,} - \lambda_2)\sqrt{[f'(\lambda_3)]}}$$

und wir sahen dort zugleich, dass dann erst alle Werthe von x und y reell werden können, oder alle imaginair, wenn alle Werthe von λ, also $\lambda_{,}$, λ_2, λ_3 reell sind; dass aber zwei Werthe von x und y reell, die beiden andern imaginair sein werden unter der Bedingung, dass zwei Werthe von λ imaginair werden, einer reel.

Hieraus geht zur Genüge der Zusammenhang zwischen unsern Schnittpuncten und den Wurzeln der bekannten kubischen Gleichung hervor.

Schulnachrichten.

A. Allgemeine Lehrverfassung.

I. PRIMA.

Ordinarius: Der Director.

Latein. 10 St. Cic. de fin. I. Or. Philipp. I. II. Tac. Ann. I. II. 4 St. Exerc. u. Extemp., mündliche Uebungen, Correctur der Aufsätze und Controle der Privatlectüre. 4 St. Prof. Marquardt. Hor. Od. III. IV. Sat. II. Epist. I. mit Auswahl. 2 St. Prof. Herbst.

Griechisch. 6 St. Platonis Laches u. Apologie. Demosthenis oratt. in Phil. I. Olynth. tres, de pace. Sophoclis Ajax u. Oedipus rex, mit einer Skizze der antiken Metrik. Homeri Ilias XIII. — XVIII. (z. Th. priv.) Privatim Platonis Euthyphron, Menon, de rep. VIII. IX. Griech. Exerc. Der Director.

Deutsch. 3 St. Geschichte der deutschen Literatur vom Jahre 1700 bis auf die neuere Zeit. Lectüre der Gudrun und dabei das Nöthige über die mittel-hochdeutsche Conjugation u. Declination durchgenommen. Aufsätze. Freie Vorträge, zu denen der Stoff vornehmlich aus Stücken genommen wird, die den Schülern zur Privatlectüre empfohlen worden. Im Winter, in einer Stunde wöchentlich: Elemente der empirischen Psychologie. Oberlehrer Czwalina.

Französisch. 2 St. In Menzel's Handbuche wurden gelesen die Abschn. von Las Cases, Pradt, Ségur I. und II., Lacretelle II., auch Le voyage à Dieppe v. Wafflard u. Fulgence. Exercitien u. Extemporalien mit Durchnahme syntactischer Abschnitte. Dr. Brandstäter.

Hebräisch. 2 St. Die Verba mit Gutturalen, das Verbum mit Suffixen, die Lehre von den unregelmässigen Verben, den verbis imperf. u. quiescentib. eingeübt, mündlich und schriftlich. Lectüre des Buchs Ruth u. ausgewählter Psalmen mit fortlaufender Uebung im Analysiren der Formen. Pred. Blech.

Religion. 2 St. Lectüre des Epheserbriefes in der Ursprache, katechetische Uebungen und Repetitionen. Kirchengeschichte: Geschichte der lutherischen, reformirten und griechisch-cathol. Kirche von 1555 bis zur neuesten Zeit in freiem Vortrage und einigen Repetitionen. Pred. Blech.

Catholische Religionslehre. 2 St. I. Coet, (Prima u. Sec.) 1 St. Fortgesetzte Erklärung d. Ev. S. Matth. cap. 18 b. z. Schluss, unter Zuziehung d. Parallelstellen, nach d. griech. Text. 1 St. Kirchengesch. Kurzgefasste Uebersicht des zweiten oder christl.-germanischen Zeitalters, von Bonifacius bis zur abendländischen Kirchenspaltung, und des dritten oder griech.-röm.-germanischen Zeitalters, vom 16. Jahrh. bis jetzt, frei vorgetragen nach Dr. Martin. Pfarrer Michalski.

Mathematik. 4 St. Theorie der Exponentialgrössen und Logarithmen und deren Verbindung mit den Kreisfunctionen Die Lehre von den Kettenbrüchen. Anwendung der ebenen Trigonometrie auf die Stereometrie. Wiederholung und Auflösung zahlreicher Uebungs-Aufgaben. Prof. Anger.

Physik. 2 St. Mathemathische Geographie. Wiederholungen, verbunden mit der Auflösung physikalischer Aufgaben. Prof. Anger.

Geschichte und Geographie. Geschichte des sechzehnten und siebzehnten Jahrhunderts. Repetition der alten und mittlern Geschichte, sowie der gesammten Geographie. Prof. Hirsch.

II. OBER-SECUNDA.

Ordinarius: Professor Herbst.

Latein. 10 St. Cic. oratt. pro Sulla, pro Murena. Tusc. I. Brutus (die Hälfte). Sall. Cat. Virg. Aen. VII — X. Stilübungen u. Gramm. Prof. Herbst.

Griechisch. 6 St. Plutarchi Agis u. Cleomenes. Herod. VI. VII. Gramm. und Exerc. 4 St. Prof. Herbst. Homeri Ilias XIII. — XVIII. Daneben cursorisch u. z. Th. privatim Odyss. XIII. — XVIII. 2 St. Der Director.

Deutsch. 3 St. Geschichte der deutschen Litteratur von 1300 bis 1620. Aufsätze. Freie Vorträge, meistens über, Gegenstände der Litteraturgeschichte. Gelesen Lessing's Laocoon. Dr. Roeper.

Französisch. 2 St. Lehre von den Modis. Exercitien und Extemporalien. Lectüre: Handbuch von Menzel, und Iphigénie von Racine. Dr. Strehlke.

Hebräisch. 2 St. (Combinirt mit Unter-Secunda.) Schreib- und Lese-Uebungen. Die Lehre v. Pronomen, dem regelmässigen Verbo, u. dem Verbo mit Suffixen u. mit Gutturalen, die ersten Anleitungen zum Analysiren der Formen und Uebersetzen. Pred. Blech.

Religionslehre. 2 St. (Combinirt mit Unter-Secunda.) Lectüre des Evangelii St. Matthäi in der Ursprache bis zum Ende der Bergpredigt, die eine specielle Durchnahme erfuhr. Christologie des alten Testaments, in Verbindung mit katechetischen Uebungen über die Lehre von den Sacramenten und vom Kirchenjahr. Kirchengeschichte: Die beiden letzten Perioden der mittleren Kirchengeschichte, in freiem Vortrage mit Repetitionen. Pred. Blech.

Mathematik. 4 St. Ebene Trigonometrie. Anwendung der Stereometrie auf die Projections-Lehre. Algebraische, geometrische und stereometrische Uebungs-Aufgaben. Prof. Anger.

Physik. 2 St. Electricität und Magnetismus. Wiederholungen aus allen vorgetragenen Capiteln. Prof. Anger.

Geschichte und Geographie. 3 St. Geschichte des Mittelalters von 843 bis 1450 nach Chr. Repetition einzelner Abschnitte der griechischen und römischen Geschichte. Geographische Repetitionen. Prof. Hirsch.

III. UNTER-SECUNDA.

Ordinarius: Professor Marquardt.

Latein. 10 St. Fortgesetzte Einübung der Syntax durch Wiederholung, Extemporalien, wöchentliche Exercitien und Memorirübungen. 4 St. Cic. oratt. Catilin. I. — IV. Livius V. 4 St. Prof. Marquardt. Virg. Ecl. I. IX. Aen. I. — III. 2 St. Prof. Herbst.

Griechisch. 6 St. Hom. Ilias XII. XIII. XV. — XVII. Privatim Odyss. IX. X. XI. 2 St. Prof. Marquardt. Isocratis Panegyricus und Xenophon's Memorabilien I. II. 2 St. Grammatik: Rection der Casus. Die Praepositionen und die wichtigsten Modusregeln. Exercitien und Extemporalien. 2 St. Dr. Strehlke.

Deutsch 3 St. Geschichte der Litteratur des Mittelalters bis 1300. Metrik. Aufsätze u. Vorträge. Dr. Strehlke.

Französisch. 2 St. Repetitionen aus der Formenlehre. Die Lehre von der Wortstellung und Negation. Exercitien und Extemporalien. Lectüre: Noël Lectures Françaises und 2 Acte von Ponsard's Honneur et argent. Dr. Strehlke.

Mathematik. 4 St. Uebungen im Auflösen der Gleichungen des ersten und zweiten Grades. Geometrische Constructionen. Stereometrie. Prof. Anger.

Physik. 2 St. Anfangsgründe der Lehre vom Gleichgewichte und der Bewegung fester und flüssiger Körper. Electricität, durch Versuche erläutert. Prof. Anger.

Geschichte und Geographie. 3 St. Römische Geschichte von 134 v. Chr. bis zum Untergange des Weströmischen Kaiserthums. Geschichte des Mittelalters bis 843 n. Chr. Geographische Repetitionen. Prof. Hirsch.

IV. OBER-TERTIA.

Ordinarius: Dr. Brandstaeter.

Latein. 10 St. Livius XXI. XXII. Cic. de senect. Ovid. Metamorph. VIII. — XI. mit Auswahl. Gramm. Exerc. und Extemp. Dr. Brandstaeter.

Griechisch. 6 St. Xenoph. Anab. IV. V. Homeri Odyss. VIII. — XII. mit vorangeschickter Homer. Formenlehre und Einleit. über Entstehung der Homer. Gedichte. Gramm. Wiederhol. u. Uebersetz. ins Griech. nach Rost. Dr. Brandstaeter.

Deutsch. 2 St. Freie Vorträge, Aufsätze und Erklärung Schiller'scher Gedichte. Dr. Brandstäter.

Französisch. 2 St. Gelesen Abschnitte in Noël Lectures françaises. Grammatik: Unregelm. Verba, eingeübt nach den Materialien von Brandst., mündlich und schriftlich. Dr. Brandstaeter.

Religion. 2 St. 1. St. Biblische Geschichte, nach dem vom Lehrer herausgegebenen Handbuche, von der Leidensgeschichte Jesu Christi bis zum Ende der Apostelgeschichte. 1. St. Der 3. Artikel u. der Sacramentscursus, die Lehre vom Kirchenjahre mit Einübung d. hauptsächlichsten Sprüche u. Lieder, Repetition der Hauptstücke d. Katechismus. Pred. Blech.

Catholische Religionslehre. 2 St. II. Coet. (Ober- und Unter-Tertia und Quarta.) Vom Glauben u. apostol. Glaubensbekenntniss. Von der Hoffnung u. dem Gebet. Von der Liebe u. d. zehn Geboten, n. Schmitz. Pfarrer Michalski.

Mathematik. 4 St. 2 St. Arithmetik: Lehre der Gleichungen mit einer und mehreren Unbekannten wiederholt. Quadratische Gleichungen. Lehre von den Logarithmen, practische Ueb., Zinseszinsen-Rechnung. Lehre von d. Progressionen 2 St. Geometrie: Lehre vom Kreise vollständig. Einleitung in die Stereometrie, von den Ebenen und Linien im Raume. Berechnung einfacher Körper. Oberlehrer Czwalina.

Geschichte und Geographie. 4 St. Geschichte des Alterthumes bis 134 v. Chr. Die aussereuropäischen Erdtheile. Prof. Hirsch.

V. VI. UNTER-TERTIA.

Ordinarius: Coet. A. Dr. Roeper. Coet. B. Dr. Strehlke.

Latein. 9 St. Jul. Caesar. Jacobs Clio, (Curt., Liv., Sall.) Ovid. Metam. I. II. IV. V. mit Ausw. Gramm.: Lehre v. d. Modis, Repetition der Casusl., Exercit. und Extemp. Dr. Roeper. Dr. Strehlke.

Griechisch. 5 St. Jacobs griech. Leseb. 2. Cursus. Xenoph. Anab. I. II. Grammatik: Verba liquid., Verba in —$\mu\iota$, nebst den wichtigst. unregelm.; Wiederholung des Cursus von Quarta. Dr. Roeper. Dr. Strehlke.

Deutsch. 2 St. Aufsätze, mit gramm. u. stilist. Erläuterungen. Declamation. Dr. Roeper. S.-A.-C. Heinrichs.

Französisch. 4 St. Anfangsgründe der Grammatik bis zum unregelmäss. Verbum incl. Uebersetzungen ins Französische nach Brandstaeter's Materialien. Lectüre aus Noël's Lectures françaises. In beiden Coetus Dr. Roeper.

Religion. 2 St. 1 St. Lectüre des Evangelii Marci u. Einübung geistlicher Lieder. 1 St. Repetition der frühern Hauptstücke. Durchnahme des zweiten Hauptstücks, namentlich der erste und zweite Artikel ausführlich, mit den dazu erforderlichen Sprüchen. In beiden combinirten Coetus Pred. Blech.

Mathematik. 4 St. 2 St. Arithm.: Lehre von den Potenzen. Gleichungen d. ersten Grades mit einer u. mehreren Unbekannten, fast alle Beispiele aus M. Hirsch durchgenommen. Lehre von der Permutation und Combination. Wiederholung des Cursus von Quarta. 2 St. Geometrie: Aehnlichkeit und Gleichheit der Figuren; die wichtigsten Sätze vom Kreise. Oberlehrer Czwalina.

Geschichte und Geographie. 4 St. Mittlere und neuere Geschichte von 1273 — 1789. Physische und politische Geographie von Europa nach Voigt Curs. III. und IV. Prof. Hirsch.

VII. QUARTA.

Ordinarius: S.-A.-C. Heinrichs.

Latein. 9 St. Corn. Nep. I. — IX. Lehre von d. Casibus. Wöchentliche Exerc. u. Extemp. S.-A.-C. Heinrichs.

Griechisch. 5 St. Von den Elementen bis zu den Verb. contr. excl. Lectüre in Jacobs griech. Elementarbuch 1. Cursus. S.-A.-C. Heinrichs.

Deutsch. 2 St. Aufsätze mit sprachl. Erläut., Declamationen. Lehre v. Satz- u. Periodenbau, mit mündl. u. schriftl. Uebungen. S.-A.-C. Heinrichs.

Religion. 2 St. 1 St. Das erste und dritte Hauptstück des Catechismus in gegenseitiger Beziehung. Durchnahme der sonntägl. evangelischen Perikopen mit Andeutungen über die Lehre vom Kirchenjahr. Einübung der betreffenden Sprüche und Liederverse. Katechetische Uebungen. Pred. Blech.

Mathematik und Rechnen. 4 St. Von den Linien und Winkeln, Congruenz der Dreiecke. Decimalbrüche, Quadrat- und Kubikwurzeln, Buchstabenrechnung. Oberlehrer Czwalina.

Naturgeschichte. 2 St. Einleitung; Beschreib. der Säugethiere. Oberlehrer Czwalina.

Geschichte und Geographie. 4 St. Geschichte des Alterth. und des Mittelalters bis 1273. — Physische Geographie von Europa. S.-A.-C. Heinrichs.

Schreiben. 2 St. Schreiblehrer Fisch. Zeichnen im Sommer 2 St. Zeichenlehrer Breysig.

VIII. QUINTA.

Ordinarius: Dr. Hintz.

Latein. 10 St. Wiederholung und Erweiterung des Pensums von Sexta, Genusregeln, unregelm. Verba. Uebung im Satzbilden. Wöch. Exerc. Lectüre in Ellendts lat. Lesebuche, 2. Cursus. Dr. Hintz.

Deutsch. 4 St. Die Lehre vom Satze und von der Rection der Casus. Monatliche Aufsätze, mündliche Erzählungen. Declamation. Dr. Hintz.

Religion. 2 St. Bibl. Geschichte (ausführlicher als in Sexta) bis zum babylonischen Exil. Das Leben Jesu. Auswendiglernen biblischer Sprüche, Kirchenlieder und der drei ersten Hauptstücke des luth. Catechismus. Oberl. Skusa.

Catholische Religionslehre. 2 St. III. Coet. (Quinta und Sexta.) Biblische Geschichte des neuen Testaments nach Allioli mit Anwendung auf die hauptsächlichsten Lehren der cath. Kirche. Pfarrer Michalski.

Rechnen. 4 St. Repetition der Bruchrechnung, Regula de tri, einfache und zusammengesetzte Zinsrechnung, Gesellschaftsrechnung. Dr. Hintz.

Naturgeschichte. 4 St. Im Sommer Botanik, im Winter häufig vorkommende Mineralien, Wirbellose Thiere, bes. Insecten. Oberlehrer Skusa.

Geographie. 2 St. Allg. phys. Geogr. nach Voigt 1. Curs. Dr. Hintz.

Schreiben. 2 St. Schreiblehrer Fisch. Zeichnen. 2 St. Zeichenlehrer Breysig.

IX. SEXTA.

Ordinarius: Oberlehrer Skusa.

Latein. 8 St. Von den Elementen bis zu den regelm. Conjugat. incl.; Lectüre in Ellendts lat. Lesebuche 1. Curs. Wöch. 1 kleines Exerc. Oberlehrer Skusa.

Deutsch. 4 St. Die Lehre vom einfachen Satze. Lectüre in Lehmanns deutsch. Lesebuche. Auswendiglernen von Gedichten. Kleine Aufsätze. Oberlehrer Skusa.

Religion. Bibl. Geschichte bis Salomon. Erzählung aus dem Leben Jesu nach Kohlrausch. Auswendiglernen von Bibelsprüchen und Liedern. Oberlehrer Skusa.

Rechnen. 4 St. Die vier Species in ganzen benannten Zahlen. Lehre von den Brüchen mit vielfachen Uebungen. Einfache Regula de tri. Dr. Hintz.

Naturgeschichte. 2 St. Im Sommer einheimische Pflanzen, im Winter Säugethiere und Vögel. Oberl. Skusa.

Geographie. 2 St. Ueber Gestalt, Grösse u. Bewegung der Erde. Die einzelnen Erdtheile mit den sie umgebenden Meeren, die Hauptländer, Gebirge und Flüsse nach Voigt 1. Cursus. Dr. Hintz.

Schreiben. 4 St. Schreiblehrer Fisch. Zeichnen. 4 St. Zeichenlehrer Breysig.

Die Elementarclasse oder SEPTIMA

hat täglich 1 Lese-, 1 Schreib-, 1 Rechenstunde, wöch. 4 orthogr. St., 2 Religionsst., einige Zeichenst., desgl für Gedichte und Lieder und für Geographie, zusammen 28 St. Elementarlehrer Wilde.

Ausser den vorgenannten Stunden wurden noch ertheilt: 8 Singestunden, 4 vom Musikdirector Markull, 4 vom Dr. Brandstaeter; 2 Zeichenstunden für Liebhaber des Zeichnens in oberen Classen, ausser der Schulzeit, vom Zeichenlehrer Breysig; im Sommer Mittwoch und Sonnabend Nachmittag Turnunterricht vom Elementarlehrer Grüning; Privatunterricht im Englischen an einige Schüler der oberen Classen vom Sprachlehrer Friedländer.

Bemerkung. „Für die catholischen Schüler des Gymnasiums wurde an Sonn- und Feiertagen in der Carmeliterkirche ad S. Josephum besonderer Gottesdienst gehalten. Ausser der Schulzeit wurden 11 Schüler vorbereitet, und 9 derselben Dom. V. p. Pent. feierlich angenommen. Die Verpflichteten empfingen vierteljährlich die hh. Sacramente der Busse und des Altars. Den Hrn. Pfarrgeistlichen, welche dabei bereitwilligst mitgewirkt, wird hierdurch der schuldige Dank erstattet. Pf. Michalski."

B. Verordnungen

der Königlichen Behörden.

1. Vom 27. April 1854. Das Königl. Provinzial-Schul-Collegium theilt unter d. 13. Mai 1854 die Verfügung des Herrn Ministers der geistlichen etc. Angelegenheiten vom obigen Datum mit, wonach den Lehrern nur mit Genehmigung des Directors Schülern ihrer eigenen oder einer anderen Klasse Privatunterricht zu ertheilen gestattet wird. Uebrigens soll nicht gehindert werden, dass Schüler der unteren und mittleren Klassen ihre Schularbeiten unter der Aufsicht eines Klassenlehrers gegen eine besondere Entschädigung anfertigen.

2. Vom 28. Juli 1854. Das Königl. Provinzial-Schul-Collegium zeigt an, dass dem Programmentausch vom Jahre 1854 ab auch die 5 Gymnasien des Herzogthums Braunschweig, nämlich Braunschweig, Wolfenbüttel, Helmstädt, Blankenburg, Holzminden, beigetreten sind, jedoch eine grössere Anzahl von Programmen als bisher (146 Exemplare) desswegen nicht an die Geheime Registratur des Königl. Ministeriums einzusenden seien.

3. Vom 14. October 1854. Das Königl. Provinzial-Schul-Collegium fordert in Folge eines vorgekommenen einzelnen Falles, wo ein Candidat des höheren Schulamts wegen mangelnder Kenntniss des Hebräischen von der Prüfung pro facultate docendi zurückgewiesen wurde, den Director auf, die Schüler, welche sich dem Studium der Philologie widmen wollen, auf dieses Erforderniss der Reife für die Universität ausdrücklich aufmerksam zu machen.

4. Vom 14. December 1854. Das Königl. Provinzial-Schul-Collegium theilt mit, dass die 11 höheren Bürgerschulen der Provinz dem Programmentausche beigetreten sind, und fordert demnach auf, von nächstem Jahre ab 10 Programme mehr, nämlich 190 Ex., an dasselbe einzusenden.

5. Vom 22. Januar 1855. Das Königl. Provinzial-Schul-Collegium theilt eine Ergänzung der Ministerialverfügung vom 11. Decbr. 1854 dahin mit, dass bei getrennter Ober- u. Unter-Prima eine Zulassung zur Abiturienten-Prüfung nur nach wenigstens halbjährigem Aufenthalte in der Ober-Prima stattfinden dürfe, und ein Extraneus erst 2 Jahre nach dem Austritt aus einer Ober-Secunda eines Gymnasiums, wo Theilung in Ober- u. Unter-Secunda stattfindet, zur Prüfung zugelassen werden soll.

C. Chronik.

Aus der Chronik des Gymnasiums im verflossenen Schuljahre habe ich wenig zu berichten, indem, den Abgang des Herrn Dr. Hoffmann abgerechnet, alle übrigen Verhältnisse unverändert geblieben sind. Herr Dr. Hoffmann, der zu wiederholten Malen in verschiedenen Jahren uns besonders durch seine ausgezeichneten mathematischen und physikalischen Kenntnisse unterstützt hatte, folgte Ende Aprils, bald nach dem Beginn des neuen Schuljahres, zur Uebernahme des math. und physik. Unterrichts in sämmtlichen oberen Classen des Königl. Friedrichs-Collegiums zu Königsberg einem plötzlich an ihn ergehenden Rufe des Königl. Provinzial-Schul-Collegiums. Wir können dem Collegium Fridericianum nur Glück wünschen, einen so ausgezeichneten Vertreter dieser Wissenschaften an Herrn Dr. Hoffmann gefunden zu haben, dessen unermüdlicher Eifer der Tiefe seiner Kenntnisse gleichkommt, und von dessen Unterrichte es gewiss bald die besten Früchte wahrnehmen wird. Ein gutes Andenken bleibt dem seit einer längeren Reihe von Jahren uns bekannten biederen Mann in unserm ganzen Collegium bewahrt.

Durch des Hrn. Dr. Hoffmann Austritt am 30. April wurde ich genöthigt, dem Hrn. Dr. Röper u. Hrn. Dr. Strehlke, wie die Tabelle zeigt, einige Stunden über die gewöhnliche Zahl gegen besondere Remuneration zu übertragen, welche sie zum Theil vielleicht auch in dem folgenden Schuljahre werden behalten müssen.

Leider steht in diesem uns eine neue Veränderung bevor, indem der Hülfslehrer Herr S.-A.-C. Heinrichs einem Rufe des Königl. Provinzial-Schul-Collegii folgend von Ostern ab eine feste Stelle an dem Gymnasium zu Elbing übernehmen wird, dergleichen wir nach den besonderen Verhältnissen unseres Gymnasiums ihm zu bieten ausser Stande sind. Ich bin überzeugt, dass der sehr kenntnissreiche und gewissenhafte junge Mann durch seine zweijährige Beschäftigung am hiesigen Gymnasium, darunter anderthalb Jahr als Ordinarius der Quarta, einer im Durchschnitt 60 Schüler zählenden Classe, sich solchen Takt in Lehrmethode und Handhabung der Disciplin erworben hat, der ihn in die Anstalt, der er von nun ab angehören soll, sogleich als einen geschickten und kräftigen Mitarbeiter eintreten lassen wird, und folgen ihm, unserem ehemaligen Schüler, unser aller aufrichtigste Wünsche für sein Wohlergehn.

In Betreff der inneren Organisation bemerke ich, dass nach der von uns gesammelten Erfahrung mehrerer Jahre es sich uns als das Zweckmässigere herausgestellt hat, statt der subordinirten Ober- und Unter-Quarta zwei coordinirte Coetus von Unter-Tertia, in welcher Classe sich immer die grösste Anzahl von Schülern zusammendrängt, einzurichten, aus welchen beiden die jedesmal Tüchtigsten nach Ober-Tertia versetzt werden.

Das vergangene Schuljahr eröffneten wir am 20. April (die Elementarclasse mit eingerechnet) mit 515, den Wintercursus am 12. Octbr. mit 509 Schülern.

Das Allerhöchste Geburtsfest Seiner Majestät des Königs wurde am 15. Octbr. durch Aufführung von Händels Utrechter Te Deum in der Aula des Gymnasiums vor sämmtlichen Lehrern und Schülern des Gymnasiums und einer grossen Anzahl geladener Gäste gefeiert.

Die diesjährige Abiturienten-Prüfung wurde am 19. 20. 21. März abgehalten unter Vorsitz des stellvertretenden Königl. Commissarius, Herrn Consistorial- und Schulrath Hasse hieselbst.

D. Statistische Nachrichten.

a. Lehrer.

Der ordentlichen Lehrer am hiesigen Gymnasium sind von Alters her, den Director mit eingerechnet, neun, der 10., Dr. Roeper, ist ausserordentlicher Lehrer; demnächst die beiden Religionslehrer, und die wissenschaftlichen und technischen Hülfslehrer, wie die nachfolgenden Tabellen angeben.

d. Schüler.

Die Gesammtzahl der Schüler am Schlusse des vorigen Schuljahres betrug mit Einschluss der Elementarclasse 516, ohne dieselbe 471. Sie beträgt gegenwärtig 500, ohne die Elementarclasse 462. Inscribirt wurden im Laufe des Jahres, die aus der Septima miteingerechnet, 81 Schüler, für die Septima besonders 21. Abgegangen sind, die vorjährigen Abiturienten und die am Schlusse des vorigen Schuljahres Abgegangenen miteingerechnet, 90.

Jetzt gehen mit dem Zeugnisse der Reife zur Universität folgende 10:

1. Otto Funk, a. Danzig, 20½ J. alt, 11 J. auf d. Gymnasium, 2 J. in Prima. Königsberg, Medicin
2. Max Henning, a. Danzig, 18½ J. alt, 9 J. auf d. Gymnasium, 2 J. in Prima. Halle, Theologie.
3. Rudolph Nagel, a. Danzig, 18½ J. alt, 7½ J. auf d. Gymnasium, 2 J. in Prima. Breslau, Mathem. u. Naturw.
4. Robert Rosalski, a Danzig, 19½ J. alt, 11 J. auf d. Gymnasium, 2 J. in Prima. Halle, Jura.
5. Friedrich Schleusner, a. Neufahrwasser, 19½ J. alt, 7 J. a. d. Gymn., 2 J. in Prima. Königsb., Medicin.
6. Julius Schultz, a. Danzig, 19 J. alt, 10½ J. auf d. Gymnasium, 2 J. in Prima. Königsberg, Philologie.
7. Felix Triest, a. Danzig (geb. Marienwerder) 16½ J. alt, 7¼ J. a. d. G., 2 J. i. P. Heidelb., Jura u. Cameralia.
8. Franz Hesekiel, a. Danzig, 19 J. alt, 10 J. auf d. Gymnasium, 2 J. in Prima. Berlin, Medicin.
9. Oscar Bock, a. Szumilowo b. Graudenz, 20 J. alt, 4 J. a. d. Gymn., 2 J. i. Prima. Berlin, Jura u. Cameralia.
10. Heinrich Drebs Schumann, a. Danz. (geb. z. Dirschau) 18 J. alt, 9 J. a. d. G., 2 J. i. Prima. Berlin, Jura.

c. Lehrapparat.

Für die Bibliothek wurden ausser den Fortsetzungen von: Ersch u. Gruber's Encyklopaedie, Plinii historia nat. ed. Sillig, Plauti Comoediae ed. Ritschl, Schlosser's Weltgeschichte, Grote's Geschichte Griechenland's übers. v. Meissner, Peter's Geschichte Roms, Geschichte d. europäisch. Staaten v. Heeren u. Ukert, Pertz Monumenta histor. German., d. Geschichtschreiber d. deutsch. Vorzeit in deutsch. Bearbeitung, Massmann die Kaiserchronik, Barthold Gesch. d. deutschen Hansa, v. Raumer histor. Taschenbuch, Deutsch. Wörterbuch v. Jac. u. Wilh. Grimm, Firmenich Germaniens Völkerstimmen u. a. m. neu angeschafft: Schneider Additamenta ad civitatis Platon. LL. X., Apollonii Argonautica edd. Merkel et Keil, Didymi Chalcenteri fragmenta ed. Maur. Schmidt, Rossbach u Westphal Metrik d. griech. Dramatiker u. Lyriker, Gerhard griechische Mythologie, Preller griech. Mythologie, Krause d. Gefässe d. alten Völker bes. d. Griech. u. Röm., Schömann d. Verfassungsgesch. Athen's nach Grote's History of Greece kritisch geprüft, Ennianae Poesis reliquiae ed. Vahlen, Horatii Opera omnia ed. Dillenburger, Edit. III, Horatii Sermonum Libri II ed. Kirchner, Mommsen römisch. Gesch., Giesebrecht Geschichte d. deutsch. Kaiserzeit, Hahn Gesch. d. preuss. Vaterlandes, Holtzmann Untersuchungen über d. Nibelungenlied, v. Eichendorff zur Geschichte des Dramas, Braun Vorschule der Kunstmythologie, Scheffler d. unbestimmte Analysis, Schlömilch Grundzüge e. wissenschaftl. Darstellung d. Geometrie d. Maasses, Hochstetter Naturgesch. d. Pflanzenreichs m. 52 illum. Kupf. Taf. u. a. m. Auch wurde bei e. Antiquar angekauft: Pompeji u. Herculanum. Vollständige Sammlung d. daselbst entdeckten Malereien, Mosaiken u. Bronzen. Gestoch. v. Roux Ainé. Mit erklärend. Text herausgeg. v. Barré. Deutsch bearbeit. v. Kaiser u. a. 6 Bde.

Ein Hohes Ministerium der geistlichen etc. Angelegenheiten schenkte d. Gymnasium ausser d. Fortsetzungen von: Crelle's Journal für d. reine u. angewandte Mathematik, Codex Pomeraniae diplomaticus herausgeg. v. Hasselbach und Kosegarten, Zahn d. schönsten Ornamente u. merkwürdigsten Gemälde aus Pompeji, Herculanum u. Stabiae, 3. Folge Heft 6, als neu: Mosaici secondarii non compresi della basilica di S. Marcodi segnati da Giovanni e Luigia Kreutz, 53 Bl. in fol., Hause Elementa latinitatis in etymol. Ordnung; Hochlöbl. Prov.-Schulcollegium: Pausaniae descriptio Graeciae ed. Walz, Aristotelis Organon ed. Waitz, Aeschylos Oresteia griech. u. deutsch v. Franz, Virgilius illustr. a Chr. G. Heyne. Edit. IV cur. Wagner, Heyse theor. pract. dtsch. Gramm., 5. verm. Ausg., Gödeke dtsch. Dichtung, für welche Beweise Hohen Wohlwollens wir gehorsamst danken.

Dem Münzcabinet sind als Geschenke zugegangen: Eine Kupfermünze aus Chili vom Herrn Oberlehrer Prowe in Thorn, 8 Danziger Kirchenzeichen vom Primaner Starke.

Das Naturaliencabinet und der physikalische Apparat sind nicht vermehrt worden.

d. Unterstützungen der Schüler und Studirenden.

Aus den von uns verwalteten Stiftungen theilten wir die Summe von 850 Thalern, nämlich 200 Thlr. an Schüler 650 Thlr. an Studirende aus. Ausserdem erhielt der Unter-Secundaner Wenglowski von des Hochwürdigsten Bischof zu Culm, Herrn Dr. Anastasius Sedlag bischöflichen Gnaden aus dem Diöcesan-Gymnasiasten-Unterstützungsfonds für das laufende Schuljahr ein Stipendium von zwanzig Thalern.

An Schulgeld erliessen wir eine Summe von mehr als 900 Thalern, indem 32 Schüler (überwiegend der oberen Klassen) ganz freien, 37 halb freien Unterricht erhielten, und ausserdem eine bedeutende Summe restirenden Schulgeldes niedergeschlagen wurde.

Vertheilung der Stunden unter die Lehrer im Schuljahr von Ostern 1854—55.

	Lehrer.	Ordin.	I.	O.-II.	U.-II.	O.-III.	U.-III. A	U.-III. B	IV.	V.	VI.	Summa	VII.
1.	Director **Engelhardt**	I.	6 Grch.	2 Grch.								8	
2.	Professor **Herbst**	O.-II.	2 Lat.	10 Lat. 4 Grch.	2 Lat.							18	
3.	Professor **Anger**		4 Math. 2 Phys.	4 Math. 2 Phys.	4 Math. 2 Phys.							18	
4.	Professor **Hirsch**		3 Gsch.	3 Gsch.	3 Gsch.	2 Gsch. 2 Geog.	2 Gsch. 2 Geog.	2 Gsch. 2 Geog.				21	
5.	Professor **Marquardt**	U.-II.	8 Lat.		8 Lat. 2 Grch.							18	
6.	Oberlehrer **Czwalina**		3Dtsch.			4 Math.	4 Math.	4 Math.	4 Math. 2 Natg.			21	
7.	Oberlehrer Dr. **Brandstäter**	O.-III.	2 Frnz.			10 Lat. 6 Grch. 2Dtsch. 2Franz.	(2 Singen)			(2 Singen)		22 (4)	
8.	Oberlehrer Dr. **Hintz**	V.								10 Lat. 4Dtsch. 2 Geog. 4 Rchn.	2 Geog. 4 Rchn.	22 (4)	
9.	Oberlehrer **Skusa**	VI.								2 Relig. 4 Natg.	8 Lat. 4Dtsch. 2 Relig. 2 Natg.	22	
10.	Dr. **Roeper**	U.-III.A.	3Dtsch.				9 Lat. 5 Grch. 2Dtsch. 4Franz.	4Franz.				22 (5)	
11.	Ev. Religionsl. Predig. **Blech**		2 Relig. 2 Hebr.	2 Religion 2 Hebräisch		2 Relig.	2 Religion		2Relig.			14	
12.	Cath. Religl. Pfarr. **Michalski**		2 Cathol. Religion			2 Cathol. Religion				2 Cathol. Rel.		6	
13.	Hülfslehrer Dr. **Strehlke**	U.-III.B		2 Frnz.	4 Grch. 3Dtsch. 2 Frnz.			9 Lat. 5 Grch.				22 (3)	
14.	Sch.-Amts-Cand. **Heinrichs**	IV.						2Dtsch.	9 Lat. 5 Grch. 2Dtsch. 4 G. Gg.			22	
15.	Zeichenlehrer **Breysig**					(2)				2	4	8	
16.	Schreiblehrer **Fisch**								2	2	4	8	
17.	Musik.-Director **Markull**		2			2						4	
18.	Elementarlehrer **Wilde**												28

Uebersicht

der statistischen Verhältnisse des Gymnasiums im Schuljahre von Ostern 1854 bis dahin 1855.

Allgemeiner Lehrplan.

Lehrer.	Fächer.	Classen und Stunden. I.	O. II.	U. II.	O. III.	U. III. A.	U. III D.	IV.	V.	VI.	Summa.
Dir. Engelhardt.	Lateinisch .	8	10	10	10	9	9	9	10	8	83
Prof. Herbst.	Griechisch .	6	6	6	6	5	5	5	—	—	39
Prof. Anger.	Deutsch . . .	3	3	3	2	2	2	2	4	4	25
Prof. Hirsch.	Französisch.	2	2	2	2	4	4	—	—	—	16
Prof. Marquardt.	Hebräisch. .	(2	2∞2)		—	—	—	—	—	—	4
1r. ordentl. Lehrer	Religion. . .	2	2∞2		2	2∞2		2	2	2	14
Czwalina.	Mathematik.	4	4	4	4	4	4	4	—	—	28
2r.—Brandstäter	Rechnen . .	—	—	—	—	—	—	—	4	4	8
3r. — Hintz.	Physik . . .	2	2	2	—	—	—	—	—	—	6
4r. — Skusa.	Geschichte .	3	3	3	2	2	2	2	—	—	17
Ausserord. Lehrer	Geographie .	—	—	—	2	2	2	2	2	2	12
Dr. Roeper.	Naturgesch.	—	—	—	—	—	—	2	4	2	8
Prediger Blech.	Zeichnen . .	—	—	—	—	(2∞2)		(2)	2	4	8
Pfarr. Michalski.	Schreiben. .	—	—	—	—	—	—	2	2	4	8
Hlfsl. Dr. Strehlke Zeichenl. Breysig	Gesang . . .	(2∞2∞2)			2∞2∞2∞2				2∞2		8
Schreibl. Fisch. Musikl. Markull.	Summa . .	32	32	32	32	32	32	32	32	32	276
Elementarl. Wilde.		(2)	(2∞2)			(2∞2)					(6)

Von diesen Stunden fallen die 4 Singstunden der oberen Classen, 2 Zeichenstunden und 4 hebräische und ausserdem 6 catholische Religionsstunden ausser der Schulzeit. Die combinirten Lectionen sind nur einfach gezählt.

(Das Zeichen ∞ bedeutet Combination.)

Verhältnisse der

Schüler In	waren	sind	Abiturienten: Es werden entlassen.		studiren wo?		was?	
I.	40	45	mit dem		in Berlin.	3	Theol.	1
O. II.	38	39	Zeugniss		in Heidel-berg	1	Jura u. Camer.	4
U. II.	45	44	der		Königsb.	3	Philol.	1
O. III.	58	44	Reife.		in Halle	2	Medic.	3
U. III.	49	51			in Bresl.	1	Mth. u. Natrw.	1
O. IV.	38	53						
U. IV.	76	60						
V.	59	63						
VI.	68	63						
S.	471	462		10		10		10
VII.	45	38						

Inscribirt sind 81 (incl. 21 aus der Elementarclasse versetzter), abgegangen 90; für die Elementarclasse inscribirt 21.

Anordnung der Prüfung am 3. April 1855.

Vormittags von 8 Uhr ab.

Choral.

UNTER-TERTIA.	Gesch. u. Geogr.	Professor Hirsch.
	Latein.	Dr. Roeper.
OBER-TERTIA.	Mathematik.	Oberlehrer Czwalina.
	Latein (Cicero).	Dr. Brandstäter.
UNTER-SECUNDA.	Griechisch (Homer).	Professor Marquardt.
	Deutsch.	Dr. Strehlke.
	Religion. (Comb. mit Ob. II.)	Prediger Blech.
OBER-SECUNDA.	Latein.	Professor Herbst.
	Französisch.	Dr. Strehlke.
	Hebräisch. (Comb. mit I.)	Prediger Blech.
PRIMA.	Mathematik.	Professor Anger.
	Griechisch (Sophocles).	Der Director.
	Latein (Tacitus).	Professor Marquardt.

Entlassung der Abiturienten.

Schlussgesang.

Magnificat von Durante.

Nachmittags von 3 Uhr ab.

Hymne von Beethoven: Die Himmel rühmen des Ewigen Ehre.

SEPTIMA oder Elementarclasse.	Lesen, Rechnen.	Elementarlehrer Wilde.
SEXTA.	Latein.	Oberlehrer Skusa.
	Naturgeschichte.	Oberlehrer Skusa.
QUINTA.	Rechnen.	Dr. Hintz.
	Latein.	Dr. Hintz.
QUARTA.	Griechisch.	S.-A.-C. Heinrichs.
	Mathematik.	Oberlehrer Czwalina.

Schlussgesang.

Chor aus dem Tode Jesu: Hier liegen wir.

Mittwoch, den 4. April, Censur und Versetzung. Schluss des Schuljahres. Das neue beginnt Donnerstag, den 19. April. Zur Prüfung und Aufnahme neuer Schüler bin ich am 16., 17. 18. April von 9 bis 1 Uhr in meinem Geschäftszimmer im Gymnasium anzutreffen.

ENGELHARDT, Director.