Nachricht

von

dem Zustande des städtischen Gymnasiums zu Danzig

während

des Schuljahres von Ostern 1830 bis 1831.

Womit

zu der auf Freitag den 15. April angesetzten

öffentlichen Schulprüfung

ergebenst einladet

Friedrich Schaub,

Director.

Danzig, 1830 bis 1831
gedruckt in der Wedelschen Hofbuchdruckerei.

Vorwort.

Da jüngere Schüler, wenn sie ihre Schularbeiten pünktlich und sorgfältig anfertigen, und sich an regelmäſsige Thätigkeit, das wirksamste Beförderungsmittel sittlicher und intellectueller Bildung, frühzeitig gewöhnen sollen, einer fortwährenden Controlle bedürfen, diese aber im elterlichen Hause nicht immer möglich ist: so sind wir erbötig, in der Schule zur Führung derselben mitzuwirken. Wir werden zu diesem Ende mit dem Anfange des neuen Schuljahres für Schüler aus den drei untern Klassen öffentliche Arbeitsstunden einrichten, die an den vollen Schultagen Nachmittags um 5, Mittwochs und Sonnabends um 2 Uhr ihren Anfang nehmen, *) in der Regel 2 bis 2½ Stunden dauern, und unter unsrer Leitung von Primanern und Secundanern beaufsichtigt werden sollen. Anfertigung der laufenden Schularbeiten ist die nächste und vorzüglichste Bestimmung dieser Stunden; wir glauben indeſs, sie späterhin auch zur Nachhilfe der Schwächeren zweckmäſsig benutzen zu können.

Zur Remuneration der inspicirenden Schüler wird monatlich ein Geldbeitrag gezahlt, den wir zwar jetzt, weil er sich nach der Anzahl der Theilnehmer richten wird, noch nicht genau bestimmen können, der aber auf jeden Fall sehr mäſsig sein wird, da uns zur völligen Entschädigung der Primaner und Secundaner noch anderweitige Mittel zu Gebote stehen.

Diejenigen geehrten Eltern, die von dieser Einrichtung Gebrauch zu machen wünschen, werden ersucht, sich dieserhalb an den Direktor zu wenden.

---

*) In den kurzen Wintermonaten werden die Arbeitsstunden Mittwochs und Sonnabends auf eine andere Zeit verlegt, damit diese Nachmittage zur Bewegung im Freien benutzt werden können.

Lehrverfassung.

Prima.

Ordinarius der Director.

Deutsch und philosophische Propädeutik. 3 St. Literaturgeschichte von Ulfilas bis Klopstock nach Koberstein: dabei Lesung einzelner Proben aus den wichtigeren Dichtungen der 6 ersten Zeiträume und einiger vorzüglicheren Werke: — namentlich das Nibelungenlied mit Auslassung einiger Gesänge ganz gelesen, dabei Bemerkungen und Andeutungen über die alt- und mittelhochdeutsche Sprache. — Prosaische Aufsätze und metrische Uebungen. — Mündliche Vorträge eigener Reden. — Kurze Wiederholung der Logik. — Die Privatlectüre wurde einer genaueren Controlle unterworfen. Dr. Lehmann.

Latein. 11 St. Correctur freier lat. Aufsätze; wöchentlich ein Scriptum aus Grotefend's Materialien; „was heifst Germanismus, und wie erkennt und vermeidet man ihn?" in fortlaufender Vergleichung deutscher und lat. Redeformen entwickelt. 3 St. Professor Pflugk. — Wiederholung der alten Geschichte in lat. Sprache, abwechselnd mit Disputationen über schwierige Stellen alter Schriftsteller aus der Privatlectüre der Schüler. 1 St. Derselbe. — Tacitus Annalen. Lib. XII-XV. 2 St. Derselbe. — Cicero de oratore. Lib. I. 2 St. Der Director. — Horat. Od. Lib. II. u. III. Epist. Lib. I. u. II. 2 St. Professor Herbst. — Terent. Andria u. Heautontim. u. Plaut. Miles glor. 1 St. Derselbe.

Griechisch. 8 St. In einer Stunde Schreibübungen, in den übrigen Lectüre, und zwar zuerst Homer's Ilias und einige Philippische Reden des Demosthenes, dann Homer der Privatlectüre überwiesen, und Sophocles Electra und die Hälfte vom Philoctet gelesen. Der Director.

Hebräisch. 2 St. aufser der Schulzeit für die künftigen Theologen. Dr. Hintz.

Französisch. Syntactische Uebungen; Uebersetzen aus dem Deutschen ins Französische; Vorübungen zum Sprechen; Controlle der Privatlectüre aus Menzel's Handbuche. 1 St. Prof. Schöler.

Religion. 2. St. Darstellung der vorchristlichen religiösen Bildungsstufen; Nachweisung, wie sie sich in jedem einzelnen Menschen der Hauptsache nach wiederholen, und Hindeutung auf das Christenthum. Der Director.

Mathematik. 4 St. Fortsetzung der Trigonometrie. Die Lehre von den Kegelschnitten und die Elemente der analytischen Geometrie. Einiges aus den Elementen der Differentialrechnung. Eine Stunde wurde zu Uebungen an mannigfaltigen Aufgaben angewandt. Prof. Förstemann.

Physik. 2 St. Optik. Akustik. Einzelne Theile der sphärischen Astronomie. Mechanik. Oberlehrer Strehlke.

Geschichte. 2 St. Beendigung der griech. Literaturgeschichte. Darauf alte Geschichte, vom Ursprung bis zum Ausbruch des Peloponnesischen Krieges, in ethnographisch-synchronist. Darstellung. Prof. Pflugk.

Zeichnen. 2 St. Herr Breysig.

Secunda.

Ordinarius Professor Schöler.

Deutsch. 3 St. Theorie des Dramas und Literatur der dramatischen Poesie seit Klopstock, verbunden mit der Lesung dramatischer Meisterwerke. — Prosaische Arbeiten und metrische Uebungen. — Declamationen. Dr. Lehmann.

Latein. 12 St. Cicero's Reden: pro Murena, pro lege Manilia, pro Archia p., pro Roscio Amerino. 3 St. Prof. Schöler. — Livius mit Auswahl. 3 St. Derselbe. Stilübungen bestehend aus freien Aufsätzen, Extemporalien, mündlichen Uebungen in besonderer Hinsicht auf Phraseologie, Auswendiglernen mehrerer Reden des Cicero. 4 St. Derselbe. — Virgil's Aeneis Lib. VII–XII. 2 St. In den letzten Wochen noch, nach vorausgeschickter Entwickelung der römischen Poesie im Augustischen Zeitalter, Catulls Epithalamium der Thetis, und einige Elegien des Tibull aus Jacobs Blumenlese. Prof. Pflugk.

Griechisch. 7 St. Homer's Ilias VII–XII. 3 St. Prof. Schöler. Xenophons Memorabilien Lib. I–III. ins Latein. übers. 3 St. Derselbe. Grammatik. 1 St. Der Director.

Hebräisch. 2 St. Dr. Hintz.

Französisch. 1 St. aufser der Schulzeit. Die Grammatik (von Leloup) eingeübt, und Schreibe- und Leseübungen gehalten. Prof. Schöler.

Religion. 2 St. mit Prima combinirt.

Mathematik. 4 St. Repetition der Buchstabenrechnung und der Aehnlichkeitslehre. Erweiterte Theorie der Potenzen und Wurzeln; Logarithmen nebst Anwendungen derselben. Anfangsgründe der Trigonometrie. Eine St. wurde zu verschiedenen Uebungen angewandt. Prof. Förstemann.

Physik. 2 St. Mechanik. Akustik. Lehre von der Wärme. Oberlehrer Strehlke.

Geschichte. 2 St. Die Geschichte des Brandenburg-Preufsischen Staates. Prof. Schöler.

Zeichnen. 2 St. Herr Breysig.

Tertia.

Ordinarius Professor Herbst.

Deutsch. 3 St. Grammatik, Aufsätze und mündliche Vorträge. Prof. Herbst.

Latein. 10 St., davon 4 St. Grammatik und Stilübungen; 3 St. Cicero de senect. und de amicitia; 2 St. Ovid's Metamorphosen Lib. III–VIII. mit Auswahl; 1 St. metrische Uebungen in deutscher und latein. Sprache. Derselbe.

Griechisch. 6 St. Xenophons Anabasis Lib. III–V. 2 St. Derselbe. Homer's Odyssee, B. 13—17, 289. mit durchgängiger Analyse aller Formen. 2 St. Prof. Pflugk. Grammatik: Repetition des ganzen etymolog. Theils; Syntax nach Buttmann §. 122–148 nebst schriftlichen Uebungen. 2 St. Derselbe.

Religion. 2 St. Die christliche Glaubenslehre, nach dem vom Hamburger Ministerio schriftmäfsig ausgefertigten Lehrbuche der christlichen Religion; am Schlusse die Lehre vom Gebete und Erklärung des Vater unsers. — Schriftliche Ausarbeitung des Vorgetragenen. Im Sommer 1830 als Vorbereitung auf die Säcularfeier der Uebergabe der augsburg. Confession Geschichte derselben und nähere Betrachtung ihres Inhalts. Prediger Bärreysen.

Mathematik. 5 St. In 3 St. Buchstabenrechnung und fortgesetzte arithmet. und algebraische Uebungen. In 2 St. Repetition der Elemente der Geometrie und Fortsezzung derselben bis zur Lehre von den Flächenräumen. Prof. Förstemann.

Physik. 2 St. Uebersicht über die ganze Physik mit Ausschlufs der Optik und Akustik. Die Gesetze besonders durch Experimente erläutert. Oberlehrer Strehlke.

Geographie. 2 St. Ausführliche Einleitung in die mathemat. Geographie. Afrika mit ausführlicherer Behandlung von Aegypten. Asien. Derselbe.

Geschichte. 2 St. Alte Geschichte, von ihrem Anfang bis zur Auflösung des achäischen Bundes. Prof. Pflugk.

Zeichnen. 2 St. Herr Breysig.

Quarta.

Ordinarius Oberlehrer Dr. Lehmann.

Deutsch. 3 St. Declamationen und Uebungen in eigenen mündlichen Vorträgen; im letzten Vierteljahre hatte die erste Abtheilung einige prosaische Aufsätze, namentlich erzählende Inhaltsanzeigen des im Griech. und Latein. Gelesenen zu liefern. — Einzelne Theile der Syntax. — Regeln über Interpunction. Dr. Lehmann.

Latein. 8 St. Exercitia und Extemporalia. Repetition der Etymologie. Einzelne Theile aus der Syntax. Lectüre: bis Michael Cornel. Nep. Seit Michael 2 Abtheilungen: 1ste Abth. Caes. bell. Gall. IV u. V. Viele Capitel wurden auswendig gelernt.

2te Abth. Fortsetzung der Lesung Cornels. 6 St. Derselbe. Ausgewählte Fabeln aus Ovid's Metam. Lib. II–IV. in 2 St. Prof. Pflugk.

Griechisch. 5 St. Etymologie und einzelne Theile der Syntax. Am Ende des Jahres Exercitia. Lectüre: bis Weihnachten Jacobs 1r u. 2r Cursus. Seit Weihnachten 2 Abtheilungen. 1ste Abth. Hom. Odyss. I. u. II. 2te Abth. Fortsetzung der Lesung im Jacobs. Dr. Lehmann.

Religion. Die Hauptlehren der natürlichen Religion. — Uebergang zur Offenbarung. — Beweise für die Göttlichkeit der heil. Schrift und nähere Bekanntschaft mit derselben. — Die Glaubenslehre, nach Krummachers Katechismus, bis zur Lehre von der christl. Kirche. — Schriftliche Ausarbeitung des Vorgetragenen, und Auswendiglernen der Beweisstellen. — Als Vorbereitung der Säcularfeier der Uebergabe der augsburgischen Confession, Geschichte der Reformation, besonders der Uebergabe der augsb. Confession und Mittheilung des Inhalts derselben im Auszuge. 2 St. Prediger Bärreysen.

Mathematik. 5 St. In 3 St. fortgesetzte Rechenübungen; die ersten Begriffe und Sätze von den negativen Zahlen; Decimalbrüche; Ausziehung der Quadratwurzel; leichte algebraische Uebungen. In 2 St. Elemente der Geometrie. Prof. Förstemann.

Geographie. 3 St. Einleitung in die math. Geographie. — Die Schweitz, Deutschland, Frankreich, Spanien, Italien, die österreich. und preufs. Monarchie, Dänemark, Schweden. Oberlehrer Strehlke.

Geschichte. 2 St. Wichtige Begebenheiten aus der mittleren und neueren Geschichte bis zum Schlusse des 17ten Jahrhunderts. Oberlehrer Skusa.

Naturgeschichte. 2 St. In- und ausländische Pflanzen nach natürlichen Familien. Derselbe.

Zeichnen. 2 St. Herr Breysig.

Quinta.

Ordinarius Dr. Hintz.

Deutsch. 6 St. Die wichtigsten Regeln der Wortbildung, Wortbeugung und Wortfügung, wozu die Schüler Beispiele aufsuchen mufsten, in 2 St. — Lesung des Kinderfreundes in 1 St. Vortrag erlernter Gedichte, 1 St. Aufsätze wurden durchgegangen in 2 St. Dr. Hintz.

Latein. 7 St. Grammatik nach Zumpt in 4 St., von denen im letzten Halbjahre eine zum Ausarbeiten und Corrigiren eines Scripti verwandt wurde. Die Schwächern wurden aufserdem mit der Einübung der Formenlehre beschäftigt. In 3 St. Ellendts Lesebuch von S. 53–83 und 160–184, wobei die Regeln der Grammatik repetirt und eingeübt wurden. Die Schwächern mufsten die Formen analysiren und die Uebersetzung öfter wiederholen. Einzelne Stücke wurden auswendig gelernt, und zu den meisten Stunden Vocabeln aufgegeben. Derselbe.

Religion. 2 St. Die Lehre von Gott, der Schöpfung und Vorsehung, der heil. Schrift als Offenbarung Gottes, von dem Menschen und seiner Erlösungsbedürftigkeit, von Jesu dem Erlöser, von dem zukünftigen Leben und Weltgerichte wurde vorgetragen, und alles auf Bibelstellen gegründet, die zum Theil nebst Liederversen auswendig gelernt wurden. Die Fundamental-Sätze der Sittenlehre wurden an die Lehre von Gott angeknüpft, späterhin aber weiter ausgeführt. Ueber das Vorgetragene wurden Fragen dictirt, die zu Hause beantwortet werden mufsten. 1 St. In der zweiten St. biblische Geschichte naah Kohlrausch. Derselbe.

Mathematik. 4 St. Die 4 Species in ganzen und gebrochenen Zahlen. Zins- und Gesellschaftsrechnung. Die Aufgaben waren gröfstentheils aus Meyer Hirsch's Beispielsammlung, mit Umgehung des Gebrauchs der Algebra. Häufiges Kopfrechnen. Oberlehrer Strehlke.

Geographie. Nach einer Einleitung über das Verhältnifs der Erde zur Sonne, den Planeten und dem Monde, der Gröfse und Bewegung der Erde und die math. Kreise, die einzelnen Erdtheile, Europa specieller, Deutschland und Preufsen am vollständigsten. Auf die Geschichte wurde öfters Rücksicht genommen. Die Länder wurden an die Tafel gezeichnet. 3 bis 4 St. Dr. Hintz.

Geschichte. Alte Geschichte bis zum Untergange des weströmischen Reiches. Zur Einübung wurden Tabellen angefertigt. 3 bis 4 St. Derselbe.

Naturgeschichte. 2 St. Specielle Kenntnifs einzelner Pflanzen und Säugethiere.

Zeichnen. 2 St. Herr Breysig.

Schreiben. 3 St. Herr Waage.

Sexta.

Ordinarius Oberlehrer Skusa.

Deutsch. 6 St. Leseübungen, verbunden mit mündlichem Vortrage des Gelesenen. Declamation. — Auflösen und Bilden leichter Sätze. Orthogr. Uebungen und Anfertigungen kleiner Aufsätze. Oberlehrer Skusa.

Latein. 7 St. In 4 Stunden die regelmäfsigen grammatischen Formen und die ersten syntakt. Regeln nach Zumpt's kl. Grammatik; in 3 Stunden mündliches und schriftliches Uebersetzen aus Ellendt's Lesebuch. Derselbe.

Religion. 2 St. Bibl. Geschichte nach Kohlrausch, verbunden mit Erklärung und Auswendiglernen bibl. Sprüche und passender Liederverse. Derselbe.

Mathematik. 5 St. Die 4 Species in ganzen und gebrochnen Zahlen. Angewandtes Rechnen, Kopfrechnen. Oberlehrer Strehlke.

Geographie. 3 St. Preufsen. Die wichtigsten Gebirge, Flüsse und Städte in Europa und den übrigen Erdtheilen. Oberlehrer Skusa.

Naturgeschichte. 2 St. Einheimische Naturgegenstände, besonders aus dem Thier- und Pflanzenreiche. Derselbe.

Zeichnen. 2 St. Herr Breysig.

Schreiben. 4 St. Herr Waage.

II. Verordnungen der Behörden.

1. Das K. Prov. Schul-Collegium überschickt den 15. April 1830 das Protokoll der 5ten Versammlung der Directoren der Westphäl. Gymnasien, und verlangt darüber das Gutachten des Directors.

2. Dasselbe verordnet unter d. 22. April, dafs künftig 165 Programme eingereicht werden sollen.

3. Rescript desselben vom 1. Jun. in Betreff der Säcularfeier der Uebergabe der Augsburgischen Confession.

4. Dasselbe verordnet durch ein Rescr. v. 7. Octbr., halbjährlich am 15. April u. 15. Octbr. jedes Jahres eine Uebersicht von der Frequenz des Gymnasiums einzureichen.

5. Verfügung vom 7. November, nach welcher der Unterricht in der französischen Sprache in den beiden oberen Classen künftig zu 2 Stunden wöchentlich ertheilt werden soll.

6. Das K. Prov. Schul-Colleg. theilt die Instruction für den geschichtlich-geographischen Unterricht bei den Gymnasien Westphalens zur Kenntnifsnahme und Benutzung mit, den 1. December,

7. Dasselbe empfiehlt auf das Gutachten des Directors über die in der 5ten Conferenz der westphäl. Gymnasial-Directoren verhandelten Gegenstände, diejenigen darin vorkommenden Vorschläge und Maasnehmungen, welche zur Vervollkommnung unsrer Anstalt gereichen können, insoweit es die örtlichen und persönlichen Verhältnisse gestatten, zur Ausführung zu bringen, d. 7. Decbr. 1830.

8. Den 2. Februar 1831 theilt dasselbe das Ministerial-Rescript v. 15. Jan. mit, dafs von jetzt an den inländischen Studirenden, welche sich dem Studium der Theologie widmen wollen, das academische Triennium erst von dem Zeitpunkt ab gerechnet werden soll, wo sie mittelst eines Zeugnisses einer Schul-Prüfungs- oder einer K. wissenschaftl. Prüfungs-Commission werden nachgewiesen haben, dafs sie in Hinsicht der Kenntnifs der

hebräischen Sprache reif zum theolog. Studium sind. — Auch soll von jetzt an kein inländischer Studirender, welcher sich dem Studium der Theologie widmen will, in das Album einer inländischen evangelisch-theologischen Facultät eher eingetragen werden, als bis er in Hinsicht seiner Kenntnifs der hebräischen Sprache das oben bezeichnete Zeugnifs der Reife wird beigebracht haben. Das Maas der Kenntnisse im Hebräischen soll künftig in den Entlassungs Zeugnissen durch das Prädicat: Reif oder Unreif ausdrücklich angegeben werden. (Zur Reife wird erfordert sichere und vollständige Bekanntschaft mit den Regeln der kleinern hebr. Grammatik von Gesenius, mit Ausnahme der in den Anmerkungen enthaltenen feineren Bestimmungen, und richtige Uebersetzung eines Abschnittes aus einer histor. Schrift des A. T. oder eines leichten Psalms ohne Beihülfe eines Wörterbuchs.) Die K. Consistorien sind angewiesen, das academische Triennium erst von dem Zeitpunkt ab, wo einer in das Album der theolog. Facultät eingetragen ist, zu berechnen und darnach die Zulassungs Fähigkeit zur Prüfung pro licentia concionandi abzumessen.

III. Chronik.

Das neue Schuljahr begann den 19. April mit Bekanntmachung des Lectionsplanes und Vorlesung der Schulgesetze; der Unterricht den folgenden Tag. — Unterbrechungen fanden nicht Statt. — Während der Reise des Directors im vorigen Sommer versah Herr Prof. Schöler die Directorial-Geschäfte, die Lehrstunden vertraten die Herren Lehrer. Im Lehrer-Personale sind folgende Veränderungen vorgefallen:

Herr Prediger Dr. Kniewel legte Ostern v. J., nachdem er 25 Jahre hindurch, zuerst als Rector der Pfarrschule, dann nach Vereinigung derselben mit dem Gymnasium als Professor, und zuletzt als Lehrer der Religion, verdienstvoll gewirkt hatte, seine Stelle nieder, um ganz dem Predigtamte leben zu können. Die Anstalt verlor an ihm einen in jeder Hinsicht würdigen Lehrer. Den Religionsunterricht in Tertia und Quarta übernahm Herr Prediger Bärreysen; in Prima und Secunda ertheilt ihn der Director. Einen zweiten nicht minder schmerzlichen Verlust erleidet die Anstalt durch den Abgang des Herrn Oberlehrers Strehlke, eines durch gründliche und vielseitige Bildung ausgezeichneten Mannes. Er hat 7½ Jahre an unsrer Anstalt gearbeitet, und folgt jetzt einem Rufe als Oberlehrer an das Realgymnasium in Berlin. Herr Candidat Castell aus Königsberg wird interimistisch seine Stelle verwalten. —

Den Bau eines neuen Gymnasiums verzögern die Zeitumstände.

Das Fest der Uebergabe der Augsburgischen Confession konnte wegen Mangel eines alle Schüler fassenden Locales zwar nicht öffentlich gefeiert werden; es wurde jedoch die Bedeutung und Wichtigkeit desselben den Schülern auseinander gesetzt.

IV. Statistische Uebersicht.

a. Schüler.

Am Schlusse des vorigen Schuljahres betrug die Gesammtzahl der Schüler in allen 6 Classen 267, jetzt — nach Abzug der Abiturienten — 278, wovon 12 in der ersten, 29 in der zweiten, 33 in der dritten, 63 in der vierten, 63 in der fünften, 78 in der sechsten Classe sich befinden. — Die Schülerzahl der einzelnen Classen wird durch die Versetzung gleichmäſsiger.

Zur Universität sind Ostern d. J. folgende entlassen:

1) Friedrich Robert Kabus, aus Marienburg, 22 Jahr alt, 3 Jahr in I., mit dem Zeugnisse No. II. Er wird in Halle Theologie studiren.

2) August Leonhard Rothe, aus Marienwerder, 19 Jahr alt, 2½ Jahr in I., mit dem Zeugnisse No. I. Er wird in Königsberg Jura studiren.

3) Julius August Dagobert Sachsze, aus Danzig, 21 Jahr alt, 2½ Jahr in I., mit dem Zeugniſse No. II. Er wird in Königsberg Theologie studiren.

4) Friedrich Wilhelm Eduard Flottwell, aus Insterburg, 19½ Jahr alt, 2½ Jahr in I., mit dem Zeugnisse No. II. Er wird in Breslau oder Bonn Cameralia studiren.

5) Benjamin Friedrich Gessel, aus Danzig, 20 Jahr alt, 2 Jahr in I., mit dem Zeugnisse No. II. Will in Königsberg Theologie studiren.

6) Carl Louis Preuſs, aus Dirschau, 20 Jahr alt, 2 Jahr in I., mit dem Zeugnisse No. II. Er wird in Halle Theologie studiren.

7) Heinrich Godzeba, aus Königsberg in Pr., 21½ Jahr alt, 2 Jahr in I., mit dem Zeugnisse No. II. Er wird Cameralia in Berlin studiren.

8) Julius Robert Emil Carl, aus Danzig, 19½ Jahr alt, 2 Jahr in I., mit dem Zeugnisse No. I. Er will in Berlin Philologie studiren.

9) Heinrich August Louis Rabe, aus Danzig, 20½ Jahr alt, 2 Jahr in I., mit dem Zeugnisse No. II. Wird in Berlin Theologie studiren.

10) Johann Carl Rintz, aus Danzig, 25½ Jahr alt, 1 Jahr in I., mit dem Zeugnisse No. II. Wird in Berlin Theologie studiren.

11) Adolph Albrecht Hugo v. Selchow, aus Rettkewitz bei Lauenburg, 20 Jahr alt, 1 Jahr in I., mit dem Zeugnisse No. II. Er wird in Berlin Cameralia studiren.

Aufserdem sind im Laufe des Jahres 68 abgegangen; aufgenommen 90.

Durch den Tod verloren wir einen sehr hoffnungsvollen Schüler, den Quartaner Johann Carl Friedrich Wichmann. Er starb den 9. März d. J.

Der Quartaner Julius v. Paszkewitsch, der Anfangs gute Hoffnungen erregte und freien Unterricht genofs, ist, ohne seinen Abgang anzuzeigen, aus der Schule geblieben.

In der Elementarclasse sind jetzt 45 Schüler.

---

b. Lehrapparat.

Die Bibliothek ist durch den Ankauf mehrerer Werke vermehrt; unter andern sind angeschafft: Erziehungslehre von Schwarz. — Raoul Rochette, Monuments inédits d'antiquité figurée Grecque, Etrusque et Romaine. 4 Lieferungen. — Monumenta Germaniae historica, von Pertz. T. II. — Gehlers physikal. Wörterb. Bd. V. — Bragur, ein literar. Magazin der deutschen und nordischen Vorzeit. — Pestalozzi's sämmtliche Werke. — Bibliothek deutscher Dichter des 17ten Jahrhunderts. 12 Bde. — Lexicon Taciteum von Bötticher. — Herodot von Bähr. — Boeckh's corpus inscriptionum. — Wachsmuth's hellen. Alterthumskunde. — Lucani Pharsalia von Weber. — Schmidt, mathem. Geographie. Fortsetzung der Encyclop. von Ersch und Gruber; von Heeren's und Uckert's Gesch. der europ. Staaten; von Wilkens Gesch. der Kreuzzüge; vom Corpus scriptorum. hist. Byzant; vom Naturhist. Atlas; von Ludens teutscher Gesch., u. m. a. philol. Bücher.

Aufserdem erhielt sie mehrere werthvolle Geschenke von einem Hohen Königl. Ministerium, theils unmittelbar, theils durch das K. Prov. Schul-Collegium:

1. Das 10te Heft der Ornamenta von Pompeji, Herculanum u. Stabiae.
2. Schölls Gesch. der griech. Literatur. Bd. 2 u. 3.
3. Die geographische Karte von Deutschland und der umliegenden Gegend. 4te Lieferung.
4. Encyclop. Wörterbuch der medicin. Wissenschaften. Bd. 5.
5. Chrestomathie Mandchou par J. Klaproth.
6. Crelle's Journal für Mathematik. Bd. 6, und vom 7ten Heft 1 Bd.
7. Darstellung der arabischen Verskunst von Freytag.

8. Bernd's Schriftenkunde der gesammten Wappenwissenschaft. 2 Theile.
9. Leitfaden in der niedern Mathematik von Spiller.
10. Geschichte der Staatsveränderungen unter Ludwig XVI. 5r Bd.

Vom Herrn Salz-Inspector Alberti die Generalkarte des Preufs. Staates, in 6 Lieferungen.

Vom Herrn Studiosus Hasse bei seinem Abgange vom Gymnasium: Baniers Erläuterung der Götterlehre; aus dem Franz. von J. A. Schlegel. 5 Bde.

Auch der physikalische Apparat hat sich vergröfsert. Angekauft wurde ein Sextant aus der Pistorschen Officin. Herr Geheimerath v. Weickhmann machte einen Papinianischen Topf zum Geschenk, und Herr Professor Dr. C. A. Zipser in Neusohl überschickte uns das erste Hundert einer orycto gnostischen Mineral-Sammlung von Ungarn.

Für alle diese Beweise von Gewogenheit und Theilnahme statte ich hiemit im Namen der Anstalt unsern ehrerbietigsten und verbindlichsten Dank ab.

c. Unterstützungen der Schüler.

Die Unterstützungen aus den von uns verwalteten Stiftungen an Schüler der beiden obern Classen betrugen 295 Rthlr. — Freien Unterricht erhielten 35.

V. Anordnung der Prüfung.

Die Prüfung wird in folgender Ordnung gehalten werden:

Vormittag von 9 Uhr ab:

QUARTA:

1. *Religion*, Herr Prediger Bärreysen.
2. *Griechisch*, Herr Dr. Lehmann.

QUINTA:

1. *Latein*, Herr Dr. Hintz.
2. *Geographie*, Derselbe.

SEXTA:

1. *Latein*, Herr Oberlehrer Skusa.
2. *Naturgeschichte*, Derselbe.

TERTIA:

1. *Latein*, Herr Professor Herbst.
2. *Geschichte*, Herr Professor Pflugk.

Nachmittag von 3 Uhr ab.

SECUNDA:

1. *Latein*, Herr Professor Schöler.
2. *Mathematik*, Herr Professor Förstemann.
3 *Geschichte*, Herr Professor Schöler.

PRIMA:

1. *Griechisch*, Der Director.
2. *Latein*, Herr Professor Herbst.
3. *Französisch*, Herr Professor Schöler.

Sonnabend den 16. April ist Censur und Translocation.

Der neue Cursus beginnt Montag den 18. April.

Uebersicht
der statistischen Verhältnisse des Gymnasiums im Schuljahre von Ostern 1830 bis 1831.

Allgemeiner Lehrplan.

Fächer.	Clasen und Stunden. I.	II.	III.	IV.	V.	VI.	Summa.
Lateinisch	11	12	10	8	7	7	55
Griechisch	8	7	6	5	—	—	26
Deutsch	3	3	3	3	6	6	24
Französisch	1	1	—	—	—	—	2
Hebräisch	2	2	—	—	—	—	4
Religion	2 ∾	2	2	2	2	2	12
Mathematik	4	4	5	5	4	5	27
Physik	2	2	2	—	—	—	6
Geschichte	2	2	2	2	3	—	11
Geographie	—	—	2	3	3	3	11
Naturgeschichte	—	—	—	2	2	2	6
Zeichnen	2 ∾	2	2	2	2	2	12
Calligraphie	—	—	—	—	3	4	7
Summa	37	37	34	32	32	31	203

Verhältnisse der

Schüler: In	waren	wurden aufgenommen als Translocirte, oder neue.	entlassen in eine andere Classe, oder von der Anstalt.	sind	Abiturienten: Es sind entlassen		studiren wo?		was?	
I.	13	11	12	12	mitNo.I.	2	inKönigs-			
II.	31	17	19	29			berg....	3	Theologie....	6
III.	43	22	32	33	- - II.	9	in Berlin.	5	Jura............	4
IV.	64	37	38	63			in Halle..	2		
V.	51	45	33	63			in Bres-			
VI.	65	57	44	78			lau.....	1	Philologie....	1
S.	267	189	178	278		11		11		11

Das Zeichen ∾ deutet Combination an.

Discussion

der

allgemeinen algebraischen Gleichung

des zweiten Grades zwischen zwei Veränderlichen,

oder

Untersuchung über die durch eine solche Gleichung bei ihrer Beziehung auf Parallelcoordinaten in einer Ebene dargestellte Curve.

Von

W. A. FÖRSTEMANN,

Professor am Gymnasium zu Danzig.

Wissenschaftliche Abhandlung zu dem Programm des Danziger Gymnasiums von Ostern 1831.

Danzig,
gedruckt in der Wedelschen Hofbuchdruckerei.

Einleitung.

Es giebt einige Theile der reinen Mathematik, welche, obschon aufserhalb der Grenzen dessen liegend, was man gewöhnlich unter dem Namen der Anfangsgründe jener Wissenschaft begreift, doch sehr würdig und zugleich sehr geeignet sind, in den mathematischen Unterrichtscursus gelehrter Schulen aufgenommen zu werden. Unter ihnen zeichnen sich besonders die Elemente der Lehre von den Kegelschnitten und der sogenannten analytischen Geometrie aus. Die Theorie der Kegelschnitte kann aber bekanntlich nach sehr verschiedenen Methoden behandelt werden; daher liegt die Frage sehr nahe: Welche dieser Methoden ist die beste für den Unterricht an Gymnasien? Eine ausführliche Beantwortung dieser Frage nicht beabsichtigend, will der Verfasser dieser Zeilen hier nur in wenigen Worten das Hauptsächlichste seiner Ansicht der Sache vorlegen.

Die geometrische Methode, nach dem Muster, welches überhaupt und auch selbst in der Lehre von den Kegelschnitten die Alten aufgestellt haben, eignet sich nicht unbedingt zur Grundlage des Unterrichts in eben diesem Theile der Wissenschaft. Unter andern möchte zu besorgen sein, sie werde leicht zur Ermüdung führen. Die neuere, sogenannte analytische Methode läfst dies nicht in einem solchen Grade befürchten, weil sie eine viel freiere Bewegung gestattet, und zugleich durch den Reiz der Neuheit anziehend werden kann. Auch erscheint es als wichtig für die mathematische Bildung der Zöglinge eines Gymnasiums, besonders derer, die bei ihrem Austritt aus der Anstalt nicht zugleich das Studium der Mathematik gänzlich aufgeben wollen, dafs durch einen eben nach jener Methode geführten Vortrag ihnen der Eingang in ein sich in unsern Tagen immer mehr ausbreitendes Feld der bedeutendsten und interessantesten Untersuchungen geöffnet werde. Nur darf der Lehrer nicht vergessen, dafs, wenn er sich zu sehr oder zu früh einem abstracten, vielleicht weitläufigen Calcul überlassen wollte, nur zu leicht für die Schüler Anschaulichkeit und Evidenz verloren gehen, und Unverständlichkeit herbeigeführt werden möchte.

Obgleich so eben der analytischen Methdoe in der Behandlung der Lehre von den Kegelschnitten im Ganzen der Vorzug vor der geometrischen gegeben wurde, so hat es doch dem Verf. passend geschienen, den Unterricht mit einer auch von Andern vorgeschlagenen geometrischen Betrachtungsweise der Ellipse, Hyperbel und Parabel zu beginnen, wobei diese Curven als Orte für den Mittelpunkt eines Kreises angesehen werden, der einen Punkt und einen Kreis, oder, was die Parabel betrifft, einen Punkt und eine gerade Linie berühren soll. Es lassen sich in der That aus dieser Ansicht nach ächt geometrischer Methode, ohne dafs man dabei Proportionen oder ähnlichen Calcul anwenden müfste, eine ziemliche Reihe interessanter Eigenschaften dieser Curven entwickeln, und viele dieselben betreffenden Constructionsaufgaben auflösen. Hat der Unterricht hiemit begonnen, so wird die Fortsetzung desselben dadurch bedeutend erleichtert, dafs diese Curven, wenn man zur analytischen Behandlung derselben schreitet, nicht mehr ganz neue Gegenstände sind. Auch kann die Vergleichung der Resultate und Leistungen beider Methoden nur Gewinn bringen.

Bei der auf diese Weise vorbereiteten analytischen Behandlung der Lehre von den Kegelschnitten selbst wird der Lehrer, wie überall beim Unterrichte, nicht vergessen dürfen, dafs nicht gerade eine in Hinsicht auf die Wissenschaft an sich vorzügliche oder vielleicht selbst einzig vollkommne Anordnung des wissenschaftlichen Stoffes, immer auch in pädagogischer Hinsicht die vorzüglichste für den Unterricht sei. Für die Wissenschaft an sich mag es allerdings zweckmäfsig sein, die analytische Theorie der Linien zweiter Ordnung mit der Betrachtung der allgemeinsten Gleichung, durch welche sie in Bezug auf zwei Coordinatenaxen in einer Ebene ausgedrückt werden, und der Herleitung der gemeinschaftlichen Eigenschaften aller dieser Linien aus jener Gleichung zu beginnen, so wie es in manchen Lehrbüchern, zum Theil auch solchen, die für den Elementar-Unterricht bestimmt sind, geschiehet. Eine andre Anordnung, ungefähr der von Biot getroffenen ähnlich, scheint für den Gymnasial-Unterricht vorzüglicher, bei welcher das, was die Franzosen *Discussion* und *Construction* jener Gleichung, nämlich der allgemeinen algebraischen Gleichung vom zweiten Grade zwischen zwei Veränderlichen, nennen, mehr gegen das Ende des Unterrichts gerückt wird, wenn man denselben überhaupt so weit ausdehnen kann und will.

Diese Untersuchung der allgemeinen Gleichung der Linien zweiter Ordnung kann aber nach verschiedenen Methoden geführt werden, und welche von diesen Methoden die vorzüglichste sei, ist nicht ganz leicht zu bestimmen, besonders, wenn man dieselben aus dem Gesichtspunkte der Unterrichtsmethodik betrachtet. Eine dieser Methoden mag den einen, eine andre wieder einen andern Vorzug haben. Die gewöhnlichste Methode beruhet auf der Auflösung jener Gleichung in Bezug auf die eine darin enthaltene Veränderliche, und es ist nicht zu leugnen, dafs sie recht lehrreich werden kann, obgleich ihr vielleicht nicht mit Unrecht (z. B. von Gergonne) vorgeworfen wird, sie lasse sich schwer oder gar nicht auf die Untersuchung der Gleichungen noch höherer Grade ausdehnen. Eine andre Methode gehet von der Coordinaten-Veränderung aus. Dabei werden gewöhnlich einige Aendrungen nach einander vorgenommen, z. B. zuerst der Anfangspunkt verlegt, dann die Richtung der Coordinatenaxen geändert. Ohne noch andrer Methoden zu erwähnen, bemerken wir nur noch, dafs man gewöhnlich die Untersuchung nur auf ein rechtwinkliges ursprüngliches Coordinatensystem beziehet.

In den folgenden Blättern ist versucht worden, die zuletzt angeführte Untersuchungsweise so zu verallgemeinern und so zu gestalten, dafs die allgemeine Gleichung auf ein Coordinatensystem von beliebigem Coordinatenwinkel bezogen, dann nur einer Coordinaten-Verändrung unterworfen wird, bei welcher auf einmal der Anfangspunkt und die Richtung der Coordinaten geändert wird, der neue Coordinatenwinkel aber ein rechter ist. Die Abhandlung möchte gern selbst Anfängern, unter andern auch denjenigen Schülern des Verf., welche seinen Unterricht in der analytischen Geometrie und der Theorie der Kegelschnitte mit besonderm Nutzen genossen haben, verständlich werden; dies diene zur Entschuldigung, wenn es derselben an derjenigen Gedrängtheit gebrechen sollte, welche von denen, die nicht Anfänger sind, gewünscht zu werden pflegt.

§. 1.

Auf ein in einer ebenen Fläche gedachtes System von Parallel-Coordinaten, deren Coordinatenwinkel $= \omega$, beziehen wir die allgemeine algebraische Gleichung des zweiten Grades zwischen zwei Veränderlichen, nämlich

$$(1) \qquad ay^2 + bxy + cx^2 + dy + ex + f = 0,$$

und setzen uns vor, die durch diese Gleichung dargestellte Linie, welche wir eine Linie der zweiten Ordnung nennen können, zu untersuchen, vorzüglich in der Absicht, um zu ermitteln, wie die Beschaffenheit dieser Linie von der Beschaffenheit der in der Gleichung enthaltenen Coefficienten, a, b, c, d, e, f, und dem Coordinatenwinkel ω abhängig sei. Dabei wird festgesetzt, dafs von allen diesen Constanten keine einen imaginären Werth habe, so wie auch, dafs nicht zugleich $a = 0$, $b = 0$, $c = 0$ sei, weil in diesem Falle die Linie in eine Linie der ersten Ordnung, eine gerade Linie übergehet.

Wir nennen hiebei f: das Schlufsglied, die Glieder ay^2, bxy u. s. w. nennen wir: das Glied mit y^2, das mit xy u. s. w.; die Constanten a, b, c, d, e, heifsen: Coefficient des Gliedes mit y^2, Coefficient des Gliedes mit xy u. s. w.

§. 2.

Wir setzen bei diesen Untersuchungen Einiges aus der Lehre von den Kegelschnitten als schon bekannt voraus, so z. B., dafs die Gleichung der Ellipse und die der Hyperbel, für rechtwinklige Coordinaten, wenn man den Mittelpunkt als Anfangspunkt, die Richtung eines Hauptdurchmessers aber als Abscissenaxe annimmt, von der Form $My^2 + Nx^2 = Z$ sind, während die Gleichung der Parabel die Form $y^2 = px$ hat, wenn bei rechtwinkligen Coordinaten der Scheitelpunkt als Anfangspunkt, die Axe als Abscissenlinie genommen wird. Wir wollen untersuchen, ob nicht, durch Coordinaten-Verändrung, ein neues System rechtwinkliger Coordinaten gefunden werden könne, für welches unsre Curve durch eine Gleichung von einer dieser beiden einfachen Formen dargestellt werde, beziehen aber unsre Untersuchung zuerst auf die Form $My^2 + Nx^2 = Z$.

Der Anfangspunkt der neuen, rechtwinkligen Coordinaten sei derjenige Punkt, dessen Abscisse $= m$ und dessen Ordinate $= n$ in Beziehung auf das ursprüngliche System. Die Abweichung der neuen Abscissenaxe von der ursprünglichen werde durch den Winkel ξ, und die Abweichung der neuen Ordinatenaxe ebenfalls von der anfänglichen Abscissenaxe durch den Winkel v ausgedrückt. Werden nun die neuen Coordinaten eines beliebigen Punktes durch x_1 und y_1 bezeichnet, so gelten, wie wir als bekannt voraussetzen, die Gleichungen

$$x = m + \frac{\sin(\omega - \xi)}{\sin \omega} x_1 + \frac{\sin(\omega - \upsilon)}{\sin \omega} y_1 \qquad y = n + \frac{\sin \xi}{\sin \omega} x_1 + \frac{\sin \upsilon}{\sin \omega} y_1.$$

Diese Gleichungen sind die allgemeinsten, welche zur Verwandlung von Parallel-Coordinaten in einer Ebene dienen Damit aber der neue Coordinatenwinkel ein rechter sei, setzen wir $\upsilon = \xi + 90°$, woher

$$\sin(\omega - \upsilon) = \sin(\omega - \xi - 90°) = -\cos(\omega - \xi)$$

$$\sin \upsilon = \sin(\xi + 90°) = \cos \xi.$$

Zur Erleichterung führen wir einige Abkürzungszeichen ein, indem wir setzen

$$(2) \quad P = \frac{\sin(\omega - \xi)}{\sin \omega},\ Q = -\frac{\cos(\omega - \xi)}{\sin \omega},\ R = \frac{\sin \xi}{\sin \omega},\ S = \frac{\cos \xi}{\sin \omega},$$

so daſs obige Gleichungen die Gestalt annehmen

$$(3) \qquad \begin{cases} x = m + Px_1 + Qy_1 \\ y = n + Rx_1 + Sy_1. \end{cases}$$

Setzen wir nun, um die bezweckte Coordinaten-Verändrung zu Ende zu führen, in (1) statt x und y die in (3) angegebenen Werthe, und bilden die entstehende Gleichung zweckmäſsig um, so erhalten wir

$$(4) \quad \left\{ \begin{array}{c} (aS^2 + bQS + cQ^2)\, y_1^2 + (aR^2 + bPR + cP^2)\, x_1^2 \\ + \left[2aRS + b(PS + QR) + 2cPQ\right] x_1 y_1 \\ + \left[(2an + bm + d)\, S + (bn + 2cm + e)\, Q\right] y_1 \\ + \left[(2an + bm + d)\, R + (bn + 2cm + e)\, P\right] x_1 \\ + an^2 + bmn + cm^2 + dn + em + f \end{array} \right\} = 0$$

als Gleichung der Curve in Bezug auf die neuen Coordinatenaxen.

§. 3.

Soll diese Gleichung die Form $Mx_1^2 + Ny_1^2 = Z$ annehmen, so müssen die Gröſsen m, n, ξ so bestimmt werden, daſs jeder der drei Coefficienten der drei Glieder, wovon das eine $x_1 y_1$, das zweite y_1, das dritte x_1 bei sich führt, den Werth 0 bekomme. Wir haben also zur Bestimmung von drei unbekannten Gröſsen m, n, ξ eben so viel Gleichungen, und erkennen hieraus, daſs unsre Absicht im Allgemeinen wohl erreichbar sein werde.

Zunächst nur die Glieder mit y_1 und x_1 betrachtend, sehen wir, es genüge, um den Coefficienten derselben den Werth 0 zu geben, m und n so zu wählen, daſs die Gleichungen

$$(5) \qquad 2an + bm + d = 0, \qquad\qquad (6) \qquad bn + 2cm + e = 0$$

Statt finden; denn ist dieses der Fall, so gehen jene Coefficienten wirklich über in

$$0S + 0Q = 0, \qquad\qquad 0P + 0R = 0$$

indem aus (2) erhellt, daſs keiner der Buchstaben P, Q, R, S einen unendlich groſsen Werth andeuten kann, da ω nicht $= 0°$ oder $= 180°$ sein darf.

Aber diese Gleichungen genügen nicht bloſs, um die Coefficienten von y_1 und x_1 in (4) beide zugleich in 0 übergehen zu lassen; sie sind zu diesem Zwecke auch nothwendig. Hievon überzeugen wir uns so. Bezeichnen wir die Ausdrücke $2an + bm + d$ und $bn + 2cm + e$ zur Abkürzung mit u und v, so drückt sich die Fordrung, daſs die in Rede stehenden Glieder verschwinden sollen, in den Gleichungen aus

$$Su + Qv = 0, \qquad\qquad Ru + Pv = 0.$$

Aus diesen Gleichungen folgt durch algebraische Auflösung

$$u = \frac{0}{PS - QR}, \qquad\qquad v = \frac{0}{PS - QR}.$$

Wegen der Gleichungen (2) hat man aber

$$PS - QR = \frac{\sin(\omega - \xi)\cos\xi + \cos(\omega - \xi)\sin\xi}{\sin\omega^2} = \frac{\sin\omega}{\sin\omega^2},$$

oder (7) $$PS - QR = \frac{1}{\sin\omega}.$$

Folglich haben wir die Gleichungen

$$u = 0 \,.\, \sin\omega = 0, \qquad\qquad v = 0 \,.\, \sin\omega = 0,$$

als nothwendige Folge der aus unsrer Absicht entsprungenen Bedingungsgleichungen.

Lösen wir jetzt die Gleichungen (5) und (6) algebraisch auf, so finden wir

$$(8) \qquad m = \frac{bd - 2ae}{4ac - b^2}, \qquad\qquad (9) \qquad n = \frac{be - 2cd}{4ac - b^2}.$$

Durch diese Gleichungen ist eine Lage des Anfangspunktes rechtwinklinger Coordinatenaxen bestimmt, bei welcher die Gleichung der Curve kein Glied mit y_1 und kein Glied mit x_1 enthält. Die neue Abscissenaxe kann hiebei einen beliebigen Winkel mit der früheren bilden, denn ξ ist noch unbestimmt.

Wir sind aber im Stande, für die Annahme, daſs die Gleichungen (5) (6) und also auch (8) (9) Statt finden, das Schluſsglied der Gleichung (4), welches wir mit $-Z$ bezeichnen wollen, einfacher auszudrücken, so daſs es nicht mehr m und n enthält. Zu diesem Ende müssen wir aus den 3 Gleichungen (5) (6) und

$$(10) \qquad an^2 + bmn + cm^2 + dn + em + f = -Z$$

die Gröfsen m und n eliminiren. Wir multipliciren (5) mit n, dann (6) mit m, und addiren die gefundnen Gleichungen, so haben wir

$$2an^2 + 2bmn + 2cm \quad + dn + em = 0,$$

woraus
$$an^2 + bmn + cm^2 + dn + em = \frac{dn + em}{2}.$$

Hievon subtrahiren wir (10), so kommt

$$-f = Z + \frac{dn + em}{2},$$

und wenn wir hierin statt m und n die Werthe aus (8) und (9) setzen, so finden wir endlich

$$(11) \qquad Z = \frac{ae^2 + cd^2 - bde - (4ac - b^2)f}{4ac - b^2}.$$

Durch unsre Bestimmung von m und n ist also die Gleichung unsrer Curve, für rechtwinklige Coordinaten und den neuen Anfangspunkt, jetzt folgende

$$(12) \qquad \left\{ \begin{array}{l} (aS^2 + bQS + cQ^2)\, y_1^2 + (aR^2 + bPR + cP^2)\, x_1^2 \\ \quad + \left[2aRS + b(PS + QR) + 2cPQ\right] x_1 y_1 \end{array} \right\} = Z.$$

§. 4.

Für den Fall, dafs in (8) und (9) der Nenner $4ac - b^2 = 0$, erhält man für m und n entweder unendlich grofse oder unbestimmte Werthe, und man wird zu neuen Coordinatenaxen geführt, die sich in unendlicher Entfernung oder in einer unbestimmten Stelle schneiden, also nicht gezeichnet werden können. Dieser Fall bildet daher eine Ausnahme, zugleich aber auch die einzige Ausnahme, wo die in §. 3. vorgenommene Behandlung der Gleichung (4) unstatthaft ist. Im Nächsten berücksichtigen wir diese Ausnahme noch nicht, sondern nehmen weitre Untersuchungen über die Gleichung (12) vor.

Aus dieser Gleichung erkennen wir eine besondre Beziehung des neuen Anfangspunktes zu unsrer Curve. Irgend eine gerade Linie sei durch diesen Anfangspunkt gezogen, so können wir dieselbe immer als neue Abscissenaxe ansehen, für welche und eine auf ihr senkrechte Ordinatenaxe die Curve durch (12) ausgedrückt wird. Giebt diese Linie Schnittpunkte mit der Curve, so werden wir deren Entfernungen vom Anfangspunkte als Abscissen ansehen können, zu welchen Ordinaten gehören, die $= 0$ sind, und werden also diese Entfernungen als diejenigen

Werthe von x_1 aus Gleichung (12) erhalten, welche aus der Annahme $y_1 = 0$ entspringen. Setzen wir aber $y_1 = 0$ in (12), so bekommen wir

$$(a R^2 + b P R + c P^2) \cdot x_1^2 = Z,$$

eine reine quadratische Gleichung, aus welcher für x_1 zwei entgegengesetzte, an bloſser Quantität gleiche Werthe von x_1 entstehen, die jedoch nicht immer reell sein werden. Dies beweiset, daſs, wenn jene durch den neuen Anfangspunkt, dessen Coordinaten im anfänglichen System m und n sind, gezogene Gerade die Curve trifft, dieses auf solche Weise in zwei Punkten geschiehet, daſs der neue Anfangspunkt in der Mitte zwischen den beiden Schnittpunkten liegt, oder also, daſs der neue Anfangspunkt der Mittelpunkt aller durch ihn hindurch gehenden Sehnen der Curve ist. Wir nennen daher diesen Punkt den Mittelpunkt der Curve, und haben den Satz: Wenn $4ac - b^2$ nicht $= 0$, so hat die Curve, deren Gleichung (1) ist, einen Mittelpunkt.

§. 5.

Jetzt kann man den Winkel ξ so zu bestimmen suchen, daſs in (12) auch noch das Glied mit $x_1 y_1$ verschwinde. Hiezu ist aber erforderlich, daſs

$$(13) \qquad 2 a R S + b \cdot (P S + Q R) + 2 c P Q = 0.$$

Mittelst der Werthe aus (2) ist aber

$$2 R S = \frac{\sin 2\xi}{\sin \omega^2}, \quad P S + Q R = \frac{\sin(\omega - 2\xi)}{\sin \omega^2}, \quad 2 P Q = -\frac{\sin(2\omega - 2\xi)}{\sin \omega^2}.$$

Aus (13) entstehet daher, durch Substitution und Multiplication mit $\sin \omega^2$,

$$(14) \qquad a \sin 2\xi + b \sin(\omega - 2\xi) - c \sin(2\omega - 2\xi) = 0,$$

Diese Gleichung giebt durch Entwicklung

$$(a - b \cos\omega + c \cos 2\omega) \sin 2\xi + (b \sin\omega - c \sin 2\omega) \cos 2\xi = 0,$$

woher (15) $$tg\, 2\xi = \frac{- b \sin\omega + c \sin 2\omega}{a - b \cos\omega + c \cos 2\omega}.$$

Durch diese Formel kann der Winkel ξ berechnet werden. In mancher Hinsicht ist es aber noch vortheilhafter, aus (14) den Winkel $\omega - 2\xi$ zu entwickeln. Wir setzen zur Abkürzung

$$(16) \qquad \lambda = \omega - 2\xi$$

so daſs $2\xi = \omega - \lambda$ und $2\omega - 2\xi = \omega + \lambda$, und also aus (14) entstehet

$$(17) \qquad a \sin(\omega - \lambda) + b \sin\lambda - c \sin(\omega + \lambda) = 0,$$

woher (18) $$tg\,\lambda = \frac{(a-c)\sin\omega}{(a+c)\cos\omega - b}.$$

Ist hiedurch λ gefunden, so hat man ξ durch die Gleichung

(19) $$\xi = \frac{\omega - \lambda}{2},$$

und die Gleichung (12) gehet über in

(20) $$My_1^2 + Nx_1^2 = Z,$$

wenn wir zur Abkürzung setzen

(21) $$M = aS^2 + bQS + cQ^2 = \frac{a\cos\xi^2 - b\cos(\omega-\xi)\cos\xi + c\cos(\omega-\xi)^2}{\sin\omega^2}$$

(22) $$N = aR^2 + bPR + cP^2 = \frac{a\sin\xi^2 + b\sin(\omega-\xi)\sin\xi + c\sin(\omega-\xi)^2}{\sin\omega^2}.$$

§. 6.

Wir wollen jetzt noch andre Formeln für M und N ableiten, besonders solche, welche eine bequemere Berechnung dieser Gröſsen geben, als die Gleichungen (21) und (22).

Durch Addition von (21) und (22) erhalten wir

(23) $$M + N = \frac{a + c - b\cos\omega}{\sin\omega^2}$$

Durch Subtraction der (22) von (21) folgt

$$(M-N)\,.\,\sin\omega^2 = a\cos 2\xi - b\cos(\omega - 2\xi) + c\cos(2\omega - 2\xi)$$

oder $$(M-N)\,.\,\sin\omega^2 = a\cos(\omega-\lambda) - b\cos\lambda + c\cos(\omega+\lambda).$$

Setzen wir hier statt b seinen Werth aus (17), nämlich

$$b = \frac{c\sin(\omega+\lambda) - a\sin(\omega-\lambda)}{\sin\lambda},$$

so bekommen wir

$$(M-N)\,.\,\sin\lambda\,.\,\sin\omega^2 = \left\{\begin{array}{l} a\cos(\omega-\lambda)\sin\lambda + a\sin(\omega-\lambda)\cos\lambda \\ -\,c\sin(\omega+\lambda)\cos\lambda + c\cos(\omega+\lambda)\sin\lambda \end{array}\right\}$$

$$= a\sin\omega - c\sin\omega = (a-c)\sin\omega,$$

woher (24) $$M - N = \frac{a-c}{\sin\omega\,.\,\sin\lambda}.$$

Aus den Gleichungen (23) und (24) ergiebt sich die bequemste Berechnung von M und N, wenn λ vorher durch (18) berechnet ist. Es ist nicht nöthig, die aus (23) und (24) folgenden Formeln für M und N selbst hier aufzustellen.

Um für $M - N$ einen Ausdruck zu erhalten, der von λ und ξ unabhängig ist, wollen wir λ aus (18) und (24) eliminiren. Nach (18) ist

$$\frac{1}{\sin\lambda^2} = 1 + \cot\lambda^2 = \frac{(a-c)^2 \sin\omega^2 + \big((a+c)\cos\omega - b\big)^2}{(a-c)^2 \sin\omega^2}$$

$$\frac{1}{\sin\lambda} = \pm \frac{1}{(a-c)\sin\omega} \sqrt{(a-c)^2 \sin\omega^2 + \big((a+c)\cos\omega - b\big)^2}$$

Dies in (24) substituirt giebt

$$(25) \qquad M - N = \pm \frac{1}{\sin\omega^2} \sqrt{(a-c)^2 \sin\omega^2 + \big((a+c)\cos\omega - b\big)^2}$$

Vor dieser Formel hat die (24) den Vorzug, dafs sie keine Ungewifsheit in Hinsicht auf + und — mit sich führt.

Zu gewissen Zwecken wollen wir auch einen Ausdruck für das Product MN suchen. Setzen wir in die Gleichung $4MN = (M+N)^2 - (M-N)^2$ statt $M+N$ und $M-N$ die Werthe aus (23) und (25) so erhalten wir

$$4MN = \frac{1}{\sin\omega^4} \cdot \left\{ \begin{array}{l} (a+c)^2 - 2(a+c)b\cos\omega + b^2\cos\omega^2 \\ -(a-c)^2 \sin\omega^2 - (a+c)^2\cos\omega^2 + 2(a+c)b\cos\omega - b^2 \end{array} \right\}$$

$$= \frac{1}{\sin\omega^4} \cdot \left[(a+c)^2 \sin\omega^2 - (a-c)^2 \sin\omega^2 - b^2 \sin\omega^2\right]$$

und hieraus endlich

$$(26) \qquad 4MN = \frac{4ac - b^2}{\sin\omega^2}.$$

Eben diese Gleichung erhält man auch, wenn man das Quadrat der Gleichung (13) von dem vierfachen Producte der Gleichungen (21) und (22) subtrahirt, und dann die Gleichung (7) benutzt.

Aus (18) (19) (21) und (22) erhellet, dafs λ, ξ, M und N nicht imaginär sein können, der Coordinatenwinkel ω und die Constanten a, b, c mögen reelle Werthe haben, welche sie wollen. Aus (26) läſst sich aber noch weiter schlieſsen, daſs weder M noch $N = 0$ sein könne, auſser wenn $4ac - b^2 = 0$, so wie auch nicht unendlich groſs, da $\sin \omega^2$ nicht $= 0$ sein kann.

§. 7.

Durch die im Vorigen enthaltenen Bestimmungen von m, n, Z, ξ, M und N haben wir unsre Curve durch die Gleichung

$$(20) \qquad My_1^2 + Nx_1^2 = Z, \quad \text{oder} \quad \frac{M}{Z}y_1^2 + \frac{N}{Z}x_1^2 = 1$$

ausgedrückt. Indem wir setzen

$$(27) \qquad A^2 = \frac{Z}{N}, \qquad (28) \quad B^2 = \frac{Z}{M},$$

können wir dafür auch schreiben

$$(29) \quad \left(\frac{x_1}{A}\right)^2 + \left(\frac{y_1}{B}\right)^2 = 1, \quad \text{oder} \quad (30) \quad A^2 y_1^2 + B^2 x_1^2 = A^2 B^2.$$

Aus diesen Gleichungen erhellt, daſs unter der Annahme $y_1 = 0$ die Abscisse x_1 den Werth $\pm A$, und bei der Annahme $x_1 = 0$ die Ordinate y_1 den Werth $\pm B$ erhält. Diese Gröſsen A und B sind die Haupthalbmesser unsrer Curve.

Wir wollen nun weitere Betrachtungen über die von den Constanten a, b, c, d, e, f und ω abhängige Beschaffenheit der Curve anstellen. Dabei werden wir die Fälle unterscheiden, wo $4ac - b^2 > 0$, und wo $4ac - b^2 < 0$, während wir den Fall, wo $4ac - b^2 = 0$, immer noch von der Betrachtung ausschlieſsen.

§. 8

Es sei also erstens $4ac - b^2 > 0$, d. h. $4ac - b^2$ eine positive Zahl. Dies kann, da b^2 immer positiv, nur Statt finden, wenn a und c von gleichem Vorzeichen sind. Es läſst sich aber selbst beweisen, daſs hier überhaupt die vier Gröſsen a, c, M und N einerlei Vorzeichen haben müssen. Daſs M und N im Vorzeichen übereinstimmen müssen, ergiebt sich schon aus der Gleichung (26), durch welche für $4ac - b^2 > 0$ das Product MN einen positiven Werth erhält. Daſs aber M und N auch mit a und c im Vorzeichen übereinstimmen müssen, erhellt daraus, daſs man die Gleichungen (21) und (22) umwandeln kann in

$$M = \frac{1}{4a} \cdot \left[(2aS + bQ)^2 + (4ac - b^2)Q^2\right]$$

$$N = \frac{1}{4a} \cdot \left[(2aR + bP)^2 + (4ac - b^2)P^2\right] \quad *)$$

Da nämlich $4ac - b^2$ positiv ist, so erhellt daraus, daſs in jeder dieser Gleichungen der in [] geschlossene Ausdruck einen positiven Werth darstellt, und hierauf, wegen des voranstehenden Factors $\frac{1}{4a}$, daſs M und N mit a im Vorzeichen übereinstimmen müssen.

Um die Beschaffenheit der Curve zu beurtheilen, muſs man auf den Werth von Z sehen. Wir unterscheiden folgende Fälle:

---

*) Diese Umwandlungen können auf die Theorie der quadratischen Gleichungen gestützt werden. Man habe die Gleichung

$$(\alpha) \qquad au^2 + buv + cv^2 = 0, \quad \text{oder} \quad u^2 + \frac{bv}{a}u + \frac{cv^2}{a} = 0$$

so finden sich aus ihr für u die zwei Werthe

$$u = -\frac{bv}{2a} + \frac{v}{2a}\sqrt{b^2 - 4ac} \text{ und } u = -\frac{bv}{2a} - \frac{v}{2a}\sqrt{b^2 - 4ac}$$

Daher ist

$$u^2 + \frac{bv}{a}u + \frac{cv^2}{a} = \left(u + \frac{bv}{2a} - \frac{v}{2a}\sqrt{b^2 - 4ac}\right) \cdot \left(u + \frac{bv}{2a} + \frac{v}{2a}\sqrt{b^2 - 4ac}\right)$$

$$= \left(u + \frac{bv}{2a}\right)^2 - \frac{v^2}{4a^2}\left(b^2 - 4ac\right)$$

$$= \frac{1}{4a^2} \cdot \left[(2au + bv)^2 + (4ac - b^2)v^2\right].$$

Folglich (β) $au^2 + buv + cv^2 = \frac{1}{4a} \cdot \left[(2au + bv)^2 + (4ac - b^2)v^2\right]$.

Hätte man (α) nicht für u, sondern für v aufgelöset, so hätte sich zuletzt ergeben

$$(\gamma) \qquad au^2 + buv + cv^2 = \frac{1}{4c} \cdot \left[(2cv + bu)^2 + (4ac - b^2)u^2\right].$$

Die obigen Umwandlungen ergeben sich nun ganz leicht, wenn man die Gleichungen (21) und (22) mit (α) vergleicht, und sodann (β) benutzt.

I. Es sei Z nicht $= 0$, und

1) Z mit M, folglich auch mit N, im Vorzeichen übereinstimmend, also $A^2 = \frac{Z}{N}$ und $B^2 = \frac{Z}{M}$ positiv, und daher sowohl A als B reell. In diesem Falle ist die Curve offenbar eine Ellipse, wie man aus (29) oder (30) erkennt. Die Gröſse A ist diejenige halbe Axe der Ellipse, welche in der neuen Abscissenaxe liegt, und B die andre halbe Axe, die in der neuen Ordinatenaxe liegt.

2) Es sei sowohl $A^2 = \frac{Z}{N}$ als $B^2 = \frac{Z}{M}$ negativ, indem Z mit M und N nicht im Vorzeichen übereinstimme, und folglich sowohl A als B imaginär. Hier ist es unmöglich, der Gleichung (20) oder (29) oder (30) durch reelle Werthe von x_1 und y_1 zu genügen; selbst die Annahme $x_1 = 0$, $y_1 = 0$ genügt denselben nicht. In diesem Falle stellt daher unsre Gleichung (1) kein wirklich vorhandenes Construct dar; sie ist unconstruirbar.

II. Es sei $Z = 0$.

Weil M und N gleiche Vorzeichen haben, kann hier die Gleichung (20) nur richtig werden, wenn man setzt $x_1 = 0$ und $y_1 = 0$, folglich stellt sie den neuen Anfangspunkt dar, also denjenigen Punkt, dessen Coordinaten in Bezug auf die ursprünglichen Coordinatenaxen durch m und n aus den Gleichungen (8) und (9) ausgedrückt werden.*)

§. 9.

Zweitens sei nun $4ac - b^2 < 0$, d. h. $4ac - b^2$ eine negative Zahl, ein Fall der immer Statt findet, wenn a und c verschiedene Vorzeichen haben, aber auch im entgegengesetzten Falle Statt finden kann. Aus der Gleichung (26) siehet man, daſs für $4ac - b^2 < 0$ die Gröſsen M und N verschiedene Vorzeichen haben. Es sei nun

---

*) Man kann jedoch, weil die Gleichung $My_1^2 + Nx_1^2 = 0$ sich verwandeln läſst in $(\sqrt{M}y_1 + \sqrt{-N}x_1) \cdot (\sqrt{M}y_1 - \sqrt{-N}x_1) = 0$, die Curve hier als ein System zweier imaginären Geraden betrachten, deren Gleichungen $\sqrt{M}y_1 + \sqrt{-N}x_1 = 0$, $\sqrt{M}y_1 - \sqrt{-N}x_1 = 0$, deren Schnittpunkt aber, da die Annahme $x_1 = 0$ und $y_1 = 0$ beiden Gleichungen genügt, der Anfangspunkt, also reell ist. Diese Ansicht nehmen wir aus Plückers analytisch-geometrischen Entwicklungen, Th. I. §. 234.

I. Z nicht $= 0$, und

1) $A^2 = \frac{Z}{N}$ positiv, also A reell; folglich, weil M und N von verschiedenem Vorzeichen sind, $B^2 = \frac{Z}{N}$ negativ, und B imaginär. Hier setze man, es sei

$$\mathfrak{B}^2 = - B^2 = - \frac{Z}{M},$$

so ist $\mathfrak{B}$ reell, und Gleichung (30) gehet über in

$$A^2 y_1^2 - \mathfrak{B}^2 x_1^2 = - A^2 \mathfrak{B}^2$$

woraus man erkennet, die Curve sei eine Hyperbel, deren Hauptaxe (in deren Verlängerungen die Brennpunkte enthalten sind) in der neuen Abscissenaxe liegt, und $= 2A$ ist, deren Nebenaxe aber $= 2\mathfrak{B}$ ist. Man wird auch hier noch sagen können, die Haupthalbmesser unsrer Curve seien A und B, dabei aber B imaginär.

2) Ist dagegen $A^2 = \frac{Z}{N}$ negativ, also $B^2 = \frac{Z}{M}$ positiv, so setze man

$$\mathfrak{A}^2 = - A^2 = - \frac{Z}{N}$$

dann gehet die Gleichung (30) über in

$$- \mathfrak{A}^2 y_1^2 + B^2 x_1^2 = - \mathfrak{A}^2 B^2$$

woraus folgt, die Curve sei wieder eine Hyperbel, aber mit dem reellen Haupthalbmesser B, dem imaginären A, und mit der Hauptaxe $= 2B$ in der neuen Ordinatenaxe, und der Nebenaxe $= 2\mathfrak{A}$.

II. Z sei $= 0$.

Hier hat man statt (20) die Gleichung

$$M y_1^2 + N x_1^2 = 0$$

Es sei nun, was wir annehmen dürfen, M positiv, also auch $-N$ positiv, so kann man statt dieser Gleichung setzen

$$\left(\sqrt{M} y_1 + \sqrt{-N} x_1\right) \cdot \left(\sqrt{M} y_1 - \sqrt{-N} x_1\right) = 0,$$

wo $\sqrt{-N}$ einen reellen Werth hat, und sich erkennen läſst, die Curve sei ein System zweier geraden Linien, deren eine die Gleichung hat

$$\sqrt{M}y_1 + \sqrt{-N}x_1 = 0, \qquad \text{oder} \qquad y_1 = -\sqrt{-\frac{N}{M}} \cdot x_1$$

die andre die Gleichung

$$\sqrt{M}y_1 - \sqrt{-N}x_1 = 0, \qquad \text{oder} \qquad y_1 = \sqrt{-\frac{N}{M}}x_1.$$

Beide gerade Linien schneiden sich im neuen Anfangspunkte, und zwar so, daſs die Tangenten der Winkel, welche sie mit der neuen Abscissenaxe bilden, durch $-\sqrt{-\frac{N}{M}}$ und $\sqrt{-\frac{N}{M}}$ ausgedrückt werden.

§. 10.

Den Fall, wo $4ac - b^2 = 0$, immer noch bei Seite setzend, erkennen wir nun aus §. 8. und 9. leicht Folgendes.

1) Jedesmal und zugleich nur wenn $4ac - b^2 > 0$ und $\frac{Z}{M} > 0$ (also auch $\frac{Z}{N} > 0$) stellt die Gleichung (1) eine Ellipse dar.

2) Jedesmal und nur wenn $4ac - b^2 > 0$ und $Z = 0$ stellt die Gleichung (1) einen Punkt dar.

3) Jedesmal und nur wenn $4ac - b^2 > 0$ und $\frac{Z}{M} < 0$ (also auch $\frac{Z}{N} < 0$) ist die Gleichung (1) ganz unconstruirbar.

4) Jedesmal und nur wenn $4ac - b^2 < 0$ und Z nicht $= 0$ stellt die Gleichung (1) eine Hyperbel dar.

5) Jedesmal und nur wenn $4ac - b^2 < 0$ und $Z = 0$ drückt die Gleichung (1) das System zweier geraden Linien aus, die sich im neuen Anfangspunkte schneiden.

So haben wir also Kennzeichen und Bedingungen für eine fünffache Beschaffenheit der durch (1) ausgedrückten Curve. Wir sind aber auch berechtigt, im Falle 3. die Curve eine imaginäre Ellipse, im Falle 2. aber eine Ellipse zu nennen, deren Axen $= 0$ geworden, die also in einen Punkt übergegangen; im Falle 5. endlich zu sagen, die Curve sei eine Hyperbel, deren Axen $= 0$ geworden.

Daher können wir sagen, $4ac - b^2 > 0$ sei das Kennzeichen und die Bedingung der Ellipse, und $4ac - b^2 < 0$ das Kennzeichen und die Bedingung der Hyperbel; von der Beschaffenheit des Z und der Brüche $\frac{Z}{M}$, $\frac{Z}{N}$ hänge es aber auf die oben angegebene Weise ab, ob die Ellipse eine eigentliche reelle, oder ein Punkt, oder imaginär sei, so wie, ob die Hyperbel eine eigentliche, oder nur das System zweier geraden Linien sei.

Es ist zu beachten, dafs in allen diesen Fällen der neue Anfangspunkt, dessen Coordinaten m und n immer reell sind, als Mittelpunkt der Curve anzusehen ist.*)

§. 11.

Wir wollen die eben gefundnen Bedingungen und Kennzeichen der verschiedenen Beschaffenheit der Curve noch genauer betrachten.

Statt der im Fall 1. und 3. vorkommenden Bedingungen

$$\frac{Z}{M} > 0, \quad \frac{Z}{N} > 0, \qquad \text{und} \qquad \frac{Z}{M} < 0, \quad \frac{Z}{N} < 0$$

können wir auch setzen

$$ZM > 0, \quad ZN > 0, \qquad \text{und} \qquad ZM < 0, \quad ZN < 0,$$

weil dem Producte und dem Quotienten derselben reellen Zahlen immer dasselbe Vorzeichen zukommt. Da aber nach §. 8. für den Fall, dafs $4ac - b^2 > 0$, die Gröfsen M und N mit a einerlei Vorzeichen haben, so dürfen wir, wenn wir auch noch statt Z den Werth aus (11) setzen, statt obiger Bedingungen auch schreiben

$$\frac{ae^2 + cd^2 - bde - (4ac - b^2)f}{4ac - b^2} \cdot a > 0, \quad \text{und} \quad \frac{ae^2 + cd^2 - bde - (4ac - b^2)f}{4ac - b^2} \cdot a < 0.$$

Hier dürfen wir aber auch noch den Nenner $4ac - b^2$ weglassen, weil er positiv ist, und Division durch ihn das Vorzeichen ungeändert läfst.

Die in den Fällen 2. und 5. vorkommende Bedingung $Z = 0$ giebt, indem wir ebenfalls in (11) den Nenner weglassen dürfen, die Bedingung

$$ae^2 + cd^2 - bde - (4ac - b^2)f = 0.$$

Alles zusammengefafst kann nun als Ergebnifs unsrer Betrachtungen folgende Uebersicht aufgestellt werden:

---

*) Auch sind in gewisser Art die Brennpunkte immer reell, selbst bei einer imaginären Ellipse.

I. $4ac - b^2 > 0$ ist Bedingung und Kennzeichen der Ellipse, und sodann

$$\left[ae^2 + cd^2 - bde - (4ac - b^2)f\right] . a > 0$$

Bedingung der eigentlichen, reellen Ellipse;

$$ae^2 + cd^2 - bde - (4ac - b^2)f = 0$$

Bedingung der in einen Punkt übergegangenen Ellipse;

$$\left[ae^2 + cd^2 - bde - (4ac - b^2)f\right] . a < 0$$

Bedingung der imaginären Ellipse.

II. $4ac - b^2 < 0$ ist Bedingung und Kennzeichen der Hyperbel, und sodann

$$ae^2 + cd^2 - bde - (4ac - b^2)f = 0$$

Bedingung der in ein System zweier Geraden übergegangenen Hyperbel.

In allen diesen Bedingungen kommt der Winkel ω gar nicht vor. Giebt also z. B. die Gleichung (1) für irgend einen Coordinatenwinkel eine Ellipse, so findet dasselbe, bei ungeänderten Coefficienten a, b, c, d, e, f, auch für jeden andern Coordinatenwinkel Statt. Dagegen auf ξ, M und N hat der Winkel ω Einfluſs.

§. 12.

Um die Anwendung der im Vorigen abgeleiteten ξ, M und N bestimmenden Gleichungen völlig klar zu machen, ist es nöthig, auf die verschiedenen Werthe zu sehen, welche man dem von der anfänglichen und der neuen Abscissenaxe gebildeten Winkel ξ beilegen kann.

Da der Winkel 2ξ in (15) durch seine Tangente bestimmt ist, so kann derselbe unendlich viele verschiedene Werthe haben, welche alle aber eine arithmetische Progression mit der Differenz 180° bilden. Es wird sich aber zeigen, daſs es nur nöthig ist, auf diejenigen beiden Werthe zu sehen, welche die Grenzen 0° und 360° nicht überschreiten. Heiſst der kleinere dieser beiden Winkel $2\xi'$, der gröſsere $2\xi''$, so werden wir haben $2\xi'' = 2\xi' + 180°$, und also $\xi'' = \xi' + 90°$; ξ' wird zwischen 0° und 90°, ξ'' zwischen 90° und 180° enthalten sein. Sollte $tg\, 2\xi = 0$ sein, so könnte man $\xi' = 0°$ und $\xi'' = 90°$ setzen.

Auch für λ erhält man aus (18) eine unendliche Menge von Werthen, welche eine Progression mit der Differenz 180° bilden, und daraus durch (19) unendlich viele Werthe für ξ, in einer Progression, deren Differenz = 90°; ganz übereinstimmend mit der eben angestellten Betrachtung. Bezeichnen wir mit λ', λ'' die beiden Werthe von λ, welche beziehungsweise mit ξ' und ξ'' zusammenhangen, so haben wir $\lambda' = \omega - 2\xi'$ und $\lambda'' = \omega - 2\xi''$, folglich, wegen $2\xi'' = 2\xi' + 180°$, auch $\lambda'' = \lambda' - 180°$.

Siehet man nun zugleich auf den Umstand, daſs die neuen Coordinatenaxen rechtwinklig sind, und den, daſs $\xi'' = \xi' + 90°$, so ergiebt sich, daſs die Anwendung von ξ'' statt ξ' nur eine Umtauschung der neuen Coordinatenaxen bewirken würde, so daſs die Abscissenaxe zur Ordinatenaxe, die Ordinatenaxe zur Abscissenaxe würde. Mit dieser Umtauschung der Coordinatenaxen würde offenbar auch eine Vertauschung der Haupthalbmesser A und B verbunden sein. Dieses zeigen auch die Rechnungsformeln. Bezeichnet man diejenigen Werthe von M, N, A und B, welche von ξ' abhangen, mit M', N', A', B', und die von ξ'' abhangenden mit M'', N'', A'', B'', so hat man, da in (23) ξ ohne Einfluſs ist,

$$M'' + N'' = M' + N';$$

für (24) dagegen ist, wegen $\lambda'' = \lambda' - 180°$, $\sin\lambda'' = -\sin\lambda'$, mithin ist $M'' - N''$ dem $M' - N'$ entgegengesetzt, oder

$$M'' - N'' = N' - M'.$$

Aus beiden Gleichungen findet man nun

$$M'' = N', \qquad N'' = M',$$

und mittelst (27) und (28) bekommt man hieraus

$$B''^2 = A'^2, \qquad A''^2 = B'^2,$$

wodurch sich die Umtauschung von A und B zu erkennen giebt.

Nach diesen Bemerkungen ist es im Allgemeinen gleichgültig, ob man ξ' oder ξ'' zu Grunde legen will. Man wird für jeden dieser beiden Werthe von ξ die Natur der Curve nebst allen zur genauen Bestimmung derselben nach ihrer Lage gegen die ursprünglichen Coordinatenaxen dienenden Gröſsen genau ermitteln können. Was aber die übrigen Werthe von ξ, die in den Formen $\xi' + 180°$, $\xi'' + 270°$ u. s. w., so wie $\xi' - 90°$, $\xi'' - 180°$ u. s. w. enthalten sind, betrifft, so ist die Anwendung derselben ganz überflüssig. Denn 1) Jeder Werth des Winkels ξ, welchen derselbe auſser den 4 Werthen ξ', $\xi' + 90°$, $\xi' + 180°$, $\xi' + 270°$ haben kann, würde mit einem dieser vier Werthe in Bezug auf die daraus entstehende Lage der neuen Coordinatenaxen, selbst in Hinsicht der positiven und der negativen Seite derselben, zusammenstimmen. 2) Aber auch von diesen vier Werthen ist die Anwendung der beiden letzten überflüssig. Der dritte würde nämlich dieselbe Lage der neuen Coordinatenaxen geben, wie der erste, und der vierte dieselbe wie die zweite, nur so, daſs die positive Seite jeder Coordinatenaxe sich mit der negativen umtauschen würde. Diese Umtauschung würde aber keinen Einfluſs auf die Werthe von M, N, A, B, und auf die Gleichung der Curve in Bezug auf die neuen Coordinatenaxen haben.

Obschon es, wie oben gefunden wurde, im Wesentlichen gleichgültig ist, ob man ξ' oder ξ'' anwendet, so möchte man doch vielleicht wünschen, daſs der in der neuen Abscissenaxe liegende Haupthalbmesser A bei einer Ellipse die halbe groſse Axe, bei einer Hyperbel aber der reelle Haupthalbmesser, die halbe Hauptaxe sei, oder also, was dasselbe sagt, daſs die Brennpunkte der Curve in der neuen Abscissenaxe lägen. Für eine solche Lage gilt aber, wie man leicht findet, sowohl bei der Ellipse als bei der Hyperbel, als Bedingung und Kennzeichen die Ungleichung $A^2 - B^2 > 0$, oder also $\frac{Z}{N} - \frac{Z}{M} > 0$. Man wähle also für ξ denjenigen der beiden Werthe ξ' und ξ'', für welchen diese Bedingung Statt findet, so wird das Gewünschte erreicht sein.

§. 13.

Findet die Bedingung der Ellipse $4ac - b^2 > 0$ Statt, so wird die Ellipse ein Kreis sein, wenn die Haupthalbmesser A und B gleich sind, oder also wenn $M = N$ und folglich $M - N = 0$. Diese Bedingung des Kreises kann man aber vermöge (25) in die Gleichung

$$(a - c)^2 \sin\omega^2 + \left[(a + c)\cos\omega - b\right]^2 = 0$$

verwandeln. Diese kann aber, weil a, b, c, $\sin\omega$ und $\cos\omega$ durchaus reelle Werthe haben, nicht anders Statt finden, als wenn diese Gröſsen den zwei Gleichungen

$$a - c = 0, \qquad (a + c)\cos\omega - b = 0$$

genügen. Also sind diese Gleichungen, welche man auch in

$$(31) \qquad a = c, \qquad b = 2a\cos\omega$$

verwandeln kann, die Bedingungen des Kreises. Dieselben ziehen aber die Ungleichung $4ac - b^2 > 0$, welche die Bedingung der Ellipse ist, nach sich; denn man bekommt mittelst derselben $4ac - b^2 = 4a^2\sin\omega^2$, woher $4ac - b^2$ offenbar positiv ist. Finden die Gleichungen (31) Statt, so braucht man also nicht mehr zu untersuchen, ob $4ac - b^2 > 0$, sie genügen zur Bedingung des Kreises. Sie dienen aber auch zum sichern Kennzeichen des Kreises, wenn man dies Wort in einem weitern Sinne nimmt, so daſs es selbst nur einen Punkt oder ein imaginäres Construct bezeichnen kann. Der Radius des Kreises ist $= \sqrt{\frac{Z}{M}}$. Wegen (31) ist aber nach (23)

$$M = N = \frac{M + M}{2} = \frac{a + c - b \cos \omega}{2 \sin \omega^2} = \frac{2a - 2a \cos \omega^2}{2 \sin \omega^2} = a,$$

folglich ist der Radius $= \sqrt{\frac{Z}{a}}$. Je nachdem nun $\frac{Z}{a}$ positiv, $= 0$, oder negativ, ist der Kreis reell, ein Punkt oder imaginär. Dieses stimmt ganz mit den Bedingungen überein, die schon in §. 11. für eine reelle, eine in einen Punkt übergegangene und eine imaginäre Ellipse gefunden wurden.

Daſs die Gleichungen (31) die Bedingung des Kreises enthalten, ergiebt sich auch, wenn man die Eigenschaft des Kreises zu Grunde legt, daſs jeder Durchmesser desselben als Hauptdurchmesser betrachtet werden kann. Hienach müssen nämlich, wenn die Ellipse ein Kreis sein soll, die Winkel ξ und λ unbestimmt sein; der Werth von $tg\,\lambda$ aus (18) muſs also die Form $\frac{0}{0}$ annehmen. Dies führt geradezu auf die Gleichung (31).

Findet die Bedingung der Hyperbel $4ac - b^2 < 0$ Statt, so wird die Hyperbel eine gleichseitige sein, wenn

$$A^2 = \mathfrak{B}^2 = - B^2, \quad \text{oder} \quad \frac{Z}{N} = - \frac{Z}{M},$$

also wenn $M + N = 0$. Aus (23) ergiebt sich daher die Gleichung

$$(32) \qquad a + c - b \cos \omega = 0$$

als Bedingung der gleichseitigen Hyperbel. Man braucht, wenn dieselbe Statt findet, auch nicht weiter zu untersuchen, ob $4ac - b^2 < 0$; denn diese Ungleichung ist immer mit (32) verbunden. Es folgt nämlich aus (32)

$$c = b \cos \omega - a, \qquad \text{mithin} \quad b^2 - 4ac = b^2 - 4ab \cos \omega + 4a^2$$

wofür man, (auf die Umwandlung von $au^2 + buv + cv^2$ in der Note zu §. 8 gestützt) auch schreiben kann

$$b^2 - 4ac = b^2 \sin \omega^2 + (2a - b \cos \omega)^2,$$

woraus erhellt, daſs $b^2 - 4ac > 0$ also $4ac - b^2 < 0$.

Wenn übrigens aufser (32), auch $Z = 0$, so ist die Curve ein System zweier sich rechtwinklig schneidenden Geraden.

§. 14.

Jetzt endlich wenden wir uns zu dem zwischen den Bedingungen $4ac - b^2 > 0$ und $4ac - b^2 < 0$ liegenden Falle, wo $4ac - b^2 = 0$, und die bisher entwickelten Formeln nicht recht anwendbar sind, da die Coordinaten des Mittelpunkts m und n im Allgemeinen unendlich grofse Werthe erhalten. Wir vermuthen, die Curve sei hier von einer zwischen der Ellipse und der Hyperbel liegenden Gattung nämlich eine Parabel, und wollen uns deshalb bemühen, durch Coordinatenveränderung für die Curve eine Gleichung von der Form $y_1^2 = px_1$ abzuleiten.

Hiebei werden wieder die Gleichungen (2) und (3) anzuwenden sein, so dafs es scheint, man könne die neuen Betrachtungen sogleich auf die daraus abgeleitete Gleichung (4) beziehen. Bequemer ist es jedoch, die Annahme, dafs $4ac - b^2 = 0$, zuvor zu einer Umändrung der Gleichung (1) anzuwenden, und erst dann die Coordinatenveränderung vorzunehmen.

Vor allen Dingen bemerken wir aber auch noch Folgendes: 1) Weil $4ac - b^2 = 0$ sein soll, und b^2 nie negativ sein kann, so kann im gegenwärtigen Falle das Product ac nie negativ sein, und also nie die eine der Zahlen a und c positiv, die andre negativ sein. Wären aber diese beiden Coefficienten von y^2 und x^2 negativ, so könnte man durch Multiplication der Gleichung der Curve mit -1 die Zeichen so umwandeln, dafs a und c beide positiv wären. Wir werden daher im Folgenden annehmen dürfen, a und c seien beide positiv. 2) Die Gleichung $4ac - b^2 = 0$ kann auch bestehen, wenn $b = 0$ und entweder $a = 0$ oder $c = 0$; es wird am besten sein, im Folgenden nur Formeln zu entwickeln, die in einem solchen Falle nicht unanwendbar sind.

Wir können nunmehr in Gleichung (1), wo wir voraussetzen, a und c seien beide positiv, statt b entweder setzen $2\sqrt{ac}$ oder $-2\sqrt{ac}$, je nachdem b positiv oder negativ. Dadurch gehen die ersten Glieder in (1) über in

$$ay^2 \pm 2\sqrt{ac} \,.\, xy + cx^2 \quad \text{oder} \quad (\sqrt{a} \,.\, y \pm \sqrt{c} \,.\, x)^2.$$

Setzen wir daher

$$(33) \qquad \mathfrak{a} = \sqrt{a}, \qquad \text{und} \quad (34) \qquad \mathfrak{c} = \frac{b}{2\mathfrak{a}} = \begin{cases} \sqrt{c}, & \text{wenn } b \text{ positiv,} \\ -\sqrt{c}, & \text{wenn } b \text{ negativ,} \end{cases}$$

so können wir statt (1) schreiben

$$(35)\qquad (\mathfrak{a}y + \mathfrak{c}x)^2 + dy + ex + f = 0.$$

Die Bedeutung von $\mathfrak{a}$ und $\mathfrak{c}$ könnte auch so bestimmt werden: Der bloſsen Quantität nach sind $\mathfrak{a}$ und $\mathfrak{c}$ den Quadratwurzeln aus a und c gleich; was aber das Plus und Minus betrifft, so sind sie von demselben Vorzeichen zu nehmen, wenn b positiv, von verschiedenem aber, wenn b negativ. Es genügt aber auch, so wie oben, festzusetzen, $\mathfrak{a}$ solle immer positiv sein, das Zeichen von $\mathfrak{c}$ sich aber nach dem von b richten.

Wir könnten wegen $4ac - b^2 = 0$ auch statt (1) setzen

$$\frac{1}{4a}\cdot(2ay + bx)^2 + dy + ex + f = 0, \quad \text{oder} \quad \frac{1}{4c}\cdot(by + 2cx)^2 + dy + ex + f = 0,$$

aber diese Gleichungen würden sich in verschiedener Hinsicht unbequemer zeigen als (35). Z. B. wenn $a = 0$ und $b = 0$ würde die erste derselben unbrauchbar sein; die zweite eben so, wenn $b = 0$ und $c = 0$. Ferner würden die hervorgehenden Formeln weniger regelmäſsig erscheinen, als die aus (35) entstehenden.

§. 15.

Setzen wir nun in (35) statt x und y ihre Werthe aus (3), schreiben aber dabei $\mathfrak{m}$ und $\mathfrak{n}$ statt m und n, weil diese Coordinaten des neuen Anfangspunkts nicht mehr Coordinaten des Mittelpunkts der Curve, wie bisher, sein können, so erhalten wir bei gehöriger Anordnung

$$(36)\qquad \left\{\begin{array}{l} \left[\mathfrak{a}\mathfrak{n} + \mathfrak{c}\mathfrak{m} + (\mathfrak{a}S + \mathfrak{c}Q)y_1 + (\mathfrak{a}R + \mathfrak{c}P)x_1\right]^2 \\ + (dS + eQ)y_1 + (dR + eP)x_1 + d\mathfrak{n} + e\mathfrak{m} + f \end{array}\right\} = 0.$$

Soll bei der Entwicklung dieser Gleichung kein Glied mit x_1^2 vorkommen, so muſs sein

$$(37)\qquad \mathfrak{a}R + \mathfrak{c}P = 0,$$

und wenn dieses Statt findet, so wird, wie sich bei Betrachtung von (36) sogleich zeigt, selbst kein Glied mit $x_1 y_1$ hervorgehen können, und dadurch viel gewonnen sein. Die Gleichung (37) giebt aber mittelst der Werthe aus (2)

$$(38)\qquad \mathfrak{a}\sin\xi + \mathfrak{c}\sin(\omega - \xi) = 0,$$

woraus sich entwickelt

$$(39)\qquad tg\,\xi = \frac{\mathfrak{c}\sin\omega}{\mathfrak{c}\cos\omega - \mathfrak{a}}.$$

Wird nun ξ dieser Gleichung gemäſs bestimmt, so gehet (36) über in

$$(40)\quad \left\{ \begin{array}{l} (aS + cQ)^2 y_1^2 + \left[2(an + cm)(aS + cQ) + (dS + eQ)\right] y_1 \\ \quad + (dR + eP) x_1 + (an + cm)^2 + dn + em + f \end{array} \right\} = 0.$$

Aus der Form dieser Gleichung kann man eine Eigenschaft folgern, welche jeder neuen Abscissenaxe zukommt, die den nach (39) bestimmten Winkel ξ mit der frühern Abscissenaxe bildet. Die letzte Gleichung kann nämlich auf die Form gebracht werden

$$(41)\qquad y_1^2 + r y_1 = s,$$

worin zwar s, aber nicht r von x abhängig sein wird. Der Theorie der quadratischen Gleichungen gemäfs wird die Summe der beiden Werthe von y_1, welche aus dieser Gleichung entstehen, $= -r$, die halbe Summe also $= -\frac{r}{2}$, und folglich unabhängig von x_1 sein. Diese halbe Summe ist aber zugleich die Ordinate des Mittelpunkts der Sehne, die in den Endpunkten der beiden durch die zwei Werthe von y_1 dargestellten Ordinaten begrenzt ist. Diese Ordinate des Mittelpunkts der Sehne hat also einen von der Abscisse x_1 unabhängigen Werth. Für alle Werthe der Abscisse wird also der Mittelpunkt jener Sehne in einer geraden Linie liegen, die unter einem Abstande $= -\frac{r}{2}$ mit der neuen Abscissenaxe parallel ist. Wenn also die Curve nach unsrer Vermuthung wirklich eine Parabel ist, so wird, bekannten Eigenschaften der Parabel gemäfs, die neue Abscissenaxe der sogenannten Axe der Parabel parallel sein, und folglich wird diese Axe mit der ursprünglichen Abscissenaxe einen Winkel bilden, der dem durch (39) bestimmten Winkel ξ gleich ist.

§. 16.

Ehe wir in der Gleichung (40) noch mehr Glieder zum Verschwinden bringen, wollen wir die Form derselben etwas ändern. Zunächst schreiben wir statt derselben

$$(42)\quad (aS + cQ)^2 y_1^2 + 2(aS + cQ)\cdot(an + cm - U) y_1 + (dR + eP) x_1 + (an + cm)^2 + dn + em + f = 0,$$

indem wir zur Abkürzung setzen

$$(43)\qquad U = -\frac{dS + eQ}{2(aS + cQ)}.$$

Nun suchen wir für $aS + cQ$ und $dR + eP$ andre, gleichgeltende Ausdrücke, unter Benutzung unsrer Bestimmung von ξ in §. 15. Zunächst setzen wir in $aS + cQ$ statt a seinen sich aus (37) ergebenden Werth, so haben wir

4

$$aS + cQ = -\frac{cPS}{R} + cQ = -\frac{c}{R}\cdot(PS - QR)$$

oder, wegen der Werthe von R und $PS - QR$ aus (2) und (7)

$$(44)\qquad aS + cQ = -\frac{c}{\sin\xi}.$$

In $dR + eP$ setzen wir statt P seinen Werth aus (37), so kommt

$$dR + eP = dR - \frac{aeR}{c} = -\frac{ae - cd}{c}\cdot R,$$

oder

$$(45)\qquad dR + eP = -\frac{(ae - cd)\cdot\sin\xi}{c\sin\omega}.$$

Unter Anwendung von (44) und (45) können wir nun statt der Gleichung (42), wenn wir dieselbe mit $\frac{\sin\xi^2}{c^2}$ multipliciren, schreiben

$$(46)\quad y_1^2 - \frac{2\sin\xi}{c}\cdot(an + cm - U)y_1 - \frac{(ae - cd)\sin\xi^3}{c^3\sin\omega}x_1 + \frac{\sin\xi^2}{c}\cdot\left[(an + cm)^2 + dn + em + f\right] = 0.$$

Was den hier noch vorkommenden Hülfsbuchstaben U betrifft, so ist aus (43) und den bekannten Werthen von S und Q,

$$(47)\qquad U = -\frac{d\cos\xi - e\cos(\omega - \xi)}{2\left(a\cos\xi - c\cos(\omega - \xi)\right)}.$$

Wir können aber auch für U eine von ξ unabhängige Formel ableiten. Der Zähler des Bruches in (47) ist

$$= \cos\xi\cdot\left(d - \frac{e\cos(\omega - \xi)}{\cos\xi}\right) = \cos\xi\cdot(d - e\cos\omega - e\sin\omega\, tg\,\xi),$$

der Nenner desselben aber ist

$$= 2\cos\xi\cdot\left(a - \frac{c\cos(\omega - \xi)}{\cos\xi}\right) = 2\cos\xi\,.\,(a - c\cos\omega - c\sin\omega\, tg\,\xi).$$

Nach (47) also ist $\qquad U = -\tfrac{1}{2}\cdot\frac{d - e\cos\omega - e\sin\omega\, tg\,\xi}{a - c\cos\omega - c\sin\omega\, tg\,\xi}.$

Setzen wir hier statt $tg\,\xi$ seinen Werth aus (39), so erhalten wir

$$U = -\tfrac{1}{2}\cdot\frac{(d - e\cos\omega)\,(c\cos\omega - a) - c\,e\sin\omega^2}{(a - c\cos\omega)\,(c\cos\omega - a) - c^2\sin\omega^2},$$

wofür man schreiben kann

$$(48)\quad U = \tfrac{1}{2}\cdot\frac{(ae + cd)\cos\omega - ad - ce}{a^2 + c^2 - 2ac\cos\omega} = \tfrac{1}{2}\cdot\frac{(ae + cd)\cos\omega - ad - ce}{a + c - b\cos\omega}.$$

Diese Gleichung läfst aber noch eine weitre Umwandlung zu, bei welcher der Winkel ξ wieder eingeführt wird. Aus (39) folgt nämlich

$$\frac{1}{\sin \xi^2} = \cot g \xi^2 + 1 = \frac{a^2 + c^2 - 2\,a\,c \cos \omega}{c^2 \sin \omega^2} = \frac{a + c - b \cos \omega}{c^2 \sin \omega^2}$$

also (49) $$\sin \xi^2 = \frac{c^2 \sin \omega^2}{a + c - b \cos \omega}.$$

Substituirt man den hieraus entspringenden Werth von $a + c - b \cos \omega$ in (48), so erhält man endlich

$$(50) \qquad U = \frac{\sin \xi^2}{2\,c^2 \sin \omega^2} \cdot \left[(a\,e + c\,d) \cos \omega - a\,d - c\,e\right].$$

Bei Rechnungen in bestimmten Zahlen wird man unter den Formeln, welche die Gleichungen (47), (48) und (50) darbieten, nach Belieben wählen können.

§. 17

Jetzt können wir m und n so zu bestimmen suchen, dafs in (46) sowohl das Glied mit y_1 als das Schlufsglied verschwinde. Zuvor überlegen wir aber, welche Wirkung es haben würde, wenn wir m und n so bestimmten, dafs nur das eine oder das andre dieser Glieder verschwände; dann werden wir um so eher begreifen, welche Wirkung die Entfernung beider Glieder haben mufs.

Würde blofs das Glied mit y_1 zum Verschwinden gebracht, so entstände in Bezug auf y_1 eine reine quadratische Gleichung, der in §. 15. durch $-\frac{r}{2}$ ausgedrückte Abstand der Axe der Curve von der mit ihr parallelen neuen Abscissenaxe wäre $= 0$, und also fielen diese beiden Linien zusammen. Wir hätten aber hier nur eine die zwei noch unbestimmten Gröfsen m und n enthaltende Bedingungsgleichung, nämlich

$$(51) \qquad a\,n + c\,m = U,$$

welche als geometrischen Ort des neuen Anfangspunktes eine gerade Linie giebt. Diese gerade Linie kann nach der kaum gemachten Bemerkung nichts anders, als die nach beiden Seiten unbegrenzte Axe der Parabel sein. Dieses harmonirt auch mit der in (38) enthaltenen Bestimmung des Winkels ξ, welcher nach der Bemerkung vom Schlufs des §. 15. der Winkel zwischen der früheren Abscissenaxe und der Axe der Parabel ist. Macht eine gerade Linie mit der Abscissenaxe den Winkel ξ, während der Coordinatenwinkel $= \omega$, so ist bekanntlich die Gleichung der Geraden von der Form

$$y = \frac{\sin \xi}{\sin(\omega - \xi)} \cdot x + g.$$

Unsre Gleichung (51) giebt aber bei Vergleichung mit dieser Form, indem $\mathfrak{m}$ der Abscisse x, $\mathfrak{n}$ der Ordinate y entspricht, die Gleichung

$$\frac{\sin \xi}{\sin(\omega - \xi)} = - \frac{\mathfrak{c}}{\mathfrak{a}}$$

was mit (38) ganz übereinstimmt. Soll die Axe der Parabel construirt werden, so giebt die Gleichung dieser Axe, d. h. (51), leicht das Mittel dazu an die Hand.

Wollten wir in (46) blofs das Schlufsglied zum Verschwinden bringen, so hätten wir zur Bestimmung von $\mathfrak{m}$ und $\mathfrak{n}$ nur die eine Gleichung

$$(52) \qquad (\mathfrak{a}\mathfrak{n} + \mathfrak{c}\mathfrak{m})^2 + d\mathfrak{n} + e\mathfrak{m} + f = 0,$$

welche für den neuen Anfangspunkt einen geometrischen Ort bestimmen würde. Dieser geometrische Ort wäre offenbar die Curve selbst, denn die Gleichung (52) unterscheidet sich von (35) nur darin, dafs statt x und y hier stehet $\mathfrak{m}$ und $\mathfrak{n}$. Dasselbe erhellt auch so: Wird der Gleichung (52) genügt, so bekommt (46) eine Gestalt, in der sie offenbar durch die Annahme $x_1 = 0$, $y_1 = 0$ richtig wird, d. h. bei welcher der neue Anfangspunkt ein Punkt der Curve sein mufs.

Jetzt erkennen wir leicht, was es für eine Wirkung haben mufs, wenn wir sowohl der Gleichung (51) als (52) genügen. Hier mufs Beides zugleich erreicht werden, die neue Abscissenaxe mufs die Axe der Curve, der neue Anfangspunkt mufs ein Punkt der Curve und folglich der Scheitelpunkt der Parabel sein. Dasselbe folgt auch einfach daraus, dafs wenn (51) und (52) zugleich Statt finden, die Gleichung (46) in die Form $y_1^2 = p x_1$ gebracht wird, welche Form die Gleichung der Parabel bei rechtwinkligen Coordinaten nur dann hat, wenn die Axe als Abscissenaxe, der Scheitelpunkt als Anfangspunkt genommen wird.

Setzen wir in (52) statt $\mathfrak{a}\mathfrak{n} + \mathfrak{c}\mathfrak{m}$ seinen Werth aus (51) so haben wir

$$(53) \qquad d\mathfrak{n} + e\mathfrak{m} = - U^2 - f$$

und erhalten aus (51) und (53)

$$(54) \qquad \mathfrak{m} = \frac{\mathfrak{a}(U^2 + f) + dU}{\mathfrak{c}d - \mathfrak{a}e}, \qquad (55) \qquad \mathfrak{n} = \frac{\mathfrak{c}(U^2 + f) + eU}{\mathfrak{a}e - \mathfrak{c}d}.$$

§. 18.

Durch diese Bestimmung von $\mathfrak{m}$ und $\mathfrak{n}$ ist nunmehr Gleichung (46) auf die Gestalt gebracht

$$(56) \qquad y_1^2 = \frac{(ae - cd)\sin\xi^3}{c^3 \sin\omega} \cdot x_1.$$

Hienach ist offenbar die Curve eine Parabel, wie schon vermuthet wurde. Der Parameter derselben wird durch den Coefficienten von x_1 in dieser Gleichung bestimmt. Ist dieser Coefficient positiv, so wird die Parabel sich über der positiven Seite der neuen Abscissenaxe, ist er negativ, so wird sie sich über der negativen Seite derselben erstrecken. Dies führt uns zu einer Betrachtung über den Einfluſs des Winkels ξ auf diesen Coefficienten.

Aus der Formel (39) für $tg\,\xi$ siehet man, daſs von den unendlich vielen Werthen des Winkels ξ nur zwei die Grenzen 0° und 360° nicht überschreiten. Nur auf diese beiden Werthe hat man zu sehen. Die Differenz dieser beiden Werthe ist aber = 180°; die Sinus eben dieser Winkel sind folglich gleich groſs, aber in Hinsicht auf Plus und Minus einander entgegengesetzt. Daher erhält durch den einen dieser Winkel der Coefficient von x_1 in (56) einen positiven, durch den andern einen negativen Werth. Am besten wird es sein, dem Winkel ξ denjenigen Werth beizulegen, für welchen jener Coefficient positiv ist. Dann können wir diesen positiven Werth als Parameter mit p bezeichnen, und also setzen

$$(57) \qquad p = \frac{(ae - cd)\sin\xi^3}{c^3 \sin\omega}.$$

So haben wir nun als Gleichung der Curve

$$(58) \qquad y_1^2 = p x_1,$$

und wissen, daſs die Parabel über der positiven Seite der neuen Abscissenaxe liegt.

Aus (57) kann man ξ entfernen. Nach (49) ist

$$\sin\xi^3 = \pm \frac{c^3 \sin\omega^3}{\sqrt{(a + c - b\cos\omega)^3}},$$

wobei über das richtige Vorzeichen nach der Beschaffenheit des Winkels ξ zu entscheiden ist. Durch Substitution in (57) erhält man

$$(59) \qquad p = \pm \frac{(ae - cd)\sin\omega^2}{\sqrt{(a + c - b\cos\omega)^3}}.$$

§. 19.

Der besondere Fall, wo auſser $4ac - b^2 = 0$ auch $2ae - bd = 0$, oder, was dasselbe sagt, $ae - cd = 0$, erfordert eine besondere Betrachtung. Hier wird $p = 0$, und die Gleichungen (51) und (53) werden entweder gleichbedeutend oder einander widersprechend, je nachdem die Gleichung $dU = -a(U^2 + f)$ Statt findet, oder nicht, so dafs daher die Coordinaten des Scheitelpunkts entweder unbestimmte oder unendlich grofse Werthe erhalten. Dies veranlafst uns, zu untersuchen, ob und in wie fern sich alle die von §. 15. an vorgenommenen Vereinfachungen der Gleichung (36) in diesem Falle anwenden lassen, oder nicht.

Die in §. 15. bewirkte Wegschaffung der beiden x_1^2 und $x_1 y_1$ enthaltenden Glieder und die Bestimmung von ξ durch (39) ist auch in unserm Falle, wo $ae - cd = 0$ gänzlich anwendbar, da die Coefficienten jener Glieder nicht d und e enthalten, folglich auch $tg\,\xi$ von d und e unabhängig ist. Mithin bleibt auch hier die Gleichung (40) nebst der Betrachtung vom Schlufs des §. 15. gültig, so dafs auch hier eine durch ξ bestimmte neue Abscissenaxe mit einer geraden Linie parallel sein wird, die auch hier den Namen einer Axe der Curve verdient.

Auch die in §. 16. vorgenommenen Umwandlungen behalten jetzt ihre Kraft. Dabei findet man in (45) für $dR + eP$ den Werth 0, und statt (46) erscheint daher

$$(60)\quad y_1^2 - \frac{2\sin\xi}{c}(an + cm - U)y_1 + \frac{\sin\xi^2}{c^2}\cdot\left[(an + cm)^2 + dn + em + f\right] = 0.$$

Für den Hülfsbuchstaben U können wir im jetzigen Falle einen einfachen Werth entwickeln. Wir legen (43) zu Grunde, multipliciren den Zähler und den Nenner des Bruchs in dieser Gleichung mit a, setzen statt ae den gleichen Werth cd, und dividiren endlich den Zähler wie den Nenner durch $aS + cQ$, so haben wir

$$(61)\qquad U = -\frac{d}{2a}.$$

Jetzt betrachten wir die Vereinfachungen, welche in §. 17. mit der Gleichung (46) an deren Stelle jetzt (60) getreten ist, vorgenommen wurden. Sind die Gleichungen (51) und (53) einander widersprechend, so ist es unmöglich, m und n so zu bestimmen, dafs sie beiden Gleichungen genügen; aber wohl kann man ihnen solche Werthe geben, dafs sie einer dieser beiden Gleichungen Genüge leisten. Am besten ist es, die Gleichung (51) zu wählen. Wird derselben genügt, so fällt in (60) das Glied mit y_1 hinweg. Die schon in §. 17. gemachte Bemerkung, dafs durch (51) für den neuen Anfangspunkt eine gerade Linie, und zwar die Axe der Curve bestimmt wird, bleibt auch hier gültig. Wegen (61) gehet übrigens (51) über in

$$(62) \qquad a n + c m = -\frac{d}{2 a}.$$

Diese Gleichung drückt also, m und n als veränderliche Coordinaten gedacht, die Axe unsrer Curve, für den Fall dafs $ae = cd$, aus. Findet sie Statt, so gehet (60) über in

$$(63) \qquad y_1^2 + \frac{\sin \xi^2}{c^2} \cdot \left(\frac{d^2}{4 a^2} + d n + e m + f\right) = 0.$$

Wegen $ae = cd$ und Gleichung (62) ist aber

$$d n + e m = \frac{a d n + a e m}{a} = \frac{d(a n + c m)}{a} = -\frac{d^2}{2a^2};$$

dies in (63) substituirt giebt

$$y_1^2 - \frac{\sin \xi^2}{c^2} \cdot \left(\frac{d^2}{4 a^2} - f\right) = 0, \quad \text{oder} \quad y_1^2 - \frac{\sin \xi^2 \cdot (d^2 - 4 a f)}{b^2} = 0,$$

oder endlich (64) $\left(y_1 + \frac{\sin \xi}{b} \sqrt{d^2 - 4 a f}\right) \cdot \left(y_1 - \frac{\sin \xi}{b} \sqrt{d^2 - 4 a f}\right) = 0.$

Aus dieser Form der Gleichung erkennt man, dafs dieselbe ein System zweier geraden Linien ausdrückt, die unter sich und mit der neuen durch (62) bestimmten Abscissenaxe parallel sind, ferner dafs diese Abscissenaxe in der Mitte zwischen beiden Geraden, in einer durch $\pm \frac{\sin \xi}{b} \sqrt{d^2 - 4af}$ ausgedrückten Entfernung von denselben, liegt. Diese beiden parallelen Geraden lassen sich in der That gewissermafsen als eine Parabel betrachten, deren Parameter $= 0$ und deren Scheitelpunkt in unendlicher Entfernung liegt.

Wollte man hier, wo $4ac - b^2 = 0$ und auch $2ae - bd = 0$ die Formeln (8) und (9) anwenden, durch welche für jeden Fall, wo nicht $4ac - b^2 = 0$, der Mittelpunkt der Curve bestimmt wurde, so würde man für m wie n den Ausdruck $\frac{0}{0}$ erhalten, die beiden zu Grunde liegenden Gleichungen (5) und (6) würden ganz gleichbedeutend sein, und eine gerade Linie als Ort für das Centrum der Curve bestimmen, die mit der durch (62) gegebenen ganz identisch, also die Axe sein würde. Wirklich kann man auch hier jeden Punkt der Axe als Mittelpunkt der Curve betrachten.

Man kann sich auch unmittelbar aus der Gleichung (1) überzeugen, dafs in unserm Falle, wo $4ac = b^2$ und $2ae = bd$, die Curve ein System zweier parallelen geraden Linien sei. Wegen dieser Gleichungen nämlich kann man in (1), nachdem man sie mit $4a$ multiplicirt hat, statt $4ac$ setzen b^2 und $2bd$ statt $4ae$. Hierdurch gehet sie über in

$$4a^2y^2 + 4abxy + b^2x^2 + 4ady + 2bdx + 4af = 0$$

oder (65) $\left(2ay + bx + d + \sqrt{d^2 - 4af}\right) \cdot \left(2ay + bx + d - \sqrt{d^2 - 4af}\right) = 0.$

Diese Gleichung drückt offenbar ein System zweier einander parallelen Linien aus, zwischen denen eine dritte, deren Gleichung $2ay + bx + d = 0$, in der Mitte liegen mufs. Dies Alles stimmt mit dem oben gefundenen Resultate zusammen.

Die beiden durch (64) oder (65) dargestellten Geraden werden imaginär, wenn $d^2 - 4af < 0$. Sobald $d^2 - 4af = 0$ fallen sie in eine einzige zusammen, die als Gleichung für die anfänglichen Coordinatenaxen $2ay + bx + d = 0$ hat, für die neuen aber $y_1 = 0$, und also die neue Abscissenaxe ist. Dieser Fall ist übrigens einerlei mit dem, wo aufser $4ac = b^2$ und $2ae = bd$ auch die Gleichung $dU = -a(U^2 + f)$ Statt findet, und deshalb die Gleichungen (51) und (53) gleichbedeutend werden. Denn wird in diesem Falle der (51) genügt, so wird auch (53) richtig, und (60) nimmt die Form an $y_1^2 = 0$, wo sie offenbar zwei mit der neuen Abscissenaxe zusammenfallende Gerade anzeigt. Wirklich führt hier die Bedingung $dU = -a(U^2 + f)$ ebenfalls zu der obigen Bedingungsgleichung $d^2 - 4af = 0$, denn setzen wir in $dU = -a(U^2 + f)$ statt U seinen Werth aus (61), so haben wir

$$-\frac{d^2}{2a} = -\frac{d^2}{4a} - af, \quad \text{oder} \quad d^2 = 4a^2f, \quad \text{oder} \quad d^2 = 4af.$$

§. 20.

Noch wollen wir kürzlich einige Modificationen angeben, welche die wichtigsten Formeln für den besondern Fall erleiden, wo der Coordinatenwinkel ω ein rechter ist.

I. Es sei $4ac - b^2$ nicht $= 0$. Hier bleiben die Gleichungen (8) (9) und (11) für m, n und Z unverändert. Aus (15) (23) und (25) erhalten wir aber

$$tg\, 2\xi = \frac{b}{c-a}, \quad M + N = a + c, \quad M - N = \pm\sqrt{(a-c)^2 + b^2}$$

und folglich $\left.\begin{matrix} M \\ N \end{matrix}\right\} = \frac{1}{2} \cdot \left(a + c \pm \sqrt{(a - c)^2 + b^2}\right).$

Als Bedingungen des Kreises erhält man $a = c$, $b = 0$; als einzige Bedingung der gleichseitigen Hyperbel aber $a = -c$.

II. Es sei $4ac - b^2 = 0$. Hier hat man aus (39) und (48)

$$tg\xi = -\frac{c}{a} = -\frac{b}{2a}, \qquad U = -\frac{1}{2} \cdot \frac{ad + ce}{a + c}.$$

Setzt man diesen Werth von U in (54) und (55), so kommt

$$m = \frac{\left(ad^2 - ce^2 - 4(a + c)^2 f\right)a + 2cd(da + ec)}{4(a + c)^2 (ea - dc)}, \quad n = \frac{\left(ce^2 - ad^2 - 4(a + c)^2 f\right)c + 2ae(da + ec)}{4(a + c)^2 (dc - ea)}$$

Statt nach diesen Formeln*) wird man aber wohl meistens besser nach (54) und (55) selbst rechnen. Für den Parameter findet man aus (59)

$$p = \pm \frac{ae - cd}{\sqrt{(a + c)^3}}.$$

---

*) In *Gergonne's Annales de Math. T. II. p.* 335. giebt *Rochat* Formeln, welche mit obigen übereinstimmen, sagt aber nichts über die Abhängigkeit der anzunehmenden Vorzeichen von $\sqrt{a}$ und $\sqrt{c}$ (d. h. a und c) vom Vorzeichen des b, indem er $b = 2\sqrt{ac}$ setzt, ungeachtet doch zuweilen auch $b = -2\sqrt{ac}$ sein kann.

Zu verbessernde Druckfehler:

S. 9. Zeile 4. Statt „$2cm$" setze; $2cm^2$.

S. 22. Zeile 4. Statt „$\frac{M + M}{2}$" s. $\frac{M + N}{2}$.

— Zeile 14. Statt „Gleichung" s. Gleichungen.

S. 26. Zeile 9. Gl. (46) Statt „$\frac{\sin\xi^2}{c}$" s. $\frac{\sin\xi^2}{c^4}$.