Zu der

Abiturienten-Entlassung,

welche

am Freitag, den 26. September, Nachmittags 3 Uhr,

im Saale der

Friedrich-Wilhelms-Schule zu Stettin

Statt haben wird,

ladet

Beschützer, Gönner und Freunde dieser Schulanstalt

ehrerbietigst und ergebenst ein

der

Director Kleinsorge.

Inhalt:
Potentialbetrachtungen mit Berükstichtigung magnetischer und elektrischer Kräfte
vom ordentlichen Lehrer Dr. Most.
Schulnachrichten vom Direktor Kleinsorge.

Stettin 1862.
Druck von R. Graßmann.

Potentialbetrachtungen mit Berücksichtigung magnetischer und elektrischer Kräfte.

Einleitung.

1. Zehn Jahre lang waren die Untersuchungen George Green's [1]), welche zuerst die unter dem Namen des Potentiales jetzt allgemein bekannte Function einführten, unbeachtet geblieben. Erst als der berühmte Gauss [2]) und gleichzeitig mit ihm Chasles [3]), beide unabhängig von einander und von dem armen Fellow of Gonville- and Cains-Colleges, auf den Nutzen einer solchen Function aufmerksam machten, erregte dieselbe in der mathematischen Welt ein solches Interesse, dass Thomson [4]) es gerathen finden konnte, die Arbeiten seines Landsmannes der Vergessenheit zu entreissen, obwohl die darin entwickelten Wahrheiten bereits auf anderen Wegen gefunden waren.

Die Brauchbarkeit des Potentiales beruht, unserer Meinung nach, wesentlich darauf, dass es gestattet, mit der Kraftgrösse in beliebiger Richtung zu operiren; desshalb halten wir nichts für angemessener, als diese Eigenschaft zur Definition des Potentiales zu wählen. Man verstehe unter dem Ausdruck „eine Function F(x, y, z) im Punkte x, y, z nach der Richtung s zu differenziren" den Differentialquotienten

$$\frac{dF}{ds} = \frac{dF}{dx}\frac{dx}{ds} + \frac{dF}{dy}\frac{dy}{ds} + \frac{dF}{dz}\frac{dz}{ds},$$

wobei $\frac{dx}{ds}$, $\frac{dy}{ds}$ und $\frac{dz}{ds}$ die Cosinus der Winkel darstellen, welche die angedeutete Richtung mit den Coordinatenaxen bildet. Dann kann das Potential als diejenige Function definirt werden, welche durch ihren nach einer bestimmten Richtung genommenen Differential-

[1]) An Essay on the Application of mathematical Analysis to the theories of Electricity and Magnetism; by George Green. Nottingham 1828.

[2]) Allgemeine Lehrsätze in Beziehung auf die im verkehrten Verhältnisse des Quadrats der Entfernung wirkenden Anziehungs- und Abstossungskräfte. Resultate aus den Beobachtungen des magnetischen Vereins im Jahre 1839.

[3]) Comptes rendus de l'Acad. des Sc. de Paris, 1839, 1er sem.

[4]) Crelle's Journ. B. 39, 44 u. 47.

quotienten die in jener Richtung liegende Kraftcomponente darstellt. Diese Function der unabhängigen Variablen des jedesmal gewählten Coordinatensystemes möge allgemein mit V bezeichnet werden.

Nachfolgende Arbeit soll nun weniger dazu dienen, die schon bekannten interessanten Eigenschaften der Function V zusammenzustellen, was nach der Arbeit von Clausius [1]) eine unnöthige Mühe wäre, als vielmehr etwaige Lücken, welche sich bei den Potentialbetrachtungen noch zeigen, auszufüllen.

Aus der gegebenen Definition der Function V folgt unmittelbar, dass die drei rechtneigigen Componenten der Kraft P gleichgesetzt werden müssen:

$$X = \frac{dV}{dx} \qquad Y = \frac{dV}{dy} \qquad Z = \frac{dV}{dz},$$

die Kraft P selbst aber gleich ist:

$$P = \frac{dV}{dp}.$$

Senkrecht zur Kraft P ist die Componente Null; es ergiebt sich für diese Richtungen also die Gleichung:

$$\frac{dV}{dx}\frac{dx}{ds} + \frac{dV}{dy}\frac{dy}{ds} + \frac{dV}{dz}\frac{dz}{ds} = 0$$

oder

$$X\,dx + Y\,dy + Z\,dz = 0.$$

Diess ist somit die Differentialgleichung derjenigen Flächen, zu denen P senkrecht steht, d. h. der Niveauflächen.

Es möchte an der Stelle sein, zu betonen, dass die Function, welche die Niveaufläche darstellt, durchaus nicht mit der Potentialfunction identificirt werden darf, denn zunächst mag berücksichtigt werden, dass die Gleichung

$$X\,dx + Y\,dy + Z\,dz = 0$$

einen integrirenden Factor nöthig haben könnte; in diesem Falle würde also die Function

$$V = \text{const.},$$

welche die Niveaufläche darstellt, in ihrem Differentialquotienten nicht die Kraftcomponente selbst, sondern dieselbe, um einen Factor vermehrt oder vermindert, darstellen. Selbst aber, wenn die oben aufgeführte Differentialgleichung ohne integrirenden Factor integrirt würde, so wird die Gleichung der Niveaufläche meist eine einfachere Gestalt gewinnen, wenn man statt der Gleichung

$$V = \text{const.}$$

die daraus folgende

$$f(V) = \text{const.}$$

setzt, so dass man behaupten kann, die Function V, welche die Niveaufläche darstellt,

[1]) Die Potentialfunction und das Potential von Clausius, 1859.

und die Potentialfunction sind nicht zu identificiren, sondern stehen nur in einer functionalen Beziehung, also

$$\mathbf{V} = f(V).$$

Da die Function f jede beliebige sein kann, so ist $\mathbf{V}$ immer durch V gegeben; man wird diejenige Function f wählen, welche der Function $\mathbf{V}$ die einfachste Gestalt giebt; ist z. B. $V = \frac{1}{r}$, so liegt auf der Hand, dass man bei der Niveaufläche nicht schreiben wird

$$\frac{1}{r^n} = \text{const.}, \qquad \text{sondern} \qquad r = \text{const.}$$

Nicht so unmittelbar ergiebt sich die Potentialfunction aus der Niveaufläche, denn V kann nicht jede beliebige Form

$$V = F(\mathbf{V})$$

haben, sondern nur die eine, bei welcher der Differentialquotient die Kraftcomponente selbst darstellt. Wie jene Aufgabe gelöst werden kann, haben wir in den Abschnitten 29—32 gezeigt, vermöge einer eigenthümlichen Form, welche wir im Abschnitt 6 der Fundamentaldifferentialgleichung der Potentialfunction gegeben haben. Nach derselben Methode leiten wir gelegentlich die sonst bekannten Formen der besagten Gleichung allgemein, unserer Meinung nach, auf die kürzeste nur mögliche Art ab.

Ausserdem aber kam es darauf an, den Bereich jener Differentialgleichung zu erweitern und nicht nur auf die nach dem Newtonschen Gesetze wirkenden Kräfte zu beschränken. Dass die Gleichung bei der Einwirkung eines constanten electrodynamischen Stromes auf ein magnetisches Molecül oder auf ein electrodynamisches Stromelement ihre Gültigkeit behält, möchte bekannt sein. Wie weit sie aber noch bei der Einwirkung eines variablen Stromes auf ein electrisches Molecül zu benutzen ist, wird noch nicht untersucht sein.

2. Die übrigen Eigenschaften der Function V, aus denen Green und Gauss ihre interessanten Resultate ableiten, lassen sich wesentlich dahin zusammenfassen, dass, wenn man mit ds ein Linienelement, mit $d\omega$ ein Flächen- und mit dt ein Raumelement bezeichnet, Gleichungen folgender Art aufgestellt werden

$$\int f(V)\, ds = \varphi(V_2) - \varphi(V_1)$$
$$\text{und} \iiint F(V)\, dt = \iint \psi(V)\, d\omega,$$

wobei f, F, φ und ψ bestimmte Functionen von V darstellen, welche meist Differentialquotienten enthalten; das Integral der ersten Gleichung geht längs einer Curve, auf deren Endpunkte sich die Werthe V_1 und V_2 beziehen; die rechte Seite der zweiten Gleichung erstreckt sich über die den Raum des ersten Integrales umschliessende Oberfläche.

Zunächst musste gezeigt werden, dass die beiden Gleichungen, die von Gauss[1])

$$\iiint P^2 dt = -\iint V \frac{dV}{dn}\, d\omega$$

[1]) Resultate aus den Beobachtungen des magnetischen Vereins 1839, p. 34.

und die von Green[1])

$$\iiint U\left(\frac{d^2V}{dx^2}+\frac{d^2V}{dy^2}+\frac{d^2V}{dz^2}\right)dt+\iint U\frac{dV}{dn}\,d\omega-4\pi U_i$$
$$=\iiint V\left(\frac{d^2U}{dx^2}+\frac{d^2U}{dy^2}+\frac{d^2U}{dz^2}\right)dt+\iint V\frac{dU}{dn}\,d\omega-4\pi V_i,$$

aus denen eigentlich alle weiteren Resultate der oben angeführten Arbeiten gefolgert werden, sich nicht nur durch dieselbe allgemeine Form, wie sie so eben aufgestellt worden ist, charakterisiren lassen, sondern vollkommen zusammenfallen, wenn nur der Gleichung von Gauss eine etwas allgemeinere Form gegeben wird; dies geschieht im Abschnitt 15.

Ferner wird es jedem Leser unmittelbar in den Sinn kommen, dass zwischen den beiden aufgeführten allgemeinen Gleichungen eine dritte von der Form

$$\iint f(V)\,d\omega=\int\chi(V)\,ds$$

fehlt, wo sich das zweite Integral auf die die Fläche des ersten Integrales begrenzende Curve bezieht. Diese Ergänzung haben wir im Abschnitte 14 hinzugefügt.

3. In Obigem möchten die Untersuchungen des ersten Theiles charakterisirt sein; der zweite und dritte Theil ist leicht zu übersehen: der zweite will zeigen, dass es möglich ist, sich durch die Niveauflächen und ihre rechtneigigen Trajectorien vollständig über die Stärke und Schwäche der wirkenden Kraft an den einzelnen Stellen im Raume zu orientiren. Wir betrachten also allgemein mathematisch die Aufgabe, welche der grosse Experimentator Faraday[2]) auf empirischem Wege mit Einführung seiner magnetischen Kraftlinien zu lösen suchte.

Nachdem wir im zweiten Theile die Nutzbarkeit oben genannter Flächen und Linien gezeigt haben, leiten wir im dritten Theile die Gestalt derselben für einfache anziehende oder abstossende Massen ab.

---

[1]) Crelle's Journal Bd. 44 p. 363.

[2]) Philosoph. transact. 1852. Im Auszuge: Pogg. Ann. Ergänzungsb. III. Phil. Magaz. (4.) III.

I. Das Potential und die Kraftgrösse.

1. Zunächst sollen folgende, in den späteren Untersuchungen oft benutzte Theoreme bewiesen werden:

Theor. I. Wenn man den Abstand zweier Punkte mit r bezeichnet und die Richtung, nach welcher das Differential genommen werden soll, durch n darstellt, so ist

$$\frac{\cos \overline{rn}}{r^2} = \frac{d \cdot \frac{1}{r}}{dn},$$

wo $\overline{rn}$ den Winkel bedeutet, welchen r mit der positiven Richtung von n bildet.

Beweis.
$$\frac{d \cdot \frac{1}{r}}{dn} = -\frac{1}{r^2}\frac{dr}{dn}$$
$$= \frac{\cos \overline{rn}}{r^2}.$$

Theor. II. Bezeichnet $d\omega$ ein Flächenelement und $d\varsigma$ die dazu gehörige Kegelöffnung eines Kegels, dessen Spitze um r von $d\omega$ entfernt ist, so ist

$$d\varsigma = -\frac{d \cdot \frac{1}{r}}{dn} d\omega,$$

wo das Differential in der Richtung der Normale genommen ist, deren positive Richtung aber diejenige ist, welche einen stumpfen Winkel mit r bildet.

Unter Kegelöffnung verstehen wir, wie gebräuchlich, dasjenige Kugeloberflächenstück, welches von dem Kegel auf der mit dem Radius 1 um die Kegelspitze beschriebenen Kugeloberfläche ausgeschnitten wird.

Beweis. Nach Theor. I. ist

$$-\frac{d \cdot \frac{1}{r}}{dn} d\omega = -\frac{d\omega}{r^2} \cos \overline{rn}$$
$$= d\varsigma$$

da $\overline{rn}$ ein stumpfer Winkel ist.

Theor. III. Wenn man das Flächenelement einer beliebigen geschlossenen Oberfläche mit $d\omega$, das Potential in Bezug auf eine nach dem Newton'schen Gesetze wirkende Masse mit V und die Kraftgrösse mit P bezeichnet, so ist

$$\int P \cos \overline{np}\, d\omega = \int \frac{dV}{dn}\, d\omega = -4\pi M_i,$$

wo das Differential $\frac{dV}{dn}$ in der Richtung der nach aussen gerichteten Normale genommen ist, das Integral sich über die ganze Oberfläche erstreckt und M_i die innerhalb der geschlossenen Oberfläche liegende Masse bezeichnet.

Beweis. Der Beweis ist ausführlich von Gauss geliefert worden; vermöge des vorigen Theorema ergiebt er sich leicht, wenn man nach einander jedes Massentheilchen zur Kegelspitze wählt.

Cor. Liegt die anziehende Masse vollkommen ausserhalb der geschlossenen Oberfläche, so geht obige Gleichung über in

$$\int \frac{dV}{dn}\, d\omega = 0.$$

5. Aus dem dritten Theorema lassen sich auf einfache Weise mit vollständiger Allgemeingültigkeit für homogene und heterogene Massen die verschiedenen Formen der bekannten Differentialgleichung des Potentials ableiten. Die erste Form ist neu und von grossem Nutzen, weil sie dazu dient, aus der Gestalt der Niveauflächen den Ausdruck des Potentiales abzuleiten, wie wir in den Abschnitten 29—32 zeigen werden.

Man denke sich die verschiedenen Niveauflächen im Raume beschrieben, so wird es passend sein, alle diejenigen Punkte, welche auf einer rechtneigigen Trajectorie liegen, als correspondirende Punkte der verschiedenen Niveauflächen zu bezeichnen; correspondirende Linien zweier Niveauflächen sind dann solche, welche aus correspondirenden Punkten gebildet sind und correspondirende Flächenstücke sind solche, welche von correspondirenden Linien umgrenzt sind. Will man also zu einem Flächenstück ω, welches auf der Niveaufläche V liegt, das correspondirende Stück der Fläche V_1 erhalten, so lege man durch alle Punkte der das Stück ω umgrenzenden Curve rechtneigige Trajectorien; dieselben werden auf der Fläche V_1 das correspondirende Stück ω_1 ausschneiden. Mit diesem, man könnte sagen, neuen rechtneigigen Coordinatensystem liesse sich nun das Raumelement begrenzen durch zwei unendlich kleine correspondirende Flächenstücke, welche zweien unendlich nah liegenden Niveauflächen angehören, und durch die von den Trajectorien gebildete Röhre, welche die beiden Umgrenzungslinien verbindet. Bezeichnet man den Abstand der beiden Niveauflächen an einer Stelle mit δp, so wird das Raumelement durch $\omega\, \delta p$ ausgedrückt.

§. 1.

6. Bezeichnet man, wie in dem Vorigen, mit p die Richtung der Trajectorien, oder, was dasselbe ist, die Richtung der Kraft P, so lässt sich die Differentialgleichung aufstellen

$$\frac{d^2V}{dp^2} + \frac{\frac{d\omega}{dp}}{\omega} \frac{dV}{dp} = -4\pi\varrho,$$

wo ω ein unendlich kleines Stück der Niveaufläche ist, $\frac{d\omega}{dp}$ sich auf die zu ω gehörige Trajectorienröhre bezieht und ϱ die Dichtigkeit an der Stelle des angezogenen Punktes darstellt; ist derselbe ein äusserer, so wird die rechte Seite der Null gleich.

Beweis. Man denke sich den angezogenen Punkt in der eben bezeichneten Weise durch ein Raumelement umschlossen, und wende Theor. III auf diese geschlossene Fläche an, so ist auf der von den Trajectorien gebildeten Röhre $\frac{dV}{dn}$ der Null gleich, da daselbst $\overline{np} = \frac{\pi}{2}$ ist, und auf den correspondirenden Flächenstücken geht $\frac{dV}{dn}$ in $\frac{dV}{dp}$ über; da aber $\frac{dV}{dn}$ immer auf die nach aussen gerichtete Normale zu beziehen ist, so ist $\frac{dV}{dp}$ in Bezug auf die beiden Flächen mit entgegengesetztem Zeichen zu nehmen; es lassen sich daher die auf die beiden correspondirenden Flächenstücke bezüglichen Ausdrücke durch ein Differential zusammen fassen, nämlich

$$\frac{d\cdot\left(\frac{dV}{dp}\,\omega\right)}{dp}\,dp = -4\pi M_i,$$

wo M_i die von dem betrachteten Raumelement umschlossene Masse bedeutet; wenn man auf beiden Seiten mit dem Raumelement $\omega\,dp$ dividirt, so geht die Gleichung über in

$$\begin{aligned}\frac{d^2V}{dp^2} + \frac{\frac{d\omega}{dp}}{\omega}\,\frac{dV}{dp} &= -4\pi\,\frac{M_i}{\omega\,dp}\\ &= -4\pi\varrho.\end{aligned}$$

Bei einem äusseren Punkt ist die rechte Seite von vorne herein der Null gleich.

7. In derselben Weise erhält man die gebräuchlichste Form, wenn man das Raumelement durch die gewöhnlichen rechtneigigen Coordinaten ausdrückt; indem man berücksichtigt, dass sich die Ausdrücke für die gegenüberliegenden Flächenstücke als Differentiale zusammenfassen lassen, erhält man

$$\frac{d\cdot\left(\frac{dV}{dx}\,dy\,dz\right)}{dx}\,dx + \frac{d\cdot\left(\frac{dV}{dy}\,dz\,dx\right)}{dy}\,dy + \frac{d\cdot\left(\frac{dV}{dz}\,dx\,dy\right)}{dz}\,dz = -4\pi M_i,$$

da die Flächenstücke $dy\,dz$, $dz\,dx$ und $dx\,dy$ constant sind, so ergiebt sich

$$\frac{d^2V}{dx^2} + \frac{d^2V}{dy^2} + \frac{d^2V}{dz^2} = -4\pi\varrho,$$

wenn man auf beiden Seiten mit $dx\,dy\,dz$ dividirt.

8. Führt man die gewöhnlichen Kugelcoordinaten ein und bezeichnet den Abstand von dem Axendurchschnitt mit r, den Winkel, welchen diese Strecke mit der Z Axe bildet, durch ϑ und den Winkel, welchen die Projection von r auf der XY Ebene mit der X Axe bildet, durch φ, so giebt r die Richtung an, welche zu den Flächen $r^2 \sin\vartheta\, d\vartheta\, d\varphi$ normal steht, $r \sin\vartheta\,\varphi$ die Richtung, welche zu den beiden gleichen Flächen $r\,dr\,d\vartheta$ normal ist, und endlich $r\vartheta$ die Richtung, welche zu den Flächen $r \sin\vartheta\,d\varphi\,dr$ lothrecht steht. Fasst man die entsprechenden Ausdrücke gebührendermassen als Differentiale zusammen, so erhält man:

$$\frac{d\cdot\left(\frac{dV}{dr} r^2 \sin\vartheta\, d\vartheta\, d\varphi\right)}{dr} dr + \frac{d\cdot\left(\frac{d\varphi}{d\cdot(r\varphi \sin\vartheta)} r\, dr\, d\vartheta\right)}{d\varphi} d\varphi + \frac{d\cdot\left(\frac{dV}{d\cdot r\vartheta} r \sin\vartheta\, d\varphi\, dr\right)}{d\vartheta} d\vartheta = -4\pi M_i.$$

Berücksichtigt man nun aus der Anschauung, welche Grössen in den einzelnen Differentialen constant bleiben, und dividirt man beide Seiten durch das Raumelement $r^2 \sin\vartheta\, d\vartheta\, d\varphi\, dr$, so geht obige Gleichung über in:

$$\frac{1}{r}\,\frac{d\cdot\left(r\frac{dV}{dr}\right)}{dr} + \frac{1}{r^2 \sin\vartheta^2}\,\frac{d^2V}{d\varphi^2} + \frac{1}{r^2 \sin\vartheta}\,\frac{d\cdot\left(\frac{dV}{d\vartheta}\sin\vartheta\right)}{d\vartheta} = -4\pi\varrho.$$

9. Nicht weniger einfach ist die Ableitung, wenn die anziehende Masse nicht im Raume, sondern auf einer Oberfläche, wie z. B. bei der Electricität, vertheilt ist. Liegt der angezogene Punkt nicht in dieser Oberfläche, so gilt, wie von selbst einleuchtet, die allgemeine Gleichung

$$\frac{d^2V}{dx^2} + \frac{d^2V}{dy^2} + \frac{d^2V}{dz^2} = 0.$$

Liegt der angezogene Punkt aber in der Oberfläche selbst, so umschliesse man denselben mit einem Raumelement, welches zwei der gegebenen Oberfläche parallele Seitenflächen $d\omega$ und $d\omega_1$ enthält, die eine oberhalb der gegebenen Fläche, die andere unterhalb derselben; der Zusammenhang dieser Flächenstücke stehe zu der gegebenen Fläche normal; die auf $d\omega$ und $d\omega_1$ bezüglichen Differentialquotienten mögen durch $\frac{dV}{dn}$ und $\frac{dV}{dn_1}$ unterschieden werden; lässt man nun das Raumelement sich der auf der Oberfläche gedachten angezogenen Masse nähern, so werden die verbindenden, zu der gegebenen Oberfläche normal stehenden Seitenwände verschwinden, $d\omega$ und $d\omega_1$ werden einander gleich und es fällt die bei $d\omega$ nach aussen, in Bezug auf das Raumelement, gehende Normale mit der in Bezug auf die gegebene Oberfläche nach aussen gehenden Normale zusammen, so dass $\frac{dV}{dn}$ auf die gegebene Oberfläche bezogen werden kann; dagegen ist dann die bei $d\omega_1$ in Bezug auf das Raumelement nach aussen gehende Normale der Oberflächen-Normale entgegengesetzt; soll sich also das Differential auf diese beziehen, so muss dasselbe das negative Zeichen erhalten; es ergiebt sich also die Gleichung

$$\frac{dV}{dn}\,d\omega - \frac{dV}{dn_1}\,d\omega_1 = -4\pi M_i,$$

wo $\frac{dV}{dn}$ sich auf die obere Seite, $\frac{dV}{dn_1}$ sich aber auf die untere Seite der gegebenen Oberfläche bezieht; gewöhnlich werden diese beiden Ausdrücke durch $\frac{dV}{dn=+0}$ und $\frac{dV}{dn=-0}$

unterschieden; führt man diese Bezeichnungen ein und berücksichtigt man, dass $d\omega$ und $d\omega_1$ an der Grenze gleich werden, so geht die obige Gleichung über in:

$$\frac{dV}{dn}_{=+0} - \frac{dV}{dn}_{=-0} = -4\pi\varrho.$$

10. Was die Einwirkung eines geschlossenen elektrischen Stromes auf ein magnetisches Molecül anbetrifft, so können, wie Ampère zuerst gezeigt hat und wie sich am einfachsten aus Theor. II demonstriren lässt, für den geschlossenen Strom magnetische Massen substituirt werden, welche auf einer beliebigen, durch die geschlossene Stromcurve begrenzten Fläche gleichmässig ausgebreitet sind und zwar so, dass auf der einen Seite das Nordfluidum, auf der anderen Seite das Südfluidum liegt. Da man nun die besagte beliebige Fläche immer so legen kann, dass der angezogene Punkt ausserhalb derselben liegt, so wird immer die Gleichung

$$\frac{d^2V}{dx^2} + \frac{d^2V}{dy^2} + \frac{d^2V}{dz^2} = 0$$

gelten. Zu gleicher Zeit mag bemerkt werden, dass nach dem Obigen auch das von Gauss aufgestellte Theorem III hier seine Gültigkeit behalten muss, d. h. also, wenn auf eine geschlossene, gleichmässig mit einer magnetischen Masse bedeckte Oberfläche ein geschlossener Strom einwirkt, so ist, wenn der Strom vollkommen ausserhalb der geschlossenen Fläche liegt, das Integral

$$\int P \cos \overline{np}\, d\omega = 0,$$

wenn dasselbe über die ganze Oberfläche ausgedehnt wird.

11. Bei der Wirkung eines geschlossenen elektrischen Stromes auf ein elektrisches Stromelement wollen wir mit der Untersuchung des von Gauss aufgestellten Theorems beginnen und zwar gleich in der allgemeineren Form, dass wir ein Stück der geschlossenen Sturmcurve s innerhalb der geschlossenen Oberfläche liegend denken; letztere muss nun gleichmässig mit parallelen Stromelementen von der Länge 1 besetzt vorgestellt werden; die auf der ganzen Oberfläche constante Richtung der Stromelemente werde durch s′ dargestellt. Da man sich nach den Untersuchungen Neumann's[1]) bei einem geschlossenen Strom auf das erste Stück der bekannten Ampère'schen Formel beschränken kann, so wird die von ds auf ein Element $ds' = 1$ in der Richtung von r ausgeübte Kraft dargestellt durch $\frac{i\,ds}{r^2} \cos \overline{ss'}$, wo i die Stromstärke des geschlossenen Stromes darstellt, die Stärke der auf der Oberfläche befestigten Stromtheilchen aber gleich 1 gesetzt ist. Multiplicirt man den letzten Ausdruck mit $\cos \overline{nr}\, d\omega$ und integrirt über die ganze geschlossene Fläche, so sieht man nach Theor. II leicht, dass das Integral Null ist, wenn ds ausserhalb der geschlossenen Oberfläche liegt, dagegen -4π beträgt, wenn ds innerhalb derselben liegt. Somit muss das Integral des Theorema von Gauss übergehen in:

$$\int P \cos \overline{np}\, d\omega = -4\pi i \int \cos \overline{ss'}\, ds,$$

[1]) Die mathematischen Gesetze der inducirten elektrischen Ströme von F. E. Neumann p. 66

wo sich das zweite Integral auf das innerhalb der geschlossenen Oberfläche liegende Curvenstück bezieht; dasselbe stellt die Projection dieses Curvenstückes auf die Richtung s' dar.

Liegt der Strom ganz ausserhalb der geschlossenen Fläche, so ist die rechte Seite Null und wie sich dann aus dieser Gleichung die bekannte Differentialgleichung ergiebt, ist schon oft gezeigt worden.

12. Die Wirkung eines constanten Stromes auf ein elektrisches Molecül ist, wie sich aus dem Weber'schen Gesetz zeigen lässt, der Null gleich; ein Resultat, welches von vorne herein vermuthet werden konnte, da ein ruhender constanter elektrischer Strom keine inductorische Wirkung hat. Wir wollen deshalb die Wirkung eines variablen ebenen Stromstückes auf ein elektrisches Molecül untersuchen und zeigen, dass in der Ebene des Stromstückes die Differentialgleichung $\frac{d^2V}{dx^2} + \frac{d^2V}{dy^2} = 0$ gilt. Wenn die Stromintensität um die Grösse di variirt, so lässt sich aus dem Weber'schen Gesetze, wie ausführlich im Abschnitte 28 gezeigt wird, die Kraft, welche von einem Stromelement ds auf ein um r entferntes elektrisches Molecül in der Richtung der verbindenden Linie r ausgeübt wird, gleich $\frac{a}{4}\frac{ds}{r}\frac{di}{dt}\cos\overline{sr}$ ableiten.

Um nun zunächst einen dem Gaussischen analogen Satz zu entwickeln, denke man sich in der Ebene des Stromstückes s einen geschlossenen Leiter s', so lässt sich zeigen, dass für denselben

$$\int P\cos\overline{np}\,ds' = 0$$

wenn n hier die nach aussen gerichtete Normale der geschlossenen Curve s' bedeutet. Bezeichnet man nämlich die Winkelöffnung eines von ds nach ds' gehenden Winkels mit $d\varsigma$, so ist $d\varsigma = -\frac{\cos\overline{rn}\,ds}{r}$. Summirt man nun für dasselbe ds und für denselben Winkel $\overline{sr}$ die einzelnen $d\varsigma$ für die verschiedenen Durchgangsstellen der Curve s', so heben sich die einzelnen $d\varsigma$ auf, wenn ds ausserhalb der geschlossenen Curve s' liegt; liegt aber ds innerhalb, so hat man für den ganzen Umkreis das Integral $\int\cos\overline{sr}\,d\varsigma$ zu nehmen; da dasselbe nun der 2 gleich ist, so muss sich für jedes innerhalb der geschlossenen Curve s' liegendes ds aus der Integration über s' der Werth $-\frac{a}{2}\frac{di}{dt}ds$ ergeben, somit ist

$$\int P\cos\overline{np}\,ds = -\frac{a}{2}\frac{di}{dt}s_i,$$

wo s_i das innerhalb der geschlossenen Curve s' liegende Stück von s bezeichnet. Liegt die Curve s vollkommen ausserhalb, so ist die rechte Seite der Null gleich und dass dann aus der so gewonnenen Gleichung die Differentialgleichung $\frac{d^2V}{dx^2} + \frac{d^2V}{dy^2} = 0$ abgeleitet werden kann, wird nach den obigen Betrachtungen leicht ersichtlich sein.

§. 2.

13. Wenn zwei Punkte durch eine Curve s verbunden sind, so ist

$$\int P \cos\overline{sp}\, ds = V_1 - V_0,$$

wo sich das Integral von dem einen Punkt zu dem andern erstreckt und V_1, V_0 die den Endpunkten zugehörigen Potentiale darstellen.

Beweis. $P \cos\overline{sp}$ ist die Kraftcomponente in der Richtung von s, kann also durch $\frac{dV}{ds}$ dargestellt werden, woraus sich obige Gleichung ergiebt.

Coroll. Ist die Curve geschlossen, so wird die rechte Seite der Null gleich, man erhält also in diesem Fall $\int P \cos\overline{sp}\, ds = 0$, eine Gleichung, welche vollkommen der des dritten Theorems entspricht, wenn dieselbe in der Form $\int P \cos\overline{np}\, d\omega = 0$ geschrieben wird.

Zu bemerken ist noch, dass die in diesem Abschnitte aufgestellten Gleichungen nutzlos werden, wenn die Curve s ganz auf einer Niveaufläche liegt, denn dann wird die linke Seite in allen Elementen der Null gleich, weil dann P zu ds überall senkrecht steht, folglich $\cos\overline{sp}$ verschwindet.

14. Verbindet man die Theile einer gegebenen geschlossenen Curve durch eine beliebige Oberfläche, so dass die Curve die Grenzcurve der Fläche wird, dann ist

$$\iint P \cos\overline{pn}\, d\omega = \int (A\,dx + B\,dy + C\,dz),$$

wo sich das erste Integral über die verbindende Oberfläche, das zweite über die begrenzende Curve erstreckt, A, B und C aber bestimmte Functionen von x, y, z sind.

Man wird erkennen, dass dieses Problem das Theorem III $\iint P \cos\overline{pn}\, d\omega = 0$ als besonderen Fall unter sich enthält, da bei letzterem die begrenzende Curve in einen Punkt übergegangen ist; beide verhalten sich zu einander wie das im vorigen Abschnitte aufgestellte Problem zu dem ihm zugeordneten Corollarium. Andererseits fällt in die Augen, dass die Probleme der Abschnitte 13 und 14 vollkommen analog gebildet sind, denn, wie das eine ein einfaches Integral ausführt, so verwandelt das andere ein zweifaches Integral in ein einfaches.

Zunächst soll nachgewiesen werden, dass die linke Seite in der oben aufgestellten Gleichung constant bleibt, wie auch die verbindende Oberfläche beschaffen sein mag; freilich ist die Voraussetzung dabei, dass wenn man sich die Oberfläche aus einer Lage in eine andere übergehen denkt, dieselbe nicht etwa durch ein Massentheilchen hindurch gehe, denn bei einem solchen Durchgange würde der Werth des Integrales um die Grösse $4\pi m$ wachsen, wenn m das besagte Massentheilchen andeutet; um der Anschauung zu Hülfe zu kommen, denke man sich etwa die Curse s mit einer elastischen Blase überspannt, so bleibt der Werth des Integrales $\iint P \cos\overline{np}\, d\omega$ constant, welche Gestalt man der Blase auch giebt; ein Durchgang durch die anziehende Masse verbietet sich in dem Bilde von selbst. Man bezeichne nun die eine Lage der Oberfläche mit Ω, die andere mit Ω_1, dann ist, wenn wir zur Unterscheidung die Accente durchführen, zu beweisen, dass

$$\int P \cos \overline{np}\, d\omega = \int P_1 \cos \overline{n_1 p_1}\, d\omega_1$$

ist. Die beiden Flächen Ω und Ω_1 bilden eine geschlossene Oberfläche, also muss nach dem Corollarium zu Theor. III, wenn man bei Ω die in Bezug auf den umschlossenen Raum nach aussen gerichteten Normalen, bei Ω_1 aber die nach innen gerichteten Normalen nimmt,

$$\int P \cos \overline{np}\, d\omega - \int P_1 \cos \overline{n_1 p_1}\, d\omega_1 = 0$$

sein. Man sieht also, um im Bilde zu bleiben, wenn die eine Seite der Blase roth, die andere grün wäre, und man das eine Mal die Normalen auf der rothen Seite genommen hat, so muss man auch immer auf dieser Seite bleiben, wie man die Blase auch zerrt oder durchschiebt; nimmt man die Normalen auf der grünen Seite, so wechselt der Ausdruck das Zeichen.

Aus Obigem geht nun zur Genüge hervor, dass der Werth des Flächenintegrales allein von der Curve abhängig ist; es fragt sich, wie sich diese Abhängigkeit ausdrücken lasse. Man denke sich die geschlossene Curve s in der Richtung u parallel mit sich bis ins Unendliche fortbewegt, so soll für die so erzeugte Fläche der Ausdruck $\int P \cos \overline{np}\, d\omega$ integrirt werden. Man bezeichne die Projectionen von δu mit δx, δy, δz, so sind die Cosinus der Richtung n, d. h. einer zu δu und ds senkrechten Richtung, folgende:

$$\frac{1}{ds \cdot \delta u \cdot \sin \overline{su}} [dy\, \delta z - \delta y\, dz]$$

$$\frac{1}{ds \cdot \delta u \cdot \sin \overline{su}} [dz\, \delta x - \delta z\, dx]$$

$$\frac{1}{ds \cdot \delta u \cdot \sin \overline{su}} [dx\, \delta y - \delta x\, dy]$$

die Cosinus der Richtung p, d. h. derjenigen Richtung, welche die Kraft P hat, sind aber:

$$\frac{X}{P}, \quad \frac{Y}{P} \quad \text{und} \quad \frac{Z}{P}.$$

Berücksichtigt man nun, dass $d\omega = \delta u \cdot ds \cdot \sin \overline{su}$ ist, so erhält man

$$\iint P \cos \overline{np}\, d\omega = \iint X [dy\, \delta z - \delta y\, dz] + Y [dz\, \delta x - \delta z\, dx] + Z [dx\, \delta y - \delta x\, dy].$$

Ordnet man die Stücke unter dem Integral nach dx, dy, dz, so erhält man

$$\iint P \cos \overline{np}\, d\omega = \int A\, dx + B\, dy + C\, dz$$

wenn A, B und C folgende Functionen bedeuten

$$A = \int_{\infty}^{u_0} (\mu Z - \nu Y)\, \delta u$$

$$B = \int_{\infty}^{u_0} (\nu X - \lambda Z)\, \delta u$$

$$C = \int_{\infty}^{u_0} (\lambda Y - \mu X)\, \delta u$$

wo λ, μ und ν die Cosinus bezeichnen, welche die Richtung u mit den Coordinatenaxen bildet, u_0 sich aber auf die Stelle des zugehörigen ds bezieht.

Einfacher wird der Ausdruck, wenn man die Richtung u mit einer Axe, etwa mit der Z Axe zusammen fallen lässt, denn dann sind λ und μ Null und für $\nu\,\delta u$ kann δz gesetzt werden; dadurch ergiebt sich

$$\iint P \cos \overline{np}\, d\omega = \int [dy \int_{\infty}^{x,y,z} X\, \delta z - dx \int_{\infty}^{x,y,z} Y\, \delta z].$$

Durch diesen Ausdruck werden neue Functionen eingeführt; dieselben, welche vollständig sechs an der Zahl wären,

$$\int X\, \delta y, \qquad \int Y\, \delta z, \qquad \int Z\, \delta x,$$
$$\int X\, \delta z, \qquad \int Y\, \delta x, \qquad \int Z\, \delta y,$$

mit den Grenzen ∞ und x, y, z, näher zu untersuchen, liegt ausser dem Bereich dieser Arbeit, indess sind wir überzeugt, dass sie eine ebenso wichtige Rolle wie die Potentialfunction selbst zu spielen fähig sind; bei elektrodynamischen Rechnungen stösst man wiederholt auf dieselben. Sie werden vervollständigt durch die 3 Functionen

$$\int_{\infty}^{x,y,z} X\, \delta x, \qquad \int_{\infty}^{x,y,z} Y\, \delta y \qquad \text{und} \qquad \int_{\infty}^{x,y,z} Z\, \delta z,$$

doch man erkennt, dass diese drei Functionen unter sich gleich sind und alle drei die Potentialfunction V ausdrücken, denn es ist z. B.

$$\begin{aligned}\int_{\infty}^{x,y,z} X\, \delta x &= \int \frac{dV}{\delta x}\, \delta x \\ &= [V]_{\infty}^{x,y,z} \\ &= V(x, y, z),\end{aligned}$$

da das Potential im Unendlichen der Null gleich ist.

Zur Charakteristik obiger Functionen lassen sich Differentialgleichungen aufstellen wie bei der Potentialfunction; so ergiebt sich z. B. leicht die Gleichung

$$\frac{d \cdot \int_{\infty}^{x,y,z} X\, \delta z}{dx} + \frac{d \cdot \int_{\infty}^{x,y,z} Y\, \delta z}{dy} = -Z$$

und die derselben entsprechenden Gleichungen.

15. Wenn zwei Massensysteme M und N gegeben sind, deren Potentiale respective mit V und W, deren Kraftgrösse mit P und Q, also die Richtung letzterer mit p und q dargestellt werden, so ist, wenn ein beliebig geschlossener Raum gegeben ist, welcher von den Massen M und N die Stücke M_i und N_i einschliesst, die Stücke M_a und N_a ausschliesst,

$$\begin{aligned}-\iiint P \cdot Q \cdot \cos \overline{pq}\, dt &= \iint W \frac{dV}{d\nu}\, d\omega + 4\pi \int W_i\, m_i \\ \text{oder } &= \iint V \frac{dW}{d\nu}\, d\omega + 4\pi \int V_i\, n_i,\end{aligned}$$

wo sich das Integral von dt über den ganzen geschlossenen Raum, das von $d\omega$ über die umschliessende Oberfläche, die von m_i und n_i respective über die Massenstücke M_i und N_i erstrecken, indem W_i und V_i zwar sich immer nur auf die Stelle von m_i und n_i beziehen, aber doch die Potentiale der ganzen Massen N und M sind; die Richtung der Normale ist hier durch ν bezeichnet worden. Dass dieser Satz dem vorigen analog ist, fällt in die Augen, denn er führt ein Raumintegral auf ein Oberflächenintegral zurück, wie jener ein Oberflächenintegral in ein Linienintegral umwandelte.

Beweis. Dem Theorem kann leicht die eben angeführte Allgemeinheit ertheilt werden, wenn dasselbe vorher für zwei einzelne Massenpunkte m und n festgestellt ist. Hierbei sind drei Fälle zu unterscheiden, entweder umhüllt nämlich die umschliessende Oberfläche keinen der Punkte, oder einen, oder beide.

Beginnen wir mit dem Falle, wo die beiden Punkte ausserhalb der geschlossenen Fläche liegen, so haben wir das Integral $m \cdot n \int \frac{\cos \overline{rs}}{r^2 \cdot s^2} dt$ zu betrachten, in welchem r und s respective den Abstand der Punkte m und n vom Raumelement dt bezeichnen. Drücken wir das Raumelement dt in Bezug auf den Punkt m aus, so dass $dt = r^2 \, d\varsigma \, dr$ ist, wo $d\varsigma$ die Oeffnung des von m ausgehenden Kegels bezeichnet, so ist

$$m \cdot n \int \frac{\cos \overline{rs}}{r^2 \cdot s^2} dt = m \cdot n \int \frac{\cos \overline{rs}}{s^2} dr \, d\varsigma,$$

oder nach Theor. I

$$= m \cdot n \int \frac{d \cdot \frac{1}{s}}{dr} dr \cdot d\varsigma.$$

Integrirt man nun nach dr, von den Eintrittsstellen des Leitstrahles r bis zu den Austrittsstellen, so sieht man ein, dass $\frac{1}{s}$ bei letzteren das positive, bei ersteren aber das negative Zeichen erhält. Setzt man ausserdem nach Theor. II für $d\varsigma$ den Ausdruck $-\frac{d \cdot \frac{1}{r}}{d\nu} d\omega$, so gilt dieser Ausdruck mit dem negativen Zeichen nur für die Stellen, wo die nach aussen gerichtete Normale mit der Verbindungsstrecke r einen stumpfen Winkel bildet, also nur für die Austrittsstellen des Leitstrahles r; wenn folglich für die Eintrittsstellen nur $\frac{d \cdot \frac{1}{r}}{d\nu} d\omega$ einzuführen ist, so sieht man, dass der ganze Ausdruck negativ wird, also

$$m \cdot n \int \frac{\cos \overline{rs}}{r^2 \cdot s^2} dt = - m \cdot n \int \frac{1}{s} \frac{d \cdot \frac{1}{r}}{d\nu} d\omega.$$

Zunächst wollen wir den Ausdruck so erweitern, dass wir den Punkt m lassen, aber eine Masse N_a einführen. Schreibt man die letzte Gleichung in der Form

$$m \int \frac{1}{r^2} \frac{d \cdot \frac{n}{s}}{dr} dt = - m \int \frac{n}{s} \frac{d \cdot \frac{1}{r}}{d\nu} d\omega,$$

so sieht man leicht, dass sie sich für die Masse N_a erweitert zu

$$m\int \frac{1}{r^2}\frac{d\cdot W}{dr}\,dt = -\,m\int W\frac{d\cdot\frac{1}{r}}{d\nu}\,d\omega.$$

Bedenkt man nun, dass $\frac{d\cdot W}{dr} = Q\cdot\cos\overline{qr}$ ist, und dass sich nach Theor. I. für $\frac{\cos\overline{qr}}{r^2}$ der Ausdruck $\frac{d\cdot\frac{1}{r}}{dq}$ einsetzen lässt, so kann man die letzte Gleichung auch schreiben

$$\int \frac{d\cdot\frac{m}{r}}{dq}\,Q\cdot dt = -\int W\frac{d\cdot\frac{m}{r}}{d\nu}\,d\omega.$$

Erweitert man nun diese Gleichung so, dass man statt des Massenpunktes m die Masse M_a einführt, so erhält man, indem man berücksichtigt, dass $\frac{dV}{dq} = P\cos\overline{pq}$ ist,

$$\int P\cdot Q\cdot\cos\overline{pq}\,dt = -\int W\frac{dV}{d\nu}\,d\omega.$$

Da sich nun in der Anschauung Alles in Bezug auf M_a und N_a entspricht, so liegt auf der Hand, dass man das Raumintegral auch eben so gut überführen kann in:

$$\int P\cdot Q\cdot\cos\overline{pq}\,dt = -\int V\frac{dW}{d\nu}\,d\omega.$$

In derselben Weise wird die Betrachtung der beiden anderen Fälle geführt. Liegt der Massenpunkt m_i innerhalb, n_a ausserhalb des umschlossenen Raumes, so hat man wie oben

$$m_i\cdot n_a\int\frac{\cos\overline{rs}}{r^2\cdot s^2}\,dt = m_i\,n_a\int\frac{d\cdot\frac{1}{s}}{dr}\,dr\,d\varsigma.$$

Integrirt man nun nach dr längs des Leitstrahles r von dem Punkte m_i bis zur Oberfläche, so hat also $\frac{1}{s}$ an der Oberfläche überall das positive Zeichen, dagegen für m_i, wo es den Werth $\frac{1}{s_0}$ haben soll, das negative Zeichen, so dass man erhält $m_i\cdot n_a$ $\left[\int\frac{1}{s}\,d\varsigma - \frac{1}{s_0}\int d\varsigma\right]$; da nun m_i innerhalb der Fläche liegt, so ist nach allen Seiten hin $d\varsigma = -\frac{d\cdot\frac{1}{r}}{d\nu}\,d\omega$ und $\int d\varsigma = 4\pi$, folglich ergiebt sich

$$m_i\cdot n_a\int\frac{\cos\overline{rs}}{r^2\cdot s^2}\,dt = -\,m_i\,n_a\int\frac{1}{s}\frac{d\cdot\frac{1}{r}}{d\nu}\,d\omega - 4\pi\,m_i\,\frac{n_a}{s_0}.$$

Dieser Ausdruck erweitert sich nun, wie in den obigen Betrachtungen, für eine Masse M_i und N_a zu der Gleichung

$$\int P \cdot Q \cdot \cos \overline{pq}\, dt = -\int W \frac{dV}{d\nu} d\omega - 4\pi \int W_i\, m_i,$$

wo das letzte Integral sich über die ganze Masse M_i erstreckt.

Da nun M_i und N_a sich nicht entsprechen, weil die eine Masse innerhalb, die andere ausserhalb liegt, so muss man in diesem Falle das zweite Flächenintegral selbständig ableiten. Man nehme dazu das Raumelement in Bezug auf den Punkt n_a, so dass $dt = s^2\, ds \cdot d\tau$ ist, wo $d\tau$ die Oeffnung des von n_a ausgehenden Kegelelementes ist, dann erhält man

$$m_i\, n_a \int \frac{\cos \overline{rs}}{r^2 \cdot s^2} dt = m_i\, n_a \int \frac{d \cdot \frac{1}{r}}{ds} ds\, d\tau.$$

Integrirt man nun nach ds längs des Leitstrahles s von den Eintrittsstellen bis zu den Austrittsstellen und führt man die dazu gehörigen Werthe von $d\tau$ ein, so erhält man, ganz entsprechend wie in dem ersten Falle, auf der rechten Seite den Ausdruck

$$- m_i\, n_a \int \frac{1}{r} \frac{d \cdot \frac{1}{s}}{d\nu} d\omega,$$

so dass der allgemeine Ausdruck für M_i und N_a auch nur ist

$$-\int V \frac{dW}{d\nu} d\omega.$$

Freilich ist hierbei noch dies zu bemerken; nimmt man dasjenige von n_a ausgehende Kegelelement, welches den Punkt m_i in sich enthält und will den Ausdruck $\int \frac{d \cdot \frac{1}{r}}{ds} ds\, d\tau$ integriren, so geht ja der Ausdruck $\frac{1}{r}$ innnerhalb des Integrales durch das Unendliche. Um zu beweisen, dass trotzdem die obige Gleichung stattfindet, umschliesse man m_i mit einer Kugel, deren Radius ϱ ist, integrire zunächst nur über den zwischen dieser Kugelfläche und der gegebenen Oberfläche liegenden Raum, lasse dann aber ϱ unendlich klein werden, so ist damit der ganze innerhalb der gegebenen Oberfläche liegende Raum in Rechnung gezogen. Der Ausdruck stellt sich bei einem endlichen ϱ in folgender Form dar:

$$\int \frac{1}{r} d\tau - \frac{1}{\varrho} \int d\tau,$$

wo $d\tau$, wenn wir das von der bestimmten Integration herrührende Zeichen auf dasselbe übertragen, an den Stellen, bei welchen der Leitstrahl s bei der geschlossenen Oberfläche eintritt oder bei der Kugeloberfläche austritt, negativ, an den entgegengesetzten Stellen positiv genommen werden muss, so dass wir schreiben können:

$$-\int \frac{1}{r} \frac{d \cdot \frac{1}{s}}{d\nu} d\omega + \frac{1}{\varrho} \int \frac{1}{s^2} \cos \overline{s\nu}\, d\omega,$$

wo sich das zweite Integral über die mit dem Radius ϱ beschriebene Kugeloberfläche erstreckt; es lässt sich nachweisen, dass dies zweite Stück mit abnehmendem ϱ verschwindet, denn jedenfalls liegt es zwischen den Grenzen

$$+\frac{1}{\varrho} \int \frac{d\omega}{s^2} \quad \text{und} \quad -\frac{1}{\varrho} \int \frac{d\omega}{s^2}.$$

Bezeichnet man nun mit s_0 die kleinste Entfernung des Punktes n_a von der Kugelfläche, so liegt der besagte Werth gewiss zwischen den Grenzen

$$+\frac{1}{s_0^2 \varrho} \int d\omega = +\frac{4\pi\varrho}{s_0^2} \quad \text{und} \quad -\frac{1}{s_0^2 \varrho} \int d\omega = -\frac{4\pi\varrho}{s_0^2}.$$

Da nun für ein abnehmendes ϱ beide Grenzen der Null gleich werden, so verschwindet das besagte Stück.

Dieselben Rücksichten treten nun im dritten Fall auf, wenn man es mit M_i und N_i zu thun hat, indess übersieht man in der Art der früheren Betrachtungen leicht, dass da wieder wie im ersten Falle vollkommene Symmetrie herrscht, der Ausdruck $\int P \cdot Q \cdot \cos \overline{pq}\, dt$ sowohl in

$$-\int W \frac{dV}{dn} d\omega - 4\pi \int m_i W_i,$$

als auch in

$$-\int V \frac{dW}{dn} d\omega - 4\pi \int n_i V_i$$

übergeführt werden kann.

Die Betrachtungen der drei einzelnen Fälle finden sich nun bei der allgemeinen Aufgabe vereinigt und man übersieht mit Berücksichtigung der möglichen Combinationen m_a, n_a; m_a, n_i; m_i, n_a; m_i, n_i, dass das schliessliche Resultat die im Anfange dieses Abschnittes angeführte Gleichung sein muss.

Corollarium I. Das oben aufgestellte Theorem enthält das Hauptproblem der oft genannten Abhandlung von Gauss[1]) als speciellen Fall unter sich; letzteres wird aus dem unsrigen abgeleitet, indem man nicht nur die Massen M und N zusammen fallen lässt, sondern dieselben auch vollkommen ausserhalb der geschlossenen Oberfläche legt; man setze also $M_i = N_i = 0$, $M = N$, $P = Q$, $\cos \overline{pq} = 1$, $V = W$, so erhält man

$$\int P^2 dt = -\int V \frac{dV}{d\nu} d\omega.$$

Es liegt auf der Hand, dass man die Massen zusammenfallen lassen kann, ohne sie vollkommen aus der geschlossenen Oberfläche herauszulegen; somit ergiebt sich als zweite Specialität aus unserem allgemeinen Problem folgender Satz: Schliesst von einer Masse

[1]) Resultate aus den Beobachtungen des magnetischen Vereins 1839 p. 34.

M eine vollkommen geschlossene Oberfläche das Stück M_i ein und das Stück M_a aus, so ist immer

$$\int P^2\, dt = -\int V \frac{dV}{d\nu}\, d\omega - 4\pi \int V_i\, m_i,$$

wo sich das letzte Integral über die Masse M_i erstreckt, V_i aber das Potential der ganzen Masse ist.

Corollarium II. Da der Ausdruck $\int P \cdot Q \cdot \cos \overline{pq}\, dt$ auf zwei Formen gebracht werden kann, so ergiebt sich aus der Gleichsetzung dieser beiden Formen ein neues Problem, aus dem im Wesentlichen Green zuerst seine allgemeinen Gesetze der Anziehung abgeleitet hat. Man findet, dass, wenn zwei Massen M und N von einer geschlossenen Oberfläche so geschnitten werden, dass M_i und N_i innerhalb derselben liegen, stets die Gleichung statt findet

$$\int W \frac{dV}{d\nu}\, d\omega + 4\pi \int W_i\, m_i = \int V \frac{dW}{d\nu}\, d\omega + 4\pi \int V_i\, n_i.$$

Berücksichtigt man, dass der Ausdruck $\frac{d^2V}{dx^2} + \frac{d^2V}{dy^2} + \frac{d^2V}{dz^2}$ der Null, respective dem Ausdruck $-4\pi\varrho$ gleich ist, so übersieht man leicht, dass obige Gleichung mit der von Green[1] aufgestellten zusammenfällt, wenn man die Dichtigkeit ϱ der Einheit gleich setzt; der Unterschied in den Zeichen kommt daher, dass Green das Differential unter dem Flächenintegral nicht auf der nach aussen, sondern auf der nach innen gerichteten Normale nimmt.

Liegen die Massen M und N ganz ausserhalb der geschlossenen Fläche, so fallen die zweiten Integrale fort; man erhält also

$$\int W \frac{dV}{d\nu}\, d\omega = \int V \frac{dW}{d\nu}\, d\omega.$$

Dieselbe Gleichung ergiebt sich, wenn beide Massen ganz innerhalb liegen, denn, da dann die zweiten Integrale sich über die ganzen Massen erstrecken, so sind sie einander gleich, weil beide dieselbe Grösse $\int \frac{m \cdot n}{r}$ mit allen möglichen Combinationen der verschiedenen m und n darstellen.

Liegt die Masse M ausserhalb, von N aber die Masse N_i innerhalb der geschlossenen Fläche, so ist

$$\int W \frac{dV}{d\nu}\, d\omega = \int V \frac{dW}{d\nu}\, d\omega + 4\pi \int V_i\, n_i.$$

[1]) Green, Crelle's Journal B. 44 p. 363.

II. Die Kraftgrösse und die Niveauflächen mit ihren orthogonalen Trajectorien.

16. Der zweite Theil beschäftigt sich mit den Gesetzen, vermöge deren man sich auf den Niveauflächen und längs ihrer rechtneigigen Trajectorien über die Zu- und Abnahme der Kraftgrösse orientiren kann. Welchen Nutzen solcher Art Gesetze haben, hat Faraday gezeigt, der sich bei seinen magnetischen Experimenten besonders von seiner Ansicht über die Kraftlinien leiten liess. Dass die Ansichten Faraday's auf die bisher gebräuchlichen Anschauungen des Magnetismus zurückgeführt werden können, hat van Rees bereits gezeigt[1]. Bei der nachfolgenden Betrachtung tritt das von Faraday aufgestellte Gesetz in mathematischer Form als eins von denen auf, welche sich allgemein bei den in den früheren Abschnitten behandelten anziehenden oder abstossenden Kräften darlegen lassen.

17. Denkt man sich auf zwei Niveauflächen die beiden correspondirenden Flächenstücke $d\omega$ und $d\omega_1$, welche so klein genommen sein mögen, dass durch ihren ganzen Flächenraum die Kraft als constant angesehen werden kann, so lässt sich behaupten, dass sich die angreifenden Kräfte umgekehrt wie die correspondirenden Flächenstücke verhalten, vorausgesetzt, dass die die beiden Flächenstücke verbindenden Trajectorien nicht durch die anziehenden Massen gehen.

Beweis. Nach Theor. III ist für eine geschlossene Oberfläche, welche kein Stück der anziehenden Masse in sich enthält,

$$\int P \cos \overline{np}\, d\omega = 0,$$

wenn das Integral über die ganze Oberfläche ausgedehnt wird. Nimmt man nun zwei correspondirende Flächenstücke ω und ω_1 auf den Niveauflächen V und V_1 und denkt sich durch die correspondirenden Punkte ihrer Grenzcurven die Trajectorien gelegt, so wird die durch die Trajectorien gebildete Röhre mit den Flächenstücken ω und ω_1 eine geschlossene Oberfläche darstellen, so dass man die obige Gleichung anwenden kann. Was den Cosinus anbetrifft, so hat er nur dreierlei Werthe; auf der Trajectorienröhre ist er Null, da die Kraft P daselbst zu der Fläche tangential wirkt, mit der Normale also einen rechten Winkel bildet; auf der Fläche ω fällt die Kraft in die nach aussen gehende Normale, der Cosinus hat daselbst also den Werth $+1$, während er auf der Fläche ω_1

[1] Pogg. Ann. B. 90 A., pag. 415.

den Werth — 1 hat, da dort die Kraft P mit der nach innen gehenden Normale zusammenfällt; somit ergiebt sich die Gleichung

$$\int P\, d\omega - \int P_1\, d\omega_1 = 0$$

$$\text{oder} \qquad \int P\, d\omega = \int P_1\, d\omega_1,$$

wobei das erste Integral sich über die Fläche ω, das zweite über das correspondirende Flächenstück ω_1 erstreckt. Für alle correspondirenden Flächenstücke ist also das Integral $\int P\, d\omega$ eine constante Grösse; oder man kann die Sache noch allgemeiner fassen, wenn man sagt, in einer Trajectorienröhre ist das Integral $\int P \cos np\, d\omega$, welches sich auf eine die Röhre beliebig durchschneidende Fläche bezieht, eine constante Grösse. Lässt man die Röhre unendlich dünn werden, so geht die oben aufgestellte Gleichung über in

$$P \cdot d\omega = P_1 \cdot d\omega_1,$$

worin das abzuleitende Gesetz enthalten ist.

Denkt man sich $d\omega$ als ein unendlich kleines Dreieck und sind durch die drei Ecken die Trajectorien gelegt, so ergiebt sich aus dem so eben gefundenen Gesetze, dass die Kraft nach der Seite hin abnimmt, auf welcher die Trajectorien divergiren, dagegen nach der entgegengesetzten zunimmt, weil nach der ersten Richtung hin $d\omega_1$ grösser, nach der andern Richtung hin aber kleiner als $d\omega$ wird. Dies Gesetz lässt sich auch dahin aussprechen, dass, wenn man von einem Punkte einer Niveaufläche auf der zugehörigen Trajectorie fortrückt, man auf der convexen Seite zu einer Stelle geringerer Kraft, auf der concaven aber zu einer Stelle grösserer Kraft gelangt.

Corollarium. Die eben angeführten Gesetze gestalten sich noch einfacher, wenn die Niveauflächen Rotationsflächen sind; dies wird eintreten, wenn die anziehende Masse selbst symmetrisch um eine Axe vertheilt ist, d. h. also in den meisten Fällen. Bezeichnet man die correspondirenden Stücke zweier Meridiancurven mit ds und ds_1 und den Abstand derselben von der Rotationsaxe mit r und r_1, so lassen sich die correspondirenden Stücke $d\omega$ und $d\omega_1$ ausdrücken durch $ds \cdot r \cdot d\varphi$ und $ds_1 \cdot r_1 \cdot d\varphi$, wenn $d\varphi$ den Winkel bedeutet, um welchen die die Curven s und s_1 enthaltene Meridianebene um die Rotationsaxe geschwenkt werden muss, damit die correspondirenden Curvenstücke ds und ds_1 die correspondirenden Flächenstücke $d\omega$ und $d\omega_1$ erzeugen. Nach dem Obigen muss nun, wenn man auf beiden Seiten den Factor $d\varphi$ unterdrückt,

$$P \cdot r \cdot ds = P_1 \cdot r_1 \cdot ds_1$$

sein. Somit verhalten sich also bei Rotationsflächen die bei correspondirenden Curvenstücken angreifenden Kräfte umgekehrt wie die statischen Momente dieser Curvenstücke, letztere genommen in Bezug auf die Rotationsaxe.

Denkt man sich also in einer Meridianebene zwei unendlich nahe Trajectorien verzeichnet, so wird die Kraft zwischen denselben geringer, je weiter die beiden Curven divergiren, grösser, je mehr sie convergiren; oder, wie man auch sagen könnte, wenn man von einem Punkte einer Meridiancurve auf der zu diesem Punkte gehörigen Trajectorie auf der convexen Seite fortschreitet, so kommt man zu einer Stelle schwächerer

Kraft, in entgegengesetzter Richtung zu einer Stelle stärkerer Kraft. Freilich ist hierbei vorausgesetzt, was auch fast immer der Fall sein wird, dass die Meridiancurven der Rotationsaxe ihre concave Seite zukehren.

18. Ebenso einfach wie im vorigen Abschnitte die Variation der Kraftgrösse längs der Trajectorien abgeleitet wurde, lässt sich nun auch zeigen, wie die Kraft auf derselben Niveaufläche variirt. Man denke sich auf zwei unendlich nah liegenden Niveauflächen zwei correspondirende Linien verzeichnet. Vergleicht man die Kraft in zwei Punkten einer Niveaufläche, so hat man für den einen

$$\frac{dV}{dp} = P \qquad \text{oder} \qquad P \cdot dp = dV$$

und für den zweiten entsprechend

$$P_1 \cdot dp_1 = dV$$

so dass sich die Gleichung

$$P \cdot dp = P_1 \cdot dp_1$$

ableiten lässt. Es verhalten sich also die in zwei Punkten einer Niveaufläche angreifenden Kräfte umgekehrt wie die Abstände dieser Punkte von den ihnen correspondirenden Punkten einer unendlich nah liegenden Niveaufläche. Vergleicht man die Kräfte längs der beiden oben erwähnten, beliebig gezogenen correspondirenden Linien, so nimmt die Kraft zwischen denselben nach der Seite hin ab, auf welcher sie divergiren, nach der andern Seite hin nimmt sie zu. Bedenkt man, dass bei Rotationsflächen zwei in einer Meridianebene liegende Meridiancurven correspondirend sind, so lässt sich für solche Flächen das Gesetz auch dahin fassen, dass, wenn man von einem beliebigen Punkte einer Trajectorie auf der durch diesen Punkt gehenden Meridiancurve nach der convexen Seite hin fortrückt, man zu Stellen schwächerer Kraft, in der entgegengesetzten Richtung zu Stellen grösserer Kraft gelangt.

19. Die von den Rotationsflächen aufgestellten Wahrheiten lassen sich in einem Gesetze vereinigen. Denkt man sich durch einen Punkt die Meridiancurve und ihre rechtneigige Trajectorie gelegt und bezeichnet den Quadranten, welchem die concaven Seiten beider Curven zugekehrt sind, mit 1 (Fig. I.), die übrigen der Reihe nach mit 2, 3 und 4, so gelangt man von dem besagten Punkt im ersten Quadranten nur zu Stellen stärkerer, im dritten Quadranten nur zu Stellen schwächerer Kraft, die Curve constanter Kraft endlich geht durch die Quadranten 2 und 4.

III. Die Niveauflächen für einfache Kraftgrössen.

21. Bekanntlich kann in grosser Entfernung von der anziehenden Masse die Kraft gleich derjenigen gesetzt werden, welche der Schwerpunkt der gegebenen Masse ausüben würde, wenn die ganze Masse in ihm vereinigt wäre. Daraus geht hervor, dass die Niveauflächen in grosser Entfernung von der anziehenden Masse einer um den Schwerpunkt beschriebenen Kugelfläche sich nähern. Indess darf nicht übersehen werden, dass dies nur stattfinden kann, wenn die Masse gleichartig ist, nicht aber, wenn sie ungleichartig, wie bei dem Magnetismus und der Elektricität ist. In diesem Falle kann die anziehende Masse nicht durch einen Schwerpunkt, sondern nur durch zwei ersetzt werden, von denen der eine den positiven Massen, der andere den negativen Massen angehört. Sind $+\mu$ und $-\mu$ die entsprechenden Massen, welche wir uns in den Schwerpunkten P und P_1 angehäuft denken, so wird die Meridiancurve der Niveaufläche durch

$$\frac{1}{r} - \frac{1}{r_1} = \text{const.}$$

ausgedrückt, wenn

$$r = [y^2 + (x - e)^2]^{\frac{1}{2}} \qquad r_1 = [y^2 + (x + e)^2]^{\frac{1}{2}}$$

ist, wo 2e den Abstand beider Schwerpunkte bedeutet. Die durch obige Gleichung dargestellten Curven sind in der Figur II schwarz gezeichnet; von den Trajectorien zu sprechen, nehmen wir hier noch Abstand. Dagegen möchte es rathsam sein, noch von dem Falle zu sprechen, wo bei gleichartiger Vertheilung die anziehenden Massen so gruppirt sind, dass es gerathen ist, sie durch zwei Schwerpunkte zu ersetzen, so dass ihre Meridiancurve durch die Gleichung

$$\frac{1}{r} + \frac{1}{r_1} = \text{const.}$$

charakterisirt wird, Curven dieser Art sind in Fig. III gezeichnet. An denselben ist eine Eigenthümlichkeit der Niveauflächen zu bemerken, die bei Betrachtungen über dieselben berücksichtigt werden muss; es zeigt sich nämlich, dass die Niveaufläche sich in zwei geschlossene Oberflächen zerlegen kann. In complicirteren Fällen kann es vorkommen, dass zu derselben Constante des Potentiales drei und mehrere geschlossene Flächen gehören.

21. Wir gehen nun dazu über, die Niveauflächen und ihre rechtneigigen Trajectorien bei ungleichartigen Massen zu bestimmen. Wir beschränken uns auf lineare Massenvertheilungen, wobei hauptsächlich neben den elektrischen Strömen an die magnetischen Massen gedacht werden muss, bei denen wirklich oft eine lineare Vertheilung substituirt werden kann, z. B. wenn man einen Magneten mit einer stark prävalirenden Ausdehnung hat. Zunächst ist zu bemerken, dass es sich hier nur um Rotationsflächen handeln wird, also nur Curven und keine Flächen zu bestimmen sind. In Betreff magnetischer Untersuchungen werden wir nun in den nächsten Abschnitten folgende Massen behandeln:

22. Ein magnetisches Element,
23. Einen Magneten mit zwei Polen,
24. Einen Magneten mit beliebiger Vertheilung,
25. Einen Magneten in meridionaler Lage unter Berücksichtigung des Erdmagnetismus.

Dann aber betrachten wir bei einem elektrischen Kreisstrom in den Abschnitten

26. Seine elektromagnetische Kraft,
27. Seine elektrodynamische Kraft,
28. Seine elektromotorische Kraft.

22. Ein magnetisches Element ist ein Magnet, dessen Pole unendlich nahe liegen; denken wir uns dieselben also in der X-Axe mit den Abscissen x_1 und $x_1 + dx_1$, so lässt sich, da beide Punkte entgegengesetzte Masse enthalten, die Niveaulinie durch ein Differential darstellen

$$\frac{d \cdot \frac{1}{r_1}}{dx_1} = \text{const., wenn } r_1 = [y^2 + (x - x_1)^2]^{\frac{1}{2}} \text{ ist;}$$

also

$$\frac{x - x_1}{r_1^{\,3}} = \text{const.}$$

Legt man den Coordinatenanfang in das magnetische Element und führt Polarcoordinaten ein, so erhält man:

$$r^2 = a^2 \cos \vartheta.$$

Für die orthogonalen Trajectorien dieser Curven ergiebt sich leicht:

$$r = a \sin \vartheta^2.$$

In beiden Gleichungen drückt a die Constante aus; die Curven sind in Fig. IV gezeichnet und zwar stellen die schwarz ausgezogenen immer die Niveaulinien vor. Bemerkenswerth ist noch der Werth der Subtangente der Trajectorien, dieselbe ist

$$s = \frac{1}{3} \frac{r_1}{\cos \vartheta_1},$$

wenn r_1 und ϑ_1 die Coordinaten des Berührungspunktes ausdrücken; dieser Ausdruck weist auf die bekannte Construction der Tangente an der magnetischen Curve hin: Man construire ein rechtwinkliges Dreieck, dessen eine Ecke das Element selbst ist, dessen andere Ecke der Punkt bildet, durch den die Tangente gelegt werden soll und dessen Hypotenuse in der magnetischen Axe liegt; theilt man die letztere in drei gleiche Theile, so ist der dem Element zunächst liegende Theilpunkt ein Punkt der Tangente.

23. Bezeichnet man den Abstand der beiden Pole eines Magneten mit 2e und hat man den Anfangspunct der Coordinaten in die Mitte von 2e, die X-Axe in die magnetische Axe gelegt, so ist, wie schon im Abschnitte 20 gesagt worden ist, die Gleichung der Niveaulinie:

$$\frac{1}{r_1} - \frac{1}{r_2} = a,$$

wo $$r_1 = [y^2 + (x - e)^2]^{\frac{1}{2}} \qquad r_2 = [y^2 + (x + e)^2]^{\frac{1}{2}} \text{ ist.}$$

Um die Gleichung der rechtneigigen Trajectorien, d. h. der magnetischen Curven abzuleiten, gehen wir am besten von ihrer Differentialgleichung aus:

$$\frac{dy}{dx} = \frac{Y}{X},$$

wo $$Y = \sum \mu_i \frac{y}{r_i^3} \qquad X = \sum \mu_i \frac{x - x_i}{r_i^3},$$

wenn $r_i = [y^2 + (x - x_i)^2]^{\frac{1}{2}}$ ist und die Massen μ_i alle in der X-Axe liegen. Giebt man der Differentialgleichung die Gestalt

$$\sum \frac{\mu_i}{r_i^3} [y\,dx - (x - x_i)\,dy] = 0,$$

so erkennt man leicht, dass sie mit dem integrirenden Factor y ein vollständiges Differential darstellt; man erhält durch Integration

$$\sum \mu_i \frac{x - x_i}{r_i} = \text{const.}$$

Da bei einem Magneten mit zwei Polen nur zwei Punkte mit den Massen $+\mu$ und $-\mu$ vorausgesetzt werden, so ergiebt sich als Gleichung der magnetischen Curven

$$\frac{x + e}{r_2} - \frac{x - e}{r_1} = a,$$

d. h. die Differenz der Cosinus derjenigen Winkel, welche die nach den Polen gezogenen Leitstrahlen mit der magnetischen Axe bilden, ist für ein und dieselbe magnetische Curve eine constante Grösse; dieselbe ist der sinus versus desjenigen Winkels, welchen die Curve am Pol mit der magnetischen Axe bildet.

Obige Eigenschaft der magnetischen Curve und die Construction, welche sich aus derselben leicht ergiebt, ist bereits bekannt[1]); die durch obige Gleichung charakterisirten Curven sind in Fig. II punktirt gezeichnet. Die Construction der Tangente lässt sich auf den leicht nachweisbaren Satz gründen, dass sich die Abstände des Tangentendurchschnittes auf der X-Axe von den beiden Polen verhalten wie die Cuben der nach dem Berührungspunkt gezogenen Leitstrahlen. Indess macht sich die Construction der Normale, d. h. der Tangente der Niveaulinie eleganter, denn, wenn man in der Gleichung letzterer

[1]) Gehler's Physikalisches Wörterbuch 6. B. 2. Abth. pag. 833.

$$\frac{1}{r_1} - \frac{1}{r_2} = a$$

nach dem Bogen ds differenzirt, so erhält man

$$\frac{dr_1}{ds}\frac{1}{r_1^2} = \frac{dr_2}{ds}\frac{1}{r_2^2};$$

errichtet man nun in den Polen auf den Leitstrahlen Perpendikel und bezeichnet die durch dieselben auf der Tangente gebildeten Abschnitte mit q_1 und q_2, letztere vom Berührungspunkt an gerechnet, so sind die Cosinus gleich

$$\frac{dr_1}{ds} = \frac{r_1}{q_1} \quad \text{und} \quad \frac{dr_2}{ds} = \frac{r_2}{q_2},$$

also muss die Gleichung bestehen:

$$r_1 \cdot q_1 = r_2 \cdot q_2,$$

wodurch das Verhältniss der Abschnitte q_1 und q_2 und somit die Construction der Tangente bestimmt ist.

24. Bekanntlich ist die Einführung zweier Pole, als Substitute aller Massen, nur unter der Voraussetzung vollkommen gerechtfertigt, dass alle Theilchen des Magneten gleich stark magnetisch erregt sind; das ist aber nicht der Fall, sondern, wie man weiss, sind die mittleren Theilchen stärker erregt; über das genaue Gesetz der Erregung herrschen verschiedene Ansichten, die von Lenz und Jacobi stehen denen Biot's gegenüber. Um für diesen allgemeinen Fall die Gleichung der magnetischen Curve zu entwickeln, knüpfen wir am besten an die im vorigen Abschnitte entwickelte Gleichung:

$$\sum \mu_i \frac{x - x_i}{r_i} = \text{const.}$$

an; da die Pole eines und desselben magnetischen Elementes gleiche Masse mit entgegengesetztem Zeichen haben, so lassen sich die zu denselben gehörigen Werthe in einem Differential zusammen fassen, so dass man erhält:

$$\sum \mu_i \cdot dx_i \frac{d \cdot \frac{x - x_i}{r_i}}{d x_i} = \text{const.}$$

Wenn wir nun $f(x_i)$ als das Vertheilungsgesetz der magnetischen Momente $\mu_i \cdot dx_i$ annehmen, so kann man die Summe in ein Integral übergehen lassen; bezeichnen wir, der Deutlichkeit halber, den Integrationsbuchstaben mit ξ, so ist die Gleichung der magnetischen Curve:

$$\int_{-e}^{+e} f\xi \frac{d \cdot \frac{x - \xi}{r}}{d\xi} d\xi = a,$$

wo $r = [y^2 + (x - \xi)^2]^{\frac{1}{2}}$ ist.

Nach Lenz und Jacobi, welche die Parabelvertheilung annehmen, hätte man nun für $f\xi$ den Ausdruck

$$\alpha^2 - \beta\,\xi^2,$$

nach Biot, welcher das Gesetz der Kettenlinie ableitet, aber den Ausdruck

$$\alpha^2 - \beta\,(e^{+\xi} + e^{-\xi})$$

zu setzen. Durch Fixirung der magnetischen Curven im Experiment diese beiden Ansichten zu prüfen, liegt nicht in dem Plane dieser Arbeit, sondern muss auf andere Zeit verschoben werden. Hier ist nur noch zu bemerken, dass sich für das erste Gesetz die Integration ausführen lässt; man erhält nämlich:

$$a + 4\,(\varepsilon^2 + r_1 r_2)\left(\frac{x+e}{r_2} - \frac{x-e}{r_1}\right) = 2\,y^2\,\lg\cdot\left(\frac{r_2 + x + e}{r_2 - x - e}\,\frac{r_1 - x + e}{r_1 + x - e}\right)$$

wo

$$\varepsilon^2 = \frac{\alpha^2 - \beta e^2}{\beta} \qquad r_1 = [y^2 + (x-e)^2]^{\frac{1}{2}}$$

$$r_2 = [y^2 + (x+e)^2]^{\frac{1}{2}} \text{ ist.}$$

Man überzeugt sich leicht davon, dass alle magnetischen Curven durch die Endpunkte $x = +e$ und $x = -e$ des Magneten gehen.

25. Die Gleichungen der letzten Abschnitte sind entwickelt, ohne Rücksicht auf den Erdmagnetismus zu nehmen und doch würde dies bei experimentalen Untersuchungen unumgänglich nöthig sein. Bei meridionaler Lage des Magneten, d. h. also wenn seine Axe im Meridian liegt, ist die Einführung des Erdmagnetismus leicht zu bewerkstelligen, denn man hat in den Entwicklungen des Abschnittes 23 die X-Componente nur um die Horizontalcomponente T des Erdmagnetismus zu vermehren oder zu vermindern, je nachdem der wirkende Magnet der erdmagnetischen Kraft entsprechend liegt oder nicht. Man überblickt, dass dadurch die Gleichung der magnetischen Curve sich erweitert zu:

$$\pm\,\alpha\cdot T\cdot y^2 + \int_{-e}^{+e} f\xi\,\frac{d\cdot\frac{x-\xi}{r}}{d\xi}\,d\xi = a.$$

Da α eine Constante ist, welche nur von dem Magneten abhängig ist, so liegt es auf der Hand, dass durch die magnetische Curve die horizontale Componente des Erdmagnetismus bestimmt werden kann; auch die darauf bezüglichen experimentalen Untersuchungen müssen wir verschieben.

26. Es soll die Niveaufläche eines geschlossenen elektrischen Stromes bei seiner Einwirkung auf ein magnetisches Molecül bestimmt werden. Zunächst lässt sich leicht nachweisen, wie Neumann [1] zuerst festgestellt hat, dass das Potential eines geschlossenen Stromes bei elektromagnetischer Wirkung durch die Oeffnung des Kegels dargestellt wird, dessen Spitze das magnetische Molecül und dessen Leitcurve der geschlossene elektrische Strom ist. Wenn man bedenkt, dass nach Ampère, wie schon im Abschnitt 10 gesagt worden ist, die Wirkung eines elektrischen Stromes durch die magnetischen Massen ersetzt werden kann, so hat man für das Potential besagter Masse, also auch des elektri-

[1] Die mathematischen Gesetze der inducirten elektrischen Ströme von F. E. Neumann 1846 pag. 73.

schen Stromes, bei dem Flächenelement $d\omega$ einmal $\frac{1}{r}$ oberhalb und dann $-\frac{1}{r}$ unterhalb der Fläche zu nehmen; fasst man beide Ausdrücke in einem Differential zusammen, so hat man

$$V = -\int \frac{d \cdot \frac{1}{r}}{dn} d\omega,$$

wo das Differential in der Richtung der Normale genommen ist, welche einen stumpfen Winkel mit r bildet, das Integral aber sich über die den geschlossenen Strom überspannende Fläche erstreckt. Nach Theor. II. ergiebt sich also

$$V = \int d\varsigma,$$

d. h. gleich der oben näher bestimmten Kugelöffnung.

Die erste Integration lässt sich für einen ebenen Strom ausführen: Man wähle einen beliebigen Punkt innerhalb der geschlossenen Curve zum Anfangspunkt der Coordinaten, bezeichne den Abstand des magnetischen Molecüls von demselben mit R und den Winkel, welchen R mit seiner Projection auf der Ebene des Stromes bildet, durch ϑ; betrachtet man diese Projection als die Anfangsrichtung eines in der Stromebene bewegten Leitstrahles r, dessen Abstand durch den Winkel φ gemessen wird, so ist

$$V = \alpha \int_0^{2\pi} \int_0^r \frac{r\, dr\, d\varphi}{\varrho^3},$$

wo α den Abstand des magnetischen Molecüles von der Stromebene und ϱ die Entfernung von dem Flächenelement $r dr\, d\varphi$ ausdrückt, also

$$\varrho^2 = R^2 + r^2 - 2 r R \cos\vartheta \cos\varphi.$$

Wenn man in Bezug auf r integrirt, so erhält man:

$$V = \sin\vartheta \int_0^{2\pi} \frac{R - r\cos\vartheta \cos\varphi - \varrho}{(1 - \cos\vartheta^2 \cos\varphi^2)\,\varrho}\, d\varphi,$$

wo sich nun ϱ und r nur noch auf die Punkte der begrenzenden Curve und nicht mehr auf die der begrenzten Fläche beziehen.

Schon aus der geometrischen Darstellung des Potentiales durch die Kegelöffnung kann man erkennen, dass die Niveaufläche, welcher die Constante Null zugehört, die ausserhalb der geschlossenen Stromcurve liegende Ebene, dagegen die Niveaufläche mit der Constante 2π die innerhalb der Curve liegende Ebene ist. Die übrigen Niveauflächen bilden Flächen, welche über die Curve gespannt sind, die ersten ungemein weit ausgedehnt, die letzteren straffer herangezogen.

Für die Theile der Flächen, welche weit von der geschlossenen Curve abliegen, kann man die höheren Potenzen von $\frac{r}{R}$ vernachlässigen, also für $\frac{1}{\varrho}$ kann man den Werth $1 + \frac{r}{R} \cos\vartheta \cos\varphi$ setzen; nimmt man noch an, dass die geschlossene Curve eine Kreislinie sei, so erhält man

$$V = \frac{2\pi r^2}{R^2} \sin\vartheta.$$

Führt man lieber den Winkel ψ ein, welchen R mit der Normale der Stromebene bildet, so erhält man als Gleichung der Meridiancurve:

$$R^2 = a^2 \cos\psi.$$

Ein Ausdruck, welcher mit dem im Abschnitt 22 gefundenen identisch ist, wie sich vermuthen liess, da unter den oben aufgeführten Bedingungen der Strom durch ein magnetisches Element ersetzt werden kann.

27. Will man die Niveaufläche eines Kreisstromes in Bezug auf seine elektrodynamische Wirkung ableiten, so muss die Richtung des angezogenen Stromstückes vorher festgestellt werden; der einfachste Fall ist der, wenn dasselbe stets rechtwinklig zu der Normale der Stromebene und zu der nach dem Mittelpunkt des Kreises gezogenen Verbindungsstrecke steht; dass in diesem Falle die Niveauflächen Rotationsflächen sind, erhellt unmittelbar. Behält man die obigen Bezeichnungen bei, so ist, da man nach Neumann[1]) zur Bildung des Potentiales nur den Cosinus der beiden Stromstücke durch ihre Entfernung zu dividiren hat,

$$V = r \int_0^{2\pi} \frac{\cos\varphi \, d\varphi}{\varrho},$$

wo r der Radius des Kreises und

$$\varrho^2 = R^2 + r^2 - 2R\, r \cos\vartheta \cos\varphi.$$

Für diejenigen Theile der Niveauflächen, für welche man die höheren Potenzen von $\frac{r}{R}$ vernachlässigen kann, erhält man

$$V = \frac{r^2 \pi}{R} \cos\vartheta,$$

also als Gleichung der Meridiancurve:

$$R = a \cos\vartheta;$$

die Meridiancurven bilden also eine Kreisschaar, deren Kreise sich berührend durch den Mittelpunkt der gegebenen Stromcurve gehen.

28. Wenn die Einwirkung eines in seiner Stromstärke schwankenden elektrischen Stromes auf freie Elektricität eines Leiters berechnet werden soll, so ist zu diesem Zwecke weder das Ampère'sche Gesetz, noch ein aus demselben abgeleitetes, sondern allein das für diesen Fall von Weber[2]) aufgestellte Gesetz anwendbar. Bekanntlich wird nach ihm die Wirkung einer elektrischen im Leitungsstücke ds bewegten Masse e auf die Masseneinheit, wenn r den Abstand beider bezeichnet, ausgedrückt durch

$$\frac{e\, ds}{r^2}\left[1 + \frac{a^2}{16}\left(2r\frac{d^2r}{dt^2} - \frac{dr^2}{dt^2}\right)\right],$$

welche Kraft sich in der Richtung von r geltend macht; die Differentiale sind nach der

[1]) S. o. pag. 67.

[2]) Elektrodynamische Maassbestimmungen von W. Weber pag. 119.

Zeit genommen. Will man hiernach die Wirkung des elektrodynamischen Stromes berechnen, so ist zu berücksichtigen, dass, während die Masse $+e$ sich nach der einen Seite mit der Geschwindigkeit v bewegt, die Masse $-e$ mit derselben Geschwindigkeit nach der entgegengesetzten Seite strömt, oder, wie es sich besser für die Rechnung macht, dass, wenn $+e$ die Geschwindigkeit $+v$ hat, $-e$ die Geschwindigkeit $-v$ besitzt. Wollte man die Wirkung bei constanter Stromstärke ableiten, so würde sich herausstellen, dass dieselbe der Null gleich ist, was von vorne herein vermuthet werden konnte, da ein constanter Strom auf einen ruhenden Leiter keine inductorische Wirkung hat. Wird nun vorausgesetzt, dass die Stromstärke i in der Zeit dt um die Grösse di steigt, so muss sich das Differential auch auf v erstrecken, also erhält man

$$\frac{dr}{dt} = \frac{dr}{ds}\frac{ds}{dt} = \frac{dr}{ds}v$$

und

$$\frac{d^2r}{dt^2} = \frac{d^2r}{ds^2}v^2 + \frac{dr}{ds}\frac{dv}{dt}.$$

Setzen wir diese Werthe ein, so ergiebt sich für die Wirkung der positiven Elektricität

$$\frac{e\,ds}{r^2}\left[1 + \frac{a^2}{16}\left(2r\frac{d^2r}{ds^2}v^2 - \frac{dr^2}{ds^2}v^2 + 2r\frac{dr}{ds}\frac{dv}{dt}\right)\right].$$

Für die Wirkung der negativen Elektricität, welche die Geschwindigkeit $-v$ mit dem Increment $-\frac{dv}{dt}$ hat, ergiebt sich entsprechend:

$$-\frac{e\,ds}{r^2}\left[1 + \frac{a^2}{16}\left(2r\frac{d^2r}{ds^2}v^2 - \frac{dr^2}{ds^2}v^2 - 2r\frac{dr}{ds}\frac{dv}{dt}\right)\right].$$

Als Summe beider Wirkungen folgt also der Ausdruck

$$\frac{a^2}{4}\frac{e\,ds}{r}\frac{dr}{ds}\frac{dv}{dt}.$$

Da nun aev nichts anderes als die Stromstärke i ist, $-\frac{dr}{ds}$ aber den Cosinus des Winkels ψ bedeutet, welchen r mit der positiven Richtung von s bildet, so kann die in der Richtung von r wirkende elektromotorische Kraft eines variablen Stromelementes auf die ruhende positiv-elektrische Masseneinheit ausgedrückt werden durch

$$-\frac{a}{4}\frac{di}{dt}\frac{ds\cdot\cos\psi}{r}.$$

Die Componente nach einer beliebigen Richtung p wird also erhalten, wenn man jenen Ausdruck mit $\cos\overline{rp} = -\frac{dr}{dp}$ multiplicirt; da sich dann die Gleichung aufstellen lässt:

$$\frac{a}{4}\frac{di}{dt}\frac{ds\cdot\cos\psi}{r}\frac{dr}{dp} = \frac{d\cdot\left(\frac{a}{4}\,ds\cdot\cos\psi\cdot\frac{di}{dt}\cdot \lg.r\right)}{dp},$$

so ergiebt sich für das Potential der Ausdruck:

$$V = \frac{a}{4} \frac{di}{dt} \int \cos \psi \lg . r \, ds,$$

wo das Integral längs der ganzen Stromcurve zu nehmen ist.

Bei einem Kreisstrome ist nun dieser Ausdruck der Null gleich, denn, wenn man die beiden Elemente ds vergleicht, für welche r dieselbe Länge hat, so wird man sich leicht davon überzeugen, dass die dazu gehörigen $\cos \psi$ gleich und entgegengesetzt sind, so dass sich im Integral diese Elementenstücke gegenseitig aufheben.

Freilich sagt dies Resultat $V = o$ nichts über die Niveauflächen und ihre rechtneigigen Trajectorien aus, indess kann man die Richtung der Kraft bestimmen, wenn man, wie oben beim Potential, so auch bei der Kraftgrösse diejenigen Elemente $-\frac{a}{4} \frac{ds \cdot \cos \psi}{r} \frac{di}{dt}$ combinirt, für welche r gleich gross ist; da für dieselben $\cos \psi$ gleich gross mit entgegengesetztem Zeichen ist, so haben je zwei derartig zusammengehörige Elemente immer eine Resultante, welche zu der durch den Mittelpunkt und den angezogenen Punkt rechtneigig zum Kreisstrome gelegten Ebene lothrecht steht; folglich hat auch die ganze Kraft diese Richtung. Somit sind die Niveauflächen diejenigen Ebenen, welche durch die vom Mittelpunkt aus auf der Kreisebene errichtete Normale gelegt werden können, und die rechtneigigen Trajectorien sind Kreislinien, deren Ebenen mit der Stromebene parallel sind und deren Mittelpunkte alle in der oben bezeichneten Normale liegen.

Um den Ausdruck für die Kraft aufzustellen, hat man bei den einzelnen Kräften die Componente nach der Richtung der allgemeinen Resultante zu nehmen; behält man also die in den vorigen Abschnitten gebrauchten Bezeichnungen bei, so hat man mit $\frac{r \sin \varphi}{\varrho}$ zu multipliciren und da $\cos \psi = \frac{R \cos \vartheta \cdot \sin \varphi}{\varrho}$ ist, so erhält man, da r in dem Ausdruck $-\frac{a}{4} \frac{ds \cdot \cos \psi}{r} \frac{di}{dt}$ jetzt durch ϱ bezeichnet werden muss,

$$P = -\frac{a}{2} \frac{di}{dt} r^2 R \cos \vartheta \int_0^\pi \frac{\sin^2 \varphi \, d\varphi}{\varrho^3},$$

wo, wie früher, r den Radius des Kreises bezeichnet und

$$\varrho^2 = R^2 + r^2 = 2 r R \cos \vartheta \cos \varphi \text{ ist.}$$

Vernachlässigt man die höheren Potenzen von $\frac{r}{R}$, so erhält man

$$P = -\frac{a}{4} \frac{di}{dt} \frac{r^2}{R^2} \pi \cdot \cos \vartheta,$$

so dass die Curven constanter Kraft dargestellt werden durch die Gleichung

$$R^2 = a^2 \cos \vartheta,$$

eine Gleichung, auf die wir sowohl im Abschnitte 22, wie im Abschnitte 26 gekommen sind und auf welche sich die Figur IV bezieht.

IV. Das Potential für einfache Niveauflächen.

29. In der Einleitung haben wir bereits auf das Verhältniss des Potentiales zu den Niveauflächen aufmerksam gemacht und auf eine bis jetzt noch nicht aufgeworfene Aufgabe, „das Potential für gegebene Niveauflächen zu bestimmen", hingewiesen. Die Aufgabe wird durch die im Abschnitte 6 entwickelte Differentialgleichung gelöst; handelt es sich, wie in den folgenden Fällen, um einen ausserhalb der Masse liegenden Punkt, so kann man die eine Integration allgemein ausführen, so dass man die Gleichung

$$\frac{dV}{dp}\, d\omega = \text{const.}$$

anwenden kann, wo sich die linke Seite auf die zu $d\omega$ gehörige Trajectorienröhre bezieht.

Nachdem wir nun in diesem Abschnitte „parallele Ebenen" als Niveauflächen betrachtet haben werden, wollen wir in den ferneren Abschnitten noch folgende Niveauflächen untersuchen:

30. concentrische Cylinderflächen,
31. concentrische Kugelflächen,
32. homofocale Ellipsoide.

Bei parallelen Ebenen sind die Trajectorien die zu den Ebenen rechtneigigen Linien; schneidet man nun auf einer Ebene ein beliebiges Stück $d\omega$ aus und legt durch alle Punkte der Grenzcurve die Trajectorien, so bildet die Trajectorienröhre eine Cylinderfläche, in derselben ist also $d\omega$ constant, folglich erhalten wir aus der obigen Gleichung:

$$\frac{dV}{dp} = \text{const.}$$

d. h. die Kraft ist überall constant; bezeichnet man den Abstand zweier Niveauebenen, zu denen die Potentiale V und V_0 gehören, durch h, so erhält man

$$V - V_0 = \alpha h,$$

wo α eine Constante ist; diese Gleichung würde etwa für die Schwerkraft gelten bei nicht zu grosser Entfernung von der Erdoberfläche.

30. Denken wir uns die Niveauflächen in der Gestalt concentrischer Cylinderflächen, so sind die Trajectorien diejenigen Linien, welche die gemeinschaftliche Cylinderaxe unter rechten Winkeln schneiden. Stellt man sich nun zu einem auf einer beliebigen Cylinderfläche gezeichneten $d\omega$ die Trajectorienröhre vor, so übersieht man leicht, dass die zu der construirten Röhre gehörigen $d\omega$ ihren Abständen von der Axe proportional sind; bezeichnet man diesen Abstand durch r, so erhält man aus der allgemeinen Gleichung

$$\frac{dV}{dr} r = \text{const.},$$

da die Richtung p in r fällt; das Integral derselben ist

$$V - V_0 = \alpha \lg \frac{r}{r_0}.$$

31. Bei concentrischen Kugelflächen sind die Trajectorien die von dem gemeinschaftlichen Mittelpunkt ausgehenden Strahlen; die zu $d\omega$ gehörige Trajectorienröhre bildet also einen Kegel, weshalb die von demselben ausgeschnittenen $d\omega$ dem Quadrat ihrer Entfernung vom Mittelpunkt, d. h. r^2 proportional sein müssen; da nun p wieder in r fällt, so erhält man

$$r^2 \frac{dV}{dr} = \text{const.}$$

also

$$V - V_0 = \alpha\left(\frac{1}{r} - \frac{1}{r_0}\right).$$

32. Wird ς als Variable angesehen, so können homofocale Ellipsoide durch die Gleichung:

$$\frac{x^2}{a^2+\varsigma} + \frac{y}{b^2+\varsigma} + \frac{z^2}{c^2+\varsigma} = 1$$

ausgedrückt werden. Zunächst lässt sich nachweisen, dass die von uns als „correspondirend" definirten Punkte bei homofocalen Ellipsoiden mit denjenigen zusammenfallen, welche Ivory und nach ihm Chasles [1]) als solche bezeichnet haben. Beide Geometer nennen diejenigen Punkte zweier homofocalen Ellipsoide correspondirend, deren Coordinaten sich wie die parallelen Axen verhalten; sollen diese Punkte auch in unserm Sinne correspondirend sein, so müssen sie auf derselben rechtneigigen Trajectorie der homofocalen Ellipsoide liegen. Es genügt, zunächst zwei unendlich nah liegende Ellipsoide zu betrachten; bezeichnet man auf denselben zwei „nach Ivory" correspondirende Punkte durch x, y, z und $x + \delta x$, $y + \delta y$, $z + \delta z$, so müssen die Coordinaten den Bedingungen genügen

$$\frac{x}{\sqrt{a^2+\varsigma}} = \frac{x+\delta x}{\sqrt{a^2+\varsigma+\delta\varsigma}}, \quad \frac{y}{\sqrt{b^2+\varsigma}} = \frac{y+\delta y}{\sqrt{b^2+\varsigma+\delta\varsigma}}, \quad \frac{z}{\sqrt{c^2+\varsigma}} = \frac{z+\delta z}{\sqrt{c^2+\varsigma+\delta\varsigma}},$$

woraus sich durch Differenziren die Gleichungen ableiten lassen:

$$\frac{\delta x}{x} = \frac{1}{2}\frac{\delta\varsigma}{a^2+\varsigma} \qquad \frac{\delta y}{y} = \frac{1}{2}\frac{\delta\varsigma}{b^2+\varsigma} \qquad \frac{\delta z}{z} = \frac{1}{2}\frac{\delta\varsigma}{c^2+\varsigma}.$$

Bezeichnet man nun das von dem Punkte x, y, z bis zu dem zweiten Ellipsoid reichende rechtneigige Trajectorienstück durch δp, so müssten die Projectionen $\delta\xi$, $\delta\eta$, $\delta\zeta$ desselben mit δx, δy, δz identisch sein, wenn die von x, y, z aus gezogene Trajectorie den Punkt $x + \delta x$, $y + \delta y$, $z + \delta z$ treffen sollte.

Nach den bekannten Ausdrücken für die Cosinus der Winkel, welche die Normale mit den Axen bildet, ist:

---

[1]) Comptes rendus, séance du 25. juin 1838.

$$\frac{\delta\xi}{x} = \frac{\delta p}{a^2+\varsigma} \frac{1}{\sqrt{\frac{x^2}{(a^2+\varsigma)^2} + \frac{y^2}{(b^2+\varsigma)^2} + \frac{z^2}{(c^2+\varsigma)^2}}}.$$

Die Beziehung zwischen δp und $\delta\varsigma$ ergiebt sich, wenn man die Gleichung des Ellipsoides nach $\delta\varsigma$ differenzirt und berücksichtigt, dass δp das Trajectorienstück zwischen den beiden unendlich nah liegenden Ellipsoiden ist; man erhält:

$$\frac{2\,x\,\delta\xi}{a^2+\varsigma} + \frac{2\,y\,\delta\eta}{b^2+\varsigma} + \frac{2\,z\,\delta\zeta}{c^2+\varsigma} = \left[\frac{x^2}{(a_2+\varsigma)^2} + \frac{y^2}{(b^2+\varsigma)^2} + \frac{z^2}{(c^2+\varsigma)^2}\right]\delta s.$$

Setzt man nun den oben entwickelten Werth von $\delta\xi$ und die demselben entsprechend gebildeten Werthe von $\delta\eta$ und $\delta\zeta$ ein, so ergiebt sich

$$\delta p = \frac{\delta\varsigma}{2}\sqrt{\frac{x^2}{(a^2+\varsigma)^2} + \frac{y^2}{(b^2+\varsigma)^2} + \frac{z^2}{(c^2+\varsigma)^2}},$$

so dass sich vermöge dieses Ausdruckes $\delta\xi$ darstellen lässt durch

$$\frac{\delta\xi}{x} = \frac{1}{2}\,\frac{\delta\varsigma}{a^2+\varsigma}.$$

Vergleicht man diesen Ausdruck mit dem von δx, so ergiebt sich die Identität von δx und $\delta\xi$; ebenso ist die der übrigen Projectionen abzuleiten.

Hiernach ist nun die Form des Potentiales leicht zu entwickeln, denn wenn man dasjenige Flächenstück als $d\omega$ wählt, dessen Projection $dx\,dy$ ist, so erhält man

$$d\omega = \frac{dx\,dy}{z}\,(c^2+\varsigma)\sqrt{\frac{x^2}{(a^2+\varsigma)^2} + \frac{y^2}{(a^2+\varsigma)^2} + \frac{z^2}{(a^2+\varsigma)^2}}.$$

Schreibt man die rechte Seite in der Form:

$$d\omega = \frac{\frac{dx}{\sqrt{a^2+\varsigma}}\,\frac{dy}{\sqrt{b^2+\varsigma}}}{\frac{z}{\sqrt{c^2+\varsigma}}}\,\sqrt{(a^2+\varsigma)(b^2+\varsigma)(c^2+\varsigma)}\,\sqrt{\frac{x^2}{(a^2+\varsigma)^2} + \frac{y^2}{(b^2+\varsigma)^2} + \frac{z^2}{(c^2+\varsigma)^2}},$$

so erkennt man, dass, da sich die Coordinaten, also auch ihre Incremente wie die parallelen Axen verhalten, für die ganze zu $d\omega$ gehörige Trajectorienröhre der erste Factor eine constante Grösse ist; oben ist ferner gezeigt worden, dass sich der letzte Factor durch $2\,\frac{\delta p}{\delta\varsigma}$ darstellen lässt, also kann man schreiben

$$d\omega = \gamma\,\frac{\delta p}{\delta\varsigma}\sqrt{(a^2+\varsigma)(b^2+\varsigma)(c^2+\varsigma)}.$$

Setzt man diesen Ausdruck nun in der Gleichung:

$$\frac{dV}{\delta p}\,d\omega = \text{const.}$$

ein, so erhält man die Differentialgleichung:

$$\frac{dV}{\delta p}\,\frac{\delta p}{\delta s}\sqrt{(a^2+\varsigma)(b^2+\varsigma)(c^2+\varsigma)} = \text{const.},$$

als deren Integral sich

$$V = \alpha \int_{\infty}^{\varsigma} \frac{d\varsigma}{\sqrt{(a^2 + \varsigma)\,(b^2 + \varsigma)\,(c^2 + \varsigma)}}$$

ergiebt, da V im Unendlichen der Null gleich is.

Um die Constante α zu bestimmen, müsste man das Potential V_0 auf der Anfangsfläche

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} + \frac{z^2}{c^2} = 1$$

kennen, denn dann ergiebt sie sich unmittelbar aus der Gleichung:

$$V_0 = \alpha \int_{\infty}^{0} \frac{d\varsigma}{\sqrt{(a^2 + \varsigma)\,(b^2 + \varsigma\,(c^2 + \varsigma)}}.$$

Dr. Most.

Bericht über das Schuljahr von Michaelis 1861 bis Michaelis 1862.

Veränderungen im Lehrer-Collegium. — Zu Michaelis 1861 verließ uns der Dr. Pallmann, welcher die siebente ordentliche Lehrstelle gehabt hatte. Er war ein Jahr an unserer Anstalt gewesen. Wir sahen ihn ungern scheiden, besonders hatte er durch lebendigen und anregenden Geschichtsunterricht gewirkt. Herr Pallmann nahm eine Stelle an der Universitäts-Bibliothek in Greifswald an. Die siebente ordentliche Lehrstelle wurde das nächste Halbjahr provisorisch verwaltet. Mit Genehmigung Eines Hohen Königlichen Ministeriums vom 19. Juni 1862 wurde sie dem Dr. Schönn übertragen und dessen Amtsthätigkeit in dieser Stelle vom 1. April 1862 gerechnet. — Am 1. November 1861 trat der Schulamts-Candidat Pauli als provisorischer Collaborator ein. — Der provisorische Collaborator Köstler wurde unter Genehmigung Eines Hohen Königlichen Ministeriums vom 26. Juli 1862 als erster Collaborator angestellt und seine Amtsthätigkeit in dieser Stelle vom 1. April 1862 gerechnet. — Zu Johannis 1862 legte der Oberlehrer Dr. Rosbolsky seine Stelle nieder. Er war seit Michaelis 1854 Lehrer an unserer Schule und hat sich um die wissenschaftliche und methodische Behandlung des Französischen anerkannte Verdienste erworben. Die durch seinen Rücktritt nothwendig gewordenen Veränderungen im Lehrer-Collegio sind noch nicht endgültig festgestellt. — Durch Ministerial-Rescript vom 29. August 1862 ist dem ordentlichen Lehrer Dr. Claus in Anerkennung seiner verdienstlichen Wirksamkeit der Oberlehrertitel beigelegt worden. —

Am 11. Januar 1862 ging der zum Abgeordneten für den Kreis Randow gewählte Oberlehrer Schmidt nach Berlin, um in das Haus der Abgeordneten einzutreten. Für seine Vertretung waren aus städtischen Mitteln 300 Thlr. bewilligt. Diese Vertretung mußte zunächst von den Lehrern der Anstalt übernommen werden, da sich sonst ein geeigneter Vertreter nicht fand. Als der Oberlehrer Schmidt nach seiner Wiederwahl am 15. Mai nach Berlin ging, übernahm den größten Theil seiner Stunden der Schulamts-Candidat Noack.

Schulfeierlichkeiten und Schulfeste. — Am 18. October 1861 begingen wir die Feier der Krönung Sr. Majestät des Königs. — Am 29. Januar 1862 hatten wir unser Winterfest. Es bestand in Vorträgen von Gesängen, Musikstücken und Gedichten, in Aufführung der 3. Scene des ersten Acts aus Richard II. in englischer Sprache und der Schlußscene aus Immermann's Trauerspiel Andreas Hofer; ferner in zweien Reden; die eine hielt der Primaner Bertheim über die Bedeutung, Gewinnung und Bearbeitung des Eisens in der Gegenwart; die andere der Primaner Borchers über die Verdienste der Deutschen um die Entwicklung der Astronomie. —

Am 22. März 1862 feierten wir den Geburtstag Sr. Majestät des Königs und verknüpften damit die Entlassung der Abiturienten Bertheim und Wolf. Der Letztere erhielt ein Exemplar des Bilderwerks „Aus König Friedrichs Zeit", welches uns von dem Königlichen Provinzial-Schul-Collegio übergeben war, um am Geburtstage Sr. Majestät des Königs einem dieser Auszeichnung würdigen Schüler geschenkt zu werden. Es war dies eines aus einer größern Anzahl von Exemplaren dieses Werkes, welche ein patriotischer Freund der Jugend auf Veranlassung der Krönung Sr. Majestät des Königs dem Herrn Unterrichtsminister zur Vertheilung an Schüler höherer Lehranstalten überwiesen hatte.

Die Dankbarkeit verpflichtet mich, hier auch des Festes zu gedenken, welches mir am am 5. Juli d. J. auf Veranlassung des Ablaufes meiner 25jährigen Dienstzeit von meinen Collegen, von gegenwärtigen und früheren Schülern, von Eltern unserer Schüler und Freunden unserer Schule, von hochgeehrten Männern, die früher meine Lehrer gewesen waren oder die gegenwärtig im städtischen und Königlichen Dienst meine Vorgesetzten sind, bereitet wurde. Werthvolle Gaben, die ich von verschiedenen Seiten empfing, werden diesen Tag bei mir stets in dankbarer Erinnerung erhalten.

Am 22. August, an demselben Tage wie im vorigen Jahre, feierten wir in herkömmlicher Weise unser Sommerfest in Gotzlow.

Am 21. Mai besuchte der Herr Provinzial-Schulrath Dr. Wehrmann die Schule und wohnte dem Unterrichte der jüngern Lehrer bei.

Auch in diesem Jahre wurden mir von einem Manne, dem wir schon seit einer Reihe von Jahren zu danken haben, und aus einer Sammlung ansehnliche Geldsummen übergeben, um davon das Schulgeld für ärmere Schüler zu bestreiten. Das Geld ist seiner Bestimmung nach angewandt und hat Eltern und Kinder unterstützt und erfreut. Da die Schule eine zwar ansehnliche, aber doch bestimmte, nicht zu überschreitende Zahl von Freistellen gewährt, so ist es nicht immer möglich, die Bitte um Freischule zu erfüllen, wenn auch die Umstände diese Erfüllung noch so nahe legen. Um so erfreulicher ist es, wenn wir in Stand gesetzt werden, in solchen Fällen zu helfen. —

Die Ferien erstreckten sich auf die vorgeschriebenen Tage, nur daß zu Ostern mit Bewilligung des Königlichen Provinzial-Schul-Collegiums die Schule schon am Freitag vor Palmsonntag geschlossen wurde. — Die Ferienschule während der Sommerferien wurde von 54 Schülern aus den Klassen von Sexta bis Quarta und von 69 Schülern der Vorschule besucht.

Vermehrung des Besitzes der Schule.

A. Die Lehrer-Bibliothek erhielt eine Vermehrung:

Durch Geschenk: Von Einem Hohen Königlichen Ministerium die Fortsetzung von: Försters Denkmale deutscher Baukunst und von: Leben und auserwählte Schriften der Väter und Begründer der reformirten Kirche; außerdem: Etudes sur les pesées par MM. Regnault, Norin et Brix.

Von Herrn Generalmajor und Brigadier v. Elten eine lithographirte Karte der Umgebung Stettins.

Von Herrn Oberlehrer Dr. Volckmann in Pyritz: Ueber Progymnasmen.

Von dem Verleger Herrn Kühlmann in Bremen: Degenhardt's englische Schulgrammatik.

Von Herrn Prof. Langbein: Ein von der Academie zu Berlin im vorigen Jahrhundert herausgegebener Atlas; Haupt's Leben des Demosthenes; Serings Gesangschule; pädagogische Zeitschriften ꝛc.

Von Herrn Dr. Rummler dessen: C. Plinii II. philosophumena.

Durch neue Anschaffung: Hegel's Werke; Hase's Kirchengeschichte; Bunsen's Bibelwerk; Weißenborn's Projection in der Ebene; Dienger's Differential- und Integralrechnung; Real-Index zu Dingler; Vogt's zoologische Briefe; Giebel's Odontographie; Giebel's drei Reiche der Natur; Giebel's Tagesfragen; W. und E. Weber's Mechanik der menschlichen Gehwerkzeuge; Endlicher's genera plantarum; Pösche's Hausthiere; Pertz's Monumenta; Eiselen's preußischer Staat; v. Sybel's Revolutionszeit; Hüllmann's Städtewesen; Sleidani comment.; Peschel's Zeitalter der Entdeckungen; Voigt's Geschichte des brandenburg-preuß. Staats; Mommsen's römische Geschichte; v. Wintersheim's Völkerwanderung; Gervinus: Schlosser's Nekrolog; Berghaus' Deutschland seit 100 Jahren; Plötz: Manuel de la littérature française; Dieterici's Statistik; Pott's etymologische Forschungen; Geschichte Philander's von Sittenwaldt; Lübke's Kunstgeschichte; v. Sargens Klingenberger Chronik; Strauß: Hutten's Gespräche; Hultsch's Meterologie; Becker's Charikles; Becker's Gallus; Bernhardy's griechische Litteratur; Bernhardy's römische Literatur; v. Sydow's Handatlas; Voigt's Atlas der Mark Brandenburg.

Durch Fortsetzung: Poggendorff's Annalen; Grunert's Archiv; Jahresbericht der Chemie; Wagner's Technologie; Prechtl's Encyclopädie; Schmid's Encyklopädie des Unterrichtswesens; Poggendorff's biograph. Wörterbuch; Vormbaum's evangelische Schulordnungen; Ranke's englische Geschichte; v. Raumer's histor. Taschenbuch; Giesebrecht's Kaiserzeit; Gervinus' 19. Jahrhundert; Grimm's deutsches Wörterbuch; Bopp's vergleichende Grammatik; Pädagogisches Archiv; Centralblatt für die Unterrichts-Verwaltung.

Von dem pädagogischen Lesevereine: Mützell's Zeitschrift für das Gymnasialwesen; Westermann's Monatshefte; Herrig's Archiv; Schulblatt für die Provinz Brandenburg; Protestantische Monatsblätter; deutsche Vierteljahrsschrift; Zeitschrift für Philosophie; Literar. Centralblatt v. Zarncke; Magazin für die Literatur des Auslandes.

B. Die Schülerbibliothek erhielt:

Durch Geschenk des Herrn Prof. Langbein: Borussia von Lehmann; deutsches Lesebuch von Seltzsam; deutsches Lesebuch von Auras und Guerlich; die Hohenzollern von Berg; deutsche Musterlese von Arenz; Lesebuch von Stifter und Aprent.

Durch Ankauf: Geschichte der deutschen Literatur von H. Kurz, 3 Bde.; Geschichte der deutschen Literatur von O. Roquette (1. Band); Byron's sämmtliche Werke; die Albigenser von Lenau; dramatische Dichtungen von Uhland; Göthe's Gedichte von Schäfer; Klopstock's Messias; Innere Wege von Schkopp; Monologen von Schleiermacher; Ueber die Religion von Schleiermacher; Gervinus, Nekrolog von Schlosser; Unser Vaterland von Pröhle; Geschichte des preußischen Vaterlandes von Hahn; Neue Bilder aus dem Leben des deutschen Volkes von Freytag; der große König und sein Rekrut von Otto; Geschichte der siebenjährigen Leiden der Stadt Danzig von 1807—1814 von Blech; Meine Kriegsgefangenschaft bei den Franzosen im Jahre 1814 von Wehrhau; die Geschichte des deutschen Handels von Falke; Heldengemälde aus Roms, Deutschlands und Schwedens Vorzeit von Wilmsen; Rom von Wegener; Guhl und Koner, Leben der Alten; Sage und Geschichte von Schmidt; Eckstein, Jugendbibliothek; Naturmythen von Rochholz; Naturhistorischer Schulatlas von Arendts; Malerische Länder- und Völkerkunde von Zimmermann; Malerische Botanik von Wagner; Grundlinien der Botanik von Passow, 4 Exemplare; Alexander von Humboldt's Reise in den Aequinoctial-Gegenden des neuen Continents von Hauff; Populäre Vorträge über Astronomie von Anger; Naturbilder von Vogel; Entdeckungen in Haus und Hof von Wagner; Schule der Chemie von Gerding; Schule der Physik von Gerding; 5 Erzählungen von Hoffmann; 4 Erzählungen von Louise Pichler; 4 Erzählungen von Staudenmeyer; 5 Erzählungen von Horn; das Buch merkwürdiger Kinder von Otto; Schwarzwälder Dorfgeschichten von Auerbach; Neue Jugend- und Hausbibliothek von Wagner; Vermischte Schriften von Schubert; der alte Krieger und sein Sohn von Müller. Histoire de Frédéric le Grand par Camille Paganel; les grands faits de l'histoire de France par H. Schütz (Geschenk der Rümpler'schen Buchhandlung in Hannover); Washington Iring: Life of Goldsmith, 1 vol.; Astoria by the same, 2 vols.; Defoe, Great Plague of London etc., 1 vol.; Yule-Tide Stories, 1 vol.; Keightley's Fairy Mythology, 1 vol.; Christmas Stories by Ch. Dickens etc., 1 vol.; A strange story by Bulwer, 1 vol.; Domestic Stories by the Author of John Halifax, 1 vol.

C. Das physikalische Cabinet ist vermehrt worden:

Durch Anschaffung: um eine Labialpfeife mit Glascylinder; eine Labialpfeife mit getheiltem Stößer; eine Zungenpfeife mit einschlagender Zunge und Schallbecher;

eine Glasphiole zur Erzeugung electrischen Lichtes im verdünnten Raume; einen Inductionsapparat mit Neef'schem Hammer.

D. Das Naturalien-Cabinet erhielt:

Durch Geschenk von dem Herrn Förster Wiedemann: einen ausgestopften Bussard; von dem Handlungsgehülfen Scholz: einige amerikanische Insecten.

Für den dreistimmigen Chor sind angeschafft:

32 dreistimmige Jugendlieder, Hymnen, Motette u. s. w., zum Gebrauch für höhere Lehranstalten u. s. w., componirt von L. Kuhn. Op. 64. Erfurt und Leipzig, G. W. Körner's Verlags-Schulbuchhandlung. — 70 Exemplare.

König Wilhelm. Vierstimmig. Gedicht von Emsmann. Composition von Löwe. — 30 Exemplare.

Die Schüler der Ober-Sekunda schenkten eine seidene deutsche Fahne.

Das abgelaufene Schuljahr ist für uns ein besonders anstrengendes gewesen, und nur der erhöhten Thätigkeit des Lehrercollegiums ist es zu danken, daß bei den mannigfachen Abweichungen vom gewöhnlichen Gange kein Nachtheil für die Schule eingetreten ist.

Zu Michaelis war eine unbesetzte Stelle zu übertragen. Zwar trat am 1. November ein neuer Lehrer, Herr Pauli, ein, dagegen erkrankte der Dr. Rummler und mußte bis Neujahr vertreten werden. Bald nach Neujahr war die Stelle des Oberlehrers Schmidt mit zu versehen. Gegen Ende des Winter-Halbjahrs traten durch hinzukommende Erkrankungen einiger Lehrer besondere Schwierigkeiten ein, indeß übernahm der Oberlehrer Schmidt in den letzten Wochen seine Stunden wieder. — Einige Wochen nach Anfang des Sommer-Halbjahrs begann die Vertretung des Oberlehrers Schmidt durch den Schulamtscandidaten Noack; nicht lange darauf mußten die französischen Stunden in den obern Klassen übernommen werden. Der Lehrplan mußte unter diesen Umständen mehrmals umgearbeitet werden. Die Grundlage der Vertheilung der Stunden im verflossenen Sommerhalbjahr zeigt folgende Tabelle:

Vertheilung der Stunden unter die Lehrer im Sommer-Halbjahr 1862.

	Lehrer.	VI^b	VI^a	V^b	V^a	IV^b	IV^a	III^b	III^a	II^c	II^b	II^a	I	Summa
1.	Director Kleinsorge, Ordinarius von I.									2 Geschichte		2 Religion (IIa und I) 2 Geschichte 1 Geographie	3 Deutsch 3 Geschichte u. Geographie	13
2.	Professor Dr. Emsmann, Ordinarius von II_a.							2 Physik	2 Physik		3 Physik	5 Mathematik 3 Physik 1 Naturgesch.	3 Physik	19
3.	Professor Kuhr, Ordinarius von II^b.										2 Religion 3 Deutsch 4 Latein	3 Deutsch 4 Latein	3 Latein	19
4.	Professor Langbein, Ordinarius von II^c.									2 Religion 6 Mathematik	6 Mathematik		6 Mathematik	20
5.	Oberlehrer Dr. Robolsky.								2 Religion 4 Französisch	4 Französisch	4 Französisch	4 Französisch	4 Französisch	22
6.	Oberlehrer Schmidt.					2 Religion 3 Deutsch 6 Latein 2 Geschichte			5 Latein 2 Geschichte		2 Geschichte			22
7.	Ordentlicher Lehrer Lincke.					2 Geographie 2 Botanik		2 Rechnen 2 Geographie	2 Rechnen 2 Geographie	2 Rechnen 2 Geographie	2 Rechnen 1 Geographie	4 Chorstunden in den oberen Klassen.		23
8.	Oberlehrer Bergemann, Ordinarius von IV_a.						2 Religion 6 Latein 4 Französisch 3 Deutsch	4 Französisch		4 Latein				23
9.	Ordentlicher Lehrer Wulkow, Ordinarius von VI^a.	4 Rechnen 2 Raumlehre 2 Botanik	4 Rechnen 4 Schreiben 2 Raumlehre 2 Botanik				2 Rechnen 2 Botanik							24
10.	Ordentlicher Lehrer Zarnikow, Ordinarius von V_b.			3 Religion 3 Rechnen 3 Schreiben 2 Singen	3 Rechnen 2 Schreiben 2 Singen	2 Rechnen 2 Schreiben 2 Singen	2 Schreiben 2 Singen							26

Anm. 1. Die Combination der Religionsstunden in II_a und I ist nur für diesen Sommer bewilligt.
2. Unter den Stunden der Herren Oberlehrer Robolsky, Schmidt, Bergemann, Dr. Most sind je 2 Stunden, die sie vertretungsweise geben. --

Vertheilung der Stunden unter die Lehrer im Sommerhalbjahr 1862.

	Lehrer.	VI^b	VI^a	V^b	V^a	IV^b	IV^a	III^b	III^a	II^c	II^b	II^a	I	Summa
11.	Oberlehrer Dr. Claus. Ordinarius von III^a.							4 Englisch	3 Deutsch 3 Englisch	3 Englisch	3 Englisch	3 Englisch	3 Englisch	22
12.	Ordentl. Lehrer Dr. Most, Ordinarius von III^b.							2 Religion 3 Deutsch 4 Mathematik	5 Mathematik	3 Deutsch 2 Physik		2 Chemie	3 Chemie	24
13.	Ordentl. Lehrer Dr. Schönn, Ordinarius von IV^b.			5 Französisch 2 Botanik	3 Religion 5 Französisch	4 Französisch 4 Mathematik								23
14.	Collaborator Köstler, Ordinarius von V^a.				4 Deutsch 2 Mathematik 2 Botanik 3 Geschichte u. Geographie		4 Mathematik 4 Geschichte u. Geographie							19
15.	Provisor. Collaborator Herbst, Ordinarius von VI^b.	3 Religion 5 Deutsch 7 Latein			6 Latein									21
16.	Provisorischer Collaborator Dr. Rummler.			4 Deutsch 6 Latein 2 Geographie				5 Latein 2 Geschichte						19
17.	Provisorischer Collaborator. Pauli.	2 Geographie	3 Religion 5 Deutsch 7 Latein 2 Geographie											19
18.	Zeichenlehrer Runge.			2		2	2	2	2	2	2		2	16
19.	Erster Lehrer an der Vorschule Spohn.	4 Schreiben												4
20.	Zweiter Lehrer an der Vorschule Löpert.	2 Singen.	2 Singen											4

Den Turnunterricht hat der Prof. Langbein; die Schulkasse verwaltet der Prof. Kuhr; die Lehrerbibliothek, das physicalische Cabinet und die Wittwenkasse der Professor Dr. Emsmann; die Schülerbibliothek die Herren Oberlehrer Schmidt und Dr. Claus, das Naturaliencabinet Herr Lincke, das chemische Laboratorium Herr Dr. Most.

Die Schülerzahl betrug

	Michaelis 1861:	Ostern 1862:
VI^b	65	66.
VI^a	58	63.
V^b	66	65.
V^a	66	68.
IV^b	63	66.
IV^a	64	65.
III^b	64	65.
III^a	55	59.
II^c	41	46.
II^b	32	29.
II^a	24	24.
I	13	14.
Summa	612	630.

Unter die Schulbücher wurden aufgenommen:

Die Elemente der Physik von Prof. Dr. Emsmann und das lateinische Lesebuch aus Herodot von Weller.

Die Vorschule hat 5 Klassen mit je halbjährigem Cursus. In den drei obern Klassen wechseln halbjährlich ab die Herren Spohn, Loepert und Kant; in den beiden untern die Herren Wobbermin und Balzer.

Die Schülerzahl betrug

	Michaelis 1861:	Ostern 1862:
VII^a	46	51.
VII^b	54	54.
VII^c	55	58.
VIII^a	50	50.
VIII^b	40	43.
Summa	245	256.

Zu Ostern 1862 machten die Abiturientenprüfung:

1. Theodor Bertheim, gebürtig aus Landsberg a. W., 17½ Jahr alt, 2 Jahr in Prima; er erhielt das Prädicat „gut bestanden" und hat sich der Handlung gewidmet.

2. Gustav Adolf Wolff, aus Stettin, $17\frac{1}{2}$ Jahr alt, 2 Jahre in Prima; er erhielt das Prädicat „gut bestanden" und hat sich dem Forstfach gewidmet.
3. Der Extraneer Wilhelm Duft, aus Greifswald, $23\frac{1}{2}$ Jahr alt; er erhielt das Prädicat „genügend bestanden" und wollte sich dem Baufach widmen.

Jetzt zu Michaelis 1862 bestanden die Prüfung:

1. Ernst Hermann Vierth, aus Stettin, $18\frac{3}{4}$ Jahr alt, $2\frac{1}{2}$ Jahre in Prima; er erhielt das Prädicat „vorzüglich bestanden" und will studiren.
2. Rudolf Wilhelm August Speer, $18\frac{1}{2}$ Jahr alt, 2 Jahre in Prima; er erhielt das Prädicat „gut bestanden" und will sich dem Steuerfach widmen.

Bei der bevorstehenden Entlassung werden sprechen:

Vierth deutsch über das Thema: die Geschichte der deutschen Sprache ist ein Spiegel der Geschichte des deutschen Volkes.

Speer französisch: sur l'esprit français et le génie de la langue française.

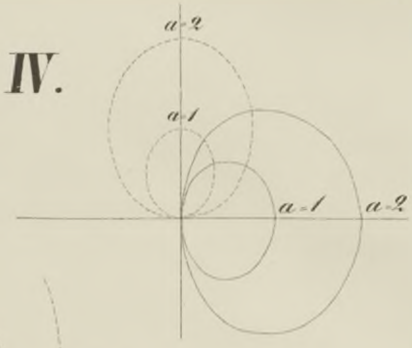
Borchers englisch über das Thema: Greece and Germany.

Zu dieser Feier laden wir den Ober-Präsidenten, Herrn Freiherrn Senfft von Pilsach Excellenz, den General-Superintendenten Herrn Dr. Jaspis, den Oberbürgermeister Herrn Hering, so wie den Magistrat und die Stadtverordneten unserer Stadt, den Provinzial-Schulrath Herrn Dr. Wehrmann, die Hochlöblichen Landes-Collegien und Militairbehörden, das Curatorium unserer Schule, die Eltern und Angehörigen unserer Schüler, so wie alle Freunde unserer Schule ganz ergebenst ein.

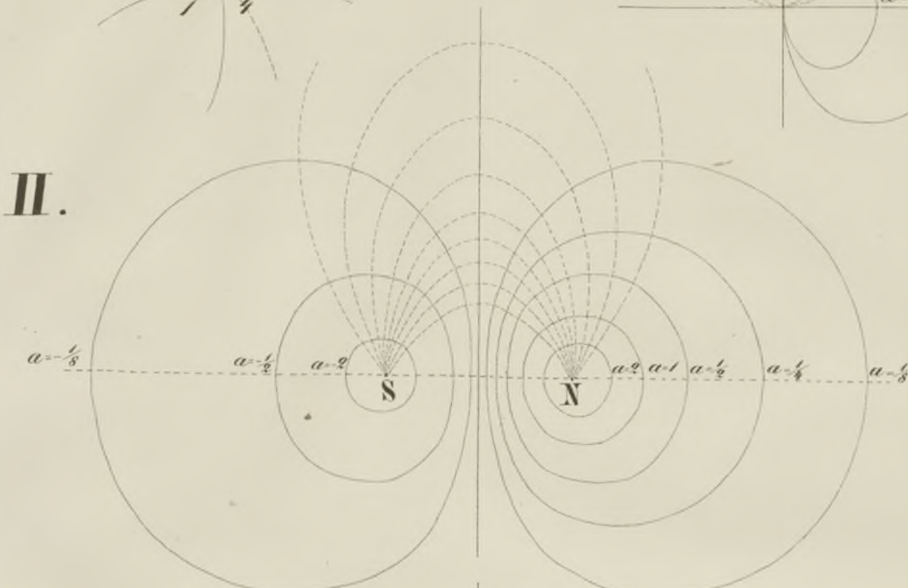
Kleinforge.

I.

IV.



II.



III.