Zeichnungen

für den

stereometrischen Unterricht.

Von

Oberlehrer Dr. **Christoph Ibrügger.**

Beilage zum Jahresbericht des Königlichen Friedrich-Wilhelms-Gymnasiums zu Greifenberg i. P.

Gedruckt bei C. Lemcke in Greifenberg i. Pomm.

1897. Progr.-Nr. 141.

Vorwort.

Eine besondere Unterweisung in darstellender Geometrie, wenn auch von einigen Seiten befürwortet, läßt sich auf Gymnasien innerhalb des mathematischen Unterrichts nicht durchführen, so lange die jetzigen Lehrpläne gelten. Aber auch dem Gymnasial-Schüler muß gelehrt werden, wie genaue stereometrische Figuren zu zeichnen sind; schon deshalb, weil er dadurch ein wesentliches Hülfsmittel für die Lösung von solchen stereometrischen Aufgaben bekommt, die nicht rein algebraischer Art sind. „Gewöhnt sich der Schüler von früh an sich zu fragen, nach welcher von beiden Darstellungsarten, derjenigen vermittelst Parallelperspektive oder derjenigen vermittelst Aufriß und Grundriß sich die zu einer Berechnungsaufgabe notwendige Figur am besten entwerfen läßt, so wird damit schon oft die wesentliche Schwierigkeit der Lösung verschwunden sein." *)

Hier sind diejenigen Darstellungsweisen räumlicher Gebilde genannt, welche im Folgenden in ihren ersten Anfängen besprochen werden sollen. In erster Linie ist dabei an die eigenen Schüler gedacht, die so, da das Lehrbuch keine Anweisung giebt, einen Anhalt für die häusliche Arbeit bekommen. Daher auch die etwas ausführliche Darstellung des an sich einfachen Gegenstandes. Die Verwendung des Stoffes beim Unterricht geschieht hier in der Weise, daß das meiste aus dem Abschnitt über Parallelperspektive — ohne eingehende Begründung —**) bereits in Untersekunda durchgenommen wird. Darum sind auch die schiefwinkligen Projektionen vor den rechtwinkligen behandelt worden. In der Prima wird auf das bereits eingeübte zurückgegriffen und eine genauere Begründung des Verfahrens gegeben. Die Darstellung räumlicher Gegenstände in einfacher Lage nach Grund- und Aufriß folgt dann bei der Behandlung von Aufgaben, wobei diese Darstellung besonders bei Aufgaben über die runden Körper und die regelmäßigen Polyeder bevorzugt wird.

Obgleich man bei den meisten für Gymnasien passenden Aufgaben mit einer Projektionsebene auskommen könnte, sind

*) Kramer, d. darst. Geom. i. Realgymn. Halle 1890, Progr.-Nr. 256.
**) vergl. Reum, d. math. Lernstoff für d. Untersek. S. 22.

doch 2 feste Ebenen eingeführt, schon deshalb, weil mir die Kenntnis der Begriffe „Grund- und Aufriß“ an sich wichtig scheint. — Sonst ist der Stoff auf das nötigste beschränkt: es sind nur rechtwinklige Projektionen begrenzter Gebilde in einfachen Lagen behandelt worden. Die Darstellung von Körpern in allgemeiner Lage, Schnitte durch schiefe Pyramiden, Prismen u. s. w. und Schattenkonstruktionen würden dem wahlfreien Zeichenunterricht vorbehalten bleiben.

Die Auswahl der Beispiele konnte in einer Programmarbeit nur beschränkt sein. Viele passende Aufgaben finden sich in Holzmüller, stereom. Zeichnen, Thieme, Sammlung v. Lehrs. u. Aufg. a. d. Stereom., Schwering, 100 Aufgaben.

Während sich die Gebilde der Planimetrie, weil sie in einer Ebene liegen, ohne weiteres auf eine Zeichenebene übertragen lassen, erwächst der Stereometrie die Aufgabe, Verfahrungsweisen aufzufinden, wie Gebilde von 3 Ausdehnungen gezeichnet, d. h. wie von ihnen zwei-dimensionale, ebene Bilder entworfen werden können. Diese Methoden lehnen sich an den natürlichen Vorgang des Sehens an, genauer an die Entstehung der Bilder auf der Netzhaut des Auges. — Alle die Lichtstrahlen, die von einem sichtbaren Körper herkommend sich in einem gewissen Punkt im Auge, dem sog. Kreuzungspunkt, durchkreuzen, gehen unverändert, d. h. unbeeinflußt durch die Brechung, durch das Auge hindurch. Diese Strahlen, die in ihrer Gesamtheit eine Doppelpyramide oder einen Doppelkegel bilden, deren Spitze im Kreuzungspunkt liegt, treffen nun die Netzhaut, und ihre Schnittpunkte mit der letzteren bestimmen die einzelnen Punkte des Netzhautbildes. Schneidet man daher den Strahlenkomplex durch eine Ebene an beliebiger Stelle vor oder hinter dem sichtbaren Körper, so entsteht auf der Ebene eine Schnittfigur, die in ähnlicher Weise wie das Netzhautbild zustandekommt und in optischer Hinsicht — wenn es sich nur um die Gestalt des Körpers handelt — diesen ersetzen kann.*) Die Schnittfigur ist ein Bild des Körpers. Es heißt ein perspektivisches, da es eine klare Einsicht in die räumlichen Eigenschaften des Körpers gewährt. Der letztere wird dabei so dargestellt, wie er beim Hindurchsehen durch jene Ebene — die Bildtafel, die man sich etwa als eine durchsichtige Glasplatte denken kann — erscheint.

Hieraus ergiebt sich nun, wie man verfahren muß, um möglichst natürliche Bilder eines Körpers zu erhalten: Man muß von einem festen Punkte aus, der dem Auge des Beobachters entspricht, nach den einzelnen Punkten des darzustellenden Gegenstandes Strahlen ziehen, die Gesamtheit der letzteren durch eine feste Ebene schneiden und die Schnittpunkte entsprechend den Lagenverhältnissen des Gegenstandes verbinden. Man nennt dies

*) Von der Krümmung der Netzhaut ist dabei abgesehen.

Verfahren projizieren, der feste Punkt heißt Projektionscentrum, die Strahlen Projektionsstrahlen (P. S.), die feste Ebene Projektionsebene (P. E.), das entstandene Bild eine Projektion und zwar in diesem Falle eine Centralprojektion des Gegenstandes. Die Projektion eines Punktes P ist also der Punkt, in dem der nach P gezogene P. S. die P. E. schneidet.

Zur Erleichterung der Konstruktionen empfiehlt es sich für manche Zwecke, so für den mathematischen Unterricht, von diesem natürlichen Verfahren insofern abzuweichen, als man die P. S. sämtlich parallel nimmt. Dadurch rückt das Projektionscentrum in unendliche Ferne, aus der Strahlenpyramide wird ein Strahlenprisma oder -Cylinder, und das Bild erscheint so, wie es ein Beobachter aus sehr großer Ferne erblicken würde.*) Vogelperspektive. Man kann sich die Entstehung derartiger Bilder veranschaulichen, wenn man mit Hülfe eines Heliostaten Schattenbilder von Drahtmodellen auf einer hellen Wand entwirft. Die Sonnenstrahlen, die bei der großen Entfernung der Sonne als parallel angenommen werden können, sind dabei die P. S., die Wandfläche ist die P. E., das Schattenbild die Projektion.

Solche Bilder heißen, im Gegensatz zu den central-perspektivischen, parallel-perspektivische. Je nachdem, ob die P. S. senkrecht oder schief zur P. E. stehen, unterscheidet man rechtwinklige oder schiefwinklige Parallelprojektionen.

I. Schiefwinklige Projektionen.

§ 1. Eigenschaften parallel-perspektivischer Bilder.

1. Die P. S. aller Punkte einer Graden liegen in einer Ebene, der projizierenden Ebene. Die Schnittlinie der letzteren mit der P. E. ist die Projektion der Geraden.

2. (Fig. 2.) Die Projektionen von Strecken, Winkeln und ebenen Figuren, die parallel zur P. E. liegen, sind diesen kongruent. — $\triangle$ ABC $\cong$ $\triangle$ A'B'C' als Grundflächen des von ihnen und den P. S. gebildeten Prismas.

3. Strecken, die zur P. E. nicht parallel sind, erscheinen verkürzt, in natürlicher Grösse oder verlängert, je nachdem der spitze Winkel, den die Richtung der P. S. mit der Strecke bildet, kleiner, gleich oder grösser ist als derjenige, den jene mit der Projektion einschliesst.

---

*) Fig. 1 zeigt in ABCDEFGH einen Würfel, durch dessen Ecken die Parallelstrahlen AA' u. s. w. gezogen sind, die von rechts oben schief auf die Bildtafel 𝔅 einfallen. Die Spuren, die diese Strahlen beim Durchgang durch 𝔅 zurücklassen, bestimmen auf letzterer das Schrägbild des Würfels A'B'C'D'.... Linien, die durch Flächen verdeckt sind, werden, wenn überhaupt gezeichnet, durch punktierte, Hülfslinien durch gestrichelte Linien kenntlich gemacht.

4. (Fig. 3.) Parallele Geraden haben parallele Projektionen. Die Parallelprojektion eines Parallelogramms ist auch ein Parallelogramm.

Ebene ABA'B' || CDC'D', da die Schenkel der Winkel α und β in ihnen paarweise parallel sind. Daher sind die Geraden A'B' und C'D', in denen sie von $\mathfrak{V}$ geschnitten werden, einander parallel.

5. (Fig. 3.) Gleiche Stücke von parallelen Geraden haben gleiche Projektionen.

Ist AE = u. || CD, so auch A'E' = C'D'. Denn AEDC ist ein Parallelogramm, also auch A'E'D'C'. (§ 1, 4.) Demnach A'E' = C'D'.

6. (Fig. 3.) In demselben Verhältnis, in dem ein Punkt eine Strecke teilt, teilt die Projektion des Punktes die Projektion der Strecke.

AE : EB = A'E' : E'B'. Also haben gleiche Stücke derselben Strecke gleiche Projektionen. Wenn E die Strecke AB halbiert, so halbiert E' A'B'. Die Projektionen harmonischer Punkte sind auch harmonische Punkte u. s. w.

Allgemeiner lassen sich 5 u. 6 noch so aussprechen: Je 2 Strecken einer Geraden, oder je 2 parallele Strecken verhalten sich zu einander wie ihre Parallelprojektionen.

Diese Sätze gelten für rechtwinklige und schiefwinklige Projektionen.

§ 2. Schiefe Projektion einer Strecke, die zur Bildtafel senkrecht steht.

Es soll nun in den folgenden Paragraphen dargelegt werden, wie parallel-perspektivische Zeichnungen von Gegenständen im Raum für den Fall herzustellen sind, daß die P. S. schief auf die Bildtafel einfallen. Durchweg denken wir uns die letztere vertikal gestellt, und zwar so, daß sie eine horizontale Ebene ($\mathfrak{H}$) in einer Geraden — Projektionsachse (P. A.) oder x-Achse genannt — schneidet, die für einen vor ihr stehenden Beschauer von links nach rechts verläuft. Die vertikale Bildtafel nennen wir $\mathfrak{V}$. (Fig. 4.) Öfters wird auch eine zweite Vertikalebene ($\mathfrak{V}_2$) erwähnt werden, die auf $\mathfrak{H}$ und auf $\mathfrak{V}$ senkrecht steht, dann heißt die soeben $\mathfrak{V}$ genannte Ebene $\mathfrak{V}_1$. Diese 3 Ebenen schneiden sich in 3 rechtwinklig zu einander stehenden Achsen (x, y, z). — Die Projektionsbilder, die meist parallel-perspektivische schlechtweg oder cavalier-perspektivische heißen, sollen Schrägbilder genannt werden.

Von grundlegender Wichtigkeit ist es, das Schrägbild einer Strecke zu untersuchen, die auf $\mathfrak{V}$ senkrecht steht. Diese Strecke AB = a (Fig. 4) liege in $\mathfrak{H}$ so, daß sich A auf der P. A. befindet.

AB und der durch B gehende P. S. BB' bestimmen dann eine Ebene, die 𝔙 in einer Geraden schneidet, auf der das Schrägbild von AB, nämlich AB' = a', liegt. Ein beliebiger Punkt C auf AB hat die Schrägprojektion C', die ebenfalls auf AB' liegt (§ 1, 1). Da AB $\perp$ 𝔙, so ist AB' ein Stück der Vertikalprojektion (V. P.) des P. S. BB' auf 𝔙 und $\sphericalangle$ BB'A = ω der Neigungswinkel eines P. S. mit 𝔙. Dann ist

$$\operatorname{cotg} \omega = \frac{a'}{a}.$$

$\frac{a'}{a} = q_s$ heißt das Verkürzungsverhältnis von a. — Wann ist also $a \lesseqgtr a'$? — Da auch BC : B'C' = BA : B'A = q_s, und alle auf 𝔙 senkrecht stehenden Geraden parallel sind, oder da alle P. S. denselben Neigungswinkel ω haben, so bleibt bei der Schrägprojektion für alle Strecken, die — selbst oder verlängert — auf 𝔙 senkrecht stehen, das Verkürzungsverhältnis q_s unverändert (§ 1, 6). Bezeichnet man ferner $\sphericalangle$ OAB', den die V. P. eines P. S. mit der P. A. bildet, mit ϑ, so wird ϑ für alle P. S. dieselbe Größe haben, da diese parallel sind (§ 1, 4); und zieht man in 𝔙 durch C' eine Horizontallinie, d. h. die Parallele zu OA, so muß C'B' mit dieser auch den Winkel ϑ bilden.

Aus der Richtung der P. S. ergiebt sich also außer für q_s auch ein bestimmter Wert für den Winkel, den das Schrägbild einer zu 𝔙 senkrechten Strecke, (das stets eine V. P. eines P. S. ist), mit einer Horizontallinie bildet.

Umgekehrt ist durch gegebene Werte von q_s und ϑ die Richtung der P. S. bestimmt.

Denn zieht man in 𝔙 eine beliebige Strecke AB' = a', die mit der P. A. den Winkel ϑ bildet, so findet man ihre wirkliche Länge $a = a' \cdot \frac{1}{q_s}$, wenn man sie mit dem reciproken Wert von q_s multipliziert; errichtet man dann auf AB' in A das Lot A𝔅 = a und zieht B'𝔅, so ist $\triangle$ A𝔅B' die Umlegung von $\triangle$ ABB' in die Ebene 𝔙. Dreht man dieses Dreieck um AB' als Achse soweit, bis es auf 𝔙 senkrecht steht, so hat man in 𝔅B' einen P. S. im Raum.

Da man nun bei der Herstellung von Schrägbildern die Richtung der P. S. nach Belieben festlegen darf, so kann man für q_s und ϑ beliebig passende Werte wählen; und daher wählt man solche Größen, die beim Zeichnen bequem sind, wie $q_s = 1/2$, $1/3$, 1 u. s. w. $\vartheta = 30^0, 45^0, 60^0, 120^0$.

Die beigefügten Figuren sind fast alle so gezeichnet, dass $q_s = 1/2$, $\vartheta = 45^0$, wobei die P. S. von rechts oben auf 𝔙 einfallen.*) —

Punkte, die in 𝔥 liegen, werden dann so dargestellt, daß man von ihnen auf die P. A. die Lote fällt und von diesen Loten vermittelst q_s und ϑ in 𝔙 die Schrägbilder zeichnet.

---

*) Für diese Richtung gilt ϑ fortan als spitzer Winkel.

§ 3. Zeichnung des Würfels und des regelmäßigen Oktaeders.

1. (Fig. 1.) Wir bringen den Würfel in eine solche Lage, daß eine Seitenfläche ABEF parallel zu 𝔅 und eine Seitenkante AB parallel zur P. A. liegt. Dann werden die beiden Seitenflächen, die parallel 𝔅 sind, als Quadrate in natürlicher Größe, die übrigen 4 als Rhomboide erscheinen. (§ 1, 2 und 4.) Es genügt, das Abbild der 3 Kanten DC, DA, DH, deren wirkliche Länge je gleich a sein mag, herzustellen und dann die Figur durch Parallelen ziehen zu vervollständigen. $D'C' = a$ ist horizontal zu zeichnen, $D'H' = a$ vertikal, $D'A'$ fällt, da $DA \perp 𝔅$, in die Richtung der V. P. eines P. S. (§ 2). Ist $\vartheta = 30^0$ $q_s = 1/2$, so muß $D'A' = 1/2$ a sein und verlängert mit $D'C'$ einen Winkel von 30^0 bilden.

2. (Fig. 5.) Das regelmäßige Oktaeder hat 3 gleiche, einander unter rechten Winkeln schneidende Achsen, die sich im Schnittpunkt halbieren. (Krystalle des regelmäßigen Systems.) Die Achsenlänge a sei gegeben. Wir halten das Oktaeder so, daß die Höhen- und Längenachse parallel zu 𝔅 und letztere parallel zur P. A. ist. Die Tiefen- oder Breiten-Achse steht also senkrecht zur Bildtafel. Die beiden ersten Achsen erscheinen daher im Schrägbild in natürlicher Größe a, die eine senkrecht, die andere wagerecht, während die dritte unter dem Winkel ϑ gegen die Längsachse geneigt ist und die Länge a. q_s hat. Alle Achsen gehen durch einen Punkt und werden in diesem halbiert. Verbindet man die Endpunkte des Achsenkreuzes durch gerade Linien, so ergiebt sich das Schrägbild des Oktaeders.

3. Räumliche Gebilde, deren Ausdehnungen in die Länge, Höhe und Tiefe deutlich hervortreten, werden also am einfachsten in solcher Stellung gezeichnet, daß die beiden ersten in wirklicher Größe erscheinen, und nur die Tiefenachse sich verkürzt und verschoben darstellt. (Frontansicht.) Solche Zeichnungen machen einen natürlichen Eindruck, erscheinen nicht verzerrt, wenn man sie in der Richtung der P. S. anblickt. Man stelle daher das Blatt mit der fertigen Zeichnung senkrecht und blicke aus einiger Entfernung auf dieses in der Richtung der H. P. eines P. S. unter einem Winkel ω, der sich aus $\operatorname{cotg}\omega = q_s$ ergiebt. Die meisten der beigefügten Figuren hat man deshalb, da $q_s = 1/2$, unter einem Winkel $\omega = 63^0\ 26'$ anzusehen.

4. Aufgaben: 1. Zeichne das Schrägbild eines Würfels mit der Kante a, wenn $\vartheta = 60^0$, $q_s = 1/2$; $\vartheta = 135^0$, $q_s = 1/3$; $\vartheta = 45^0$, $q_s = 1$ (eigentliche Cavalier-Perspektive); $\vartheta = 90^0$, $q_s = 1/2$; α) in der Stellung von § 3, 1; β) für den Fall, daß eine Diagonale einer Grundfläche parallel zur P. A. ist. (Konstruiere zuerst diese Diagonale in wirklicher Größe.)

2. Desgl. eines rechtwinkl. Parallelflachs mit den Kanten a, b, c.

3. Desgl. eines regelmäßigen Oktaeders mit der Kante a. (Konstruiere zunächst die Achse.) α) in der Stellung von § 3, 2, β) für den Fall, daß eine horizontale Seitenkante der P. A. parallel ist (Fig. 33 b).

4. Bestimme stets durch Zeichnung und Rechnung $\sphericalangle\ \omega$. (vergl. Fig. 4)

Ist $\vartheta = 90^0$, so fallen die P. S. direkt von vorn und oben nach unten unter dem Winkel ω ein. Dann schrumpfen beispielsweise in dem Bild des Parallelflachs die rechte und linke Seitenwand zu Strecken zusammen, und der scheinbare Umriss des Körpers ist ein Rechteck.

5. Die Ecken eines Würfels sind durch Ebenen abzustumpfen, die je durch die Mitten der in den Ecken zusammenstoßenden Kanten gehen.

Da den Mittelpunkten der Kanten die Mittelpunkte der Kantenbilder entsprechen (§ 1, 6), sind diese Halbierungspunkte in dem Würfelbild durch Strecken zu verbinden.

6. Desgl. für ein regelmäßiges Oktaeder. (Kubooktaeder.)

§ 4. Schrägprojektionen von senkrecht zu $\mathfrak{V}_1$, — in $\mathfrak{H}$ oder $\mathfrak{V}_2$ liegenden — geradlinigen Figuren, die sich leicht in rechtwinklige Dreiecke zerlegen lassen, und damit in Verbindung stehenden Körpern.*) $\vartheta = 45^0$, $q_s = \frac{1}{2}$.

Man zeichne die betr. Figur zunächst in wirklicher Größe; Strecken, die zu $\mathfrak{V}_1$ parallel sind, werden mit den darauf befindlichen Punkten in wirklicher Größe abgezeichnet (§ 1, 2), hierzu senkrechte Strecken in ihren Fußpunkten unter $\sphericalangle\ \vartheta$ und nach Maßgabe von q_s, also hier in halber Größe, angesetzt.

Aufgaben: 1. (Fig. 6) Zeichne das Schrägbild eines in $\mathfrak{H}$ liegenden regelmäßigen Sechsecks, von dem α) der große Durchmesser FC, β) der kleine Durchmesser GH zu $\mathfrak{V}_1$ parallel ist.

(Fig. 7) α) Zeichne $F'C' = FC$ mit den Punkten e und d wagerecht, trage daran in e' und d' nach oben und unten unter einem Winkel von 45^0 je $\frac{1}{2}$ Ae $= \frac{1}{2}$ Bd und verbinde die Endpunkte.

β) — vergl. Fig. 9 — Gehe von GH aus und den dazu senkrechten Strecken AB, FC, ED.

(Fig. 9) Am einfachsten führt man die Konstruktionen an dem gegebenen Sechseck selbst aus, indem man z. B. durch H, M, G Geraden zieht, die mit HG je den Winkel $\vartheta = 45^0$ bilden, auf einer von diesen, etwa auf der durch M, von M aus $\frac{1}{2}$ $MC = MC' = MF'$ abträgt, CC' und FF' zieht und zu diesen Strecken durch die anderen Eckpunkte des Sechsecks die Parallelen zieht. Beweis durch ähnliche Dreiecke!

---

*) Auf den Abstand des Gegenstandes von $\mathfrak{V}$ ist erst in § 6 Rücksicht genommen.

Man nennt $\triangle$ MFF', oder ein ihm ähnliches, ein Projektionsdreieck. Es bestimmt in seiner Lage q_s und $\sphericalangle\ \vartheta$.

2. (Fig. 8) Zeichne das Schrägbild desselben Sechsecks, wenn es in $\mathfrak{V}_2$ liegt.

α) FC mit den Punkten e und d, β) GH mit M sind nun lotrecht zu zeichnen.

3. Zeichne das Schrägbild eines 1) in $\mathfrak{H}$, 2) in $\mathfrak{V}_2$ liegenden gleichseitigen Dreiecks, wenn α) seine Höhe, β) eine Seite zu $\mathfrak{V}_1$ parallel ist.

4. Bilde entsprechende Aufgaben für das regelmäßige Achteck, Zehneck, Fünfeck, sowie für Rhombus, Rechteck und Quadrat.

5. (Fig. 7) Zeichne die Schrägbilder der geraden Pyramiden, die die regelmäßigen Vielecke der früheren Aufgaben als Grundflächen haben, und deren Höhe gleich h gegeben ist. Die Grundflächen sollen in $\mathfrak{H}$ liegen.

Da die Höhe parallel $\mathfrak{V}$ ist, wird sie in natürlicher Größe projiziert. (§ 1, 2) Ihr Fußpunkt ist der Mittelpunkt der Grundfläche; man errichte daher im entsprechenden Punkte des Grundflächenbildes das Lot zur Wagerechten und mache es gleich h.

6. Zeichne die geraden Prismen mit den Grundflächen der vorigen Aufgaben und gegebener Seitenkante b, wenn die eine Grundfläche entweder α) in $\mathfrak{H}$, oder β) in $\mathfrak{V}_2$ liegt, oder γ) parallel zu $\mathfrak{V}_1$ ist. (Stehende und liegende Prismen.)

α) u. β) (Fig. 8) Die Seitenkanten behalten im Bilde ihre natürliche Größe.

γ) (Fig. 10) Die Grundflächen erscheinen in natürlicher Größe, die Seitenkanten verkürzen sich im Verhältnis 1 : 2 und sind gegen die Wagerechte unter einem Winkel von 45^c geneigt.

Wie ändern sich die Zeichnungen für α) u. β), wenn die Seitenkanten parallel zu $\mathfrak{V}_1$ und gegen $\mathfrak{H}$ unter dem Winkel α geneigt sind?

§ 5. Darstellung von Kreis, Cylinder, Kegel, Kugel.

Aufgaben: 1. Zeichne das Schrägbild eines Kreises mit gegebenem Radius, der α) in $\mathfrak{H}$, β) in $\mathfrak{V}_2$ liegt.

(Fig. 11.) Zieht man den zur Zeichenebene parallelen Durchmesser AB, sowie eine Anzahl zu diesem senkrechte Sehnen, — so daß etwa der Kreisumfang in 12 gleiche Teile geteilt wird — so wird AB mit den Fußpunkten der Sehnen darauf in natürlicher Größe projiziert, während sich die Sehnen in bekannter Weise darstellen. Die Endpunkte der letzteren hat man durch eine Kurve aus freier Hand zu verbinden.

Man bedient sich am einfachsten, wie in § 4, Aufgabe 1, des Projektionsdreiecks MDD'. Das Schrägbild des Kreises ist eine Ellipse, deren große Achse mit AB nicht zusammenfällt.

Die scheinbare Verzerrung verschwindet wieder, wenn man in der Richtung der P. S. auf die Zeichnung blickt. Daher sind hier die Bemerkungen § 3, 3 besonders zu beachten.

AB und C'D' sind ein Paar konjugierte Durchmesser.*)

Aus der Zeichnung ergiebt sich: die Verbindungslinien entsprechender Punkte von Kreis und Ellipse, z. B. EE' und GG', sind parallel. Zieht man ferner durch E und G eine Gerade, welche die verlängerte AB in K schneidet, so ist eK : gK = Ee : Gg, führt man dieselbe Konstruktion bei den entsprechenden Ellipsenpunkten E' und G' aus, so ist eK : gK = E'e : G'g = Ee : Gg. Entsprechende Sehnen beider Kurven schneiden einander also in einem Punkt auf der Achse AB. Da die Tangenten der Kurven als Sehnen aufgefaßt werden können, deren beide Schnittpunkte mit jenen in einen Punkt zusammenfallen, so folgt hieraus, daß Tangenten, die in entsprechenden Punkten an Kreis und Ellipse gezogen sind, sich auf der Achse AB schneiden. Zieht man also an den Kreis in F die Tangente, welche AB in L schneidet, so ist LF' eine Ellipsentangente. — Welche Gerade berührt gleichzeitig Kreis und Ellipse? —

Für die Ausführung der Zeichnung empfiehlt es sich, das dem Kreise umbeschriebene Quadrat, das diesen in den Punkten A, B, C, D berührt, mit zu projizieren, — das sich ergebende Parallelogramm muß die Ellipse in den Punkten A'B'C'D' berühren, — oder andere dem Kreis umbeschriebene regelmäßige Vielecke zu benutzen. So sind bei Fig. 12 die beiden Quadrate verwandt, welche das dem Kreise umbeschriebene regelmäßige Achteck bestimmen. Hierdurch ergeben sich 8 Tangenten mit ihren Berührungspunkten — eine der bequemsten Konstruktionen. Auch ist es praktisch, mit den Kreispunkten die betr. Tangenten gleichzeitig zu übertragen. Fig. 11 zeigt das Schrägbild des Kreises in horizontaler, Fig. 12 in vertikaler Lage.

Fallen die P. S. so auf die Zeichentafel, daß $\vartheta = 90^0$ (s. § 3, 4 Aufg. 4), so wird aus dem dem Kreise umbeschriebenen Quadrat ein Rechteck. Die Punkte der Ellipse ergeben sich, für $q_s = {}^1/_2$, durch Halbierung der parallelen Sehnen-Hälften. Die Hauptachse fällt mit AB zusammen, die Nebenachse ist gleich $2r.\, q_s$.

2. Zeichne das Schrägbild eines Würfels mit den den Seitenflächen einbeschriebenen Kreisen (vergl. Fig. 12).

3. Zeichne das Schrägbild der Großkreise einer Kugel, von denen einer in $\mathfrak{H}$, die beiden anderen in $\mathfrak{B}_1$ und $\mathfrak{B}_2$ liegen. — Fig. 12 zeigt 2 derartige Kreise, Fig. 16 alle drei.

---

* Beweis: Es sei AB = 2a, C'D' = 2b, Me und E'e mögen mit u und v bezeichnet werden, so ist, da $Ee^2 = Ae.\, eB$, $Ee^2 = (a + u)\,(a - u) = a^2 - u^2$. Da $\triangle\, EeE' \backsim CMC'$, so ist $Ee = v.\,\frac{a}{b}$, also $v.^2\,\frac{a^2}{b^2} = a^2 - u^2$ oder $\frac{u^2}{a^2} + \frac{v^2}{b^2} = 1$.

4. Zeichne einen geraden Kreiscylinder (Radius r, Höhe h) 1. in aufrechter Stellung (Fig. 13), 2. in liegender Stellung, so daß seine Achse der Zeichentafel $\mathfrak{B}$ α) parallel ist, β) zu ihr senkrecht steht (Fig. 14).

(Fig. 13.) 1. Zeichne nach Aufgabe 1 das Schrägbild der Grundfläche, errichte in den einzelnen Punkten desselben senkrecht zu A'B' Lote gleich der Cylinderhöhe und verbinde die erhaltenen Punkte durch eine Kurve. Der von dem Cylinder im Bilde sichtbare Teil, der scheinbare Umriß, wird durch die den Ellipsen gemeinsamen Tangenten bestimmt.

2α. Ähnlich wie 1. Vergl. Fig. 8.

(Fig. 14.) 2β. Da die Grundflächen zu $\mathfrak{B}$ parallel sind, so erscheinen sie in natürlicher Größe als Kreise. Die Cylinderachse verkürzt sich in gewohnter Weise. Die Grenzen der Sichtbarkeit werden durch die den Kreisen gemeinsamen Tangenten bestimmt.*)

5. (Fig. 15.) Zeichne das Schrägbild eines geraden Kreiskegels — Radius r, Höhe h — in aufrechter Stellung.

Errichte auf A'B' in M' das Lot gleich h. Der sichtbare Teil des Kegels ergiebt sich im Bilde, wenn man von dem Endpunkt der Höhe an die Grundflächenellipse die Tangenten legt. — Wodurch wird auch hier der wirkliche Umriss des Kegels bestimmt?

6. Das Schrägbild einer Kugel — Radius r — ist zu entwerfen mit Hülfe von Kreisschnitten, die parallel sind α) $\mathfrak{H}$ ($\mathfrak{B}_2$), β) $\mathfrak{B}_1$.

(Fig. 16.) α) Der Kreis mit dem Durchmesser AB möge ein Großkreis der Kugel sein, der zu $\mathfrak{B}$ parallel ist. CD $\perp$ AB. Wir ziehen eine Anzahl Sehnen EF, GH ... $\parallel$ AB — etwa so, daß der Kreis in 12 gleiche Teile geteilt wird. Ebenen durch AB, EF ..., die auf $\mathfrak{B}$ senkrecht stehen, schneiden dann die Kugel in Kreisen, deren Radien der Reihe nach $\frac{1}{2}$ AB, $\frac{1}{2}$ EF, $\frac{1}{2}$ GH .. sind. Von jedem dieser Kreise zeichnen wir das elliptische Schrägbild nach Aufg. 1 über ihren Durchmessern AB, EF .... Der scheinbare Umriß der Kugel ist eine Ellipse, welche die 5

*) Legt man an den Cylinder die Tangentialebenen, die der Richtung der P. S. — gegeben durch ϑ u. q_s — parallel sind, so grenzen die Berührungslinien den sichtbaren Teil des Mantels von dem unsichtbaren ab. Die Berührungsebenen schneiden die Basisebenen des Cylinders je in 2 Geraden, welche Tangenten der Grundkreise sind. Bestimmt man daher auf dem Bilde des Grundkreises die Punkte, welche den Berührungspunkten dieser Tangenten entsprechen und zeichnet durch dieselben die Mantellinien, so hat man den geradlinigen Teil des scheinbaren Umrisses. Um die Punkte zu bestimmen, muss man die senkrechten Projektionen der P. S. auf die 3 Hauptebenen konstruieren und parallel zu ihnen, je nachdem der Grundkreis der Grund-, Seiten- oder Aufriss des Cylinders ist, an den Kreis die Tangenten ziehen. Am einfachsten ist die Aufgabe für Fig. 14. Hier sind jene Kreistangenten unter den Winkel ϑ gegen die Wagerechte geneigt.

gezeichneten Ellipsen berührt.*) Man zeichne sie aus freier Hand. — Zeichnung anderer Umdrehungskörper ähnlich.

β) Fig. 17a ist ein Großkreis, den $\mathfrak{H}$ aus der Kugel ausschneidet, über den Sehnen AB, EF, GH .. stehen Kreise parallel $\mathfrak{V}$, welche sich nach § 1, 2 in natürlicher Größe abbilden. Man zeichne daher $C'D' = \frac{1}{2}$ CD und wie gewöhnlich verschoben, auf C'D' die Strecken MM_1 .... in demselben Verhältnis verkürzt, beschreibe um M' mit AM, um M'_1 mit EM_1 ... Kreise und zeichne um diese aus freier Hand die berührende Ellipse. (Fig. 17b.)

§ 6. Darstellung von beliebigen in $\mathfrak{H}$ liegenden Figuren und beliebig gestalteten Körpern.

1. Bei geradlinigen Figuren bezieht man die Eckpunkte, bei krummlinigen eine hinreichend grosse Anzahl auf ein rechtwinkliges Koordinatensystem, dessen Abscissenachse mit der P. A. zusammenfällt. Die Ordinaten der Punkte hat man dann samt dem betr. Stück der P. A. auf $\mathfrak{V}$ zu projizieren und ihre Endpunkte entsprechend ihrer wirklichen Lage zu verbinden.

Aufgabe: (Fig. 18 a u. b) Das Schrägbild einer Pyramide zu zeichnen, von der gegeben ist: die Grundfläche ABCD, die Höhe h und der Fußpunkt der letzteren E. — Die Entstehung der Figur 18b ist ohne weiteres klar.**)

2. Hieraus ergiebt sich, daß man, um im Raum gelegene Punkte zu zeichnen, sie auf ein räumliches Koordinatensystem (x, y, z) — Fig. 4 u. 18 — zu beziehen hat. Die xz Ebene entspricht der Zeichentafel $\mathfrak{V}_1$, die xy Ebene $\mathfrak{H}$, die yz Ebene $\mathfrak{V}_2$. Ein Punkt ist seiner Lage nach bekannt, wenn man seine Koordinaten OF, FE, SE kennt. Sein Bild wird gefunden, wenn man den Linienzug OFES auf die xz Ebene schief projiziert. Handelt es sich daher um das Schrägbild eines beliebigen Gegenstandes im Raum, so beziehe man ihn auf ein passend gewähltes rechtwinkliges Koordinatensystem und fälle von seinen einzelnen Punkten die Lote auf die horizontal liegende xy Ebene, die den Körper durchsetzen, sich unter oder über ihm befinden kann. Die Figur, die die Fußpunkte dieser Lote bilden, muß wie in Fig. 18 umgeändert werden, in den gewonnenen Punkten sind

---

*) Der wirkliche Umriss der Kugel ist ein Grosskreis, längs dessen ein Cylinder, dessen Mantellinien den P. S. parallel sind, jene berührt. Dieser Kreis steht auf der Richtung der P. S. senkrecht. Die die Kugel berührenden P. S. bilden also einen geraden Kreiscylinder mit dem Umrisskreis als Grundfläche; und da $\mathfrak{V}$ ihn schief schneidet, muss jedes Schrägbild einer Kugel eine Ellipse sein (s. § 12, 1). f_1 und f_2 sind ihre Brennpunkte, ihre Nebenachse $b_1 b_2 = 2r$. Beweis s. Rohn u. Pappritz, darst. Geom. Bd. II, S. 386.

**) Wie findet man umgekehrt aus der perspektivischen Zeichnung die gegebenen Stücke?

dann Lote zur Horizontalen in ihrer wirklichen Länge zu errichten, und deren Endpunkte sind schließlich zu verbinden.*)

Jene Fußpunktfigur ist die senkrechte Projektion des Körpers auf $\mathfrak{H}$. Man sieht also, daß man zur Ausführung schiefer Projektionen auf die Orthogonalprojektionen zurückgreifen muß.

II. Senkrechte Projektionen.

§ 7. Projektion eines Punktes.

1. Wir gehen aus von 2 rechtwinklig zu einander stehenden Ebenen $\mathfrak{H}$ und $\mathfrak{V}$, die ebenso liegen, wie in § 2 angegeben ist. (Fig. 4.) Die erste Tafel $\mathfrak{H}$ heißt Horizontal- oder Grundriß-Ebene, die zweite Vertikal- oder Aufriß-Ebene. Öfters ist auch eine 3. Ebene $\mathfrak{V}_2$, die Seitenriß-Ebene, nötig.

Ein Raumpunkt P (Fig. 19) möge sich über $\mathfrak{H}$ und vor $\mathfrak{V}$ befinden — auf diese Lage beschränken wir uns —. Wir fällen von ihm die Lote $PP' \perp \mathfrak{H}$, $PP'' \perp \mathfrak{V}$, ziehen von P' aus $P'P_x$ senkrecht zur P. A. und verbinden P'' mit P_x.

P' heißt der Grundriß (Gr.), P'' der Aufriß (Ar.) von P. $PP'P_xP''$ ist ein Rechteck. $PP' = P''P_x$ mißt den Abstand des Punktes P von $\mathfrak{H}$, $PP'' = P'P_x$ den Abstand desselben Punktes von $\mathfrak{V}$. — Ist nun die Lage von P', sowie die von P'' bekannt, so ist dadurch die Lage von P bestimmt: man muß in P' und P'' die Lote auf $\mathfrak{H}$ und $\mathfrak{V}$ errichten, so werden sich diese in P schneiden. Auch durch die Lage von P' in der festen Ebene $\mathfrak{H}$ und durch die Länge des Projektionslotes PP' ist P bestimmt, ebenso durch P'' in $\mathfrak{V}$ und PP''.

2. (Fig. 20) Um nun anstatt der beiden Tafeln eine einzige Zeichenebene zu haben, legt man $\mathfrak{V}$ nach hinten um die P. A. als Achse um, bis sie mit $\mathfrak{H}$ in derselben Ebene liegt. Dann werden $P'P_x$ und $P''P_x$, da sie in P_x auf der Drehungsachse senkrecht stehen, in eine Gerade fallen, die mit der P. A. einen rechten Winkel bildet. Man darf daher zu P' das zugehörige P'' nicht willkürlich legen; sondern, wenn der Gr. eines Punktes bekannt ist, so kennt man einen geometrischen Ort für den Ar: dieser liegt auf dem Lote, das man von P' auf die P. A. fällt. Entsprechendes gilt, wenn P'' bekannt ist.

3. Will man aus Fig. 20 die Lage von P im Raum bestimmen, so muß man sich $\mathfrak{V}$ wieder aufgerichtet denken, und dann die Lote wie in 1) auf $\mathfrak{H}$ und $\mathfrak{V}$ errichten; oder man errichtet auf $\mathfrak{H}$ in P' das Lot $P'P = P''P_x$; oder endlich auf $\mathfrak{V}$ — nachdem sie aufgerichtet ist — in P'' das Lot $P''P = P'P_x$.

*) Auf diese Weise wird ausser der Gestalt auch die Lage des Gegenstandes im Raum festgelegt.

4. Liegt ein Punkt A in $\mathfrak{H}$, so fällt sein Gr. mit ihm zusammen, sein Ar. fällt in die P. A.; liegt ein Punkt B in $\mathfrak{V}$, so liegt sein Gr. in der P. A. (Fig. 20). Liegt ein Punkt auf der P. A., so fallen seine beiden Projektionen mit ihm zusammen.*)

§ 8. Projektion einer Strecke.

1. (Fig. 23 u. 24) Die Projektionen einer Geraden g′, g″ sind bekannt, wenn die Projektionen von 2 Punkten auf ihr gegeben sind: Man verbinde dann die Projektionspunkte. Projizierende Ebene s. § 1, 1. — Eine Strecke AB, ihre Projektion und die Projektionslote ihrer Endpunkte bilden ein Trapez, wenn die Strecke zur P. E. schief steht (Fig. 23); ein rechtwinkliges Dreieck, wenn ein Endpunkt in der P. E. liegt; ein Rechteck, wenn die Strecke der P. E. parallel ist. Liegt die Strecke in einer der P. E., so fällt die gleichnamige Projektion mit ihr zusammen. — Steht die Strecke schief zu beiden P. E., so sind beide Projektionen schief zur P. A. (Fig. 24). Liegt die Strecke in einer der P. E., z. B. in $\mathfrak{H}$, so fällt ihr Gr. mit ihr zusammen, ihr Ar. ist ein Stück der P. A. Ist sie einer P. E. parallel, so ist die Projektion auf diese Ebene ihr gleich und die Projektion auf die andere P. E. ist zur P. A. parallel (s. Fig. 21 und 22 die Projektionen von BC und CD). Ist sie beiden P. E. parallel, so werden beide Projektionen ihr gleich und parallel zur P. A. Steht sie auf einer P. E. senkrecht (AB Fig. 21), so reduziert sich die Projektion auf diese Ebene auf einen Punkt, während die Projektion auf die andere P. E. senkrecht zur P. A. steht. Liegt sie in einer Ebene, die zur P. A. senkrecht ist, so sind beide Projektionen senkrecht zur P. A.

2. Sind A′, A″, B′, B″ die Projektionen der Endpunkte einer Strecke (Fig. 24), so erhält man die Strecke im Raum, wenn man die Lage von A und B nach § 7, 3 bestimmt und diese Punkte verbindet.

3. Aufgabe: Eine Strecke AB ist gegeben durch die Projektionen ihrer Endpunkte. Zeichne die wirkliche Länge von AB, sowie die Winkel α und β, die sie mit $\mathfrak{H}$ und $\mathfrak{V}$ bildet (Fig. 23, 24)

Lege Trapez AA′B′B nach vorn um A′B′ in $\mathfrak{H}$ um. Man kann dasselbe konstruieren, da von ihm bekannt ist A′B′. $\sphericalangle A' = \sphericalangle B' = R$, $AA' = A''A_x$, $BB' = B''B_x$.

$\mathfrak{A}_1\mathfrak{B}_1$ ist die gesuchte Strecke. In ähnlicher Weise hätte man die V. P. benutzen können, dann ergiebt sich $\mathfrak{A}_2\mathfrak{B}_2$. (Probe für die Genauigkeit der Zeichnung: $\mathfrak{A}_1\mathfrak{B}_1 = \mathfrak{A}_2\mathfrak{B}_2$.)

---

*) Fig. 22 zeigt die Gr. und Ar. der Eckpunkte eines regelm. Tetraeders (§ 10, 2, Aufg. 6) zugleich mit den Projektionsloten, sowie die Umlegung von $\mathfrak{V}$. Fig. 21 enthält die Projektionen in wirklicher Grösse.

Der Neigungswinkel α, den AB mit $\mathfrak{H}$ bildet, ist der Winkel, den AB mit A'B' einschließt. Da sich dieser bei der Umlegung der proj. Ebene nicht ändert, so findet man ihn, wenn man $\mathfrak{A}_1\mathfrak{B}_1$ bis zum Schnitt G_1 mit A'B' verlängert. Oder man ziehe durch $\mathfrak{B}_1$ zu A'B' die Parallele. Ähnlich findet man β.

Eine 3. Lösung ist in Fig. 24 angedeutet.

G_1, der Punkt, in dem die Gerade g nach ihrer Aufrichtung $\mathfrak{H}$ schneidet, heisst ihre Spur in $\mathfrak{H}$. Eine Gerade ist auch bestimmt, wenn man ihre Projektion auf eine Grundebene, ihren Spurpunkt und den Neigungswinkel, den sie mit der festen Ebene bildet, kennt.

§ 9. Projektion von ebenen Figuren.

Man erhält die Projektionen, wenn man die begrenzenden Linien der Figuren auf $\mathfrak{H}$ und $\mathfrak{V}$ projiziert.

Aufgaben: 1. (Fig. 25) Von einem Dreieck kennt man den Gr., sowie die Entfernung der Eckpunkte von $\mathfrak{H}$. Zeichne den Ar., sowie das Dreieck in wirklicher Größe.

Ist gegeben A'B'C', sowie die Längen $\mathfrak{a}$, $\mathfrak{b}$, $\mathfrak{c}$, so fälle man von A'B'C' die Senkrechten auf die P. A. und verlängere sie je um $\mathfrak{a}$, $\mathfrak{b}$, $\mathfrak{c}$. So ergiebt sich der gesuchte Ar. A''B''C''. Um das Dreieck selbst zu zeichnen, bestimme man die Größe der Seiten nach § 7, 3. Daraus ist $\triangle$ ABC zu konstruieren.

(Fig. 26 und 27) Zur Lösung des 2. Teiles der Aufgabe empfiehlt sich ein anderes Verfahren, das viele Anwendungen zuläßt. Ist ABC das gesuchte Dreieck, A'B'C' sein gegebener Gr. (Fig. 26), so läßt sich die Gerade bestimmen — die Spurlinie —, in der die Ebene des Dreiecks ABC $\mathfrak{H}$ schneidet. Verlängert man nämlich die vom höchsten Punkte C ausgehenden Seiten und deren Projektionen bis zu ihren Schnittpunkten D und E, so ist DE ein Stück der Spur. Die Dreiecke CC'D und CC'E, die wir uns nach links und rechts, um CD und CE als Achsen, in $\mathfrak{H}$ umgelegt denken, sind nun konstruierbar (vergl. § 8, 3) (als $\triangle$ $\mathfrak{C}_1$C'D und $\triangle$ $\mathfrak{C}_2$C'E in Fig. 27), und dadurch ist DE bestimmt. Zieht man dann C'F $\perp$ DE und verbindet C mit F, so steht die „Falllinie" CF $\perp$ DE. CF ist die Hypotenuse in $\triangle$ CC'F, das man aus den Katheten CC' und C'F konstruieren kann. ($\triangle$ $\mathfrak{C}_3$C'F in Fig. 27.) Nun denken wir uns $\triangle$ DEC nach vorn um DE in $\mathfrak{H}$ umgelegt, dann wird CF in die Verlängerung von C'F fallen, da beide in F auf DE senkrecht stehen. Da aber die Länge von CF schon gefunden ist, läßt sich $\mathfrak{C}_4$, die Umlegung von C, und damit $\triangle$ DCE, bestimmen. Die wirkliche Größe von $\triangle$ ABC ergiebt sich dann, wenn man die vorhin gefundenen Strecken AC $= \mathfrak{A}_1\mathfrak{C}_1$ und BC $= \mathfrak{B}_1\mathfrak{C}_2$ von $\mathfrak{C}_4$ aus auf $\mathfrak{C}_4$D und $\mathfrak{C}_4$E abträgt. In $\sphericalangle$ C'F$\mathfrak{C}_3$ hat man den Neigungswinkel, den die Ebene von $\triangle$ ABC mit $\mathfrak{H}$ bildet. — Zur Probe der

Genauigkeit der Zeichnung prüfe man z. B., ob $\mathfrak{E}_1 D = \mathfrak{E}_4 D$. Andere Proben!

2. Von einer Ebene ist gegeben die Spurlinie in $\mathfrak{H}$ und ein in der Ebene gelegener Punkt (durch seine Projektionen P', P''). Die Umlegung von P in $\mathfrak{H}$ ist zu zeichnen.

3. Von einer dreiseitigen Pyramide ist gegeben: das Grunddreieck, der Fußpunkt der Höhe und α) die Höhe, β) der Neigungswinkel einer Seitenfläche, γ) der Neigungswinkel einer Seitenkante gegen die Grundfläche. Zeichne das Netz der Pyramide.

Eine Ebene ist bestimmt durch ihre Spur e in einer festen Ebene $\mathfrak{H}$ und die Projektionen eines ihrer Punkte, oder durch e und ihren Neigungswinkel mit $\mathfrak{H}$.

4. (Fig. 28) Ein gerades dreiseitiges Prisma, dessen Grundfläche in $\mathfrak{H}$ liegt, ist durch seine Projektionen (vergl. § 10) gegeben. Zeichne das Dreieck, in welchem eine Ebene, die auf $\mathfrak{V}$ senkrecht steht und $\mathfrak{H}$ unter einem Winkel α in e schneidet, das Prisma durchschneidet.

$D''G$, $E''G$, $F''G$ sind die Längen der von den Punkten D, E, F auf e gefällten Falllinien. Um diese hat man die von A, B, C auf e gefällten Lote zu verlängern, damit sich die Umlegung $\triangle\ \mathfrak{D}\mathfrak{E}\mathfrak{F}$ ergiebt.

5. Von einem geraden schief abgeschnittenen Prisma kennt man die Grund- und Seitenkanten. Zeichne den Kreis, der der Deckfläche umbeschrieben ist.

§ 10. Projektion von Körpern.

Man projiziere die begrenzenden Flächen. Bei runden Körpern, wie bei der Kugel, findet man Gr. und Ar. je als Durchschnitt des projizierenden Cylinders mit $\mathfrak{H}$ und $\mathfrak{V}$.

Aufgaben: 1. Zeichne den Gr. und Ar. einer regelmäßigdreiseitigen Pyramide mit der Grundkante a und der Höhe h, deren Grundfläche in $\mathfrak{H}$ liegt. (Fig. 29.)

Gr.: Die Grundfläche projiziert sich in natürlicher Größe als gleichseitiges Dreieck ABC, der Gr. der Spitze D' fällt, da die Seitenkanten gleich sind, in den Mittelpunkt M von $\triangle$ ABC. Welches sind die Gr. der Kanten, der Seitenflächen?

Ar.: A, B, C liegen in $\mathfrak{H}$, also fallen ihre Ar. in die P. A. Den Ar. der Spitze D'' erhält man, wenn man das von D' auf die P. A. gefällte Lot um h verlängert. Welches sind die Ar. der Kanten, der Grenzflächen?

Ist anstatt h ein anderes Stück, z. B. die Seitenkante b, gegeben, so konstruiere man zuerst die Höhe $M\mathfrak{D}$ aus dem in $\mathfrak{H}$ umgelegten Dreieck AED.

2. Zeichne von voriger Pyramide den Neigungswinkel 1. der Seitenkanten, 2. der Seitenflächen gegen die Grundfläche.

Die Konstruktionen können an der Figur des Gr. durch Umklappung von $\triangle$ AED ausgeführt werden — $\measuredangle\ \mathfrak{D}ED'$ ist einer der gesuchten Winkel — oder am Ar., indem man dasselbe Dreieck um MD als Achse, so weit dreht, bis es zu $\mathfrak{V}$ parallel ist, (welche Spuren hinterlassen dabei A und E in $\mathfrak{H}$?) und dann das so gedrehte Dreieck auf $\mathfrak{V}$ projiziert. $\sphericalangle$ $D''A_1''M''$ ist einer der gesuchten Winkel.

3. Zeichne den Neigungswinkel zweier Seitenflächen. Fällt man von B und C auf AD je das Lot, so haben diese denselben Fußpunkt F. $\triangle$ BFC ist um BC in $\mathfrak{H}$ herunterzuklappen. Die Höhe dieses Dreiecks ist das von E auf A$\mathfrak{D}$ gefällte Lot, seine Spitze fällt nach der Umlegung auf AD′. Beweis! $\sphericalangle$ $B\mathfrak{F}_2C$ ist der verlangte.

4. Zeichne von derselben Pyramide Gr. und Ar. der Seitenhalbierenden in den Seitenflächen, die von D ausgehen.

Die Gr. sind bestimmt durch D′ und die Mittelpunkte von AB, BC, CA (§ 1, 6). Letztere Punkte sind, um den Ar. zu bekommen, in die P. A. zu projizieren.

5. Die Schwerpunkte der Seitenflächen derselben Pyramide, sowie die Mittelpunkte der Seitenkanten und ihre Projektionen auf $\mathfrak{H}$ bilden je die Ecken eines geraden Prismas. Beweis! Zeichne den Gr. und Ar. der Prismen.

Die Zeichnung für das erste Prisma ist an Fig. 21 (regelm. Tetraeder) ausgeführt.

6. Gr. und Ar. eines regelmäßigen Tetraeders mit der Kante a ist zu zeichnen, dessen eine Seitenfläche parallel zu $\mathfrak{H}$ liegt und zwar so, daß eine Grundkante senkrecht auf $\mathfrak{V}$ ist. (Fig. 21.)

Der Gr. ist ein gleichseitiges Dreieck $A'B'C' \cong ABC$ (§ 1, 2). Der Ar. von $\triangle$ ABC ist $\overline{A''C''}$ ∥ P. A. (§ 8, 1). D″ liegt senkrecht über D′ und $M''D'' = M'\mathfrak{D}$. Oder $C''D'' = a$. Den Ar. von BA bildet ein Punkt B″ (A″). $\triangle$ $A''C''D''$ ist dem Schnitt kongruent, der durch die Kante DC senkrecht zu $\triangle$ ABC gelegt ist.

Fig. 21 ist bei der Zeichnung und Berechnung der Hauptstücke des regelm. Tetraeders, sowie der Radien der Um-, In- und Kantenmittelpunktskugel, des umbeschriebenen Kegels u. s. w. zu Grunde zu legen.

7. Zeichne den Gr. und Ar. einer geraden quadratischen Pyramide mit der Grundkante a und der Seitenkante b in der Lage von Aufgabe 1. Löse die entsprechenden Aufgaben wie bei der dreiseitigen Pyramide.

(Andere regelmäßige Vielecke als Grundflächen!)

8. Die Pyramide der vorigen Aufgabe ist durch eine Ebene parallel $\mathfrak{H}$ in der Höhe h abzustumpfen. Eine Grundkante möge parallel zur P. A. sein.

Der Ar. ist ein gerades Trapez mit der Grundlinie a und der Höhe h; der Gr. wird gefunden, wenn man die oberen Eckpunkte dieses Trapezes in die Diagonalen des Grundquadrats projiziert.

9. Zeichne den Gr. und Ar. eines regelmäßigen Oktaeders mit der Kante a, dessen eine Diagonale auf $\mathfrak{H}$ senkrecht steht und dessen eine Kante parallel zu $\mathfrak{V}$ ist. Fig. 33 a.

Der Gr. ist ein Quadrat aus der Seite a, die Gr. der Seitenkanten fallen mit den halben Diagonalen zusammen. Deren Schnittpunkt ist nach E″ zu projizieren und E″F″ = A′C′. — Welches sind die Gr. und Ar. der Kanten, der Seitenflächen, der Kantenmittelpunkte, der Mittelpunkte der Seitenflächen? Wie ergiebt sich der Gr. als Schnittfigur des Oktaeders, wie der Ar.?

10. Desgl. für ein regelmäßiges Oktaeder, dessen Diagonalen EF ⊥ 𝔋 und AC ⊥ 𝔙 stehen.

Beide Projektionen sind Quadrate.

Beachte die Anm. bei Aufg. 6.

11. Zeichne den Gr. und Ar. eines geraden 3seitigen auf 𝔋 stehenden Prismas, von dem die Grundkanten und die Höhe gegeben sind. (Fig. 28.)

12. Zeichne den Gr. und Ar. eines Würfels, dessen Grundfläche in 𝔋 liegt, wenn 1. eine Grundkante, 2. eine Diagonale der Grundfläche parallel zu 𝔙 ist.*)

§ 11. Schnitte durch Cylinder, Kugel, Kegel.

1. Ein gerader Kreiscylinder mit dem Radius r und der Höhe h wird durch eine Ebene *E*, die durch ihre Spur e und ihre Neigung α mit der Grundebene des Cylinders gegeben ist, geschnitten. Zeichne die Kurve, in welcher der Cylindermantel geschnitten wird. (Fig. 30.)

Läßt man den Grundkreis mit 𝔋 zusammenfallen und legt 𝔙 so, daß sie senkrecht zu *E* ist, so ist der Gr. des Cylinders ein Kreis mit dem Radius r, der von den verlängerten Seitenlinien des Ar. berührt wird, und die Spur e von E steht zur P. A. senkrecht. Der Ar. von *E* ist eine Gerade, die zur P. A. unter dem Winkel α geneigt ist. Der zu 𝔙 parallele Achsenschnitt *A* des Cylinders schneidet *E* in einer Strecke AB = 2a, die ihrem Ar. A″B″ gleich ist. Mit A″B″ fallen auch die Ar. aller Punkte der Schnittfigur zusammen. Legt man durch einen beliebigen Punkt der letzteren (Gr. P′, Ar. P″) eine Ebene parallel 𝔋, so muß diese den Cylinder in einem Kreise mit dem Radius r schneiden. Der in *A* liegende Durchmesser heiße CD (Ar. C″D″), und um C″D″ ist die Hälfte des Kreises in 𝔙 umgelegt. Der Halbkreis und die vordere Hälfte der Schnittfigur schneiden einander in einer Strecke, die als Schnittlinie zweier auf *A* senkrecht stehenden Ebenen auf AB und CD senkrecht steht. Diese Strecke ist gleich P″$\mathfrak{P}_1$. Errichtet man auf A″B″ in P″ das Lot P″$\mathfrak{P}_2$ = P″$\mathfrak{P}_1$, so ist $\mathfrak{P}_2$ die Umlegung von P in 𝔙. Verfährt man ebenso bei anderen Punkten von A″B″, so läßt sich die Umlegung der vorderen Hälfte der Schnittfigur

*) Die Aufgaben dieses § mussten auf die einfachsten beschränkt werden.

punktweise konstruieren. Eine Erleichterung der Zeichnung ergiebt sich daraus, daß $P''\mathfrak{P}_1 = pP'$ ist.

Bezieht man die Schnittkurve auf ein rechtwinkliges Koordinatensystem,, dessen Abscissenachse mit AB, und dessen Ordinatenachse mit dem Mittellot von AB zusammenfällt, so ist $M_1''P''$ das x, $\mathfrak{P}_2P'' = \mathfrak{P}_1P''$ das y von P, und es ist wenn man $M_2''P'' = u$ setzt, $y^2 = (r + u)\ (r - u)$, ferner, da $AC \parallel M_1M_2$, $\frac{u}{x} = \frac{r+u}{a+x}$, also $u = \frac{rx}{a}$, demnach $y^2 = r^2 - u^2 = r^2 - \frac{r^2x^2}{a^2}$, oder $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{r^2} = 1$.

Der schiefe Schnitt eines geraden Kreiscylinders ist eine Ellipse mit den Halbachsen a und r.

2. Eine Halbkugel mit dem Radius r, die mit ihrer ebenen Fläche auf $\mathfrak{H}$ liegt, werde durch eine Ebene geschnitten, die durch den Mittelpunkt der Kugel geht, zu $\mathfrak{H}$ senkrecht steht und mit $\mathfrak{V}$ den Winkel α bildet. Zeichne den Gr. und Ar. des so entstandenen Halbkreises. (Fig. 31.)

Gr. und Ar. der Halbkugel ist leicht zu bestimmen. Der Gr. der Schnittfigur ist DE, ein Durchmesser des Grundkreises, der mit der P. A. den Winkel α bildet. Um den Ar. zu finden, denke man sich die Schnittfigur um DE nach rechts in $\mathfrak{H}$ heruntergeklappt. Die Umlegung ist der Halbkreis $D\mathfrak{P}E$. Den Abstand eines beliebigen Punktes der Schnittfigur P (Gr. P') von $\mathfrak{H}$ findet man, wenn man auf DE in P' das Lot $P'\mathfrak{P}$ errichtet. Zieht man also $P'P_x \perp$ P. A. und verlängert es um $P'\mathfrak{P}$, so erhält man P'', den Ar. von P. In dieser Weise ist der Ar. der Schnittfigur punktweise zu konstruieren. Man erhält die Hälfte einer Ellipse.

Denn: bezieht man die Kurve auf ein rechtwinkliges Koordinatensystem, dessen x Achse $A''B''$, dessen y Achse $M''C''$ ist, so ist $P_x M'' = x$, $P''P_x = P'\mathfrak{P} = y$. Bezeichnet man $D''M''$ mit a, $P'M$ mit u, so ist $y^2 = (r + u)\ (r - u)$, und man findet leicht $\frac{u}{x} = \frac{r}{a}$, also $y^2 = r^2 - \frac{r^2x^2}{a^2}$ oder $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{r^2} = 1$, d h. die rechtwinklige Projektion eines Kreises, der zur P. E. schief steht, ist eine Ellipse.

3. Eine Halbkugel ist mit einer Anzahl von Meridianen und Parallelkreisen überzogen. Zeichne den Gr. und Ar., wenn der Äquator in $\mathfrak{H}$ liegt.

Um die Projektionen der Parallelkreise zu finden, gehe man von ihren Ar. aus.

4. Ein gerader Kreiskegel mit dem Radius r und der Höhe h werde durch eine Ebene *E* geschnitten, die alle Mantellinien schneidet. Zeichne den Gr. und Ar. der Schnittfigur, sowie diese selbst. — Der Grundkreis des Kegels liege in $\mathfrak{H}$. $\mathfrak{V}$ stehe wie in Aufg. 1 senkrecht zur Schnittebene. (Fig. 32.)

Der Gr. des Kegels ist ein Kreis mit dem Radius r, die Mantellinien des ersteren erscheinen als Radien dieses Kreises.

Der Ar. des Kegels ist ein gleichschenkliges Dreieck $A''S''B''$, der Achsenschnitt des ersteren. Um den Ar. einer Mantellinie

z. B. SC zu finden, beachte man, daß der Ar. von C in die P. A. fallen muß. S″C″ ist dann der Ar. von SC. S″C″ ist hier auch der Ar. von SD.

Gr. und Ar. der Schnittfigur: Da $E \perp \mathfrak{V}$ ist, so fällt der Ar. der Schnittfigur mit E″F″ zusammen. — Was ist EF? — Um den Gr. eines beliebigen Punktes P der Schnittlinie zu finden, ziehe man durch seinen Ar. P″ den Ar. einer Mantellinie S″C″, bestimme deren Gr. S′C und projiziere P″ in diese Strecke. So ergiebt sich P′. Auf S′D findet man noch einen anderen Punkt des Gr. Auf diese Weise ergiebt sich punktweise der Gr. der Schnittkurve, eine Ellipse. Beweis durch Herleitung der Gleichung!

Zeichnung der Schnittfigur: Legt man durch P eine Ebene parallel $\mathfrak{H}$, so schneidet diese den Kegel in einem Kreise. Die Umlegung der Hälfte desselben in $\mathfrak{V}$ findet man, wenn man durch P″ in △ A″S″B″ die Parallele zu A″B″ zieht und über derselben als Durchmesser den Halbkreis beschreibt. Die Hälfte der Schnittfigur und der Halbkreis schneiden sich (vergl. Aufg. 1) in einer Strecke, die auf den beiden Durchmessern senkrecht steht. Man findet ihre Länge $P''\mathfrak{P}_1$ also aus dem Halbkreis. Errichtet man auf E″F″ in P″ das Lot $P''\mathfrak{P}_2 = P''\mathfrak{P}_1$, so ist $\mathfrak{P}_2$ die Umlegung von P in $\mathfrak{V}$, und es ist daher die Umlegung der Schnittkurve in $\mathfrak{V}$ punktweise konstruierbar.*)

Wie findet man mit Hülfe der Kreisschnitte den Gr. der Schnittfigur?

Gleichung der Schnittlinie: Wir nehmen E″F″ als x Achse, das Mittellot hierzu als y Achse, so ist $P''O'' = x$, $P''\mathfrak{P}_2 = P''\mathfrak{P}_1 = y$. Wir ziehen durch O″ die Parallele zu A″B″ und bezeichnen $E''O'' = O''F''$ mit a, die zu O″ gehörige halbe Kreissehne mit b, so ist $y^2 = uP''.\,P''v$, $b^2 = wO''.\,O''z$. Da $\triangle E''uP'' \sim \triangle E''wO''$ und $\triangle F''O''z \sim \triangle F''P''v$, so ist $\frac{uP''}{wO''} = \frac{a+x}{a}$ und $\frac{P''v}{O''z} = \frac{a-x}{a}$, also $\frac{uP''.\,P''v}{wO''.\,O''z} = \frac{y^2}{b^2} = \frac{(a+x)\,(a-x)}{a^2}$ d. h. $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1$. Die Schnittfigur ist eine Ellipse.

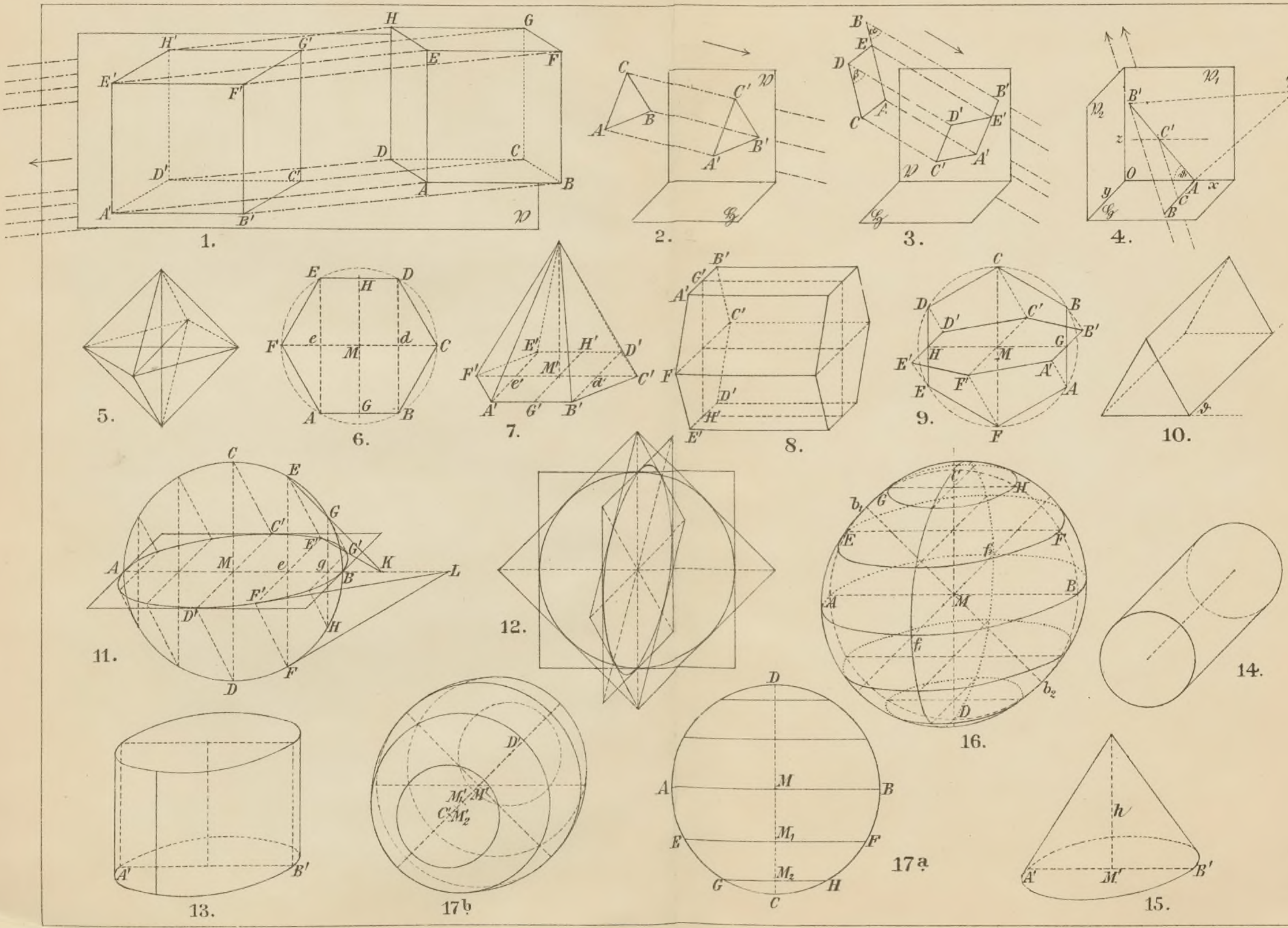
In ähnlicher Weise sind die Schnitte eines Kegels für den Fall zu behandeln, daß sich eine Parabel oder eine Hyperbel ergiebt. Vergl. Martus, Raumlehre 2. Teil 20, 4; Buka, Grundzüge d. darst. Geometrie, Charlottenburg Progr.-Nr. 101, 1894.

§ 12. Herstellung parallelperspektivischer Bilder aus rechtwinkligen Projektionen.

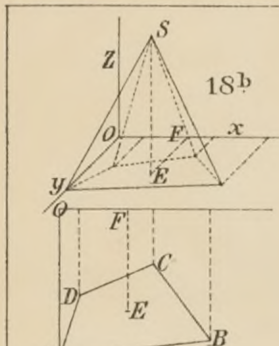
Dies ergiebt sich unmittelbar aus § 6, wenn man die bei den rechtwinkligen Projektionen benutzte Ebene $\mathfrak{V}$ oder eine ihr parallele Ebene als Bildtafel wählt und dabei die P. A. horizontal legt. Will man vom Gr. ausgehen, so hat man zunächst

*) Eine andere Konstruktion hier, wie bei dem Cylinder, ergiebt sich aus § 9, Aufg. 4.

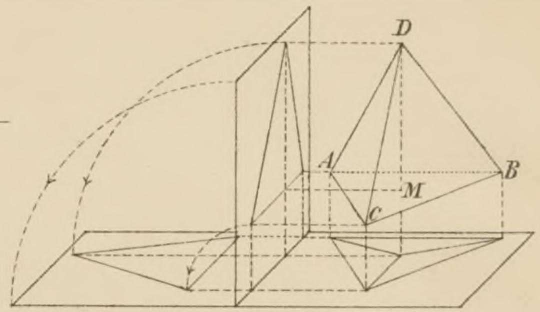
.
n
r
-
,
,
o
t
r
!
e
e
h
-
e
)
.
t
e
-
r
ot
h
"
a
d
l.
n
el
l-
l.
ei
e
i-
st
ch



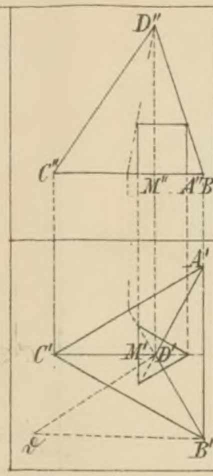
Lith. u. Druck v. Eschebach & Schaefer, Leipzig.



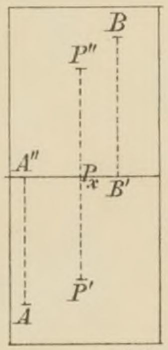
18b. 18a.



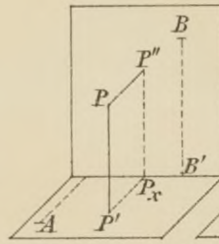
22.



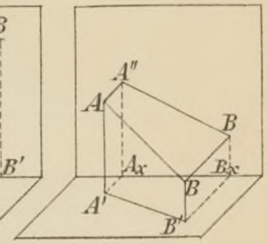
21.



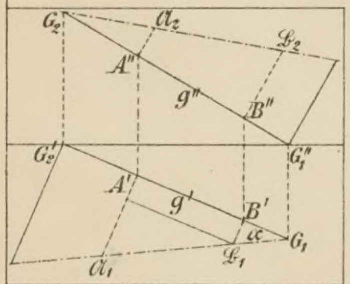
20.



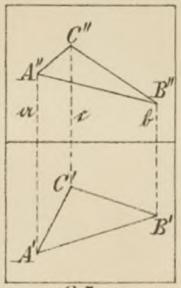
19.



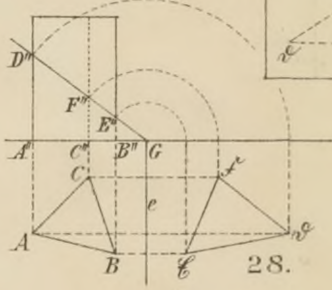
23.



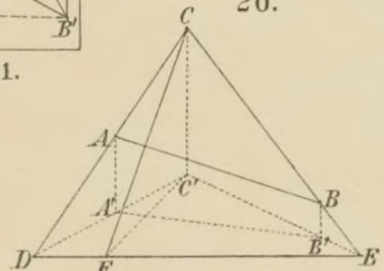
24.



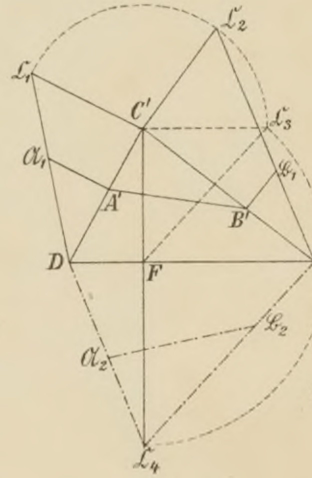
25.



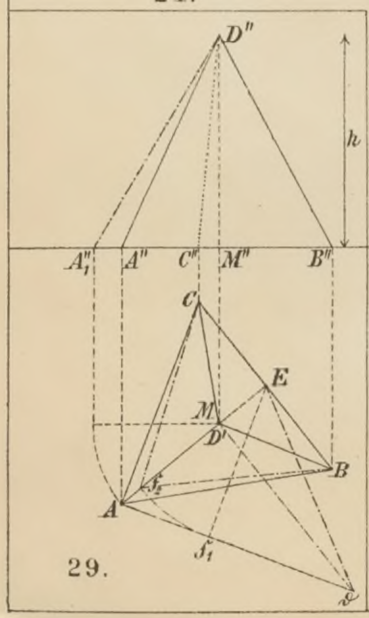
28.



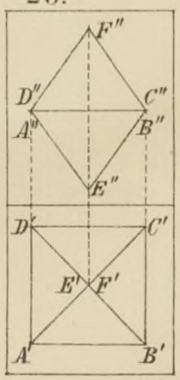
26.



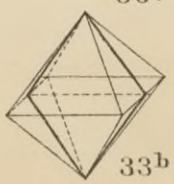
27.



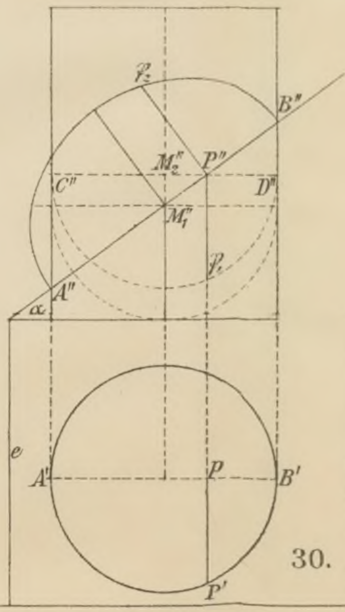
29.



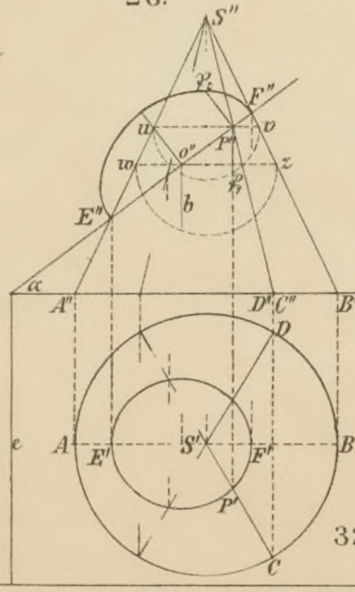
33a.



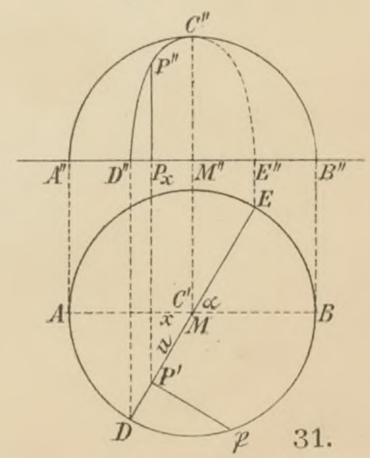
33b



30.



32.



31.

Lith. u. Druck v. Eschebach & Schaefer, Leipzig.

das Schrägbild desselben in bekannter Weise zu zeichnen und in einer genügenden Zahl von Punkten des Bildes Lote zur Horizontalen zu errichten, deren Längen sich aus der Ar.-Figur ergeben. Der zu zeichnende Gegenstand ist dabei gewissermaßen durch seine Projektionslote mit $\mathfrak{H}$ starr verbunden, und man projiziert nun den Gr. mit den Loten. So ist Fig. 22 aus Fig. 21 gezeichnet.

Geht man vom Ar. aus, so ist dieser zunächst unverändert zu zeichnen, und durch eine genügende Zahl von Punkten sind Strecken zu ziehen, die mit der Horizontalen den Winkel ϑ bilden, und deren Längen gleich den Verkürzungen der von den betr. Punkten auf die Bildtafel gefällten Lote sind. Diese Lote ergeben sich aus der Gr.-Figur. Dabei ist also der Gegenstand mit $\mathfrak{B}$ durch die auf diese Ebene gefällten Lote starr verbunden zu denken, und man projiziert nun den Ar. mit den Loten schräg auf die Bildtafel. Hiernach ist Fig. 33b aus Fig. 33a gezeichnet worden.*) — Wie liegt dabei das § 6 angegebene Koordinatensystem? —

Aufgaben: Setze die Fig. 24, 27—32 in Schrägbilder um.

*) Auf andere Beispiele musste verzichtet werden.