(Sechs und dreißigster, der neuen Folge neunter)

Bericht

über die

St. Johannis-Schule,

mit welchem zu der

Dienstag, den 7. April d. J., Vor- und Nachmittags,

zu haltenden

öffentlichen Prüfung

der Schüler dieser Unterrichts-Anstalt

ergebenst einladet

der Direktor Dr. Löschin.

Inhalt:

1, Ueber die allgemeine und volle Gültigkeit mathematischer Formeln. Ein Beitrag zur Deutung des Negativen und Imaginären. Von Herrn Oberlehrer Gronau.
2, Schulnachrichten von dem Direktor.

Danzig, 1857.
Schnellpressendruck der Wedel'schen Hofbuchdruckerei.

I. Lehrer-Personal.

Eine — leider nicht gänzlich zu beseitigende — Brustkrankheit nöthigte den zweiten Elementarlehrer, Herrn Julius Wilhelm August Völcker, das ihm im Februar 1850 übertragene Lehramt, dem er mit dem lebendigsten Eifer und dem segensreichsten Erfolge seine ganze, schon seit einigen Jahren wankend gewordene, Kraft bis zur Erschöpfung gewidmet hatte, nachdem er von demselben bereits seit Pfingsten v. J. zur Pflege seiner Gesundheit beurlaubt worden war, zu seinem und seiner Kollegen schmerzlichem Bedauern im Oktober v. J. niederzulegen. Auf den Antrag des Direktors, dem die Wohllöbl. Schuldeputation beistimmte, übertrug der hochlöbl. Magistrat dasselbe dem Herrn Siegmund Siegfried Schultze, der — geboren zu Danzig am 11. Sept. 1817 und im Seminare zu Jenkau für das Lehramt vorgebildet — zuerst als Hauslehrer, sodann in der Schule des Herrn Pred. Böck und seit Michaeli 1853 als Hülfslehrer in der St. Johannis-Schule beschäftigt gewesen war, wo er zuletzt die Stelle des beurlaubten Herrn Völcker mit so gutem Erfolge vertreten hatte, daß sein Verbleiben in derselben als genügender Ersatz für den Verlust, den die Schule erleiden mußte, angesehen werden konnte. Den von ihm bisher (in VI B und VII B) ertheilten Hülfsunterricht übernahm zu Michaeli v. J. der Kandidat der Theologie, Herr Schilfert.

II. Gegenstände des im verflossenen Lehrjahre ertheilten Unterrichtes.

Siebente Klasse. Ordinarius: Bis Michaeli Herr Voelcker, seitdem Herr Schultze.

Erste Abtheilung.

Religion, 2. St. w. der Direktor. Erzählungen aus der biblischen Geschichte des A. Testamentes. Die Schüler lernten wöchentlich 2 Bibelsprüche, monatlich ein kurzes Kirchenlied und in den fünfmaligen Ferien des Jahres das erste Hauptstück des Luther. Katechismus. (Aus den „Lernaufgaben für die Religionsstunden in der St. Johannis-Schule.")

Lesen, 10 St. w. Herr Schultze. Erste Abtheilung: Leseübungen im Klein-Kinderfreunde von Dr. Löschin und Wiedererzählen des Gelesenen.

Deutsch und **Orthographie**, 6 St. w. Herr Schultze. Kopiren aus dem Lesebuche, Diktirübungen, Kennenlernen des Haupt-, Eigenschafts- und Zeitwortes, so wie der Beugung derselben, Memoriren kleiner Gedichte und Liederverse und Besprechungen darüber, so wie über die gelernten Bibelsprüche und Kirchenlieder.

Rechnen, 6 St. w. Herr Schultze. Numeriren. Die vier Spezies in unbenannten Zahlen. Kopfrechnen.

Schreiben, 6 St. w. Herr Schultze. Uebungen nach Vorschriften von der Hand des Lehrers in deutscher und lateinischer Schrift mit Anwendung der Carstairschen Methode.

Singen, 2 St. w. Herr Schultze. Uebungen zur Bildung des Gehörs u. der Stimme. Die Tonleiter und kleine Lieder nach dem Gehör eingeübt.

Zweite Abtheilung.

Religion mit der Ersten kombinirt.

Deutsch, Herr Schilfert. Lautiren in Verbindung mit Buchstabiren nach der Schreib-lese-Methode. Dann leichte Leseübungen in Borkenhagens erstem Uebungsbuche. Sprechübungen an Softmanns Bildertafeln geknüpft.

Rechnen, Herr Schilfert. Die Elemente der vier Spezies nach Grube im Kopfe und schriftlich eingeübt.

Schreiben,
Singen,) mit der I. Abth. kombinirt.

Sechste Klasse. Cötus B. (Vorbereitungsklasse für Cötus A.)
Ordinarius: Hr. Pr.-A.-K. Rothe.

Religion, 2 St. w. der Direktor. S. Sechste Klasse, Cötus A.

Deutsch, 10 St. w. Herr Kand. Schilfert. Wiederholung der Begriffswörter, Entwickelung ihrer Flexion. Kennenlernen der Formwörter mit Ausschluß des Bindewortes in Verbindung mit dem Bilden einfacher Sätze. Uebung im Unterscheiden der bekannten Wortarten. Kleine Aufsätze. Orthographische Uebungen. Deklamation. Leseübungen einzeln und im Chore. Das Gelesene wurde erklärt und von den Schülern wiedererzählt. Benutzt wurde der Klein-Kinderfreund von Dr. Löschin.

Latein, 4 St. w. Herr Kand. Rothe. Leseübungen. Auswendiglernen einiger Vokabeln aus Hermanns Lesebuche und mündliche und schriftliche Einübung der 5 Deklinationen.

Rechnen, 5 St. w. Herr Kand. Schilfert. Die vier Species in unbenannten Zahlen gründlich wiederholt, in benannten Zahlen die Resolution, Reduktion, Addition und Subtraktion und Zeitrechnung im Kopfe und schriftlich eingeübt.

Formenlehre, 2 St. w. Herr Kand. Rothe. Es wurden die verschiedenen Stellungen der geraden Linie, die Winkelarten, die Drei- und Vierecke, die Linien in und am Kreise an verschiedenen Körpern (Flächen, Winkel, Kanten, Ecken und Durchschnitte) zur Anschauung gebracht und Uebungen im Nachzeichnen vorgenommen.

Geographie, 2 St. w. Herr Kand. Rothe. Die nothwendigen Vorbegriffe zur Geographie wurden erklärt und die Länder der östlichen Halbkugel an der Charte eingeübt.

Schreiben, 4 St. w. Herr Fisch. Einübung der einzelnen Buchstaben lateinischer und deutscher Schrift von dem Leichteren zum Schweren fortschreitend. Als häusliche Uebung wurden zu jeder Schreibestunde einige Zeilen aus dem Lesebuche sauber abgeschrieben.

Zeichnen, 2 St. w. Herr Kand. Rothe. Die geraden Linien, verschiedene Winkel, Drei- und Vierecke und der Kreis wurden aus freier Hand geübt und nach leichten Vorbildern gezeichnet. Fähigere Schüler zeichneten als häusliche Uebung schon einige schwierigere Vorbilder nach.

Singen, 1 St. w. Herr Kand. Rothe. Nach dem Gehöre wurden die leichteren Choralmelodien eingeübt.

Sechste Klasse. Cötus A. Ordinarius: Herr Sonntag.

Religion. Beide Cötus vereinigt. 2 St. w. der Direktor. Die biblische Geschichte des A. T. wurde auf eine der Fassungsgabe dieser Schüler angemessene Weise (erläutert auch durch Beispiele aus der Profangeschichte, vornehmlich der des Alterthums) erzählt. Das Walten göttlicher Vorsehung und Gerechtigkeit, das Nachahmungswerthe in dem Leben edler und frommer Menschen und das Warnende und Abschreckende in den Thaten der von Gott Gewichenen recht einleuchtend darzustellen, war der Hauptzweck dieses Unterrichtes. — Bibelsprüche, Kirchenlieder und das zweite und dritte Hauptstück des Lutherischen Katechismus wurden aus den „Lernaufgaben u.s.w." memorirt.

Deutsch, 10 St. w. Herr Sonntag. Leseübungen im Chore und von einzelnen Schülern (wobei der Klein-Kinderfreund von Dr. Löschin benutzt wurde), verbunden mit Wiedererzählen des Gelesenen. — Grammatik und orthographische Uebungen. Der reine einfache Satz, dabei das Hauptsächlichste über das Substantiv, Adjektiv, Verbum, Pronomen, Subjekt, Prädikat und Attribut. Kleine Aufsätze.

Latein, 4 St. w. Herr Kand. Weiß. Erlernung von Vokabeln aus Hermanns Elementargrammatik § 44—49 und Uebersetzen zur Uebung im Gebrauche des Nominativ's und Genitiv's, nach Hermann § 44 — 49, 266 — 269. Einübung der 5 Deklinationen bei Substantiven und Adjektiven.

Rechnen, 5 St. w. Herr Sonntag. Die vier Species in benannten und unbenannten Zahlen. Vorübungen zum Bruchrechnen.

Formenlehre, 2 St. w. Herr Sonntag. 1) Punkt. Anzahl der verschiedenen Stellungen einer bestimmten Zahl von Punkten. Anzahl der Richtungen zwischen einer gegebenen Zahl von Punkten. 2) Linie. Arten derselben. Punkt und Linie. Kombination der Lage von zwei, drei und mehreren geraden Linien in Beziehung auf Parallelismus und Nicht-Parallelismus. Anzahl der einzelnen und verbundenen Theile einer geraden Linie, in die sie durch Punkte zerlegt wird. Anzahl der Durchschnittspunkte einer gegebenen Zahl von geraden Linien und die dadurch entstehenden Strahlen und Strecken. 3) Winkel. Arten derselben. Anzahl der Winkel, welche von zwei, drei und mehreren geraden Linien gebildet werden können. Nebenwinkel und Scheitelwinkelpaare.

Geographie, 2 St. w. Herr Sonntag. Der erste Kursus von Voigts Leitfaden.

Schreiben, 4 St. w. Herr Sonntag.

Zeichnen, 2 St. w. Herr Kronke. Anfangsgründe der Planimetrie zum Zeichnen mit freier Hand; symmetrische Züge eigener Erfindung, vorgezeichnet an der Schultafel.

Singen, 1 St. w. Herr Kronke. Die Dur-Tonleitern wurden erklärt und das begriffsmäßige Singen durch kleine Lieder in verschiedenen Tonarten zu erreichen gesucht.

Fünfte Klasse. Cötus A. Ordinarius: Herr Oberlehrer Stobbe.

Religion. Beide Cötus vereinigt. 2 St. w. der Direktor. Das Leben Jesu, sowohl in Betreff seiner äußern Schicksale, als auch vornehmlich des Zweckes seiner Sendung und des Geistes und wesentlichen Inhaltes seiner Lehre. Daneben und zum Theil in Verbindung damit: Wiederholung der Hauptereignisse aus der Geschichte des A. T. — Die als Hauptsache dabei angesehenen Nutzanwendungen sind mit vielen Hinweisungen auf die Ereignisse des gewöhnlichen Lebens und auf die Beispiele, welche die Profangeschichte darbietet, begleitet worden. Bibelsprüche, Kirchenlieder und die fünf Hauptstücke des Lutherischen Katechismus wurden aus den „Lernaufgaben u.s.w." (S. Siebente Klasse) memorirt.

Deutsch, 4 St. w. Herr Oberlehrer Stobbe. Die Elemente über Gliederung und Bestandtheile der Sätze wurden an Stücken aus Magers Lesebuche erläutert und durch mündliches Analysiren eingeübt. Wöchentliche Diktate, die von dem Lehrer zu Hause korrigirt wurden, dienten zur Befestigung der Orthographie und Interpunktion. Monatlich wurde ein Gedicht auswendig gelernt. Wöchentlich wurden 1—2 Stunden auf Leseübungen aus Mager und aus Beckers Erzählungen von Odysseus verwendet.

Latein, 4 St. w. Herr Oberlehrer Stobbe. Deklination, Komparation, Pronomina, Zahlwörter, Konjugation der regelmäßigen und der hauptsächlichsten unregelmäßigen Verba gelernt und geübt 2 St. — Aus Herrmanns Elementargrammatik wurden ausgewählte Sätze aus § 49 — 53, § 55 — 58 und die Fabeln § 78 — 93 mündlich und schriftlich übersetzt und daran hauptsächlich Uebungen im Analysiren, Konstruiren und Nachbilden der Sätze geknüpft. § 270 — 273, 275, 276, 279 — 284 wurden theils mündlich, theils schriftlich übersetzt.

Französisch, 4 St. w. Herr Oberlehrer Stobbe. Plötz I. Lektion 1 — 44, zum Theil schriftlich.

Rechnen, 4 St. w. Herr Sonntag. Wiederholung der vier Spezies in benannten Zahlen, Einübung derselben in Brüchen und Entwickelung der geometrischen Proportionen mit Anwendung auf gerade und umgekehrte Regel de tri und mit vorzüglicher Berücksichtigung des Kopfrechnens.

Geometrie, 1 St. w. Herr Sonntag. Geometrische und stereometrische Vorübungen nach Diesterweg.

Geographie, 2 St. w. Herr Oberlehrer Dr. Panten. Zweiter Kursus des Leitfadens von Voigt. Repetition des ersten Kursus. Versuche im Kartenzeichnen.

Geschichte, 2 St. w. Herr Oberlehrer Stobbe. Erzählungen aus der griechischen Mythologie und Heldensage. Erlernung der drei ersten Tabellen des Dr. Hirsch und die nothwendigsten Erläuterungen zu denselben.

Naturgeschichte, 2 St. w. Herr Sonntag. Im Sommer Beschreibung von Pflanzen nach lebenden Exemplaren. Im Winter Säugethiere und Vögel nach dem eingeführten Lehrbuche von Neumann. Pflanzen und Thiere wurden von den Schülern nach Vorbildern gezeichnet.

Schreiben, 3 St. w. Herr Kronke. Nach Vorschriften von der Hand des Lehrers.

Zeichnen, 2 St. w. Herr Kronke. Die Elemente des Zeichnens mit freier Hand wie in VI. A. gelehrt und hier erweitert durchgenommen; monatlich 2 St. planimetrisches Zeichnen mit Zirkel und Lineal.

Singen, 2 St. w. Herr Kronke. Die mit Singstimme begabten Schüler beider Cötus der V. und VI. Klasse kombinirt. Das in der VI. A. Klasse Erläuterte wurde hier wiederholt, die Dur- und Moll-Tonleitern aufgestellt, Vorzeichnung und Rythmus deutlich gemacht und bei vielen ein- und zweistimmigen Gesängen das Gelernte angewandt.

Fünfte Klasse. Cötus B. Ordinarius: Herr Kand. Brandt.

Religion, 2 St. w. der Direktor. S. Fünfte Klasse, Cötus A.

Deutsch, 6 St. w. Herr Kand. Brandt. **Lesen** und Wiedererzählen 2 St. — **Grammatik.** Uebungen, die Redetheile schnell zu unterscheiden; Wiederholung der Flexion. Satzlehre, durch Satzbilder verdeutlicht. 2 St. — **Orthographie,** wobei die Schüler zum Theil selbst unter einander die Korrektur versuchen mußten. 1 St. — **Declamiren.** 1 St. Herr Kand. Rothe.

Latein, 4 St. w. Herr Kand. Brandt. Lektüre aus Hermanns Lesebuche nach Auswahl. Memoriren der besten Fabeln. Sorgfältige mündliche und schriftliche Analyse. 2 St. — Grammatik. Besondere Einübung der Deklinationen des Verbum Sum, der regelmäßigen und unregelmäßigen Konjugationen. Ableitung der Verba. Kleine Exercitien und Extemporalien aus Hermann § 266 — 280.

Französisch, 4 St. w. Herr Kand. Brandt. Aus Plötzs Elementarbuche die Lektionen 1 — 46, die deutschen Abschnitte als Exercitien schriftlich. Orthographische Uebungen und Retrovertiren der passendsten französischen Sätze ins Lateinische. Die regelmäßige Konjugation.

Rechnen, 4 St. w. Herr Kand. Rothe. Von den Brüchen: das Einrichten, Erweitern, Heben, Resolviren und Reduciren, die 4 Spezies und Entwickelung der geometrischen Proportionen bei gerader und umgekehrter Regel de tri wurde durch häusliche Arbeiten und Kopfrechnen eingeübt.

Geometrie, 1 St. Vorbereitung zur Planimetrie und Stereometrie Hr. Kand. Rothe.

Geschichte, 2 St. w. Herr Kand. Brandt. Die schönsten Sagen der griechischen und römischen Mythologie. Drei historische Tabellen (von Dr. Hirsch) memorirt. Die alte Geschichte in Biographien, wovon die Schüler das Wichtigste zu Hause ausarbeiteten.

Geographie, 2 St. w. Herr Kand. Brandt. Aus Voigts Lehrbuche wurde Kursus I. und II. gründlich gelernt. Versuche im Kartenzeichnen.

Naturgeschichte, 2 St. w. Herr Oberlehrer Dr. Gieswald. Im Sommer: Beschreibung von Pflanzen nach lebenden Exemplaren. Linnéisches System. Im Winter: Säugethiere und Vögel. Pflanzen und Thiere wurden von den Schülern theils nach Vorbildern, theils nach der Natur gezeichnet.

Schreiben, 3 St. w. Herr Fisch. Nach Vorschriften von der Hand des Lehrers.

Zeichnen, 2 St. w. Herr Kronke. Wie in dem Cötus A.

Singen, 2 St. w. Herr Kronke. S. Cötus A.

Vierte Klasse. Cötus A. Ordinarius: Herr Oberlehrer Küster.

Religion, 2 St. w. der Director. Ausführliche Erläuterung der zweiten Hälfte des Lutherischen Katechismus. Uebungen im Nachschlagen der Bibel. Bibelsprüche und Kirchenlieder wurden aus den „Lernaufgaben u. s. w." (S. Siebente Klasse) memorirt.

Deutsch, 4 St. w. Herr Oberlehrer Küster. In 2 St. wurde nach Magers Sprachbuche die Lehre von den Satztheilen, den verbundenen Hauptsätzen, dem Satzgefüge und der Interpunktion durchgenommen, und dabei Magers Lesebuch zu analytischen Uebungen benutzt. Zwei Stunden wurden zu stylistischen Uebungen verwandt. Die angefertigten Aufsätze bestanden theils in Nachbildungen von Musterstücken, theils in freien Arbeiten beschreibender oder erzählender Art, die selbst Gesehenes und Erlebtes zum Gegenstande hatten. — In 2 St. wurden Lese- und Deklamationsübungen vorgenommen.

Latein, 4 St. w. Herr Oberlehrer Küster. In 2 Stunden Erlernung und Einübung der Formlehre nach Hermanns Elementargrammatik. In 2 St. Uebersetzen aus dem Lateinischen ins Deutsche und aus dem Deutschen ins Lateinische nach demselben Elementarbuche. Es wurden die Uebungsstücke von § 100 — 147, 239 — 254 und von § 306 — 355, theils blos mündlich, theils zugleich schriftlich übersetzt, und die dabei vorkommenden Regeln memorirt.

Französisch, 4 St. w. Herr Oberlehrer Küster. In 3 St. wurden in Plötz's Elementarbuche, Kursus I., Lekt. 35 — 68 durchgenommen und die deutschen Uebungsstücke zu Exercitien benutzt. In 1 St. wurde in Magers Lesebuche Nr. 4 und Nr. 36 gelesen und einige kleinere Gedichte aus Plötz und Mager memorirt.

Mathematik, 6 St. w. Herr Oberlehrer Gronau.

a) Praktisches Rechnen, (4 St.). Nach einer kurzen Wiederholung des Numerirens, der vier Spezies in unbenannten und benannten Zahlen trat schon ein längeres Verweilen bei der geraden und umgekehrten Regel de tri ein; dann wurden die Brüche ausführlich behandelt Die Lehre von den arithmetischen und geometrischen Proportionen folgte. Hieran schlossen sich andere Rechnungen des bürgerlichen Lebens an: Regula multiplex, Zins- und Gesellschaftsrechnungen und die Kettenregel. Zuletzt gewährten die Dezimalbrüche Beschäftigung. Kopfrechnen.

b) Geometrie, (2 St.). Nach Koppe's Lehrbuche wurden die fünf ersten Abschnitte durchgenommen, welche von Linien, Winkeln, Parallellinien und von der Kongruenz der Dreiecke handeln.

Geographie, 2 St. w. Herr Oberlehrer Dr. Panten. Aus Voigt's drittem Kursus der allgemeine Theil und Europa. Repetition des zweiten Kursus. Kartenzeichnen.

Geschichte, 2 St. w. Herr Oberlehrer Dr. Panten. Geschichte des Mittelalters. Erlernung von Geschichtstabellen.

Naturgeschichte, 2 St. w. Herr Oberlehrer Dr. Gieswald. Im Sommer: Insekten und Spinnen. Im Winter: Amphibien und Fische.

Schreiben, 2 St. w. Herr Kronke. Nach eigenen Vorschriften.

Zeichnen, 2 St. w Herr Kronke. Planimetrisches Figurenzeichnen mit freier Hand und mit Zirkel und Lineal. Zeichnen nach Vorbildern: Ornamente; Theile menschlicher Figuren mit Andeutung von Schatten und Licht; Landschaftszeichnung u. s. w.

Singen, 2 St. w. Herr Kronke. — S. Fünfte Klasse.

Vierte Klasse. Cötus B. Ordinarius: Herr Pred.-Amts-Kand. Weiss.

Religion, 2 St. w. der Direktor. Mit Cötus A. kombinirt.

Deutsch, 6 St. w. Herr Kand. Weiß. In 2 Stunden wurde mit Benutzung des Sprach- und Lesebuches von Mager analytisch und synthetisch die Lehre von den Theilen des einfachen Satzes und des Satzgefüges durchgegangen und eingeübt. In 2 Stunden wurden die angefertigten Aufsätze, die in Nachbildungen von Musterstücken: Erzählungen, Beschreibungen und Briefen bestanden, nach vorhergegangener häuslicher Korrektur durchgenommen. — In 2 Stunden Lese- und Deklamations-Uebungen.

Latein, 4 St. w. Herr Kand. Weiß. In 2 Stunden wurde die Formenlehre der Nomina und Verba mit Einschluß der unregelmäßigen erlernt und in Sätzen eingeübt. — In 2 Stunden wurde in Hermanns Elementarbuche § 78 — 83, § 100 — 147, § 306 — 337 (die Kasuslehre) übersetzt und meistens retrovertirt.

Französisch, 4 St. w. Herr Kand. Weiß. Aus Magers „Franz. Lesebuche, I. Kursus" (5te Auflage) Nr. 4, 5, 8, 9, 13 — 16, 18, 19, 23, 83 — 88 gelesen und schriftlich übersetzt. Die Konjugation der regelmäßigen Verben in Verbindung mit dem Pronominalobjekt wurde durch Exercitien eingeübt, welche nach der Korrektur meistens gelernt wurden. Plötz Elementarbuch I. Kursus Lekt. 32 — 69 und Abschn. VI. (Fabeln) 1 — 32 bot das Material zu den Exercitien dar.

Mathematik, 6 St. w. Herr Kand. Weiß.

a) Praktisches Rechnen, 4 St. Nach Wiederholung des Numerirens, der 4 Spezies in unbenannten und benannten Zahlen wurde die gerade und umgekehrte Regel de tri ausführlich behandelt. So auch die gewöhnlichen Brüche, die arithmetischen und geometrischen Proportionen. Hieran schlossen sich Rechnungen des bürgerlichen Lebens an: Regula multiplex, Zins- und Gesellschaftsrechnung und die Kettenregel. Zuletzt gewährten die Dezimalbrüche Beschäftigung.

b) Geometrie, 2 St. Aus Koppe's Lehrbuche wurde Abschnitt 1 — 5 durchgenommen, die von Linien, Winkeln, Parallelen und der Kongruenz der Dreiecke handeln.

Geographie, 2 St. w. Herr Oberlehrer Dr. Panten.
Geschichte, 2 St. w. Herr Oberlehrer Dr. Panten.
Naturgeschichte, 2 St. w. Hr. Oberlehrer Dr. Gieswald.
Zeichnen, 2 St. w. Herr Kronke.
Wie in Cötus A.

Schreiben, 2 St. w. Herr Fisch. Nach Vorschriften von der Hand des Lehrers.

Singen, 2 St. w. Herr Kronke. S. Fünfte Klasse. Cötus A.

Dritte Klasse. Ordinarius: Herr Oberlehrer Dr. Gieswald.

Religion, 2 St. w. der Direktor. Systematisch zusammenhängender Vortrag der christlichen Sittenlehre und zwar mit Rücksicht auf den Katechismus und auf die biblische Geschichte.

Deutsch, 4 St. w., 2 St. Herr Oberlehrer Dr. Gieswald. Mehre größere Gedichte Schillers wurden gelernt und genau erläutert. 2 St. Herr Kand. Brandt. Freie Vorträge. Uebung im Disponiren. Alle 3 bis 4 Wochen ein schriftlicher Aufsatz, nach genauer Durchnahme desselben Korrektur.

Latein, 4 St. w. Herr Oberlehrer Küster. 1) Lektüre (2 St.). Aus dem Cornelius Nepos wurden Alcibiades, Thrasybulus, Conon, Dion, Iphicrates, Chabrias und Thimotheus gelesen. 2) Grammatik und Exercitia (2 St.) Außer der Repetition der Formenlehre wurden die Regeln über die Rektion der Kasus und einige über den Gebrauch der Modi gelernt.

Französisch, 4 St. w. Herr Kand. Brandt. 1) Lektüre (2 St.) Aus Magers Lesebuche (5te Auflage) I. Kursus ausgewählte prosaische und poetische Stücke, wovon einige Fabeln memorirt wurden. — 2) Grammatik (2 St.). Orthographische Uebungen. Extemporalien und Exercitien. Die unregelmäßigen Verben nach Plötz, II. Kursus, Lekt. 1 — 28 mündlich und schriftlich. Retrovertiren passender lateinischer Säße ins Französische.

Englisch, 2 St. w. Herr Friedländer. Der Aussprache und den Leseübungen wurde besondere Aufmerksamkeit gewidmet, dann wurde die Grammatik durchgenommen und durch Beispiele erläutert. Die zur Grammatik gehörenden Uebungsstücke wurden zuerst schriftlich und dann mündlich übersetzt. Gelesen und übersetzt wurde Scott's History of Scotland, Macbeth und die ersten fünf Kapitel aus des Lehrers A. Childs History of Germany. Mehrere Gedichte wurden auswendig gelernt.

Mathematik, 6 St. w. Herr Oberlehrer Gronau.

a) Praktisches Rechnen (2 St.) Außer den bei der vierten Klasse genannten Rechnungsarten wurden Diskonto-, Agio-, Tara-, Prozent-, Termin- und Alligationsrechnungen durchgenommen. Kopfrechnen.

b) Arithmetik (2 St.). Dezimalbrüche, entgegengesetzte Größen, Einschließungszeichen, Buchstabenrechnung, Potenzen, Quadratwurzeln, Gleichungen des ersten Grades und arithmetische Progressionen bildeten den Gegenstand des Unterrichts.

c) Geometrie (2 St.). Aus Koppes Lehrbuche wurden die ersten neun Abschnitte durchgenommen, deren Hauptinhalt die Sätze über Kongruenz und Gleichheit der Figuren, und Sätze über den Kreis bilden.

Geographie, 2 St. w. Herr Oberlehrer Dr. Panten. Voigts Leitfaden, Kursus IV., Europa, wurde gelernt. Die betreffenden Abschnitte aus Kursus III. wurden wiederholt. Uebungen im Kartenzeichnen zum Theil nach der Cansteinschen Konstruktionsmethode. Zur Prüfung des Gelernten wurden von den Schülern Karten aus dem Gedächtnisse in der Klasse gezeichnet.

Geschichte, 2 St. w. Herr Oberlehrer Dr. Panten. Brandenburgisch-Preußische Geschichte. Erlernung von Geschichtstabellen.

Naturwissenschaften, 4 St. Herr Oberlehrer Dr. Gieswald.

a) Naturgeschichte (2 St.). Im Sommer Botanik. Das Linnéische und das natürliche Pflanzensystem. Pflanzen wurden von den Schülern auf Exkursionen gesammelt, bestimmt und dann getrocknet aufbewahrt. Im Winter Mineralogie und die Anfangsgründe der Krystallographie. Krystallmodelle wurden von den Schülern aus Pappe angefertigt. Wiederholung der Zoologie und Botanik.

b) Physik (2 St.). Die ersten drei Abschnitte aus Koppe's Physik wurden besprochen und und durch Versuche veranschaulicht. Außerdem wurden Erscheinungen aus der „Elasticität" besprochen.

Schreiben. Häusliche Uebung nach Vorschriften von Herrn Kronke, geleitet und beaufsichtigt von dem Direktor.

Zeichnen, 2 St. w. Herr Kronke. Zeichnen mit freier Hand: Ornamente, Theile des menschlichen Körpers, Blumen und Landschaften vollständig ausgeführt.

Singen, 2 St. w. Herr Kronke. Kombinirt mit V. A. und B. und auch mit I., II., III.

Zweite Klasse. Ordinarius: Herr Oberlehrer Gronau.

Religion, 2 St. w. der Direktor. Mit der ersten Klasse kombinirt.

Deutsch, 4 St. w. Herr Oberlehrer Dr. Panten. Dispositionen, Aufsätze, freie Vorträge. Metrik. Lektüre ausgewählter Stücke.

Latein, 4 St. w. Herr Oberlehrer Küster. 1) Lektüre 2 St. Von Caesaris bellum Gallicum wurde das erste, zweite und dritte Buch übersetzt. 2) Grammatik 2 St. Uebersicht der Syntax, Exercitien und Extemporalien.

Französisch, 4 St. w. Herr Oberlehrer Stobbe. 1) Grammatik: 1 St. Plötz II. Lekt. 29 — 45 und 63 — 73 und 1 St. Extemporalien und Exercitien. 2) Lektüre (2 St.). Magers franz. Lesebuch (4te Auflage) II. Nr. 8 — 13, 55 — 57, 33, 39, 16 — 24, 45. — Eine kleine französische Komödie: la France et l'Allemagne au collége aus Kitz's Lehrbuch wurde diktirt und von der ganzen Klasse gelernt.

Englisch, 2 St. w. Herr Friedländer. Die Grammatik wurde wiederholt und durch selbst gewählte englische Beispiele erläutert. Gelesen und übersetzt wurde aus des Lehrers Grammatik Charles St. John p. 150 — 160; Samuel Warren 197 — 220; aus A. Child's History of Germany p. 1 — 70. — Die zu den grammatikalischen Regeln gehörenden Uebungsstücke wurden mündlich und schriftlich übersetzt; ebenso die erste Periode der Literaturgeschichte Englands und der Anfang der Geschichte der Vereinigten Staaten. Mehre Gedichte wurden gelernt und einige Extemporalia angefertigt. Aus dem Deutschen ins Englische wurden aus des Lehrers Grammatik von Part II. 8. 94—99 (Geschichte der vereinigten Staaten von Nordamerika) schriftlich und dann wieder mündlich übersetzt. Ferner wurde aus dem Englischen Part II. S. 120, 121 u. S. 144 — 160 übersetzt.

Mathematik, 6 St. w. Herr Oberlehrer Gronau.

a) Praktisches Rechnen (1 St.). Außer dem bei den frühern Klassen Erwähnten wurde die Rabatt- und Kursrechnung, die Berechnung des Schrots und Korns und des Pari's der Münzen gelehrt und das Nöthigste über Wechsel mitgetheilt. Den Beschluß machte die logarithmisch behandelte Zins von Zinsrechnung. Kopfrechnen.

b) Arithmetik (2 St.) Das Ausziehen der Kubikwurzeln, die Potenzenlehre für negative und gebrochene Exponenten, die Logarithmen, die Gleichungen des ersten Grades mit mehreren unbekannten Größen, die quadratischen Gleichungen und die geometrischen Progressionen boten den Lehrstoff dar.

c) Geometrie (3 St.). Die Planimetrie wurde nach Koppe durch die Lehre von der Aehnlichkeit gradliniger Figuren und von der Ausmessung derselben und des Kreises beendigt. Vom goldenen Schnitte. Lösung geometrischer Aufgaben. Stereometrie.

Geographie, 2 St. w. Herr Oberlehrer Dr. Panten. Allgemeine vergleichende Geographie. Repetitionen aus dem III. und IV. Kursus von Voigt.

Geschichte, 2 St. w. der Direktor. Geschichte des Mittelalters, vornehmlich in Betreff des Kulturzustandes, des Geistes und der Sitten dieser Zeit und der von ihr gegebenen Grundlage gegenwärtiger Zustände. Das Entstehen und die allmälige Ausbildung und Erweiterung des Brandenburgisch-Preußischen Staates wurde dabei vornehmlich hervorgehoben und bis auf die Neuzeit fortgeführt. Daneben in jeder Stunde Rückblicke auf historisch merkwürdige Zeitabschnitte, Ereignisse und Personen, sowie auch eine zusammenhängende Wiederholung des Laufes der Weltbegebenheiten, wobei die von dem Lehrer entworfene sinnbildliche Geschichtstabelle „Strömungen der Völker- und Staatengeschichte durch die Jahrhunderte vor und nach Christus," die sich nebst einer gedruckten Erklärung in lithographirten, von den Schülern selbst kolorirten Exemplaren in den Händen derselben befindet, benutzt wurde. — Zur Erleichterung dieser Repetition hat der Lehrer in tabellarischer Form „Chronologische Memoranda für Prima und Sekunda der St. Johannis-Schule" zusammengestellt und (in diesem Jahre in zweiter, vermehrter Auflage) abdrucken lassen.

Naturwissenschaften, 6 St. w. Herr Oberlehrer Dr. Gieswald.

a) Naturgeschichte (2 St.). Im Sommer: Anatomie und einzelne Theile aus der vergleichenden Anatomie. Im Winter: Wiederholung der Zoologie im Allgemeinen und genauere Besprechung der technisch wichtigen Thiere, nach Eichelberg. Dann Zoognosie und Zoonomie.

b) Physik (2 St.). Magnetismus, Reibungselectricität und Galvanismus, durch zahlreiche Experimente veranschaulicht.

c) Chemie (2 St.). Metalloide und ihre Verbindungen durch vielfache Versuche veranschaulicht. Stöchiometrie.

Zeichnen, 2 St. w. Herr Kronke. Mit der ersten Klasse kombinirt.

Singen, 2 St. Herr Kronke. S. erste Klasse.

Erste Klasse. Ordinarius: Der Direktor.

Religion, 2 St. w. (mit der zweiten Klasse kombinirt) der Direktor. Es wurde in der einen Stunde die ältere und mittlere Geschichte der christlichen Kirche bis zur Reformation durchgegangen, wobei dann die zur Sprache gebrachten Unterscheidungslehren neu entstandener Kirchen und Sekten und die zu Streitpunkten gewordenen Bibelstellen und Dogmen Veranlassung gaben, diese Abschnitte der Religionslehre wiederholungsweise ins Gedächtniß zu rufen und zu erörtern. Die „Chronologischen Memoranda" (S. zweite Klasse) geben in einer besondern Rubrik die Hauptmomente der christlichen Kirchengeschichte an, und wurden bei einer Repetition dieser Geschichte zum Grunde gelegt. In der zweiten Stunde wurde das Evangelium des Lukas gelesen, aus den andern Evangelien ergänzt und erläutert. In dem letzten Vierteljahre Wiederholung der Christologie und der Lehre von der Rechtfertigung und Heiligung des Menschen. Es wurde dabei die „Christliche Glaubenslehre nach der Augsburgischen Konfession" (zusammengestellt von dem Direktor) als Leitfaden benutzt.

Deutsch, 4 St. w. und zwar a, (2 St. w.). Herr Oberlehrer Dr. Panten. Dispositionen, Aufsätze, freie Vorträge, Poetik, Lektüre ausgewählter Stücke. — b, Neuere Geschichte der deutschen Nationalliteratur seit der Sturm- und Drang-Periode (2 St.) der Direktor. Als Leitfaden wurde dabei der Grundriß der „Geschichte der deutschen Literatur von O. Lange" benutzt. Zur Uebersicht des Zusammenhanges und der Zeitfolge diente eine besondere Rubrik in den von dem Direktor entworfenen historischen Tabellen: „Chronologische Memoranda u. s. w." S. zweite Klasse. — Die Geschichte der älteren deutschen Literatur wurde wiederholt.

Latein, 4 St. w. Herr Oberlehrer Küster. Eine Stunde Exercitien und Extemporalien. Zwei Stunden Lektüre der Aeneide, von der die zweite Hälfte von VII. und I. und II. ganz gelesen wurden. 1 Stunde Clio, von der die Abschnitte IX. und X. (Curtius) und XXVIII. bis XXXIII. (Sallusiius) gelesen wurden.

Französisch, 4 St. w. Herr Oberlehrer Stobbe. Lektüre 2 St. Corinne (Auszug) liv. I. — VII.; Ségur: préface, liv. I. II.; Corneille: Cid; Scribe: la Camaraderie, woraus einige Scenen gelernt wurden. — Mehrere Stunden in jedem Vierteljahre wurden zu einem Ueberblick über die Literaturgeschichte bis 1700, mit besonderer Berücksichtigung des 16. und 17. Jahrhunderts benutzt.

Englisch, 2 St. w. Herr Friedländer. Ausführliche Wiederholung der Grammatik. Gelesen und übersetzt wurde: Domestic Life among the red men (Bancroft), Richard II. (Shakespeare). Ueber geschichtliche und literaturgeschichtliche Themata wurde monatlich ein Aufsatz angefertigt und besonders die Literaturgeschichte ausführlich besprochen und zu mündlichen Vorträgen benutzt. Für Extemporalia, Dictanda, Conversation und Leseübungen wurden mehre Stunden verwendet. Monologe und Gedichte wurden auswendig gelernt. Bei dem Unterrichte wurde nur Englisch gesprochen.

Mathematik, 6 St. w. Herr Oberlehrer Gronau.

a) Praktisches Rechnen (1 St.). Wechselreduktionen mit und ohne Spesen. Renten- und Amortisationsrechnung. Pactum antichreticum.

b) Arithmetik (2 St.). Quadratische Gleichungen mit mehreren unbekannten Größen, diophantische Gleichungen. Kubische Gleichungen mit Einschluß des irreducibeln Falles. Die Uebungsaufgaben, welche so viel als möglich aus dem praktischen Leben genommen wurden, boten hinreichende Gelegenheit zu Wiederholungen dar, welche in alle Pensa der früheren Klassen eingriffen.

c) Geometrie (3 St.). Trigonometrie und Stereometrie. Die letztere wurde erweitert durch die Projektionslehre, durch Sätze über den Obelisken und besonders durch die Lehre von den Kegelschnitten. Geometrische Aufgaben. Feldmessen: Es wurde unter der gütigen und sehr ersprießlichen Leitung des Herrn Wegebaumeisters Hartwig ein Nivellement ausgeführt.

Geographie, 2 St. w. Herr Oberlehrer Dr. Panten. Ausführliche Geographie und Statistik europäischer Länder. — Repetition des ganzen Unterrichtskursus.

Geschichte, 2 St. w. der Direktor. Die Hauptereignisse der neueren und neuesten Geschichte, mit besonderer Berücksichtigung der vaterländischen. Dabei stets wiederholende, das Gelernte erweiternde Rückblicke auf wichtige Geschichtsabschnitte, Ereignisse und Personen. Es wurden Parallelen gezogen, Ursachen und Wirkungen zusammengestellt; der Einfluß mächtiger Charaktere auf Ereignisse und Umgestaltung des Bestehenden, so wie umgekehrt der Einfluß großer Ereignisse auf Charaktere und Handlungsweise historischer Personen wurde erwogen; dabei überall auf Chronologie, Genealogie u. s. w. Rücksicht genommen und auf diese Weise die Bekanntschaft mit dem geschichtlichen Materiale theils vermehrt, theils zum richtigern Verständnisse gebracht. Zur genaueren Orientirung auf dem großen Felde der Geschichte wurde die bei der zweiten Klasse bereits erwähnte sinnbildliche Geschichtstabelle (die Strömungen der Völker- und Staatengeschichte u. s. w.) benutzt, und auf derselben nicht nur die alte und mittlere Geschichte ihren Hauptmomenten nach wiederholt, sondern auch das aus der neueren und neuesten Vorgetragene in seinem Zusammenhange mit jenem Früheren überschaut. Zur Erleichterung des Verständnisses der vaterländischen Geschichte hat der Lehrer eine Wandkarte des Preuß. Staates mit einer genauen Einzeichnung aller der größeren und kleineren Bestandtheile versehen, durch deren allmäliges Zusammenwachsen dieser Staat zu seiner jetzigen Beschaffenheit gelangt ist. — Bei den Wiederholungen wurden die „Chronologischen Memoranda" benutzt.

Naturwissenschaften, 6 St. w. Herr Oberlehrer Dr. Gieswald.

a) Naturgeschichte (1 — 2 St.). Pflanzenanatomie, Wiederholung und Erweiterung der Botanik, Zoologie und Mineralogie.

b) Physik (2 — 3 St.). 2 St. Optik und Akustik. 1 St. Mechanik.

c) Chemie (2 St.). Unorganische Chemie. Wiederholung der organischen.

Zeichnen, 2 St. w. Herr Kronke. Mit der zweiten Klasse kombinirt. Freies Handzeichnen, wie in der III. Klasse und nach Geometriekörpern. Ein halbes Jahr hindurch 1 St. freies Handzeichnen und 1 St. Projektionslehre (Zeichnung mit rechtwinklig parallelen Sehelinien). Punkte, Linien, Flächen, sich schneidende Flächen, die regelmäßigen Geometriekörper, die sich durchdringenden Körper, (Oktaeder und Würfel u.s.w.) wurden gezeichnet. — I. Klasse außerdem noch 1 St. w. (während des letzten Vierteljahres): theoretischer Unterricht in der Perspektive.

Singen, 2 St. w. Herr Kronke. Die erste Singabtheilung besteht aus Schülern der I., II. und III. und einigen Schülern der IV. und V. Klasse. Theilweise Wiederholung des in den untern Klassen Gelernten. Vierstimmige Gesänge von anerkannt guten Meistern wurden einstudirt und der Kirchengesang so viel als möglich zu fördern gesucht.

Den Unterricht in der **polnischen Sprache** ertheilte Herr Makowski. (S. Seite 3) vier Mal wöchentlich von 12 bis 1 Uhr Mittags Die daran Theil nehmenden Schüler aller Klassen wurden nach Maßgabe ihrer Fähigkeiten und Fortschritte in zwei Abtheilungen, und zwar jede derselben 2 Stunden wöchentlich unterrichtet. Die zweite (untere) Abtheilung lernte aus dem Uebungsbuche Wypis die richtige Aussprache, das korrekte Lesen und die Anfangsgründe der Grammatik, memorirte Vokabeln und versuchte sich in leichten Uebersetzungen der Lesestücke des genannten Buches. Die erste benutzte das Lehrbuch von Poplinski zum Einüben der nothwendigsten grammatischen Regeln und zum Uebersetzen schwierigerer Stücke.

Der Unterricht im **Turnen** ist den Schülern, welchen es von ihren Eltern vergönnt wurde, daran Theil zu nehmen, auch im vergangen Sommer für ein geringes Honorar wöchentlich zwei Mal von Herrn Grüning ertheilt worden.

Beaufsichtigung und Nachhülfe bei ihren Schularbeiten können die Schüler von den Herren Sonntag, Rothe und Schultze erhalten; so wie auch Privatunterricht im Zeichnen von Herrn Kronke.

III. Schüler-Zahl.

Diese belief sich am Schlusse des vorigen Schuljahres auf 568. Es sind seitdem 87 abgegangen und 102 aufgenommen worden, so daß die Schule jetzt 583 Schüler zählt, von denen sich 8 in I., 35 in II., 53 in III., 59 in IV. A., 50 in IV. B., 72 in V. A., 63 in V. B., 77 in VI. A., 70 in VI. B., 61 in VII. 1 und 35 in VII. 2 befinden. Im Laufe des Jahres starben von den Schülern der Anstalt: am 2. November 1856 der durch seinen freundlichen, lebensfrohen Sinn den Lehrern und Mitschülern sehr liebgewordene Quintaner Karl Gottlieb Steller, am 25. Oktober 1856 der fleißige und lernbegierige Sextaner Adalbert Ludwig Freymuth, und am 5. Januar d. J. der bescheidene und gutgeartete Sextaner Otto Eugen Karl Husen. Da Steller an den Petechien und Freymuth am Scharlachfieber gestorben war, durften ihre Mitschüler sie nicht zu Grabe begleiten, gaben jedoch dem ersteren, als er bei seiner Beerdigung am Schulhause vorbeigetragen wurde, durch Hinaustreten aus demselben und durch einen Chorgesang ihren Abschiedsgruß. Ein Gleiches geschah bei dem an Gehirnkrankheit gestorbenen Husen, den sodann die Schüler seiner Klasse, geführt von dem Direktor und von ihrem Ordinarius bis zu seinem Grabe folgten, an welchem der erstere ein Gebet hielt.

IV. Schul-Chronik.

Am 15. Oktober feierte die Schule den Geburtstag Sr. Majestät des Königes. Sämmtliche Schüler waren mit den Lehrern in der Aula versammelt. Dem vierstimmigen Vortrage einer Hymne folgte ein Choralgesang, diesem die von dem Direktor gehaltene Festrede, und ein Choral schloß die Feierlichkeit. Abends war das Schulhaus erleuchtet. — Am 6. und 7. Junius 1856 besuchte Herr Regierungs-Schulrath Dr. Wantrup die Anstalt, um von der äußern und innern Einrichtung derselben und von ihren Leistungen Kenntniß zu nehmen.

V. Vermehrung der Lehrmittel.

Für die Schulbibliothek wurden — neben den Fortsetzungen des „Grunertschen Archives" (an dessen Stelle am Anfange des neuen Jahres „Schlömilchs Zeitschrift für Mathematik" trat), des „Deutschen Wörterbuches von Grimm," der „Höheren Bürgerschule von Vogel und Körner," der „Deutschen Geschichte in Bildern, von Bülau," der „Reisen A. v. Humboldts nach Amerika, von Kletke" u. der „Mittheilungen von Petermann" — angeschafft: „Deutschlands Boden u. dessen Einwirkungen auf das Leben der Menschen, v. Cotta. Leipz. 1853. 2 Bde."; „das Deutsche Land von Kutzen. Bresl. 1855"; „Götzingers Stylschule zu Uebungen in der Muttersprache. Schaffh 1854,55. 2 Thle.";

„Burmeisters geologische Bilder. Leipz. 1855. 2 Thle.“; „Symbolik des Menschen, von Carus. Leipz. 1853“; „Lehrbuch der Geometrie von Heiß und Eschweiler. Köln. 1855“; „Der Meßknecht als Normaluhr von Preßler. Thl. II. für Nord- (und Mittel-) Deutschland. Braunschw. 1856“; „Sammlung von Aufgaben aus der niedern Arithmetik v. Hering. Leipz. 1853. 4 Hefte.“ Geschenkt wurden der Schule von dem hohen Ministerium der geistlichen, Unterrichts- und Medicinalangelegenheiten: C. Plinius Secund. Naturgeschichte, übersetzt von Strack Bremen. 1852—55, 3 Bde.; von der Hochverordneten Regierung: das Lutherbüchlein von Wangemann. Stettin. 1855; von Herrn Gutsbesitzer Schulz auf Gora: Kosmos von A. v. Humboldt. Berlin. 1845—51. 3 Bde.; von einem andern Freunde der Schule: Der Weltumsegler von Schäfer. Berlin. 1801—6. 4 Bde., Vorschule der Geschichte Europas v. Schubart. Berlin. 1834; Franklins Leben. Tübingen. 1795; von dem Herrn Verfasser: A childs History of Germany by Friedländer. Celle. 1856; von den Herren Verlegern: Kleines Vokabelbuch v. Plötz. 4te Aufl. Berlin. 1856, Schullesebuch v. Wetzel u. A. Berlin. 1855, Lateinisches Vokabularium v. Bonell. Berlin. 1856, Lateinische Grammatik v. Moiszisstzig. 2te Aufl. Berlin. 1856, Preußische Wandfibel für Christenkinder v. Hubert. Berlin. 1856. 2 Thle., Einfache Methode beim ersten Unterricht im Lesen und Schreiben v. Hubert. Berlin. 1856, Arithmetik und Algebra v. Müller. Berlin. 1857, Die Brandenb.-Preuß. Geschichte bis 1740 v. Kopp. Berlin. 1857, Praktische Vorschule der franz. Sprache v. Probst. Koblenz. 1856, Deutsches Lesebuch v. O. Lange. Berl. 1856. 2 Bde., Uebungsbuch in d. franz. Sprache v. Meunier, Kursus II. Iserlohn. 1856, Exercices français par de Castres. Iserl. 1857, Aufgaben zum Uebersetzen aus d. Deutsch. ins Engl. v. Herrig. Iserl. 1857, English Lessons. Iserl. 1856, Die Reise nach London v. Hamilton. Iserl. 1857, Handbuch d. physisch. Geogr. v. Hartmann. Berl. 1857, Deutsches Lesebuch v. Lehmann, 1ter Thl. 6te Aufl. Danzig. 1857, Der Neffe als Onkel v. Schiller zum Uebersetzen ins Englische v. Franz. Berl. 1857.

Für den naturwissenschaftlichen Unterricht sind angeschafft worden: Ein Apparat zur Bereitung kohlensaurer Flüssigkeit; ein Luftballon von Collodium; eine hydrostatische Wage; 6 Unzen Rosesches Metall: ein anatomisches Besteck; eine Farbenspindel; eine kleine Thermosäule; Platinblech und Platindraht; ein gangbares Modell einer Dampfmaschine; verschiedene galvanische Apparate, nämlich: eine große Multiplikatornadel, ein kleiner elektrischer Induktionsapparat und ein kleines Zink-Kohlen-Element, Apparate um die Theorie Ampère's zu erläutern (Solenoid u. s. w.), Apparate um die magnetische Induktion zu erläutern, und um Nobilische Farbenringe zu zeigen.

Für den historischen und geographischen Unterricht: die, das allmälige Zusammenfügen der einzelnen Theile des Preuß. Staates erläuternde Karte (S. Seite 13); Flußkarte von Europa und Deutschland, von E. Schauenburg (auf Wachspapier).

Für den Unterricht im Zeichnen sind aus dem Nachlasse eines verstorbenen Malers und Zeichnenlehrers vier Gypsabgüsse antiker Köpfe und eine schätzbare Sammlung guter Vorlegeblätter angekauft worden.

VI. Abiturientenprüfung,

zu welcher sich fünf Primaner der Anstalt gemeldet hatten, fand am 27. März d. J. statt, und es war dazu von der Hochverordneten Königlichen Regierung Herr Regierungs-Schulrath Dr. Wantrup, von dem Hochlöblichen Magistrate unserer Stadt Herr Stadtrath Dodenhoff als Kommissarius deputirt worden.

Zu den schriftlichen Arbeiten hatten die Examinanden folgende Themata erhalten:

im Deutschen: „Thu', was Jeder loben müßte,
Wenn die ganze Welt es wüßte;
Thu' es, daß es Niemand weiß,
Und gedoppelt ist Dein Preis." (Rückert.);

im Lateinischen: Retroversion der Stelle: Cicero de finibus Lib. III. c. 19, zweite Hälfte, von Mundum (autem) censent bis zu Ende;

im Französischen: Quelle part la France a-t-elle eue aux croisades?

im Englischen: Frederick Barbarossa;

in der Mathematik:

Arithmetische Aufgaben: 1) Jemand hat n Jahre in Besoldung gestanden und am Schlusse jedes Jahres a Thaler erspart und zu p % Zinseszinsen bei einer Bank sicher untergebracht. Jetzt will er eben so lange mit dem Schlusse jedes Jahres eine gewisse Summe von der Bank entnehmen; 1, wie groß kann diese Summe sein? Oder 2, wollte er nun jährlich postnumerando a Thaler entnehmen, wie viel Jahre müßte dann die Bank ihm oder seinen Erben Zahlung leisten?

2) Wenn man zur Summe der Quadrate zweier Zahlen das Produkt dieser Zahlen zulegt, so erhält man a, dagegen übertrifft die Differenz ihrer Kuben die Differenz der Zahlen selbst um b; welche Zahlen sind es?

Geometrische Aufgaben: 1) Man soll eine gegebene Linie über ihren Endpunkt hinaus um ein unbekanntes Stück verlängern, über der jetzigen ganzen Linie einen Halbkreis beschreiben, in dem Endpunkte der gegebenen Linie und in dem Endpunkte der Verlängerung ein Loth errichten, und endlich einen Kreis machen, dessen Mittelpunkt in dem ersten Lothe und in dem Umfange des Halbkreises liegt und der durch den Anfangspunkt der gegebenen Linie geht, und das zweite Loth berührt; — um wie weit ist die gegebene Linie zu verlängern?

2) Eine Kugel, deren specifisches Gewicht $= s$ ist, sinkt in Wasser h Zoll ein; — wie groß ist ihr Radius?

in den Naturwissenschaften:

aus der Physik: 1) Der Wagebalken einer Krämerwage A B C D habe das Gewicht G, der Drehpunkt sei in C, die Entfernung desselben von der Verbindungslinie A D B, der Aufhängepunkt der Schalen also $CD = e$, $AD = DB = a$, der Schwerpunkt liege in E und CE sei $= s$, in der Schale bei A liege das Gewicht P, in der von B das Gewicht Q und es sei $P > Q$, endlich der Ausschlagswinkel $= \alpha$; so ist zu beweisen, daß

$$\text{tg.}\,\alpha = \frac{a\,(P - Q)}{S\,G + e\,(P + Q)}$$

2) Wenn man bei einem Barometerstande von 28" eine 40" lange Glasröhre, die gleich weit und unten geschlossen ist, 27" hoch mit Quecksilber füllt, den übrigen Raum der Röhre mit dem Finger verschließt, umkehrt und das offene Ende unter Quecksilber taucht, so setzt sich natürlich die Luft unter das niederfallende Quecksilber; — es fragt sich aber: Wie hoch wird jetzt das Quecksilber in der Röhre stehen bleiben, und welchen Raum also die Luft ausfüllen? — Wie hat Laplace das Boylesche (Mariotte's) Gesetz bei der Fortpflanzung des Schalles angewendet?

3) Wenn bei einer Coulombschen Drehwage das bewegliche Blattgoldscheibchen ohne Torsion des Fadens mit dem festen in Berührung gebracht wird, dann durch die dem festen Scheibchen mitgetheilte Elektricitätsmenge E, um $\alpha = 12^0$, durch die Menge E 2 aber um $\alpha = 10^0$ gedreht wird; — in welchem Verhältnisse stehen die beiden Elektricitätsmengen E 1 und E 2 zu einander?

4) Wie findet man mit Hülfe der Pendelgesetze die magnetische Kraft M
a, durch eine Inklinationsnadel? — b, durch eine Deklinationsnadel? — c, wie ver-

halten sich hiernach die magnetischen Kräfte der Erde, wenn man an zwei verschiedenen Orten mit derselben Nadel Beobachtungen anstellt?

Aus der Chemie: Ueber chemische Feuerzeuge; — die Theorie derselben und die Bereitung des dazu verwendeten Materiales.

Nach dem Schlusse der Prüfung erhielten die fünf Examinaten das Zeugniß der Reife, und zwar:

Leonhard Böttcher, geb. zu Danzig, Novemb. 1837, seit Michaeli 1847 (mit einer Unterbrechung von anderthalb Jahren, die er in Berlin verlebte) Schüler der St. Johannis-Schule, seit Ostern 1855 Primaner, — mit dem Prädikate „Gut bestanden;"

Hugo Bernhard Dau, geb. zu Danzig, April 1837, seit Ostern 1845 Schüler der St. Johannis-Schule, seit Ostern 1854 Primaner, — mit dem Prädikate „Hinreichend bestanden;"

Wilhelm Bernhard Kronke, geb zu Danzig, Decemb. 1840, seit Ostern 1847 Schüler der St. Johannis-Schule, seit Ostern 1855 Primaner, — mit dem Prädikate „Hinreichend bestanden;"

Hermann Leopold Schmechel, geb. zu Danzig, Januar 1839, seit August 1845 Schüler der St. Johannis-Schule, seit Ostern 1854 Primaner, — mit dem Prädikate „Hinreichend bestanden;"

Viktor Joseph Friedrich Wittcke, geb. zu Danzig, Jul. 1836, seit Ostern 1850 Schüler der St. Johannis-Schule, seit Ostern 1853 (mit vielen und langen, durch Krankheit veranlaßten Unterbrechungen) Primaner, — mit dem Prädikate „Hinreichend bestanden."

VII. Das öffentliche Examen,

zu welchem wir hiermit ergebenst einladen, wird in der Aula des Schulhauses an dem genannten Tage gehalten werden und um 8 Uhr Morgens seinen Anfang nehmen. Die dabei vorkommenden Gegenstände sind:

Vormittags.

Choralgesang und Gebet.

Vierte Klasse.	A. Latein — Herr Oberlehrer Küster.
	B. Mathematik — Herr Kand. Weiß.
	A. u. B. Naturgeschichte — Herr Oberlehrer Dr. Gieswald.
Dritte Klasse.	Geschichte — Herr Oberlehrer Dr. Panten.
	Französisch — Herr Kand. Brandt.
Zweite Klasse.	Chemie — Herr Oberlehrer Dr. Gieswald.
	Französisch — Herr Oberlehrer Stobbe.
Erste Klasse.	Mathematik — Herr Oberlehrer Gronau.
	Englisch — Herr Friedländer.
	Geschichte — Der Direktor.

Vor dem Abtreten jeder Klasse werden von einigen Schülern derselben memorirte Gedichte in englischer, französischer oder deutscher Sprache vorgetragen werden.

Gesangproben, geleitet von Herrn Kronke.
Rede des Direktors zur Entlassung der Abiturienten.
Abschiedsworte des Abiturienten Dau in englischer Sprache.
Beantwortung derselben von dem Primaner Nisbet in französischer Sprache.

Nachmittags ($2\frac{1}{2}$ Uhr).

Siebente Klasse.	Lesen, Rechnen — Herr Schultze.
Sechste Klasse.	A. Geographie — Herr Sonntag.
	B. Rechnen — Herr Kand. Rothe.
	A. u. B. Religion — Der Direktor.
Fünfte Klasse.	A. Deutsch — Herr Oberlehrer Stobbe.
	B. Geschichte — Herr Kand. Brandt.
	A. u. B. Latein — Herr Kand. Brandt.
	Gesangproben, geleitet von Herrn Kronke.
	Schlußgebet — Choralgesang.

Am Tage nach dem Examen — 8. April — Censur, Berufung in höhere Klassen und Anfang der Ferien.

VIII. Aufnahme neuer Schüler.

Der neue Unterrichtskursus beginnt am 20. April d. J. Zur Aufnahme neuer Schüler bin ich am 16., 17. und 18. April während der Vormittagsstunden in meiner Wohnung (Heil. Geistgasse No. 77.) bereit.

Löschin.

Ueber

die allgemeine und volle Gültigkeit

mathematischer Formeln.

Ein Beitrag

zur

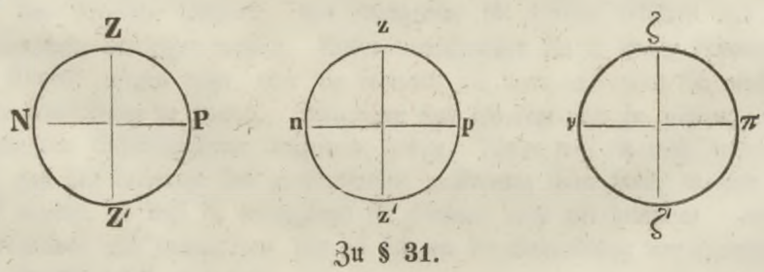
Deutung des Negativen und Imaginären.

Von

J. W. F. Gronau,

Oberlehrer an der St. Johannisschule in Danzig.

Erster Theil.



Zu § 31.

Danzig.

In Commission bei B. Kabus.

1857.

§ 1.

Wer von dem, was die Mathematiker seit ein Paar Tausend Jahren geleistet haben, auch nur eine Ahnung hat, erstaunt mit Recht über die Größe, Schönheit und Festigkeit ihres Lehrgebäudes. Keine andere irdische Wissenschaft kann sich einer solchen Vollendung rühmen, wie wir sie in der Mathematik antreffen, weshalb auch außerhalb derselben Stehende den Ausspruch der Begeisterung eines Plato: ὁ θεὸς ἀεὶ γεωμέτρει, und eines Gauß: ὁ θεὸς ἀριθμητίζει nicht ganz ungünstig aufzunehmen pflegen. Um so auffallender aber sind auch, namentlich für Nichtmathematiker, vier Flecken, welche sich im Laufe der Jahrhunderte an diesem erhabenen Gebäude gezeigt haben. Sie betreffen die Theorie des Negativen, des Imaginären, der Parallellinien und des Unendlichen. Das Alterthum wußte bei der Beschränkung, die es sich auflegte, über alle in den vier genannten Theorien steckenden Schwierigkeiten hinwegzukommen, die drei letzt-abgelaufenen Jahrhunderte deckten diese Schwierigkeiten auf, aber das jetzige Jahrhundert ist bis heute noch die Lösung schuldig geblieben. Da giebt es Mathematiker, welche, um in das klassische Zeitalter zurückzukehren, das Negative läugnen, das Imaginäre für Unsinn erklären und das Unendliche durch die Grenzmethode beseitigen wollen. Andere verschmähen die in Frage gestellten Theorien ihres offenbaren Nutzens wegen nicht, aber sie bedienen sich ihrer, wie man sich einer Maschine bedient, ohne ihre Einrichtung zu kennen. Diejenigen sind bis jetzt noch zu zählen, welche eine Lösung der obwaltenden Schwierigkeiten angestrebt haben. Ihnen will ich mich beigesellen, und obgleich ich fühle, daß nur derjenige das große Räthsel vollständig lösen kann, welcher es im Ganzen in Angriff nimmt, so will ich wenigstens für diesmal mich nur bemühen, einen Beitrag zur Deutung des Negativen und Imaginären, wie es sich bei der Behandlung von Gleichungen des zweiten und dritten Grades zeigt, zu liefern.

§ 2.

Aber auch bei dieser Beschränkung ist die Aufgabe, welche ich mir gestellt habe, noch groß, denn daß hier eigenthümliche Schwierigkeiten obwalten müssen, wird man am besten aus Folgendem erkennen. Nach Chasles (Geschichte der Geometrie pag. 565) scheinen die Inder zuerst von der negativen Quadratwurzel, welche sich bei Auflösung einer quadratischen Gleichung zeigt, in den Fällen Gebrauch gemacht zu haben, wenn die quadratische Gleichung zwei positive Wurzeln hat. Aber Diophantus (um 350 nach Chr.), obgleich er nach Nesselmann (die Algebra der Griechen pag. 288) die Regel: λεῖψις ἐπὶ λεῖψιν πολλαπλασιασθεῖσα ποιεῖ ὕπαρξιν· λεῖψις δὲ ἐπὶ ὕπαρξιν ποιεῖ λεῖψιν nicht nur kannte, sondern auch bei seinen Zeitgenossen als bekannt voraussetzen durfte, wandte diese negative Quadratwurzel niemals an. Der Araber Muhammed ben Musa († 833) behält sich die Entscheidung vor, bei solch einer Gleichung nach Umständen die positive oder negative Quadratwurzel zu verwerfen. Erst im sechszehnten Jahrhundert hielten es Cardanus und Stiefel der Mühe werth, die negative Wurzel einer quadratischen Gleichung ihrer selbst wegen in Betrachtung zu ziehen. Aber Vieta, dem die Wissenschaft so viel verdankt, verließ diesen Weg wieder, er sah die Vieldeutigkeit als ein den Gleichungen innewohnendes Leiden, das in ihnen steckende Negative als einen Fehler an, und suchte sie daher, bevor er sich an ihre Auflösung machte, so zu verbessern, daß sie ihm auf seine Fragen nur positive Antworten geben konnten. Doch hören wir ihn selber. Seine Schrift, welche Anderson mit dem Motto herausgab: **Quibus nihil in hoc genere simile aut secundum, huic aevo hactenus visum,** führt den Titel: **De aequationum recognitione et emendatione, Parisiis 1614.** Darin heißt es: **Praeparatione enim indigent aequationes saepenumero, antequam foeliciter explicentur . . At obest** πολυπάθεια, **et quô elatior est potestas, affectionisque gradus, eo major se prodit in explicando problemate** ἄῤῥησις ἢ ἀλογία. **Ecquid vero aequationis quae proposita est, agnitâ constitutione non tentabit Analysta, quô saxa et scopulos refugiat? num gnarus Anatomices invertet, deprimet, attollet, et undique operabitur secure? . . Sed non desunt Analystae singularia et topica remedia adversus vitia quaedam aequationum . . . Omnino adversus** πολυπάθειαν **tutissimum ac paratissimum remedium est, expurgatio per uncias. . . . De transmutatione, quae remedium est adversus vitium negationis etc.**

Kaum war indessen Vieta vom Schauplatz getreten, als der Niederländer Albert Girard 1629 über die Natur der negativen Wurzeln sehr richtige Ansichten entwickelte, aber seine Gründe gelangten wohl nicht zu Harriot, oder fanden kein Gehör, denn Harriot hält 1631 jede Gleichung für unmöglich, welche keine positive Wurzel hat. Erst seit Cartesius (†1650) durch seine Geometrie die negativen Wurzeln dargestellt hatte, konnten sie wenigstens nicht wieder verdrängt werden, denn als Carnot († 1823) wieder mit der Behauptung auftrat: daß die negativen Wurzeln keine wahren Auflösungen seien, daß sie mitunter ganz ohne Bedeutung seien, daß sie nichts wie bloße algebraische Formen seien, die durch gewisse Umformungen in die Rechnung gebracht werden, ja als er auch sogar es für unmöglich erklärte, auf genugthuende Art zu beweisen, daß $-a \times -a = a^2$ ist; da fehlte es nicht an solchen die ihn sofort zu widerlegen suchten und auch theilweise mit Erfolg widerlegten, wie z. B. Professor Förstemann in Danzig. (Ueber den Gegensatz positiver und negativer Größen 1817.) „Es war, sagt Arneth in seiner Geschichte der reinen Mathematik (pag. 239), dies einer der Gegenstände, vor welchen die Menschen wiederholt stehen blieben, die stückweise erfunden und wieder verlassen und endlich nur mit Mühe erkannt und festgehalten wurden."

§ 3.

Noch übler erging es den imaginären Wurzeln. Obgleich man seit Cardanus sie bemerkt und mit ihnen Rechnungen angestellt hat, obgleich der Nutzen der imaginären Größen nicht verkannt wird und Gauß auf ihre geometrische Darstellbarkeit hingewiesen hat, ist ihre Existenz bis auf den heutigen Tag bedroht. Ich will nicht von denen reden, welche sie für offenbaren Unsinn erklären und deshalb aus der Wissenschaft entfernt haben wollen, ich spreche von denen, welche ihre Erscheinung in der Analysis als nothwendig und vollkommen gerechtfertigt halten; auch sie hielten dieselben bis vor etwa zwanzig Jahren meistens für nicht wirklich, für inhaltsleere Zeichen, für bloße Gedankendinge, für ein Symbol, dem aber nichts zum Grunde liege, wohinter nichts stecke. Hören wir z. B. Montúcla (**Histoire des Mathématiques III. pag. 27**): **Il est suffisamment connu du plus médiocre algébriste qu' une expression radicale d'un degré pair, qui renferme sous le signe radical une quantité négative, est inexplicable et impossible. . . Ainsi toutes les fois que la résolution d'un problême conduit à de semblables expressions, et que parmi les différentes valeurs de l'inconnue il n'y en a que de telles, le problême est impossible ou ne présente qu' une demande absurde. C'est là de l'algèbre la plus élémentaire.**

Carnot, (**Géométrie de Position**) der schon die negativen Größen unter Umständen als eingebildete Quantitäten betrachtete, spricht um so mehr der Quadratwurzel aus denselben die Existenz ab, und drückt sich in seinen **Réflexions sur la métaphysique du calcul infinitésimal pag. 178** so aus: **Personne ne révoque en doute l'exactitude des résultats qu'on obtient par le calcul des imaginaires, quoiqu'elles ne soient que des formes algébriques et des hiéroglyphes de quantités absurdes.** Und noch 1852 schreibt Weiler (in Grunerts Archiv 18, pag. 195): Es giebt keine Zahl, deren Quadrat negativ ist, ein imaginärer Werth hat an und für sich keine Bedeutung.

§ 4.

Fragt man nun: wie ist es möglich mit Zeichen zu rechnen, die keinen Sinn haben, und bei denen man sich nichts reelles denken kann und soll, so pflegt die Antwort zu sein: das Unmögliche gehe, wie etwa beim **casus irreducibilis**, nachdem es seine guten Dienste gethan, aus der Rechnung heraus, die Algebra müsse für alles eine Antwort haben, selbst für die unsinnigste Frage und der Engländer Saunderson (**Elements of Algebra** übersetzt von **Joncourt pag. 358**) fügt triumphirend hinzu: **La force de la vérité est si grande qu'elle pénètre même au travers de l'impossible, sans que sa nature en soit altérée.** Doch der Vorurtheilsfreie fühlt sich durch das alles nicht befriedigt: **car on peut dire,** sagt selbst Montúcla **pag. 29, qu'une supposition impossible doit nécessairement conduire à une expression absolument impossible.** Und ich füge hinzu: Wenn die sogenannten eingebildeten Größen wirklich unmöglich wären, warum erhält man dann in Problemen, die auf einen bestimmten Grad führen, eine ganz bestimmte Anzahl von unmöglichen Lösungen? Ich begreife, daß eine Sache sich auf eine oder die andere Art ausführen läßt; fragt man mich aber, auf wie viel Arten läßt sich diese Sache nicht ausführen, so antworte ich: es giebt viele, unendlich viele Wege, die unmöglich zum erwünschten Ziele führen. Da aber die algebraischen Gleichungen neben einer bestimmten Anzahl reeller Lösungen nur eine, jetzt sogar im Voraus leicht zu bestimmende Anzahl von imaginären Wurzeln zulassen, so ist es hiemit **a priori** bewiesen, daß sie nicht unmöglich sind, daß sie eine Bedeutung haben, daß sie nicht, wie Carnot sagt, eine unverständliche Form sind - sondern nur eine bis jetzt nicht gehörig verstandene.

§ 5.

Auch sind die imaginären Größen zu ihrer vermeintlichen wesenlosen, nichtssagenden, und doch auch wieder viel vermögenden, gespensterhaftigen Natur nur durch eine Art Uebereinkunft in Folge eines logischen Fehlers gekommen. So sagt unter vielen andern Montücla pag. 27: **Une quantité soit positive ou négative, ses puissances paires seront toujours positives, d'où il suit que la racine d'un quarré négativ est un être de raison ou une chose impossible.** Wer fühlt nicht, besonders seitdem Professor Matzka in Prag 1850 (Versuch einer richtigen Lehre von der Realität der vorgeblich imaginären Größen pag. 18) so eindringlich darauf aufmerksam gemacht hat, daß hieraus nur dann die Unmöglichkeit der Quadratwurzeln aus negativen Zahlen folgen würde, wenn vorher nachgewiesen wäre, daß es außer positiven und negativen Zahlen keine andere gäbe. Giebt es aber nur erst positive **und** negative Zahlen, natürlich nur in der Vorstellung, denn in der materiellen Welt sucht man selbst die absolute Zahl vergebens, — erkennt man den unter ihnen bestehenden totalen Gegensatz an, so wird auch in der Vorstellung für solche Zahlen Platz sein oder verschafft werden können, welche zu den schon vorhandenen Zahlen nur etwa im halben Gegensatze sich befinden. Und dies sind die imaginären Zahlen.

Doch da man für diese zweite Dimension an den Zahlen lange Zeit kein Auge hatte, so sah man sich, wie gesagt, zu einer Art von Convention genöthigt, laut welcher es gestattet war, mit imaginären Größen zu rechnen, aber verboten, sich unter ihnen irgend etwas zu denken. In diesem Sinne spricht zum Beispiel 1821 Cauchy (Cours d'Analyse pag. 173 und 175): **On appelle expression symbolique toute combinaison de signes algébriques qui ne signifie rien . . . et équations symboliques toutes celles qui interprétées d'après les conventions généralement établies, sont inexactes ou n'ont pas de sens, mais desquelles on peut déduire des résultats exacts . . . Ces expressions symboliques ne peuvent s'interpréter d'après les conventions généralement établies, et ne représentent rien de réel.**

§ 6.

Der erste, welcher nach Matzka's schätzbaren Forschungen es der herrschenden Lehre gegenüber auszusprechen wagte, daß die imaginären Größen nicht unmöglich, sondern daß sie gleich den übrigen ableitbaren Größen vollkommen reell und nachweisbar (assignabiles) seien, war Professor Kühn in Danzig 1750.*) Aber das war zu früh. Montücla (3, 30) fertigt ihn mit den Worten ab: **Il ne donne sur ce sujet que des idées très fausses et fondées sur un déraisonnement analytique; car il en résulterait que $\sqrt{-1}$ est la même chose que $-\sqrt{1}$;** und Karsten (Mathematische Abhandlungen pag. 272) bedauert, daß mancher von Kühns Schülern, (z. B. der spätere Geheime Kriegsrath von Davisson, mit welchem er in dieser Angelegenheit Briefe wechselte) durch solche unrichtige Vorstellungen in ihren mathematischen Fortschritten aufgehalten seien. Auch die Stimmen der Franzosen Buée (1805) und Mourey (1828) und des Engländers Warren (1828) wurden anfangs überhört. Aber selbst nachdem in Deutschland durch den großen Gauß (1831) auf die Richtung in den Zahlen aufmerksam gemacht worden war, nachdem Scheffler, Wittstein, Matzka, Riecke und andere jeder auf seine Art das Imaginäre geo-

* Meditationes de quantitatibus imaginariis construendis. Novi Commentarii Academiae Petropolitanae. 1753.

metrisch dargestellt hatten, schwiegen die Gegner nicht. Der eine hielt die geometrischen Darstellungen für magische Symbole, die nichts bedeuten, aber doch Wunder thun sollen, der andre erklärte: „derlei Zeichnungen thun gleichsam bildlich den Irrthum dar, der ihnen zum Grunde liegt." Ja auch selbst die Anhänger dieser neuen Lehre wissen in Praxi nicht viel mit ihren Theorien anzufangen, sie quälen sich mit Aufgaben ab, die von vorne herein keinen praktischen Sinn haben. So weiß Scheffler (Ueber das Verhältniß der Arithmetik zur Geometrie, 1846, pag. 155) mit Hilfe seiner Theorie von den compleren Zahlen einen Sinn in folgende Aufgabe hineinzubringen: „Das Alter x einer Person A sei dadurch bestimmt, daß man sagt, vor 10 Jahren war das Quadrat des Alters dieser Person gleich dem damaligen Alter einer Person C, welche jetzt 6 Jahr alt ist," wo $x = 10 \pm 2\sqrt{-1} = 10 \pm 2\,i$ ist. Hier soll nach Scheffler die imaginäre Größe (2 i) die Dauer einer fremdartigen Erscheinung, etwa das Lebensalter einer andern Person B bezeichnen. - Riecke (die Rechnung mit Richtungszahlen, 1856) korrigirt ihm die Aufgabe, um das Resultat besser construiren zu können und setzt statt Zeiten Wege. So behandelt ferner Riecke pag. 92 eine Aufgabe, welche F. G. Fischer in seiner Algebra pag. 57 in der Absicht hinstellte, um Jedem die Lust zu benehmen, hinter dem Resultat einen praktischen Sinn herauszuklauben. Die Aufgabe lautet: Es verlangt Jemand eine Zahl, die um 10 vermehrt, und ins Quadrat erhoben, das 20fache der gesuchten Zahl giebt. Die gesuchte Zahl ist 10 i. Riecke liefert eine Construktion dazu. Burhenne (in Grunerts Archiv 22, 46) sucht bei der Aufgabe vom goldenen Schnitt den Theilpunkt auf der vorwärtsverlängerten Linie, wo er natürlich nicht liegen kann, weil sonst das erste Verhältniß seiner Proportion steigend, das andere fallend sein müßte. Er erhält zur Antwort $x = \frac{a}{2}(1 \pm \sqrt{-3})$. Die Zeichnung dazu wird weder ihm noch Riecke schwer. Wahrlich, wenn die neue Theorie von den Richtungszahlen nicht bessere Aufgaben zu lösen vermag, so würde, um mich der Worte Burhenne's selbst zu bedienen, daraus, wenn auch nicht auf ihre Schwäche, doch auf ihre Unfruchtbarkeit zu schließen sein.

§ 7.

Die Lebensfrage ist bekanntlich diese: Wie kommt es, daß wenn Jemand, der bei einer Rechnung oder Zeichnung von einer gewissen reellen positiven Größe A ausgegangen und zu einem gewissen Resultat B gelangt ist, uns sein Resultat B nennt und uns fragt, welche Größe er seinen Operationen zum Grunde gelegt hat, wir außer der einen positiven Antwort A oft noch andere positive oder negative oder imaginäre Größen als Antwort finden? und wie sind die andern Antworten zu deuten? Haben sie zu dem uns vorgelegten Problem stets eine Beziehung oder lösen sie in den meisten Fällen bloß, wie man zu sagen pflegt, die algebraische Gleichung auf?*)

Natürlich mehrere Antworten wird sich unter Umständen der Fragesteller schon gefallen lassen müssen, wir dürfen ihn ja nur an einen der ersten Paragraphen der Logik, der von der Umkehrung

---

* Arago in seinem Eloge de Carnot drückt sich so aus: Comment arrive-t-il que des problèmes étrangers se mêlent au problème unique que le géomètre voulait résoudre, que l'analyse réponde avec une déplorable fécondité à des questions qu'on ne lui a pas faites?

der Sätze handelt, erinnern; und er weiß ja eben so gut wie wir, daß aus dem Satze: Wenn A ist, so ist auch B, nicht mit Nothwendigkeit folgt, daß wenn B ist, auch A sein muß; es kann dann A sein, aber es kann auch C oder D sein. Was aber die Deutung der anderweitigen, nicht verlangten Antworten anbelangt, so lassen nicht bloß Schriftsteller, welche der neuen Theorie von den Richtungszahlen fern stehen, sondern auch manche ihrer Anhänger viel zu wünschen übrig. Sie gehen meistens von dem Grundsatze aus, daß was sie nicht zu deuten im Stande sind, auch nicht zu deuten sei. So soll selbst nach Matzka pag. 174 über jede Wurzel erst noch eine Diskussion veranstaltet werden, ob sie zuläßig sei oder nicht.

Ich meine, wenn man von richtigen Annahmen ausgegangen ist und richtig weiter geschlossen hat, so kann man weder auf Unsinn, noch auf Falsches, noch auf Ungehöriges kommen; die Diskussion über die einzelnen Wurzeln kann daher nur darin bestehen, die nähere oder entferntere Beziehung aufzusuchen, in welcher jeder Wurzelwerth zu dem eigentlichen Problem steht, er muß eine Beziehung haben; finde ich sie nicht, so sage ich nicht: es giebt keine, sondern: ich finde sie wohl ein andermal, oder ein Anderer wird sie finden. Es darf wohl kaum noch ausdrücklich erwähnt werden, daß ich hiebei nur die echten, wesentlichen (genuinas) Wurzeln einer Gleichung im Auge habe, dagegen aber die wirklich fremden, zufälligen Wurzeln (peregrinas) nicht, welche bisweilen der leichtern Auflösung wegen in die Endgleichung, ich möchte sagen, hineinmultiplicirt sind, wie z. B. in die Summenformel einer geometrischen Reihe der Faktor (e — 1) hineinmultiplicirt ist. Doch sind das, wie sich zeigen wird, nicht alles fremde Wurzeln, welche manche Schriftsteller so genannt haben, um sie ohne Weiteres beseitigen zu können.

§ 8.

Von dieser Idee ausgehend, habe ich schon im Jahre 1845 eine kleine Schrift unter dem Titel:

> „Ueber die Anzahl der Glieder in den Summenformeln der arithmetischen, geometrischen und harmonischen Progressionen. Danzig. Kabus."

herausgegeben. Ich habe darin die Bedeutung einer gebrochenen, negativen und imaginären Gliederzahl nachgewiesen, auch durch Construktionen meine Ansicht zu verdeutlichen gesucht. Erst kürzlich habe ich erfahren, daß Ley in seiner Arithmetik und Algebra 1835 und Ettingshausen in seiner höhern Mathematik (1827) über eine negative Anzahl von Gliedern dieselbe Ansicht aufgestellt haben. Auch steht meine dortige Construktion imaginärer Größen nun nicht mehr vereinsamt da. Aus Riecke's Schrift erfuhr ich, daß Maximilien Marie 1844 (Discours sur la nature des grandeurs négatives et imaginaires) von ähnlichen Betrachtungen ausgegangen ist; und auch Dr. Sloman in Paris (Versuch die Differentialrechnung auf andre als die bisherige Weise zu begründen pag. 92) argumentirt 1856 in dieser Beziehung auf gleiche Weise. Was ich nun in meiner oben erwähnten Schrift namentlich und beispielsweise von den arithmetischen Reihen erster Ordnung nachgewiesen habe, will ich gegenwärtig von jedem arithmetischen oder geometrischen Problem, welches auf eine Gleichung des zweiten oder dritten Grades führt, zeigen, daß nämlich sämmtliche Wurzeln der Gleichung sich auf das jedesmalige Problem selbst beziehen, daß von keinen überflüßigen und überzähligen Wurzeln die Rede sein kann und darf.

Doch es wird Zeit sein, daß ich meine kühne Behauptung durch die That rechtfertige. Ich werde zu diesem Zwecke vorzugsweise solche Beispiele wählen, deren Deutung noch gar nicht versucht oder von namhaften Schriftstellern aufgegeben ist, dagegen überlasse ich es dem Leser selbst, in Klügel's mathematischem Wörterbuche, in Carnot, in Lacroix's Anleitung zur Trigonometrie, in Förstemann u. s. w., die Behandlung solcher Aufgaben nachzusehen, die er hier vermissen wird.

I. Arithmetischer Theil.

A. Arithmetische Reihen der ersten Ordnung.

§ 9.

Da ich nicht voraussetzen kann, daß jeder meiner Leser meine oben erwähnte Schrift in Händen hat, und da ich überdies die Erfahrung gemacht habe, daß namentlich dasjenige, was ich pag. 23 über die Interpretation einer imaginären Gliederzahl gesagt habe, theilweise übersehen worden sein muß, so will ich, mit ein Paar Beispielen über arithmetische Reihen der ersten Ordnung den Anfang machen.

1ste Aufgabe. Aus Klügel's Wörterbuche I. pag. 192 entnehmen wir: „Wenn in einer Reihe das erste Glied $a = 10$, der Unterschied $d = 4$ und die Summe $s = 384$ ist, wie groß ist die Anzahl der Glieder (n) und das letzte Glied (z)?

Antwort. $n = -2 \pm 14$, $z = -2 \pm 56$."

Daß $z = 54$ zu $n = 12$ gehört, ist klar, aber $z = -58$ gehört nicht zu $n = -16$. Klügel gesteht zu, daß die Summe der Glieder von 10 bis -58 eine andre sei, als die Summe von 10 bis $+54$. Während nämlich die letztere $= 384$ ist, wird die andre $= -432$. Dies befremdet Klügel um so mehr, da er wohl bemerkt hat, daß er hier 18 Glieder statt 16 zu addiren hat, und er führt an, daß Pasquich daher lieber das Minuszeichen vor der Wurzelgröße ganz gestrichen hat. Für seine Person beruhigt er sich aber bald, da er die Entdeckung macht, daß wenn auch die arithmetische Summe der 18 Glieder von 10 bis -58 nicht stimmen will, doch das Produkt $(10 - 58) \times -16$ eben so gut $= 768 = 2.384$ sei, als das Produkt $(10 + 54) \times 12$. Dies beweist aber bekanntlich nichts, da jede beliebige zwei Glieder, die von den Enden der Reihe gleich weit entfernt sind, zusammen -48 geben und mit -16 multiplicirt das richtige Produkt liefern. Als ich die Schrift: „Ueber die Anzahl der Glieder" verfaßte, war mir diese dem sonstigen Scharfsinne Klügel's keine Ehre machende Stelle entgangen. Daher wollen wir dieses Beispiel hier genauer durchnehmen. Die Reihe lautet:

$-58, -54, -50, -46, -42, -38, -34, -30, -26, -22, -18, -14,$
$-10, -6, -2, +2, +6 \mid 10, 14, 18, 22, 26, 30, 34, 38, 42, 46, 50, 54.$

$$\text{Aus } n = -\frac{2a - d}{2d} \pm \sqrt{\frac{2.s}{d} + \left(\frac{2a - d}{2d}\right)^2}$$

folgt, da $a = 10$, $d = 4$, $s = 384$ ist, $n = -2 \pm 14$, also $n = 12$ und $= -16$. Ueber $n = 12$ dürfte ich natürlich kein Wort verlieren, doch bringe ich in Erinnerung, daß wenn gefragt wird, wie viel Glieder der Reihe, die mit 10 anfängt, habe ich zu nehmen, damit ich als Summe 384 erhalte, daß, sage ich, dann ein als Antwort erhaltenes positives n anzeigt, daß ich wirklich Glieder zu **nehmen** habe. Erhalte ich aber auf meine Frage ein negatives n zur Antwort, so heißt das natürlich doch, ich habe keins von allen zu nehmen, sondern sogar noch einige weniger, d. h. von den vorigen eine gewisse Anzahl (hier 16) fortzugeben.*) Ein großer Irrthum von Klügel ist es daher vorweg, daß er hiebei noch das erste Glied 10 hineinzieht. Es sollte überhaupt nichts genommen werden, am allerwenigsten ein Glied der eigentlichen Reihe. Auch kann natürlich nun nicht mehr von dem Gliede — 58 die Rede sein, es gehört nicht mehr zu den 16 Gliedern, die dem ersten Gliede vorangehen. Zählt man nun zusammen, was man fortgegeben hat, so ist es = — 384, d. h. wir haben + 384 genommen. Durch die vorliegende Reihe, in welcher $a = 10$, $d = 4$ ist, kann ich also wirklich auf doppelte Art in den Besitz von + 384 gelangen, entweder, indem ich die ersten 12 Glieder nehme, oder indem ich die 16 Glieder, welche dem ersten Gliede vorangehen, fortgebe.

Wie ich schon in meiner früheren Schrift, pag. 16., bemerkt habe, wo ich es mit andern Autoren zu thun hatte, eine Hauptquelle des Irrthums, den man in dieser Beziehung beging, war der, daß man eine Cardinalzahl mit einer Ordinalzahl verwechselte; allerdings hat das Glied — 58 den Inder — 16, aber deshalb gehört es nicht zu den 16 Gliedern, die dem ersten vorangehen, da vor dem ersten Gliede noch das 0te Glied kommt.

§ 10.

Wir wollen jetzt, Pasquich gegenüber und denen, die ihm vielleicht noch heute anhängen, zeigen, daß die Fortlassung des Minuszeichens vor der Wurzelgröße auch nicht immer vor Verlegenheit schützt. Wir legen folgende Frage vor:

2te Aufgabe. Wie viel Glieder einer Reihe, in welcher $a = 10$, $d = 4$ ist, habe ich zu nehmen, um in den Besitz von $s = -6$ zu gelangen?

Die richtige Antwort ist $n = -2 \pm 1$, nach Pasquich bloß $n = -1$. Aber selbst diese Antwort werden seine Anhänger nicht zu deuten verstehen. Klügel wird 10 + 6 + 2 zusammenzählen, andre bloß 6 + 2, noch andre werden bloß die 6 nehmen, aber alle werden sich wundern, daß nicht — 6 herauskommt. Es ist aber wirklich sowohl die Summe von — 1 Glied, als auch die Summe von — 3 Gliedern = — 6, wie der Leser sich nun wohl selbst sagen wird.

Doch ich gehe zur Hauptsache:

3te Aufgabe. Wie viel Glieder der Reihe, in welcher $a = 10$, $d = 4$ ist, habe ich zu nehmen, um successive in den Besitz von $s = -10, -16, -26, -40, -400$ zu gelangen?

Antwort. $n = -2 \pm i, -2 \pm 2i, -2 \pm 3i, -2 \pm 4i, -2 \pm 14i$.

Ich verlange in allen diesen Fällen etwas unmögliches. Denn die Summe einer steigenden Reihe hat ein Minimum, die kleinste Summe, die unsre Reihe haben kann, ist $s = -8$ für $n = -2$; gebe ich von den dem ersten Gliede vorangehenden Gliedern mehr als zwei fort, so wächst die Summe wieder. Verlangt man demnach das als unmöglich zu leisten Erkannte von mir, so muß man mir, nachdem ich mein Möglichstes gethan habe, (d. h. nachdem ich $n = -2$ ge-

* Vergl. Ueber die Anzahl pag. 12.

nommen habe) gestatten, jetzt eine geschickte Wendung zu machen, ich werde, was $n = -2 - q.\, i$ anlangt, die nächsten q Glieder nicht fortgeben, wie es das Minuszeichen mit sich bringt, sondern nehmen, und in Bezug auf $n = -2 + q\, i$, die vorigen q Glieder nicht nehmen, sondern fortgeben.

Denjenigen zu gefallen, welchen das angegebene Verfahren als eine Art coup de main erscheinen möchte, will ich noch folgendes hinzufügen: Es ereignet sich bekanntlich schon bei Gleichungen des ersten Grades, daß wenn die Frage verkehrt gestellt ist, die Algebra als Antwort ein negatives Resultat giebt und dadurch gewissermaßen den Fragenden auffordert, die Aufgabe passender zu stellen. So ist es auch hier mit dem imaginären Resultat, es weist den Fragesteller zurecht, und er wird, wenn er nicht zu denen gehört, die ohne Weiteres verwerfen, was sie nicht verstehen, nach einigem Besinnen seine neue Frage so stellen:

Verbesserte Aufgabe: Wie viele von den Gliedern, die dem ersten Gliede $a = 10$ vorangehen, habe ich bei $d = 4$ fortzugeben, und sobald das Fortgeben vom Ziele abführt, zu nehmen, damit ich in Summa, resp. 10, 16, 26, 40, . . . 400 fortgegeben habe?

Die jetzige algebraische Antwort lautet: $2 - i,\ 2 - 2\, i,\ \ldots\ 2 - 14\, i$ und ihre Deutung ist: Gieb nur die beiden ersten Glieder weg und von den folgenden nimm so viele, als der Coefficient von i anzeigt.

Anm. Wegen der andern Auflösung könnte die Fassung der Aufgabe so sein: Wie viele von den Gliedern, die dem ersten vorangehen, habe ich fortzugeben, und wenn das Fortgeben der folgenden Glieder vom Ziele abführt, wie viele von den vorigen Gliedern habe ich nochmals fortzugeben, damit ich im Ganzen etwa 26 fortgegeben habe? Die Antwort wäre alsdann: $2 + 3.\, i$ Glieder habe ich fortzugeben. Ich habe also, wohl gemerkt, 5 Glieder fortgegeben.

Dem Physiker sagt vielleicht folgende Fassung der Aufgabe mehr zu:

Noch mehr verbesserte Aufgabe: Als ein junger Gelehrter einen fallenden Körper zu beobachten anfing, fand er, daß er in der ersten Sekunde durch einen Raum $a = 10$, in jeder folgenden Sekunde durch einen um $d = 4$ größeren Raum fiel. Ein dabei stehender Bauer sagte: ich beobachte den Körper schon lange; als du ankamst, hatte derselbe vor meinen sehenden Augen sich schon durch einen Raum von $s = 400$ bewegt. Nun sollte der Gelehrte rathen, wie lange der Bauer den Körper schon angesehen habe? Derselbe gerieth aber in große Verlegenheit; denn als er mit vornehmer Miene in seine Gleichung: $s = a\, n + \frac{n.\, n-1}{2}.\, d$ setzte $a = 10$, $d = 4$, $s = -400$, erhielt er $n = -2 \pm 14\, i$, und als er hiemit unzufrieden und schon etwas kleinlaut $a = 6$, $d = -4$, $s = 400$ setzte, bekam er $n = 2 \pm 14\, i$. Verdrießlich wandte er sich von dem Bauer mit den Worten ab: Das ist unmöglich, du hast gelogen oder falsch gesehen. Der Bauer aber betheuerte, daß er den Körper 16 Sekunden lang unverwandt angesehen habe.

§ 11.

Wir wollen jetzt in ein Paar Beispielen eine fallende Reihe behandeln. Wegen der dabei vorkommenden von mir sogenannten Nebenreihe verweise ich auf meine frühere Schrift pag. 6.

4te Aufgabe.

In der arithmetischen fallenden Reihe

$$8,\ 7,\ 6,\ 5,\ 4,\ 3,\ 2,\ 1,\ 0,\ -1,\ -2,\ -3,\ -4.$$

kennt man das erste Glied $a = 8$, die Differenz $d = -1$ und die Summe $= s$, wofür wir successive 36 oder $36\frac{1}{4}$, $35\frac{5}{8}$ oder $36\frac{5}{8}$, $34\frac{1}{8}$ oder $38\frac{1}{4}$ setzen wollen. Aus wieviel Gliedern besteht in jedem Falle die Reihe?

Antwort. Aus $s = a.\, n\ \frac{n.\, n - 1}{2}\ d$ folgt $n^2 - \frac{2\, a + d}{d}\ n = - \frac{2.\, s}{d}$, wo also d positiv ist. Man setze $\frac{2\, a + d}{d} = \alpha$, $\frac{2.\, s}{d} = \sigma^2$, dann folgt aus $n^2 - \alpha\, n = - \sigma^2$

$$n = \frac{\alpha}{2} \pm \sqrt{\left(\frac{\alpha}{2}\right)^2 - \sigma^2}.$$

So wie die steigende Reihe ein Minimum von großer Bedeutung hatte, so dreht sich hier alles um das Maximum. Dasselbe findet bekanntlich statt, wenn $\sigma^2 = \left(\frac{\alpha}{2}\right)^2$ ist, oder wenn $s = \frac{d}{2}\left(\frac{\alpha}{2}\right)$ gesetzt wird, wobei $n = \frac{\alpha}{2}$ ist. Nehme ich nun $\sigma^2 = \left(\frac{\alpha}{2}\right)^2 - q^2$ an, so erhalte ich für n zwei reelle Werthe, nämlich $n = \frac{\alpha}{2} \pm q$, setze ich aber $\sigma^2 = \left(\frac{\alpha}{2}\right)^2 + q^2$, so wird n imaginär, nämlich $n = \frac{\alpha}{2} \pm i.\, q$.

Für unser Zahlenbeispiel ist $\alpha = 17$, $\frac{\alpha}{2} = 8\frac{1}{2}$, $\left(\frac{\alpha}{2}\right)^2 = 72\frac{1}{4}$. Wir erhalten also in unsrer Reihe die größt-möglichste Summe, wenn wir $8\frac{1}{2}$ Glieder nehmen, und diese möglichst-größte Summe beträgt $36\frac{1}{8}$.

Für jede andre Summe haben wir $n = 8\frac{1}{2} \pm \sqrt{72\frac{1}{4} - \sigma^2}$. Nun sei

$$\begin{matrix} 1)\ q^2 = \frac{1}{4};\ \text{ist dann}\ \sigma^2 = \left(\frac{\alpha}{2}\right)^2 - q^2, \\ \text{ist aber}\ \sigma^2 = \left(\frac{\alpha}{2}\right)^2 + q^2, \end{matrix} \quad \text{d. h. ist}\ s = \left\{\begin{matrix} 36, \\ 36\frac{1}{4}, \end{matrix}\right. \quad \text{so ist}\ n = \left\{\begin{matrix} 8\frac{1}{2} \pm \frac{1}{2} \\ 8\frac{1}{2} \pm \frac{1}{2}\, i. \end{matrix}\right.$$

$$\begin{matrix} 2)\ q^2 = 1;\ \text{ist dann}\ \sigma^2 = \left(\frac{\alpha}{2}\right)^2 - 1, \\ \text{ist aber}\ \sigma^2 = \left(\frac{\alpha}{2}\right)^2 + 1, \end{matrix} \quad \text{d. h. ist}\ s = \left\{\begin{matrix} 35\frac{5}{8}, \\ 36\frac{5}{8}, \end{matrix}\right. \quad \text{so ist}\ n = \left\{\begin{matrix} 8\frac{1}{2} \pm 1 \\ 8\frac{1}{2} \pm i. \end{matrix}\right.$$

$$\begin{matrix} 3)\ q^2 = 4;\ \text{ist dann}\ \sigma^2 = \left(\frac{\alpha}{2}\right)^2 - 4, \\ \text{ist aber}\ \sigma^2 = \left(\frac{\alpha}{2}\right)^2 + 4, \end{matrix} \quad \text{d. h. ist}\ s = \left\{\begin{matrix} 34\frac{1}{8}, \\ 38\frac{1}{8}, \end{matrix}\right. \quad \text{so ist}\ n = \left\{\begin{matrix} 8\frac{1}{2} \pm 2 \\ 8\frac{1}{2} \pm 2\, i. \end{matrix}\right.$$

Da nun hier fortwährend von halben Gliedern die Rede ist, so müssen wir vor allem die vorgelegte Reihe in eine andre Reihe auflösen, in welcher je zwei Glieder zusammen gleich einem

Gliede der Hauptreihe sind, ich nenne die neue Reihe, welche gleichfalls eine arithmetische Reihe der ersten Ordnung ist, die Nebenreihe.

Hauptreihe:

$$8, 7, 6, 5, \quad 4, \quad 3, \quad 2, \quad 1, \quad 0, \quad -1, \quad -2, \quad -3,$$

. . . .

. . . . Nebenreihe. . .

. . . .

$$\ldots\frac{21}{8}+\frac{19}{8},\frac{17}{8}+\frac{15}{8},\frac{13}{8}+\frac{11}{8},\frac{9}{8}+\frac{7}{8},\frac{5}{8}+\frac{3}{8},\frac{1}{8}+-\frac{1}{8},-\frac{3}{8}+-\frac{5}{8},-\frac{7}{8}+-\frac{9}{8}\ldots$$

ad 1) Soll nun die Summe 36 sein, so haben wir erst $8\frac{1}{2}$ Glieder zu nehmen, welches $36\frac{1}{8}$ macht, und noch das nächste halbe Glied, welches $-\frac{1}{8}$ ist; oder nachdem wir $8\frac{1}{2}$ Glieder genommen haben, geben wir das letzte halbe Glied, welches $+\frac{1}{8}$ ist, wieder zurück.

Soll aber die Summe $36\frac{1}{4}$ sein, so müssen wir wieder zunächst die ersten $8\frac{1}{2}$ Glieder nehmen und dann noch das nächste halbe Glied auf die entgegengesetzte Art nehmen, also weggeben. Oder nachdem wir die ersten $8\frac{1}{2}$ Glieder genommen haben, geben wir das letzte halbe Glied auf die entgegengesetzte Art, d. h. wir nehmen es noch zu.

ad 2) Die Summe soll $35\frac{5}{8}$ sein. Man hat wieder zunächst so viele Glieder zu nehmen, daß die größt-möglichste Summe herauskommt, also $8\frac{1}{2}$ Glieder. Nun soll man noch das nächste volle Glied dazunehmen. Da fragt sich zunächst, welches ist denn das letzte Glied gewesen? Natürlich das $8\frac{1}{2}$te Glied, welches aus der zweiten Hälfte des 8ten Gliedes ($\frac{3}{8}$) und ersten Hälfte des 9ten Gliedes ($\frac{1}{8}$) besteht und $\frac{4}{8} = \frac{1}{2}$ ist. Das nächste Glied also, welches noch zuzunehmen ist, ist das $9\frac{1}{2}$te Glied, bestehend aus $-\frac{1}{8}$ und aus $-\frac{3}{8}$. Wir haben also zu $36\frac{1}{8}$ noch $-\frac{1}{2}$ hinzuzufügen, was $35\frac{5}{8}$ giebt. Oder man nehme von $36\frac{1}{8}$ das besprochene letzte Glied $\frac{1}{2}$ hinweg.

Soll aber die Summe $36\frac{5}{8}$ sein, so nehmen wir natürlich zuerst die $8\frac{1}{2}$ ersten Glieder, dann nehmen wir noch das nächste Glied, oder geben das letzte Glied, nachdem es in sein Gegentheil umgewandelt ist.

ad 3) Die Summe soll $34\frac{1}{8}$ sein. Zu diesem Zwecke hat man zu der Summe der ersten $8\frac{1}{2}$ Glieder noch die Summe der beiden nächsten Glieder (also -2) zu addiren, oder die Summe der beiden letzten Glieder ($+2$) abzuziehen.

Soll aber die Summe $38\frac{1}{8}$ sein, so würde das gehen, wenn man sich erlauben dürfte, die Summe der beiden nächsten Glieder, welche man addiren soll, zu subtrahiren, oder die Summe der beiden letzten Glieder, welche man abziehen soll, zu addiren.

Verbesserte Aufgabe: Ein Reisender macht den ersten Tag 8 Meilen, jeden folgenden Tag eine Meile weniger als den vorigen Tag. a) Nach wie viel Tagen hat er sich von seiner Heimath um 36, um $35\frac{5}{8}$, um $34\frac{3}{8}$ Meilen entfernt? b) Nach wieviel Tagen hat er $36\frac{1}{4}$, $36\frac{5}{8}$, $38\frac{1}{8}$ Meilen gemacht?

Antwort auf a) Nach 8 oder 9 Tagen, nach $7\frac{1}{2}$ oder $9\frac{1}{2}$ Tagen, nach $6\frac{1}{2}$ oder $10\frac{1}{2}$ Tagen.

Antwort auf b) Nach 9 Tagen, nach $9\frac{1}{2}$ Tagen, nach $10\frac{1}{2}$ Tagen. Diese Antworten wollen sagen: Der Reisende geht so lange vorwärts wie möglich, er entfernt sich von seiner Heimath so weit, als es das Gesetz erlaubt, nach welchem er geht, dann geht er noch ein Paar Tage zurück, immer in Folge und mit Beobachtung des ihm auferlegten Gesetzes, wobei aber, wenn früher die Tage von Morgens bis Abends gerechnet wurden, sie jetzt von Mittag zu Mittag gezählt werden müssen.

§ 12.

5te Aufgabe. Ein Körper steigt in der ersten Sekunde $a = 9$ Längenmaße in die Höhe, in jeder folgenden Sekunde $d = 2$ solcher Maße weniger. Nach wie viel Sekunden wird er s Maß gestiegen oder nach Umständen durchlaufen sein?

Antwort. 1) Es sei $s = \sigma^2 = 16$; da $\frac{\alpha}{2} = 5$ ist, so ist $16 = 25 - q^2$ und $q = 3$.

Also ist $n = 5 \pm 3$. Schon nach 2 Sekunden ist der Körper 16 Maß in die Höhe gestiegen, aber wenn wir ihn 6 Sekunden später beobachten, so finden wir ihn in derselben Höhe.

2) Es sei $s = \sigma^2 = 34$. So hoch kann der Körper nicht steigen, seine größte Höhe ist 25 Maß. Daher heißt jetzt die Frage: Nach wie viel Sekunden hat der Körper einen Weg $= 34$ Maß durchlaufen? Da hier $34 = 25 + q^2$ ist, und $q = 3$, so ist

$$n = 5 \pm 3\,i,$$

d. h. um den verlangten Raum zu durchlaufen, muß der Körper erst 5 Sekunden, das ist, so lange wie möglich steigen, dann noch 3 Sekunden fallen; in den ersten 5 Sekunden steigt er durch einen Raum $= 25$ Maß und in den nächsten 3 Sekunden fällt er durch einen Raum von 9 Maß; er hat also im Ganzen einen Weg von $25 + 9 = 34$ Maß zurückgelegt und zwar in $5 + 3 = 8$ Sekunden.

Anmerkung. Wegen des doppelten Zeichens in dem Ausdruck $n = 5 \pm 3\,i$ sei noch folgendes gesagt: Der Körper ist in den ersten 8 Sekunden durch folgende Räume gestiegen:

$$9,\ 7,\ 5,\ 3,\ 1,\ -1,\ -3,\ -5.$$

Entweder wir nehmen nun von dem, was der Körper in 5 Sekunden gestiegen ist, das hinweg, was er in den nächsten 3 Sekunden gestiegen ist, oder wir legen noch das zu, was er in den letzten 3 Sekunden (in der 3ten, 4ten und 5ten) gestiegen ist.

§ 13.

Nach diesen Beispielen wollen wir die Hauptsache im Allgemeinen behandeln.

In einer fallenden arithmetischen Reihe

$a,\ a + d,\ a + 2\,d,\ \ldots\ldots,$ wo $n = -\frac{2\,a - d}{2\,d} \pm \sqrt{\frac{2.\,s}{d} + \left(\frac{2\,a - d}{2\,d}\right)^2}$ ist,

giebt es für s ein Maximum $M = -\frac{d}{2}.\left(\frac{2\,a - d}{2\,d}\right)^2$, für diesen Fall ist $n = -\frac{2\,a - d}{2\,d}$ $= p$, so daß also auch geschrieben werden kann: $M = -\frac{d}{2}.\,p^2$. Hieraus, so wie auch aus andern Gründen, kann man schließen, daß wenn man die Reihe rückwärts liest und das pte Glied als das erste ansieht, daß dieses neue erste Glied $= -\frac{d}{2}$ und der neue Unterschied $= -d$ ist, so wie auch, daß die nach dieser neuen Zählung dem ersten Gliede vorangehenden, [oder nach der alten Zählung auf das pte Glied folgenden] Glieder sich von den folgenden [oder respective von den vorigen] Gliedern nur durch das Zeichen unterscheiden.

Soll nun s um F kleiner als M sein, also $s = M - F$, so darf man natürlich nicht alle p Glieder nehmen, sondern vielleicht q Glieder weniger oder q Glieder mehr. Die Summe dieser q Glieder ist $F = -\frac{d}{2} p^2$. Demnach ist $s = -\frac{d}{2} p^2 + \frac{d}{2} q^2$. Setzen wir diesen Werth von s unter das Wurzelzeichen, so erhalten wir als Bestätigung $n = p \pm q$.

Verlangt man aber, daß die Summe um F größer werden soll, als das Maximum M, so hat man weiter nichts zu thun, als zu den ersten p Gliedern (alter Zählung) noch deren letzte q Glieder hinzuzufügen, oder von den ersten p Gliedern die folgenden q Glieder abzuziehen. Setzt man nun den jetzigen Werth von $s = M + F = -\frac{d}{2} p^2 - \frac{d}{2} q^2$ unter das Wurzelzeichen, so erhält man

$$n = p \pm q.\, i$$

woraus also die Bedeutung des i sattsam hervorgeht.

§ 14.

Ebenso giebt es in einer arithmetischen steigenden Reihe $a, a + d, a + 2d, \ldots$ für s ein Minimum = m, welches etwa aus

$$n = -\frac{2a - d}{2d} \pm \sqrt{\frac{2.s}{d} + \left(\frac{2a - d}{2d}\right)^2}$$

auf die bekannte Art gefunden werden kann, man erhält

$$m = -\frac{d}{2} \cdot \left(\frac{2a - d}{2d}\right)^2. \text{ Hiezu gehört } n = -\frac{2a - d}{2d} = -p$$

Demnach ist auch $m = -\frac{d}{2} p^2$ zu setzen. Wir schließen hieraus, daß das erste der p Glieder, die dem ersten Gliede a vorangehen, $\frac{d}{2}$ ist und daß sie um d wachsen; so wie auch, daß die noch frühern Glieder sich nur durch das Vorzeichen von den folgenden unterscheiden.

Soll nun die Summe s so klein nicht sein, als m besagt, sondern um f größer, kurz soll $s = m + f$ sein, so darf es dabei nicht bleiben, daß man die p Glieder, die dem ersten Gliede a vorangehen, weggiebt, sondern man wird einige (vielleicht q) Glieder weniger weggeben, d. h. q Glieder zulegen, auch kommt man eben dahin, wenn man noch die q früheren Glieder wegnimmt. Da dann $f = \frac{d}{2} q^2$ ist, so ist $s = -\frac{d}{2} p^2 + \frac{d}{2} q^2$. Setzt man diesen Ausdruck für s unter das Wurzelzeichen, so findet man gleichfalls $n = -p \pm q$.

Soll aber die Summe s noch um f kleiner werden, als das Minimum, kurz soll $s = m - f$ werden, so habe ich nicht bloß die besprochenen rückwärtsliegenden p Glieder wegzugeben, sondern auch die folgenden (noch mehr rückwärtsliegenden) q Glieder zuzulegen, oder die vorigen q Glieder gleichfalls wegzugeben. Die Summe drückt sich in diesem Falle so aus:

$$s = -\frac{d}{2} p^2 - \frac{d}{2} q^2$$

Setzt man diesen Ausdruck unter's Wurzelzeichen, so wird jetzt

$$n = -p \pm q.\, i\,,$$

wodurch auch hier die Bedeutung einer complexen Gliederzahl sich bis zur Evidenz herausstellt.

Giebt also eine Rechnung $n = \pm p \pm q.\,i$, so bedeutet $+$ vor dem reellen Theil, daß man die ersten p vorwärtsliegenden Glieder nehmen soll, $-$, daß man p rückwärtsliegende Glieder weggeben soll, dagegen bedeutet $+$ vor dem imaginären Theil, daß man q vorwärtsliegende Glieder weggeben soll, $-$, daß man, rückwärtsgehend, q Glieder nehmen soll.

B. Arithmetische Reihen der zweiten Ordnung.

§ 15.

6te Aufgabe (als Vorbereitung für die folgende). In einer arithmetischen Reihe der zweiten Ordnung, deren erstes Glied $a = 1$ ist, und in welcher das erste Glied der ersten Differenzenreihe (d) gleich ist dem ersten Gliede der constanten zweiten Differenzenreihe (e), und zwar in welcher $d = e = 6$ ist, hat man $2\,x$ Glieder nehmen müssen, um eine gewisse Summe $= S$ $(= 64)$ zu erlangen. Man will zu der nämlichen Summe auf eine andere Art kommen; man will nämlich zunächst die ersten x Glieder fortgeben, dann die Hälften der nächsten y Glieder nehmen und die Hälften der vorigen y Glieder weggeben. Wie groß ist y?

Auflösung. Wir wollen die auf die ersten x Glieder folgenden y Glieder, welche zu nehmen sind, als eine besondere Reihe ansehen, in welcher das erste Glied $= a_1$, das erste Glied der ersten Differenzenreihe $= d_1$ und ein Glied der constanten zweiten Differenzenreihe $= e_1 = e$ ist. Ebenso wollen wir von den ersten x Gliedern die letzten y Glieder, welche wegzugeben sind, als eine besondere Reihe ansehen, deren erstes Glied, (das $x$te der Hauptreihe) $= a^1$ ist, und in welcher das erste Glied der ersten Differenzenreihe $= d^1$ und ein Glied der constanten zweiten Differenzenreihe $= e^1 = e$ ist.

Die y Glieder, deren Hälften zu nehmen sind, lauten alsdann:

$$a_1\,;\ a_1 + d_1\,;\ a_1 + 2\,d_1 + e\,;\ a_1 + 3\,d_1 + 3\,e\,;\ a_1 + 4\,d_1 + 6\,e\,;\ \ldots$$

dagegen sind die y Glieder, deren Hälften fortzugeben sind, so beschaffen:

$$a^1\,;\ a^1 + d^1\,;\ a^1 + 2\,d^1 + e\,;\ a^1 + 3\,d^1 + 3\,e\,;\ a^1 + 4\,d^1 + 6\,e\,;\ \ldots$$

Der Erfolg von diesem Nehmen und Geben wird der sein, daß im Ganzen y Glieder von folgender Reihe genommen sind:

$$\frac{a_1 - a^1}{2}\,;\ \frac{a_1 - a^1}{2} + \frac{d_1 - d^1}{2}\,;\ \frac{a_1 - a^1}{2} + 2.\frac{d_1 - d^1}{2}\,;\ \frac{a_1 - a^1}{2} + 3.\frac{d_1 - d^1}{2}\,;\ \ldots$$

Dieses ist aber eine arithmetische Reihe der ersten Ordnung, deren erstes Glied $\alpha = \frac{a_1 - a^1}{2}$ und deren Differenz $\delta = \frac{d_1 - d^1}{2}$ ist.

Nun ist aber aus dem allgemeinen Gliede der Hauptreihe

$$z = a + (n - 1)\,d + \frac{n - 1.\,n - 2}{2}.\,e$$

leicht zu erkennen, daß

$$a_1 = 1 + 3\,x.\,(x + 1) \quad \text{und} \quad a^1 = 1 + 3\,x.\,(x - 1)$$
$$d_1 = 6.\,(x + 1) \qquad\qquad d^1 = -\,6.\,(x - 1) \quad \text{ist.}$$

Demnach ist $\alpha = 3\,x$ und $\delta = 6\,x = 2\,\alpha$.

Aber die Summe von y Gliedern einer Reihe, deren erstes Glied α und deren Differenz $2\,\alpha$ ist, beträgt $\alpha\, y^2$; bezeichnen wir diese Summe mit σ, so haben wir $\sigma = 3\, x\, y^2$.

Noch leichter erkennt man, daß die Summe der ersten x Glieder der Hauptreihe s, welche fortgegeben werden soll, x^3, also daß $s = x^3$ ist, ebenso daß $S = 8\, x^3$ ist.

Nun soll den Bedingungen der Aufgabe gemäß $S = -s + \sigma$ sein, also haben wir $8\, x^3 = -x^3 + 3\, x\, y^2$, oder $9\, x^3 = 3\, x\, y^2$, also

$$y^2 = 3\, x^2, \text{ und } y = \pm x \sqrt{3}.$$

Das Minuszeichen vor der Wurzelgröße macht nach dem Vorigen keine Schwierigkeit. Während nämlich $y = + x \sqrt{3}$ bedeutet, wir sollen von der Reihe

$$\alpha,\ 3\,\alpha,\ 5\,\alpha,\ 7\,\alpha \ldots$$

$x \sqrt{3}$ Glieder nehmen, verlangt der Ausdruck $y = - x \sqrt{3}$, daß wir diejenigen $x \sqrt{3}$ Glieder, welche dieser Reihe vorangehen, weggeben sollen. Die wegzugebenden Glieder sind aber

$$-\alpha,\ -3\,\alpha,\ -5\,\alpha,\ -7\,\alpha,\ \ldots.$$

Jeder sieht jetzt, daß es einerlei ist, ob ich von der ersten Reihe y Glieder nehme, oder von der letzten Reihe y Glieder gebe.

Wohl aber werden hier einige Worte über die irrationale Gliederanzahl $x \sqrt{3}$ überhaupt nicht an unrechter Stelle sein. — Ich setze $x \sqrt{3} = \frac{p}{q}$, wo für $q = 100000$ oder $= 10000000$ zu schreiben ist, je nachdem man die Rechnung auf 5 oder 7 Dezimalstellen einzurichten gedenkt, und wo also $p = q.\, x.\, \sqrt{3}$ eine ganze Zahl repräsentirt. Wir haben dann zu der eigentlichen Reihe

$$\alpha,\ 3\,\alpha,\ 5\,\alpha,\ 7\,\alpha,\ \ldots.,\ \text{deren Differenz } \delta = 2\,\alpha \text{ ist},$$

eine Nebenreihe zu bilden, in welcher je q Glieder gleich einem Gliede der eigentlichen Reihe sind. Nennen wir das erste Glied der Nebenreihe a, und die Differenz der auf einander folgenden Glieder b, so ist nach pag. 6 meiner oft citirten Schrift

$$\left.\begin{aligned} a &= \frac{\alpha}{q} - (q-1).\frac{\delta}{2.\,q.\,q} \\ &= \frac{3\,x}{q} - (q-1).\frac{3\,x}{q.\,q} \\ &= \frac{3\,x}{q.\,q}. \end{aligned}\right\} \quad \text{und } \left.\begin{aligned} b &= \frac{\delta}{q.\,q} \\ &= \frac{6\,x}{q.\,q} \end{aligned}\right\}$$

Nun kommt es auf eins hinaus, ob wir von der eigentlichen Reihe $\frac{p}{q}$ Glieder nehmen, oder von drr Nebenreihe p Glieder. Wenn aber, wie bei uns, das erste Glied der Nebenreihe $= a$, und die Differenz $b = 2.\, a$ ist, so ist die Summe von p Gliedern derselben

$$\sigma = a.\, p^2 = \frac{3\,x}{q.\,q}.\, q.\, q.\, x^2.\, 3 = 9\, x^3,$$

wie es sich gebührt.

Beispiel und Probe. Die Hauptreihe, die der ganzen Untersuchung zum Grunde liegt, ist folgende

$$\begin{array}{l} \ldots\ldots 91,\ 61,\ 37,\ 19,\ 7,\ 1. \mid 1,\ 7,\ 19,\ 37,\ 61,\ 91\ \ldots\ldots \\ \qquad\qquad\qquad\qquad\qquad 6,\ 12,\ 18,\ 24,\ 30 \\ \qquad\qquad\qquad\qquad\qquad\quad 6,\ 6,\ 6,\ 6, \end{array}$$

in welcher das erste Glied nach dem Strich, nämlich 1 das erste Glied **a** ist. Nehmen wir nun $S = 64$ an, so ist $2\,x = 4$, $x = 2$, $y = 2\sqrt{3} = 3{,}464102$.

a) Man setze zunächst $y = 3$. Dann ist

$$-1 - 7 + \frac{19 + 37 + 61 - 7 - 1 - 1}{2} = -8 + 54 = \mathbf{46} \text{ (statt 64).}$$

b) Man setze $y = 4$, dann ist $-8 + \dfrac{19 + 37 + 61 + 91 - 7 - 1 - 1 - 7}{2}$ $= -8 + 96 = \mathbf{88}$ (statt 64).

c) Man setze $y = 3\frac{1}{2}$. Dies erfordert die Construktion einer Nebenreihe zweiter Ordnung, in welcher je zwei Glieder gleich einem Gliede der Hauptreihe sind. Hier ist sie:

$$2\tfrac{3}{8} \mid \tfrac{7}{8} + \tfrac{1}{8} \parallel \tfrac{1}{8} + \tfrac{7}{8} \mid 2\tfrac{3}{8} + 4\tfrac{5}{8} \mid 7\tfrac{5}{8} + 11\tfrac{3}{8} \mid 15\tfrac{7}{8} + 21\tfrac{1}{8} \mid 27\tfrac{1}{8} + 33\tfrac{7}{8} \mid 41\tfrac{3}{8}$$

Nun ist $-8 + \dfrac{19 + 37 + 61 + 41\frac{3}{8} - 7 - 1 - 1 - 2\frac{3}{8}}{2} = -8 + 73\frac{1}{2} =$ $65\frac{1}{2}$ (statt 64).

Wir überlassen es dem Leser, die Probe weiter auszudehnen, und bemerken lieber noch, daß $y = -x\sqrt{3} = -3\frac{1}{2}$ (circa), im wesentlichen nichts anders bedeutet, als $y = +x\sqrt{3}$ $= +3\frac{1}{2}$ (circa). Es verwandeln sich durch das Minuszeichen nur die nächsten $3\frac{1}{2}$ zu nehmenden Glieder in die vorigen $3\frac{1}{2}$ zu gebenden Glieder und die vorigen $3\frac{1}{2}$ wegzugebenden Glieder in die folgenden $3\frac{1}{2}$ zu nehmenden Glieder. Wir erlangen also für $y = -3\frac{1}{2}$ nur etwas der Form nach verschiedenes, nämlich

$$-8 - \frac{7 + 1 + 1 + 2\frac{3}{8} - 19 - 37 - 61 - 41\frac{3}{8}}{2}$$

§ 16.

7te Aufgabe. Man soll in der reinen kubischen Gleichung

$$x^3 = 8\,k^3 = 64$$

eine praktische arithmetische Bedeutung der beiden imaginären Wurzeln angeben.

Auflösung. Wir gehen von der Reihe aus:

$$\ldots 91,\ 61,\ 37,\ 19,\ !\ \ 7,\ 1,\ \Big|\ 1,\ 7,\ 19,\ 37,\ 61,\ 91\ \ldots$$

in welcher $a = 1$, $d = e = 6$ ist.

Die Summenformel $s = a\,n + \frac{n.\,n - 1}{2} d + \frac{n.\,n - 1.\,n - 2}{2.\,3}.\,e$ schmilzt hier in folgende zusammen: $s = n^3$.

Fragt man nun, wie viel Glieder (x) dieser Reihe hat man zu nehmen, damit die Summe $8\,k^3 = 64$ werde, so liegt die Antwort in folgender Gleichung: $x^3 = 8\,k^3 = 64$. Aus ihr ergiebt sich, daß

entweder $x = 2\,k = 4$ ist, oder daß $x = -\,k \pm k\,\sqrt{3}.\,i = -\,2 \pm 2.\,\sqrt{3}.\,i$ ist.

Beachten wir nun einerseits, daß unsre Reihe vor und nach dem Striche identisch ist und sein muß, und halten wir andrerseits zusammen, was in der vorigen Aufgabe und am Schlusse der 6ten Aufgabe gesagt ist, so erkennen wir klar, daß der complere Ausdruck

$$x = -\,k - i.\,k.\,\sqrt{3}$$

die Bedeutung hat: Man gelangt zu der vorgeschriebenen Summe $8\,k^3$, wenn man diejenigen k Glieder, welche dem ersten Gliede $a = 1$ vorangehen, fortgiebt, dann die Hälften der noch frühern $k.\,\sqrt{3}$ Glieder nimmt und die Hälften der ihnen folgenden $k.\,\sqrt{3}$ Glieder weggiebt.

Der andre Werth $x = -\,k + i\,k\,\sqrt{3}$ hat, wie wir schon wissen, im wesentlichen dieselbe Bedeutnng, doch wollen wir bei seiner Darlegung eine andre Ausdrucksweise wählen. Wir wollen, nachdem wir die k Glieder fortgegeben haben, welche dem ersten Gliede $a = 1$ vorangehen, hinter dem letzten fortgegebenen Gliede irgend ein Zeichen machen, etwa ein Ausrufungszeichen (!), und diejenigen Glieder, welche links und rechts vom Ausrufungszeichen gleich weit abstehen, entsprechende Glieder nennen. Dann können wir die Bedeutung des andern compleren Ausdrucks faßlicher so geben: Nachdem man die schon besprochenen k Glieder vor dem Striche fortgegeben hat, hat man noch fortzugeben die ersten $k\,\sqrt{3}$ halben Differenzen entsprechender Glieder nach und vor dem Ausrufungszeichen. Dagegen würde sich nun die Bedeutung des ersten compleren Ausdrucks so angeben lassen: Nachdem man die k Glieder vor dem Strich fortgegeben, hat man die ersten $k\,\sqrt{3}$ halben Differenzen entsprechender Glieder vor und nach dem Zeichen zu nehmen.

Anmerkung. Wir können das Ausrufungszeichen auch mit Vortheil bei den arithmetischen Reihen der ersten Ordnung anwenden; thaten wir es früher nicht, so geschah es nur deswegen, weil dort die entsprechenden Glieder, absolut genommen, stets gleich sind und nur verschiedene Zeichen haben, und also die Einführung der halben Differenzen entsprechender Glieder damals als etwas überflüßiges hätte erscheinen können. Jetzt aber kommt dadurch in unsre ganze Darstellung erst Zusammenhang.

Bei fallenden Reihen erster Ordnung war $n = p \pm q$ oder $n = p \pm i.\,q$, je nachdem die vorgelegte Summe größer oder kleiner als das Minimum war. Hat man dem rationalen Theile dieser Ausdrücke genügt, d. h. hat man p Glieder genommen und hinter das letzte genommene Glied das Ausrufungszeichen gesetzt, so muß man, wenn $n = p \pm q$ ist, noch dazu nehmen die ersten q halben Differenzen entsprechender Glieder nach und vor dem Zeichen oder fortgeben die ersten q halben Differenzen entsprechender Glieder vor und nach dem Zeichen. Ist aber $n = p \pm i.\, q$, so hat man auch erst p Glieder zu nehmen, dann aber, was wir früher dazu nahmen, fortzugeben, und was wir früher fortgaben, zuzulegen.

Bei steigenden Reihen erster Ordnung war, wie aus der 6ten Aufgabe bekannt ist, entweder $n = -p \pm q$ oder $n = -p \pm i.\, q$, je nachdem die vorgelegte Summe kleiner oder größer als das Maximum war. Hier hat man zunächst p Glieder vor dem Striche fortzugeben, dann das Ausrufungszeichen zu setzen, und im ersten Falle entweder die ersten q halben Differenzen entsprechender Glieder nach und vor dem Zeichen zu nehmen, oder die Summe der ersten q halben Differenzen entsprechender Glieder vor und nach dem Zeichen auch noch fortzugeben; im andern Falle hat man wieder erst die p Glieder vor dem Striche fortzugeben, im Uebrigen aber umgekehrt zu verfahren.

§ 17.

8te Aufgabe (Vorbereitung für die folgende). Es liegt die Reihe vor:

$$-2,\ 22,\ 40,\ 52,\ 58,\ \big|\ 58,\ 52,\ 40,\ 22,\ -2,\ -32,\ -68,\ -110,\ -158,\ -212,$$

in welcher $a = 58$, $d = e = -6$ ist. Man hat von derselben $-2\,k$ Glieder genommen, d. h. die 2 k Glieder, die dem ersten Gliede vorangehen, weggegeben und dadurch eine gewisse positive Summe S erlangt, welche größer ist, als sämmtliche positive Glieder vor oder nach dem Strich. Man will zu der nämlichen Summe auf folgende Art gelangen: Man will die ersten k Glieder nehmen, dann die Hälften der folgenden y Glieder weggeben und die Hälften der vorigen y Glieder wieder zulegen. Wie groß ist y?

Auflösung. Die Summe der ersten k Glieder ist

$$s = a\,k + \frac{k.\,(k^2 - 1)}{6}\,.\,e$$

Nun ist das erste Glied der folgenden y Glieder

$$a_, = a + \frac{(k+1).\,k.}{2}\,e;$$ das erste Glied der Differenzenreihe

$d_, = (k + 1)\,e$, und die constante Differenz der Differenzenreihe $e_, = e$.

Demnach ist die Summe der folgenden y Glieder

$$s_, = a\,y + \frac{(k+1).\,k.}{2}\,e.\,y + (k+1).\,e\,\frac{y.\,(y-1)}{2} + \frac{y.\,(y-1)\,(y-2)}{6}.\,e$$

Ferner haben wir die Summe der vorigen y Glieder (s^1) zu bestimmen, d. h. derjenigen y Glieder, welche den eben besprochenen folgenden vorangehen, mit andern Worten: von den ersten k Gliedern die letzten y. Zu diesem Zwecke sehen wir das letzte der ersten k Glieder als das erste der sogenannten vorigen an und bezeichnen es mit a^1, das erste Glied der Differenzenreihe mit d^1 und die constante zweite Differenz mit e^1. Es ist dann:

$$a^1 = a + \frac{k.\,(k-1)}{2}\,e,\quad d^1 = -(k-1).\,e,\quad e^1 = e.$$ Demnach ist

$$s^1 = ay + \frac{(k-1)\,k.}{2}\,e.\,y. - \frac{y.\,(y-1)}{2}\,(k-1).\,e + \frac{y.\,(y-1)\,(y-2)}{6}.\,e.$$

Also ist

$$s^1 - s_1 = - k. e y - y. (y - 1) k e = - k. e. y^2$$

und $\frac{s^1 - s_1}{2} = - \frac{k. e. y^2}{2}$.

Nun sollte $s + \frac{s^1 - s_1}{2} = S$ sein, es soll also

$$a k + \frac{k. (k^2 - 1)}{6}. e - \frac{k. e. y^2}{2} = S \text{ sein.}$$

Demnach ist

$$y = \pm \sqrt{\left[a k + \frac{k. (k^2 - 1)}{6}. e - S\right]. \frac{2}{k. e}}$$

Da aber unter S die Summe von $- 2 k$ Gliedern verstanden wird, so kann gesetzt werden $S = - 2 a k - \frac{2 k (4 k^2 - 1)}{6}. e$, dadurch erhält man

$$y = \pm \sqrt{3 k^2 + \frac{6 a}{e} - 1}$$

Anmerkung. Ich darf wohl nicht erst erwähnen daß man zu dem Resultate $\frac{s^1 - s_1}{2} = - \frac{k. e. y^2}{2}$ auf kürzerm Wege hätte gelangen können, wenn man wieder die halben Differenzen entsprechender Glieder in Betrachtung gezogen hätte; sie bilden eine arithmetische Reihe erster Ordnung, deren erstes Glied $\varkappa = \frac{a^1 - a_1}{2} = - \frac{k e}{2}$ und deren Unterschied $\delta = \frac{d' - d_,}{2} = - k. e = 2 \alpha$ ist. Von dieser Reihe hat man y Glieder zu nehmen, dies giebt

$$\sigma = \alpha y^2 = - \frac{k. e}{2}. y^2.$$

Beispiel. Es sei $a = 58$, $d = e = - 6$, $S = 410$, also $2 k = 10$ dann ist $k = 5$ und $y = \pm 4$.

Und es ist wirklich, was $y = + 4$ anbelangt,

$$58 + 52 + 40 + 22 - \frac{2 + 32 + 68 + 110 + 158 - 2 + 22 + 40 + 52}{2}$$
$$= 170 + 240 = 410,$$

so wie auch in Beziehung auf $y = - 4$

$$170 - \frac{(- 32 - 68 - 110 - 158) - (- 2 + 22 + 40 + 52)}{2} = 410.$$

§ 18.

9te Aufgabe. Man hat eine Reihe vor Augen, in welcher $a = 58$, $d = e = - 6$ ist, und wirft die Frage auf, wie viel Glieder zu nehmen sind, damit die Summe $S = 410$ entsteht welche größer ist als die Summe der positiven Glieder nach dem Strich?

Auflösung. Wenn man die Anzahl der zu nehmenden Glieder mit x bezeichnet, so erhält man durch die Summenformel zur Bestimmung von x folgende Gleichung:

$$x^3 - \left(-\frac{6\,a}{e} + 1\right) x - \frac{6.\,S}{e} = 0$$

Nach der über S gemachten Voraussetzung kann x keine positive Zahl sein, gesetzt es finde sich $x = -2\,k$. Dann ist $S = -2\,a\,k - 2\,k.\,(4\,k^2 - 1).\,\frac{e}{6}$, dadurch geht unsre kubische Gleichung in folgende über: $x^3 - \left(-\frac{6\,a}{e} + 1\right) x + \left(\frac{12\,a\,k}{e} + 8\,k^3 - 2\,k\right) = 0.$

Aus dem von x unabhängigem Theile läßt sich schließen, daß das Produkt der beiden noch übrigen Wurzeln $x^1\,.\,x'' = \frac{6\,a}{e} + 4\,k^2 - 1$ ist, auch ist leicht zu sehen, daß ihre Summe $x^1 + x'' = 2\,k$ ist. Folglich ist

$$x^1 = k + \sqrt{-3\,k^2 - \frac{6\,a}{e} + 1} = k + i\sqrt{3\,k^2 + \frac{6\,a}{e} - 1} = k + i.\,y$$

$$x'' = k - \sqrt{-3\,k^2 - \frac{6\,a}{e} + 1} = k - i\sqrt{3\,k^2 + \frac{6\,a}{e} - 1} = k - i.\,y$$

Es läßt sich nämlich leicht zeigen, daß $3\,k^2 > -\frac{6\,a}{e} + 1$ ist.

Denn wenn S nur gleich wäre der Summe sämmtlicher positiven Glieder nach dem Striche, oder genauer gesprochen, wenn S nur gleich dem Maximum der Reihe = M wäre, so wäre $x = \sqrt{\frac{-\frac{6\,a}{e} + 1}{3}} = K$, was aus unsrer Gleichung für x entweder durch Differentiation oder aus der Cardanischen Formel gefunden werden kann. Außer diesem Doppelwerthe $x = K$ hätte dann die Gleichung noch die Wurzel $x = -2\,K$; d. h. man müßte die 2 K Glieder, welche unmittelbar vor dem Striche stehen, weggeben, um zur Summe M zu gelangen. Da wir aber durchs Weggeben von 2 k Gliedern vor dem Striche zu der größern Summe S gelangt sind, so ist klar, daß $2\,k > 2\,K$, und $k > \sqrt{\frac{-\frac{6\,a}{e} + 1}{3}}$, also $3\,k^2 > -\frac{6\,a}{e} + 1$ ist; w. z. b. w.

Durch diesen Nachweis ist die Einführung des Imaginären in den Ausdrücken für x' und x'' gerechtfertigt. Und seine Deutung? Sie lautet: Nachdem man k Glieder der Reihe genommen u. nach dem kten Gliede das Ausrufungszeichen gesetzt hat, n e h m e man noch die ersten y halben Differenzen entsprechender Glieder vor und nach dem Ausrufungszeichen, oder g e b e die Summe von y Halb-Differenzen entsprechender Glieder nach und vor dem Zeichen, wobei $y = \sqrt{3\,k^2 + \frac{6\,a}{e} - 1}$ ist. In beiden Fällen wird man zu der nämlichen, das Maximum überbietenden Summe S gelangen, welche das Weggeben von gewissen 2 k Gliedern hervorbringt.

Beispiel. Aus $x^3 - 59\,x + 410 = 0$ folgt $x = -10$, $x' = 5 + 4\,i$, $x'' = 5 - 4.\,i$.

1) Rechtfertigung von $x = -10$. Es ist:

$-58 - 52 - 40 - 22 + 2 + 32 + 68 + 110 + 158 + 212 = 410.$

2) Rechtfertigung von $x' = 5 + 4.\ i$. Es ist:

$$58 + 52 + 40 + 22 + - 2 - (-15 - 45 - 75 - 105) = 70 - (-240) = 410.$$

3) Rechtfertigung von $x'' = 5 - 4\ i$. Es ist:

$$170 + (15 + 45 + 75 + 105) = 170 + 240 = 410.$$

§ 19.

10te Aufgabe. (Vorbereitung für die folgende.) In der fallenden Reihe:

$$\ldots 65,\ 77,\ 83,\ \Big|\ 83,\ 77.\ 65,\ 47.\ 23,\ -7,\ -43,\ -85,\ -133,\ -187 \ldots.$$

deren erstes Glied $a = 83$, und deren $d = e = -6$ ist, hatte man $2\ k$ Glieder vor dem Striche fortgegeben und dadurch eine positive Summe S erlangt, welche kleiner ist als das Maximum der Reihe. Man will zu der nämlichen Summe auf folgende Art gelangen: Man will erst k Glieder (nach dem Strich) nehmen, dann auch noch die folgenden y Glieder dazu nehmen oder die vorigen y entsprechenden Glieder weggeben. Wie groß ist y?

Auflösung. Das $(k + 1)$ste Glied dieser Reihe, oder das erste Glied der sogenannten folgenden Glieder ist $a_{,} = a + \frac{(k + 1)\ k}{2}.\ e$, ferner ist bei diesen folgenden Gliedern $d = (k + 1).\ e,\quad e_{,} = e.$

Ebenso ist das erste Glied der sogenannten entsprechenden vorigen Glieder $a' = a + \frac{k.\ (k - 1).\ e}{2}$,

ferner ist bei diesen vorigen Gliedern $d' = -(k - 1)\ e,\quad e' = e.$

Demnach ist die Summe von y sogenannten folgenden Gliedern

$$s_{,} = a\ y + \frac{(k + 1)\ k.\ e.\ y}{2} + (k + 1)\ e.\ \frac{y.\ (y - 1)}{2} + \frac{y.\ (y - 1).\ (y - 2)}{6}.\ e.$$

und die Summe von y sogenannten entsprechenden vorigen Gliedern

$$s' = a\ y + \frac{(k - 1)\ k.\ e.\ y}{2} - (k - 1).\ \frac{e.\ y.\ (y - 1)}{2} + \frac{y.\ (y - 1).\ (y - 2)}{6}.\ e$$

Da nun der Aufgabe gemäß

$$s + s_{,} = s - s_{,} = S$$

sein soll, so muß $s_{,} + s' = 0$ sein.

Demnach erhalten wir zur Bestimmung von y folgende Gleichung:

$$2\ a\ y + k^2.\ e\ y + e\ y\ (y - 1) + \frac{y.\ (y - 1)\ (y - 2).}{3}\ e = 0, \text{ oder}$$

$$\left[2\ a + k^2\ e + \frac{e.\ (y^2 - 1)}{3}\right].\ y = o.$$

Nur wenn $S =$ dem Maximum der Reihe $= M$ wäre, könnte $y = o$ sein, da aber in dieser Aufgabe ausdrücklich angenommen ist, daß $S < M$ sein soll, so kann auch y nicht $= 0$ sein.

Demgemäß muß der andre Factor $2\ a + k^2\ e + \frac{e.\ (y^2 - 1)}{3} = 0$ sein und also

$$y = \pm \sqrt{-3\ k^2 - \frac{6\ a}{e} + 1}$$

Wir wissen schon, daß wenn $S = M$ ist, dann $3\ k^2 = -\frac{6\ a}{e} + 1$ ist, auch daß

$3\,k^2 > -\frac{6\,a}{e} + 1$ ist, wenn $S > M$ gesetzt wird, da wir aber gegenwärtig annehmen, daß $S < M$ ist, so muß $3\,k^2 < -\frac{6\,a}{e} + 1$ sein, demnach ist das, was unter dem Wurzelzeichen steht, positiv und y reell. Wir werden also die uns gestellte Aufgabe lösen können, ohne das Gebiet des Imaginären betreten zu dürfen.

Anmerkung. Aus $s_, + s' = 0$ folgt $s_, = -s'$ und $s' = -s_,$. Nun ist

$$s_, = \frac{s_, + s_,}{2} = \frac{s_, - s'}{2}\text{, ebenso } s' = \frac{s' + s'}{2} = \frac{s' - s_,}{2}.$$

Folglich ist $S = s + \frac{s_, - s'}{2}$, aber auch $S = s - \frac{s' - s_,}{2}$.

Nach diesen Bemerkungen werden wir jetzt y noch auf eine andre Weise finden können. Es stellt nämlich $\frac{s_, - s'}{2} = \sigma$ die Summe von y Gliedern einer arithmetischen Reihe erster Ordnung dar, deren erstes Glied $\alpha = \frac{a_, - a'}{2} = \frac{k.\,e}{2}$ und deren Differenz $\delta = 2\,\alpha = k.\,e$ ist. Es ist also

$$\sigma = \alpha\, y^2 = \frac{k.\,e}{2}\, y^2.$$

Aber der Aufgabe zufolge soll $s + \sigma = S$ sein.

Da nun $s = a\,k + \frac{k.\,(k^2 - 1)}{6}.\,e$ und $S = -2\,a\,k - \frac{2\,k.\,(4\,k^2 - 1)}{6}.\,e$ ist, so ergiebt sich auch hieraus

$$y = \pm\sqrt{-3\,k^2 - \frac{6\,a}{e} + 1}$$

Um die Vergleichung mit den beiden vorigen Aufgaben zu erleichtern, könnten wir jetzt auch die gegenwärtige Aufgabe so stellen: Man will zu der Summe S, kleiner als M und hervorgegangen durch das Weggeben von 2 k Gliedern vor dem Striche dadurch gelangen daß man die ersten k Glieder nach dem Striche nimmt, und dann noch dazunimmt die ersten y Halb-Differenzen entsprechender Glieder nach und vor dem Zeichen, oder fortgiebt die ersten y Halb-Differenzen entsprechender Glieder vor und nach dem Zeichen.

Beispiel. In der diesmal vorgelegten Reihe ist $a = 83$, $d = e = -6$ und es sei $S = 160$. Dann ist $2\,k = 10$, $k = 5$ und $y = \pm 3$.

Es ist $s = 295$, $s_, = -135$, $s' = +135$, also $s + s_, = 160$, auch $s - s' = 160$.

Natürlich ist auch: $83 + 77 + 65 + 47 + 23 + \frac{(-7 - 43 - 85) - (23 + 47 + 65)}{2} = 160$, so wie auch $295 - \frac{(23 + 47 + 65) - (-7 - 43 - 85)}{2} = 160$ ist.

Auch kann man so schreiben: $295 + \left(\frac{-7 - 23}{2} + \frac{-43 - 47}{2} + \frac{-85 - 65}{2}\right) = 160$

$$295 - \left(\frac{23 + 7}{2} + \frac{47 + 43}{2} + \frac{65 + 85}{2}\right) = 160.$$

§ 20.

11te Aufgabe. In einer Reihe ist a, d, e und S gegeben und zwar d = e und außerdem bekannt, daß die Reihe ein Maximum hat und daß S kleiner als dieses Maximum ist. Man sucht die Anzahl der Glieder x.

Auflösung. Das x muß aus folgender Gleichung gefunden werden:

$$x^3 - \left(-\frac{6\,a}{e} + 1\right) x - \frac{6.\,S}{e} = 0$$

Da $S < M$ ist, und ich M erhalte, wenn ich $K = \sqrt{\dfrac{-\frac{6\,a}{e} + 1}{3}}$ Glieder der Reihe nehme, so ist von vorne herein einzusehen, daß die Gleichung zwei positive Wurzeln v und w haben muß, von denen die eine (v) kleiner, die andre (w) größer als K sein muß. Auch folgt aus dem Umstande, daß die Reihe vor und nach dem Strich identisch ist, daß ich auch zu der verlangten Summe S gelangen werde, wenn ich von den Gliedern vor dem Striche eine gewisse Anzahl weggebe, und zwar mehr als w; die Gleichung hat also auch eine negative Wurzel, deren absoluter Werth größer als w ist. Beachte ich nun noch, daß in der Gleichung das von x^2 abhängige zweite Glied fehlt, so erkenne ich, daß diese dritte Wurzel der Gleichung $= -(v + w)$ sein muß.

Ich nehme an, daß ich diese dritte negative Wurzel zuerst gefunden habe, etwa durch die Cardanische Formel unter der Gestalt: $x = m + n$, wo ich hinterdrein gewahr werde, daß $m = -k + i.\,l$ und $n = -k - i.\,l$ ist, kurz, ich setze voraus, daß $x = -2\,k$ bereits gefunden ist. Dann ist

$S = -2\,a\,k - \dfrac{2\,k.\,(4\,k^2 - 1)}{6}.\,e$ und unsre kubische Gleichung erhält folgende Form:

$$x^3 - \left(-\frac{6\,a}{e} + 1\right) x + \left(\frac{12\,a\,k}{e} + 8\,k^3 - 2\,k\right) = 0$$

Aus dem letzten eingeklammerten Gliede ersehen wir, daß das Produkt der beiden andern Wurzeln

$$x'.\,x'' = \frac{6\,a}{e} + 4\,k^2 - 1 \text{ ist.}$$

Nun sei $x' = k + y$, $x'' = k - y$. Demnach ist

$$k^2 - y^2 = \frac{6\,a}{e} + 4\,k^2 - 1 \text{ und}$$

$$y = \pm \sqrt{-3\,k^2 - \frac{6\,a}{e} + 1}$$

Also ist $x' = w = k + \sqrt{-3\,k^2 - \dfrac{6\,a}{e} + 1}$

$$x'' = v = k - \sqrt{-3\,k^2 - \frac{6\,a}{e} + 1}$$

Anmerkung. Aus $x = m + n = -2\ k$ folgt bekanntlich auch, daß

$$x' = -\frac{m+n}{2} + \frac{m-n}{2}\ i\ \sqrt{3} = k + l.\ \sqrt{3},$$

$$x'' = -\frac{m+n}{2} - \frac{m-n}{2}\ i\ \sqrt{3} = k - l.\ \sqrt{3}\ \text{ist.}$$

Also ist $y^2 = 3.\ l^2$.

Beispiel. $a = 83$, $d = e = -6$, $S = 160$. Aus $x^3 - 84\ x + 160 =$ folgt dann $x = -10$, $x' = 5 + 3 = 8$, $x'' = 5 - 3 = 2$ ist.

Ueber die Deutung dieser drei Wurzeln darf ich wohl nach den gemachten Vorbereitungen kein Wort verlieren. Man wird zugeben, daß sie, theoretisch betrachtet, alle drei gleich berechtigt sind.

§ 21.

Auch könnte ich die Betrachtung solcher Reihen zweiter Ordnung, welche ein Minimum haben, dem Leser selbst überlassen, er dürfte ja nur sämmtliche Glieder der beiden zuletzt dargelegten Reihen mit dem entgegengesetzten Zeichen schreiben. Doch will ich seiner Prüfung ein Paar andere Beispiele unterbreiten, ohne ihm dabei mit Erläuterungen weiter lästig zu werden.

12te Aufgabe. $a = -65$, $d = e = 6$; $S = 340$.

Aus $x^3 - 66\ x - 340 = 0$ folgt $x = 10$, aber auch $x = -5 \pm 3\ i$.

Die Reihe heißt

$$\ldots -47, -59, -65 \,|\, -65, -59, -47, -29, -5, +25, +61, +103, +151, +205 \ldots$$

Deutung des compleren Ausdrucks:

$$65 + 59 + 47 + 29 + 5 + \frac{(25 + 61 + 103) + (5 + 29 + 47)}{2} = .05 + 135 = 340.$$

13te Aufgabe. $a = -25$, $d = e = 6$; $S = 60$.

Aus $x^3 - 26\ x - 60 = 0$ folgt $x = 6$, aber auch $= -3 \pm i$.

Die Reihe heißt nämlich:

$$\ldots -7, -19, -25 \,|\, -25, -19, -7, +11, +35, +65 \ldots$$

Deutung des imaginären Ausdrucks:

$$25 + 19 + 7 + \frac{11 + 7}{2} = 51 + 9 = 60$$

14te Aufgabe. $a = -5$, $d = e = 3$; $S = 10$.

Aus $x^3 - 11\ x - 20 = 0$ folgt $x = 4$ und $x = -2 \pm$

15te Aufgabe. $a = -11$, $d = e = 3$; $S = 164$.

Aus $x^3 - 23\ x - 328 = 0$ folgt $x = 8$, auch $x = -4 \pm 5$.

Die Reihe heißt:

$$\ldots -8, -11 \,|\, -11, -8, -2, +7, +19, +34, +52, +73, +97 \ldots$$

Deutung von $-4 + 5\ i$

$$11 + 8 + 2 - 7 + \frac{(19 + 34 + 52 + 73 + 97) - (7 - 2 - 8 - 11 - 11)}{2} =$$

$$14 + \frac{275 + 25}{2} = 164.$$

16te Aufgabe. $a = -29\frac{1}{2}$, $d = e = 6$; $S = 129\frac{1}{2}$.

Aus $x^3 - 30\frac{1}{2}\,x - 129\frac{1}{2} = 0$ folgt $x = 7$, aber auch $x = -3\frac{1}{2} \pm 2\frac{1}{2}.\,i.$

Die Reihe nebst der hier in Betracht kommenden, etwa aus der Summenformel zu construirenden Nebenreihe lautet:

$$\ldots\ldots \left|\, -14\tfrac{3}{8},\ -15\tfrac{1}{8} \,\right\| \underbrace{-15\tfrac{1}{8},\ -14\tfrac{3}{8}}_{-29\frac{1}{2}} \Big| \underbrace{-12\tfrac{7}{8},\ -10\tfrac{5}{8}}_{-23\frac{1}{2}} \Big| \underbrace{-7\tfrac{5}{8},\ -3\tfrac{7}{8}}_{-11\frac{1}{2}} \Big|$$

$$\underbrace{+\tfrac{5}{8},\ 5\tfrac{7}{8}}_{6\frac{1}{2}} \Big| \underbrace{11\tfrac{7}{8},\ 18\tfrac{5}{8}}_{30\frac{1}{2}} \Big| \underbrace{26\tfrac{1}{8},\ 34\tfrac{3}{8}}_{60\frac{1}{2}} \Big| \underbrace{\ldots\ldots}_{96\frac{1}{2}}$$

Deutung des Ausdrucks $-3\frac{1}{2} + 2\frac{1}{2}.\,i.$

$$29\tfrac{1}{2} + 23\tfrac{1}{2} + 11\tfrac{1}{2} - \tfrac{5}{8} + \frac{(5\frac{7}{8} + 30\frac{1}{2} + 60\frac{1}{2}) - (\frac{5}{8} - 11\frac{1}{2} - 23\frac{1}{2})}{2} =$$

$$63\tfrac{7}{8} + \frac{96\frac{7}{8} + 34\frac{3}{8}}{2} = 63\tfrac{7}{8} + 65\tfrac{5}{8} = 129\tfrac{1}{2}.$$

§ 22.

Nachdem wir von der 8ten Aufgabe ab uns mit Reihen zweiter Ordnung beschäftigt haben, bei welchen ein Maximum oder Minimum stattfindet, wollen wir, wie bei der 6ten und 7ten Aufgabe, Reihen aufstellen, die kein Maximum oder Minimum zulassen, die aber nicht auf reine kubische Gleichungen führen. Doch sei zunächst noch $d = e$. Wir werden also in den nächsten Aufgaben annehmen, daß der Ausdruck $K = \sqrt{\dfrac{-\frac{6\,a}{e} + 1}{3}}$ imaginär ist. Dies setzt voraus, daß die Vorzeichen von a und e dieselben sind, und daß, absolut genommen, $a > \dfrac{e}{6}$ ist.

17te Aufgabe. Man giebt uns die Reihe

$$\ldots\ 19,\ 10,\ 4,\ 1 \,\big|\, 1,\ 4\ \ 10,\ 19\ \ldots,$$

in welcher $a = 1$, $d = e = 3$ ist, und es soll angegeben werden, wieviel Glieder derselben zu nehmen sind, damit die Summe $S = 5$ werde. Dies führt auf folgende Gleichung

$$x^3 + x - 10 = 0,$$

aus welcher $x = 2$, aber auch $x = -1 \pm 2.\,i$ hervorgeht.

Deutung. Es ist nicht bloß $1 + 4 = 5$, sondern auch $-1 + \dfrac{(4 + 10) - (1 + 1)}{2}$ $= -1 + 6 = 5$.

Anmerkung. Diese Gleichung $x^3 + x - 10 = 0$ giebt Prof. Dr. Schmeißer, einem entschiedenen Gegner alles Negativen und Imaginären, in seiner Schrift: Kritische Betrachtung einiger Lehren der reinen Analysis, welchen der Vorwurf der Ungereimtheit gemacht worden ist, Frankfurt a. d. O., 1846, pag. 9 und 10 Veranlassung, die Cardanische Formel selbst in dem Falle als ganz nutzlos und ganz unbrauchbar zu bezeichnen, wenn sie eine positive Wurzel angiebt. Er findet nämlich nach dieser Formel $x = 2{,}1537\ \ldots + 0{,}21179 = 2{,}36549$. „Also ein falsches Resultat," ruft er aus. Glücklicher Weise hat dieselbe Gleichung Fischer in seiner Algebra pag. 125 schon 1829 nach derselben Formel berechnet, er findet

$$x = 2{,}15470 - 0{,}15468 = 2{,}00002 = 2.$$

Also das richtige Resultat ! — — .

18te Aufgabe. $a = 1,\ d = e = 3;\ S = -5.$

Aus $x^3 + x + 10 = o$ folgt $x = -2$ und $x = 1 \pm 2\,i$.

19te Aufgabe. $a = -1\ \ d = e = -3;\ S = 5.$

Auch hier ist $x = -2$ oder $= 1 \pm 2\,i$.

§ 23.

Der Vollständigkeit wegen wird noch die Aufstellung einer Reihe nöthig sein, in welcher d nicht = e ist Die Summenformel führt dann auf folgende nach Potenzen der Gliederzahl n geordneten Gleichung:

$$n^3 + 3.\left(\frac{d}{e} - 1\right) n^2 + \left(\frac{6\ a}{e} - \frac{3\ d}{e} + 2\right) n + \frac{6.\ S}{e} = 0$$

20ste Aufgabe. Es sei $a = 44,\ d = -15,\ e = 3;\ S = 125.$

Aus $x^3 - 18\ x^2 + 105\ x - 250 = o$ folgt $x = 10,\ x' = 4 + 3.\,i,\ x'' = 4 - 3.\,i.$

Die Reihe lautet:

$$44,\ 29,\ 17,\ 8,\ 2,\ -1,\ -1,\ +2,\ 8,\ 17\ \ldots$$

Deutung der imaginären Wurzel.

$$44 + 29 + 17 + 8 - \frac{2 - 1 - 1}{2} + \frac{8 + 17 + 29}{2} = 98 - 0 + 27 = 125.$$

Anmerkung. Hätten wir die vorliegende Gleichung reducirt, indem wir $x = y + 6$ annehmen, so wäre folgende kubische Gleichung aufzulösen gewesen:

$$y^3 - 3\ y - 52 = o$$

wobei $y = 4$ und auch $= -2 \pm 3\ i$ sich ergeben hätte.

Dies verglichen mit $n^3 + \left(\frac{6\ a}{e} - 1\right) n - \frac{6.\ S}{e} = e$ kann unter andern geben:

$a = -1,\ d = e = 3,\ S = 26$, welche Werthe auf die vorige Reihe zurückführen, nur daß der Strich hinter das 6te Glied zu setzen ist.

§ 24.

Das Resultat unsrer Untersuchungen läßt sich jetzt in folgende wenige Worte zusammenfassen: Wenn bei einer arithmetischen Reihe zweiter Ordnung a. d, e und S gegeben sind und man findet die dazu gehörige Anzahl der Glieder

$$n = \pm\ p \pm q\ i\ ,$$

so hat man zunächst p Glieder der Reihe zu nehmen oder die vor dem ersten Gliede befindlichen p Glieder zu geben, dann zu geben q Halbdifferenzen entsprechender Glieder nach und vor dem Ausrufungszeichen, oder zu nehmen q Halbdifferenzen entsprechender Glieder vor und nach dem Zeichen.

Dieselbe Regel gilt für arithmetische Reihen erster Ordnung, bei welchen $e = o$ ist, ja auch für Reihen 0ter Ordnung; da bei den letztern außerdem noch $d = o$ ist, so verschwinden hier natürlich die Halbdifferenzen.

C. Anwendung der Reihen.

§ 25.

21ste Aufgabe. Ein Dieb entflieht und macht täglich $\alpha = 3$ Meilen, t Tage später setzt ihm Jemand nach und macht den ersten Tag $a = 8$ Meilen, jeden folgenden Tag eine Meile $= d$ weniger, als am vorhergehenden. Wann wird der Dieb eingeholt sein?

Antw. $x = \frac{2a - 2\alpha + d}{2d} \pm \sqrt{\left(\frac{2a - 2\alpha + d}{2d}\right)^2 - \frac{2\alpha t}{d}}$

Setzt man $t = 4\frac{2}{3}$, so ist $x = 5\frac{1}{2} \pm 1\frac{1}{2} = 7$ oder 4.

Sollte also der Dieb nach vier Tagen sich unsichtbar gemacht haben, so könnte er noch nach 7 Tagen, drei Tage später eingefangen werden. Hiebei ist nichts unklar.

Aber man nehme $t = 5\frac{5}{12}$, dann erhält man

$$x = 5\tfrac{1}{2} \pm 1\tfrac{1}{2}.\, i.$$

Wie wird man dieses zu deuten haben? Die anfängliche Distanz ist $16\frac{1}{4}$ Meilen, nach einem Tage ist sie $11\frac{1}{4}$ Meilen, nach 2 Tagen $7\frac{1}{4}$, nach 3 Tagen $4\frac{1}{4}$, nach 4 Tagen $2\frac{1}{4}$, nach 5 Tagen $1\frac{1}{4}$, nach 6 Tagen bleibt sie $1\frac{1}{4}$ Meilen, von nun an wächst die Distanz, so daß nicht abzusehen ist, wie der Dieb eingeholt werden kann; man wird daher sagen können, es sei unter diesen Umständen unmöglich den Dieb einzuholen, und der gefundene Ausdruck enthält ja auch den Stempel der Unmöglichkeit. Aber der Ausdruck $x = 5\frac{1}{2} \pm 1\frac{1}{2}.\, i$ sagt uns nicht bloß, daß die Ausführung unmöglich ist, sondern auch, wie die Ausführung unsers Vorhabens mit der möglichst mindesten Modification, also **mutatis mutandis**, dennoch zu bewerkstelligen ist. Wir hörten schon, daß die Distanz nach 5 Tagen noch $1\frac{1}{4}$ Meilen betrug; der Nachsetzende gehe noch einen halben Tag nach Vorschrift (§ 11), nämlich $\frac{13}{8} = 1\frac{5}{8}$ Meilen, da der Dieb aber an diesem wie an jedem halben Tage nur $1\frac{1}{2}$ Meilen macht, so ist ihm der Nachsetzende nach $5\frac{1}{2}$ Tagen noch um $\frac{1}{8}$ Meilen näher gerückt, so daß ihre Distanz nur noch $1\frac{1}{8}$ Meilen beträgt. Nun freilich muß eine Aenderung eintreten, wenn der Dieb eingeholt werden soll. Mit Bezug auf die in § 11 aufgestellte Nebenreihe mache der Nachsetzende in den nächsten drei Halbtagen noch folgende Wege:

$$\left(\tfrac{13}{8} - \tfrac{11}{8}\right) : 2 = \tfrac{1}{8},\ \left(\tfrac{15}{8} - \tfrac{9}{8}\right) : 2 = \tfrac{3}{8},\ \left(\tfrac{17}{8} - \tfrac{7}{8}\right) : 2 = \tfrac{5}{8};$$

der Dieb aber

$$\left(1\tfrac{1}{2} - 1\tfrac{1}{2}\right) : 2 = 0,\ \left(1\tfrac{1}{2} - 1\tfrac{1}{2}\right) : 2 = 0,\ \left(1\tfrac{1}{2} - 1\tfrac{1}{2}\right) : 2 = 0.$$

Und so ist wirklich der Dieb nach $5\frac{1}{2} + 1\frac{1}{2}\, i$ Tagen, was hier so viel sagen will als nach 7 Tagen, eingeholt.

§ 26.

22ste Aufgabe. Zwei Körper A und B bewegen sich auf derselben geraden Linie nach derselben Richtung rechts hin. A, welcher täglich α Meilen macht, ist jetzt $t.\alpha$ Meilen von einem gewissen Orte C entfernt, B ist jetzt an diesem Orte und macht den ersten Tag a Meilen, den folgenden Tag d Meilen mehr, den nächsten $d + e$ Meilen mehr als den vorigen, und so beträgt der Zuwachs an Geschwindigkeit an jedem folgenden Tage e Meilen mehr als am vorigen. Wann wird der zweite Körper mit dem ersten zusammentreffen?

Auflösung. $x^3 + 3.\ \frac{d - e}{e}\ x^2 + \frac{6.\ (a - \alpha) - 3\ d + 2\ e}{e}\ x - \frac{6\ \alpha\ t}{e} = 0.$

1stes Beispiel. $\alpha = 20,\ t = 5\ \ a = 1,\ d = e = 3.$

Reihe: 64, 46, 31, 19, 10, 4 1. | 1, 4, 10, 19, 31, 46, 64, 85.

Aus $x^3 - 39\ x - 200 = 0$ folgt $x = 8$, aber auch $x = -4 \pm 3.\ i.$

Deutung von $-4 \pm 3\ i.$ Jetzt ist die Distanz 100 Meilen, vor einem Tage 81, vor 2 Tagen 65, vor 3 Tagen 55, vor 4 Tagen 54. Weil $\frac{31 - 19}{2} = 6$ und $\frac{20 - 20}{2} = 0$ ist, so war die Distanz noch einen Tag früher 48 Meilen; weil $\frac{46 - 10}{2} = 18$ und $\frac{20 - 20}{2} = 0$ ist, so war die Distanz wieder einen Tag früher 30 Meilen, und weil endlich $\frac{64 - 4}{2} = 30$ und $\frac{20 - 20}{2} = 0$ ist, so war die Distanz noch einen Tag früher $= 0$. Vor 7 Tagen waren die Körper zusammen an einem Orte, welcher 20 Meilen von C rechtshin entfernt liegt. Daselbst blieb A drei Tage ruhig liegen und bewegte sich dann rechts hin; B ging die ersten drei Tage rückwärts, links hin, und zwar 30 Meilen, 18 Meilen, 6 Meilen, und dann erst vorwärts 19 Meilen, 10 Meilen, 4 Meilen, 1 Meile 2c.

2tes Beispiel. $\alpha = 4,\ t = 5,\ a = -4,\ d = e = 1.$

Reihe. . . . 6, 2, — 1, — 3, — 4 | — 4, — 3, — 1, + 2, 6. 11, 17, 24 . . .

Aus $x^3 - 49\ x - 120 = 0$ folgt $x = 8$, aber auch $= -4 \pm 1$, also $x' = -5$, $x'' = -3$,

3tes Beispiel. $\alpha = 27,\ t = 5,\ a = -20\frac{1}{2},\ d = e = 12.$

Reihe. . . . $159\frac{1}{2}$, $99\frac{1}{2}$, $51\frac{1}{2}$, $15\frac{1}{2}$, $-8\frac{1}{2}$, $-20\frac{1}{2}$ | $-20\frac{1}{2}$, $-8\frac{1}{2}$, $15\frac{1}{2}$, $51\frac{1}{2}$, $99\frac{1}{2}$, $159\frac{1}{2}$.

Aus $x^3 - 24\frac{3}{4}\ x - 67\frac{1}{2} = 0$ folgt $x = 6$, aber auch $x = -3 \pm 1\frac{1}{2}.\ i.$

Deutung von $-3 \pm 1\frac{1}{2}.\ i.$ Vor drei Tagen war die Distanz noch $40\frac{1}{2}$ Meilen.

Nun ist $\frac{51\frac{1}{2} - 15\frac{1}{2}}{2} = 18 = a$, $\frac{99\frac{1}{2} + 8\frac{1}{2}}{2} = 54 = 3.\ a$, $\frac{159\frac{1}{2} + 20\frac{1}{2}}{2} = 90 = 5.\ a.$

Man bilde daher eine Nebenreihe, deren zwei erste Glieder zusammen $= a$, deren beide folgende Glieder zusammen $= 3.\ a$, u. s. w. sind.

Die Nebenreihe lautet:

$$\frac{a}{4} = 4\frac{1}{2},\ \frac{3.\ a}{4} = 13\frac{1}{2},\ \frac{5.\ a}{4} = 22\frac{1}{2},\ \text{u. s. w.}$$

Der zweite Körper mache den Tag vor jenen drei Tagen 18 Meilen und in der Hälfte des vorigen Tages $22\frac{1}{2}$ Meilen. Wenn inzwischen der erste Körper an der Stelle geblieben ist, wo er vor drei Tagen war, weil $\left(\frac{27 - 27}{2} = 0,\ \frac{13\frac{1}{2} - 13\frac{1}{2}}{2} = 0\right)$, so findet nun das Begegnen statt, denn es ist $18 + 22\frac{1}{2} = 40\frac{1}{2}$.

§ 27.

23ste Aufgabe. Der Körper A bewegt sich von einem gewissen Punkte C aus auf einer geraden Linie rechts hin, und zwar den ersten Tag α Meilen, jeden folgenden Tag δ Meilen mehr. (Genauer: er macht jeden folgenden Tag δ Meilen mehr als den vorigen, und ist nach t Tagen σ Meilen von C entfernt.) Nach t Tagen (nämlich jetzt) befindet sich ein anderer Körper B in C, auch er bewegt sich rechtshin und macht den ersten Tag a Meilen, den zweiten Tag a + d Meilen, den dritten Tag a + 2 d + e, und so vergrößert sich der Zuwachs seiner Geschwindigkeit täglich um e. Wann wird er den ersten Körper eingeholt haben?

Auflösung. $$x^3 + \frac{3.(d - e - \delta)}{e}x^2 + \frac{6}{e}\left(a - \alpha - \frac{d}{2} + \frac{e}{3} - t\delta + \frac{\delta}{2}\right)x - \frac{6}{e}\left(\alpha t + \frac{\delta t.}{2}(t-1)\right) = 0.$$

Beispiel. ($\alpha = 2$), $\delta = 4$, $\sigma = 200$, $t = 10$; $a = 4$, $d = 10$, $e = 6$.

Reihe für A, bei welchem $\alpha = 2$, $\delta = 4$ ist.

2, 6, 10, 14, 18, 22 ! 26, 30, 34, 38; 42, 46, 50, 54, 58 62, 66, 70.

Reihe für B, bei welchem $a = 4$, $d = 10$, $e = 6$ ist.

. . . 102, 70, 44 ! 24, 10, 2, 0 | 4, 14, 30, 52, 80, 114, 154, 200.

Aus $x^3 - 39x - 200 = 0$ folgt $x = 8$, aber auch $x = -4 \pm 3.i$.

Deutung von $x = -4 \pm 3.i$.

Jetzt ist die Distanz 200 Meilen, vor einem Tage war sie 162 (weil $38 - 0 = 38$ ist), vor zwei Tagen 130, (weil $34 - 2 = 32$ ist), vor drei Tagen 110, (weil $30 - 10 = 20$ ist), vor vier Tagen 108, (weil $26 - 24 = 2$ ist).

Soll die Entfernung noch kleiner gewesen sein, so müssen die Körper sich früher nach einem andern Gesetze bewegt haben. Es muß an den drei früheren Tagen A zurückgelegt haben

$\frac{26 - 22}{2} = 2$, $\frac{30 - 18}{2} = 6$, $\frac{34 - 14}{2} = 10$ Meilen (statt 22, 18, 14) und B

$\frac{24 - 44}{2} = -10$, $\frac{10 - 70}{2} = -30$, $\frac{2 - 102}{2} = -50$ Meilen (statt 44, 70, 102).

Weil nun $2 - (-10) = 12$, $6 - (-30) = 36$, $10 - (-50) = 60$ ist, so würde das heißen: vor fünf Tagen war die Distanz $108 - 12 = 96$ Meilen, vor sechs Tagen $96 - 36 = 60$ Meilen vor sieben Tagen $60 - 60 = 0$ Meilen so daß also vor sieben Tagen ein Zusammentreffen der Körper stattgefunden hätte wenn sie sich in den drei ersten Tagen nach dem abgeänderten Gesetze bewegt hätten. — Und zwar würde dieses Zusammentreffen 54 Meilen rechts von C stattgefunden haben, A hätte sich nach diesem Zusammentreffen in den nächsten sieben Tagen von C weiter entfernt um 10, 6, 2; 26, 30, 34, 38 Meilen, B dagegen hätte in den drei ersten Tagen nach dem Begegnen erst rückwärts, links hin respective 50, 30, 10 Meilen gehen müssen, und dann erst in den folgenden vier Tagen vorwärts 24, 10, 2, 0 Meilen. Wer diese Probe weiter zu Ende führt, wird finden, daß die Körper nun wieder 200 Meilen entfernt sind, wie es der Aufgabe gemäß sein soll. Auch beachte man, daß man für die Rechnung in der Reihe für A als erstes Glied 42 anzusehen hat; um dies anzudeuten, ist in dieser Reihe vor 42 ein Semikolon gesetzt.

D. Anderweitige arithmetische Aufgaben.

§ 28.

24ste Aufgabe. Dr. Schmeißer stellt in dem 1842 herausgekommenen Theile seiner schon citirten Schrift pag. 22 folgende Aufgabe: N kauft für 448 rtl. einiges Vieh. Hätte er für die nämliche Summe 4 Stück Vieh mehr bekommen, so hätte jedes Stück 2 rtl. weniger gekostet. Wie viel Stück waren es?

Antwort. + 28 Stück oder — 32 Stück.

„Was sollen nun, sagt Schmeißer diese 32 negativen Stücke? Darauf wird erwiedert, fährt er fort: Sie sind das Ergebniß folgender Aufgabe: N verkauft für 448 rtl. Waare. Hätte er dafür 4 Stück weniger verkauft, so würde jedes Stück 2 rtl. theurer geworden sein. Allein da diese Aufgabe gar nicht gegeben ist, so ist es nicht nur zweckwidrig, eine Antwort darauf zu geben, sondern auch fehlerhaft, daß auf die wirkliche Aufgabe ein falsches Resultat gegeben wird."

So weit Schmeißer. Ich erkläre die negative Auflösung folgender Maßen: Der Viehhändler bekommt Geld vom Fleischer, würde er dem Fleischer Geld geben, so würde man sagen können: der Viehhändler bekommt negatives Geld (d. h. eine negative Anzahl von Thalern). Der Fleischer erhält für sein Geld Schafe; würde er dem Viehhändler Schafe geben, so würde man sagen: der Fleischer bekommt eine negative Anzahl Schafe. Wenn nun der Fleischer für 448 rtl. 28 Schafe bekommt, so sagt Jeder: das Schaf kostet 16 rtl.; und hätte er für sein Geld 4 Schafe mehr bekommen, so hätte das Schaf nur 14 rtl. gekostet, also wäre es um 2 rtl. billiger gewesen. Erhält aber der Fleischer für sein Geld — 32 Schafe, dann kostet das Stück — 14 rtl., d. h. zu jedem Schaf, das er bekommt, erhält er noch 14 rtl. vom Viehhändler zu oder zu je 14 rtl., die er dem Viehhändler einhändigt, muß er noch ein Schaf hinzufügen; ein Fall, der allerdings so nicht vorkommen wird. Hätte nun der Fleischer für sein Geld 4 Schafe mehr bekommen, d. h. hätte er 4 Schafe weniger geben dürfen, so hätte er außer dem Gelde nur 28 Schafe gegeben, oder — 28 Schafe für sein Geld bekommen; das Schaf würde jetzt in der That — 16 rtl. gekostet haben, also wirklich 2 rtl. weniger als erst; d. h. der Werth eines Schafes ist jetzt noch um 2 rtl. geringer als erst. Wer früher ein Schaf nahm, bekam nur 14 rtl. zu, wer jetzt ein Schaf nimmt, bekommt 16 rtl. zu; wer kann da leugnen, daß im letzten Fall der Werth eines Schafes um 2 rtl. geringer als früher ist?

Man muß also zugeben, daß die negative Auflösung nicht zu verwerfen ist; es bedarf nur einer andern Einkleidung, um sie annehmbar zu machen. Der größte Theil des Ungewöhnlichen der negativen Auflösung fällt schon weg, wenn wir uns denken, daß der Fleischer für sein Geld nicht Vieh nimmt, sondern dem Viehhändler 32 Stück Vieh etwa zur Weide übergiebt. Nichts Ungewöhnliches aber wird man bei folgender Einkleidung derselben Aufgabe finden:

Ich schicke mehrere Kinder in eine Schule für 448 rtl. jährlich. Hätte ich für das nämliche Geld nur 4 Kinder weniger schicken können, so wäre das jährliche Schulgeld um 2 rtl. höher gewesen. Wie viel Kinder waren es?

Antwort. + 32 Kinder, auch — 28 Kinder.

§ 29.

25ste Aufgabe. Heis stellt in seiner Sammlung von Beispielen aus der allgemeinen Arithmetik und Algebra, Köln, 1840, pag. 231 und 239 im Wesentlichen folgende Aufgabe:

Ein Wasserbehälter erhält seinen Zufluß aus zwei Röhren und kann dadurch in 15 Stunden gefüllt werden. Soll aber der Behälter durch jede einzelne Röhre gefüllt werden, so erfordert die zweite 16 Stunden mehr als die erste. In welcher Zeit wird er demnach durch die erste gefüllt?

Antwort. In 24 Stunden, aber auch in — 10 Stunden.

Der negative Werth, sagt Heis, hat keine Bedeutung.

Ich erkläre ihn so: Einen Behälter in — 10 Stunden füllen, heißt: in einer Stunde wird $-\frac{1}{10}$ desselben angefüllt, oder $\frac{1}{10}$ geleert, also in 10 Stunden kann durch die erste Röhre das ganze Gefäß geleert werden. Vermittelst der andern Röhre erfordert die Anfüllung des Gefäßes 16 Stunden mehr, also eine Zeit von 6 Stunden. Läßt man beide Röhren zugleich ihre Wirksamkeit ausüben, so wird in einer Stunde $\frac{1}{6} - \frac{1}{10} = \frac{1}{15}$ des Gefäßes angefüllt, das Gefäß wird also in 15 Stunden voll sein.

Soll die negative Auflösung in den Vordergrund treten, so wird man die Aufgabe etwa so stellen:

Ein Wasserbehälter hat eine Zuflußröhre und eine Abflußröhre. Als er leer war, öffnete man beide Röhren zugleich (so daß also durch die eine Wasser zufloß und durch die andre Wasser abfloß). Nach 15 Stunden war der Behälter voll. Darauf schloß man die Zuflußröhre, und als nun in Folge dessen der Behälter leer war, schloß man die Abflußröhre, öffnete aber sogleich die Zuflußröhre. Als nun der Behälter wieder voll war, waren seit dem Augenblick, da man die Zuflußröhre schloß, 16 Stunden verflossen. In wie viel Stunden kann der volle Behälter geleert werden, wenn man die Zuflußröhre verschlossen hält?

Antwort. In 10 Stunden, aber auch in — 24 Stunden.

§ 30.

26ste Aufgabe. In Eulers Algebra pag. 111 findet sich folgende Aufgabe: Es verbinden sich einige Personen zu einer Gesellschaft, und Jeder legt 10 mal so viel Gulden ein, als der Personen sind, und mit dieser Summe gewinnen sie 6 p.C. mehr als ihrer sind. Nun findet sich's, daß der Gewinnst zusammen 392 fl. betrage. Wie viel sind der Kaufleute gewesen?

Antwort. Euler giebt als Auflösung nur 14 Personen an, aber aus der Gleichung: $x^3 + 6x^2 = 3920$ folgt außer $x = 14$, auch $x = -10 \pm 6.\sqrt{5}.\ i.$
$= -10 \pm 12.\ i$ (circa).

Daß beim Multipliciren der Multiplicandus irgend eine benannte Größe sein kann, weiß Jeder; positiv nennt man sie, wenn sie auf das gerade in Rede Stehende vortheilhaft einwirkt, negativ, wenn ihr Einfluß total nachtheilig ist. Zwischen diesen Grenzen liegen aber unzählig viele Abstufungen, und zwar so, daß man sich einen Uebergang von einer Stufe zur andern zu denken hat, wir dürfen aber in Bezug auf unsre Aufgabe nur noch zwei Situationen namhaft unterscheiden. Wir nennen nämlich Größen, welche für den Augenblick auf unser Vorhaben keinen Einfluß haben oder zu haben scheinen, imaginär; sie liegen, wenn wir uns sämmtliche Größen, die in irgend einer freundlichen oder feindlichen Beziehung zu unserm Plane stehen, um den Mittelpunkt eines Kreises als Radien gelagert denken, von beiden durch + und — bezeichneten diametral entgegengesetzten Richtungen gleich weit ab, deshalb sind sie von Gauß vorzugsweise laterale Größen genannt worden. Sie sind nicht unmöglich, nicht ohne Realität, nicht bedeutungslos, sinnlos; sie sind den neutralen Mächten zu vergleichen, aus denen Freunde oder Feinde werden können und haben zunächst ihre Bedeutung für sich. Daher findet auch unter ihnen selber ein eben so starker, also diametraler Gegensatz statt, wie zwischen den positiven und negativen Größen, und deshalb bezeichnet man die einen mit + i, die andern mit — i.

Vom Multiplicator ist ebenso bekannt, daß er eigentlich eine unbenannte Zahl sein muß; er soll uns nur eine absolute Zahl, z. B. 5 angeben, welche anzeigt, wie oft wir den in irgend einer Lage sich befindlichen Multiplicandus zu nehmen haben der Multiplicandus wird dadurch vergrößert oder nach Umständen verkleinert, behält aber seine Beziehung, seine Neigung, ich möchte sagen, seinen Neigungswinkel gegen die Hauptrichtung unverändert bei. Da man aber statt 5 etwa 8 — 3 schreiben kann, so wird nicht in Abrede zu stellen sein, daß etwa mit — 3 multipliciren heißt, den Multiplicandus 3 mal fortgeben, wodurch seine Beziehung zur Hauptsache total umgeändert wird. Ich verwandle also durchs Multipliciren mit einer negativen Zahl den Multiplicandus seiner Qualität nach in sein Gegentheil, ich mache dadurch aus einem Freunde einen Feind, aus einem Feinde einen Freund, aus einem, der mein Lager verlassen hatte und neutral geworden war, einen, der nun auch des Feindes Lager verläßt und abermals neutral wird. Da ferner $-1 = \sqrt{-1} . \sqrt{-1} = i . i$ ist, so heißt mit einer imaginären Größe multipliciren, die Qualität des Multiplicandus nicht total verändern sondern bei dem Verändern auf halbem Wege stehen bleiben, denn erst, wenn man den so veränderten, ich meine den mit i multiplicirten Multiplicandus abermals mit i multiplicirt, so schlägt er, der ursprüngliche Multiplicandus in sein Gegentheil um. Heißt also mit + 1 multipliciren, die Beziehung, in welcher der fragliche Gegenstand zu meinem Plane steht, nicht ändern, mit — 1 multipliciren, diese Beziehung in die entgegengesetzte verwandeln; so kann naturgemäß mit + i multipliciren, nichts anderes bedeuten, als die vorhandene Beziehung einer Größe zur Hauptsache durch Vorwärtsgehen in der Art ändern, daß ihre neue Beziehung gegen ihre vorige sich in einem neutralen Zustande befindet, so wie mit — i multipliciren nichts anderes heißt, als durch Zurückgehen um 90° oder durch Vorwärtsgehen um 270° die alten Beziehungen ändern. So heißt also, um bei dem vorigen Bilde zu bleiben, mit + i multipliciren, nach einander aus einem Freunde einen Neutralen, aus einem Neutralen einen Feind, aus einem Feinde einen zweiten Neutralen und aus diesem zweiten Neutralen einen Freund machen, und mit — i multipliciren: aus einem Freunde den zweiten Neutralen, aus diesem, der dem ersten Neutralen gegenüber steht, einen Feind, aus diesem den ersten Neutralen und endlich aus dem ersten Neutralen einen Freund machen. Wenn man in dieser Weise die vier Zeichen + 1, + i, — 1, — i von der Quantität sondert, wird man nie einen Fehlgriff thun, man wird z. B. finden, daß weil $\sqrt{-a^2} . \sqrt{-b^2}$ bedeutet: $i\sqrt{a^2} \times i\sqrt{b^2}$, es ist $= -ab$ und sich nicht durch Carnot (I. 150) und Schmeißer (I. 25) beirren lassen, welche meinen, es gäbe nach der gewöhnlichen Regel $= +ab$. Die höhere Einheit für alles Gesagte liegt in der Formel $\cos\varphi + i \sin\varphi$, welche Cauchy den reducirten Ausdruck nennt.

Nach dieser Darstellung des Multiplicirens wird der Leser sich gewiß alle drei Lösungen in der obigen Aufgabe selbst deuten können und wir geben ihm vorläufig nur folgende Anhaltspunkte für die erste und zweite Lösung, indem die dritte von der zweiten sich nicht wesentlich unterscheidet.

Erste Lösung.	Zweite Lösung.
Es sind: 14 Personen.	$[-\ 10 -\ 6\sqrt{5}.\ i]$ Personen.
Es zahlt Jeder: 140 fl. $=$ 14 fl. $\times$ 10.	$[-100-60\sqrt{5}.\ i]$ fl. $= (-10-6\sqrt{5}.\ i)$ fl. $\times 10$.
Alle: 140 fl. $\times$ 14 $=$ 1960 fl.	$[-100-60\sqrt{5}.\ i]$ fl. $\times (-10-6\sqrt{5}.\ i)$
oder: $\frac{98}{5}$ Beutel à 100 fl.	$[-\ 8+12\sqrt{5}.\ i]$ Beutel.
Gewinn mit jedem Beutel: $14 + 6 = 20$ fl.	$[-\ \ 4-\ 6\sqrt{5}.\ i]$ fl.
Gewinn mit allen Beuteln: 20 fl. $\times \frac{98}{5} = 392$ fl.	$[-\ \ 4-6\sqrt{5}.\ i]$ fl. $\times (-8+12\sqrt{5}.\ i) = 392$ fl.

Natürlich könnte man auch die Frage gleich so stellen, daß die früherhin verworfene Antwort in den Vordergrund kommt.

Frage: Wie viel Diebe (α) und wie viel Zweideutige (β) drängten sich zu dem Unternehmen?

Antwort. Um so viel als möglich unsre vorige Rechnung beibehalten zu können, wo von ehrlichen Leuten die Rede war, sagen wir: es waren $-\ \alpha$ Ehrliche. Dann macht sich die Rechnung so:

Personen: $-\ \alpha\ -\ \beta$ i.

Jeder zahlt: $-\ 10\ \alpha\ -\ 10\ \beta$ i fl.

Alle zahlen: $10\ (\alpha^2\ -\ \beta^2\ +\ 2\ \alpha\ \beta\ i)$ fl.

oder Beutel: $\dfrac{-\ (\beta^2\ -\ \alpha^2)\ +\ 2\ \alpha\ \beta\ i.}{10}$

Gewinn à Beutel: $-\ (\alpha\ -\ 6)\ -\ \beta$ i fl.

10facher Gewinn mit allen Beuteln:

$$= \text{fl.}\,(\beta^2 - \alpha^2)\,(\alpha - 6) - 2\alpha\beta\,(\alpha - 6).i + 2\alpha\beta^2 = 10.392\ \text{fl.} = c\ \text{fl.}$$
$$+ (\beta^2 - \alpha^2).\beta i.$$

Da sich am Schlusse des Geschäfts ein reiner Gewinn zeigt, und dabei von keinen noch schwebenden Summen (i) die Rede ist, so folgt aus unsrer einen Gleichung zweierlei:

1) $(\beta^2\ -\ \alpha^2)\ (\alpha\ -\ \beta)\ +\ 2\ \alpha\ \beta^2\ =\ c.$

2) $(\beta^2\ -\ \alpha^2)\ \beta\ =\ 2\ \alpha\ \beta\ (\alpha\ -\ \beta).$

Zunächst könnte man $\beta = 0$ setzen. Dies hätte zur Folge, daß

$-\ \alpha^3\ +\ 6\ \alpha^2\ =\ c$, also $\alpha\ =\ -\ 14$ und $\alpha\ =\ 10\ \pm\ 6\ \sqrt{5}.$ i wäre.

Das würde heißen: entweder waren 14 Personen, die das Gegentheil von Dieben sind, also nur 14 ehrliche Leute dabei betheiligt, oder nur Diebe; da aber die Anzahl der letztern auf $10\ +\ 6\ \sqrt{5}.$ i angegeben wird, so waren es doch nicht lauter Diebe, sondern es befanden sich unter ihnen $6\ \sqrt{5}$ zweideutige Personen.

Doch wir wollen den Fall, daß $\beta = 0$ ist, ausschließen, weil derselbe uns ja nur auf die eigentliche Aufgabe zurückführen würde; dann haben wir aus 2)

$\beta^2\ =\ 3\ \alpha^2\ -\ 12\ \alpha$, demnach aus 1)

$2\ \alpha\ (\alpha\ -\ 6)^2\ +\ 6\ \alpha^2.\ (\alpha\ -\ 4)\ =\ c$, oder $\alpha^3\ -\ 6\ \alpha^2\ +\ 9\ \alpha\ -\ 490\ =\ 0.$

Hier ist zunächst $\alpha = 10$, was $\beta = 6.\sqrt{5}$ ergiebt, worüber nichts weiter zu reden ist. Aber die kubische Gleichung $\alpha^3 - 6\,\alpha^2 + 9\,\alpha - 490 = 0$ läßt noch zwei andre Auflösungen zu, welche sich aus der quadratischen Gleichung

$$\alpha^2 + 4\,\alpha + 49 = 0 \text{ ergeben, nämlich}$$

$$\alpha = -2 \pm 3\sqrt{5}.\,i. \text{ Dies giebt}$$

$$\beta = \sqrt{-99 \mp 72\sqrt{5}.\,i} = 3\sqrt{5}\ \,i \mp 12.\,i.$$

Wie ist das zu verstehen? Wir wollen, um keine Verwirrung hervorzubringen, zunächst nur die obern Zeichen beachten. In unsrer ursprünglichen Annahme $x = -\alpha - \beta.\,i$ lag es ausgesprochen, daß wir uns unter α Diebe, unter β Zweideutige dachten, welche es aus Dieben und nicht etwa aus ehrlichen Leuten geworden waren. Finden wir nun $\alpha = -2 + 3\sqrt{5}.\,i$, so heißt das: unter ihnen waren zunächst 2 ehrliche Leute, die wir daher rechts hinstellen, und $3\sqrt{5}$ Personen, die aus Dieben zweideutige Leute geworden waren, und die wir daher unten hinstellen, so daß zunächst links keine Diebe bleiben. Nun aber wollen wir uns die einstweilen unten placirten Personen, die alle nur für Zweideutige ausgegeben wurden, näher ansehen, ihre Zahl war $\beta = 3\sqrt{5} - 12\,i$. Die $3\sqrt{5}$ Zweideutigen lassen wir bei den andern unten stehen, die andern 12 aber haben nicht blos eine zweideutige Rolle gespielt, sie müssen sich wegen des bei ihnen vorgefundenen Zeichens $-\,i$ gefallen lassen, daß sie zurücktransportirt werden, sie sind unzweifelhaft Diebe und finden daher passend links ihre Stelle. — Es hatten sich also bei dem Unternehmen betheiligt: 2 ehrliche Leute, 12 Diebe und $2 \times 3\sqrt{5} = 6\sqrt{5}$ Zweideutige. Da aber die absolute Kraft und Geschicklichkeit sämmtlicher Interessenten gleich angenommen werden muß, wenn sie auch nach verschiedener Richtung hin wirken, so können wir auch, was den Effekt anbelangt, sagen: es waren 10 Diebe und $6\sqrt{5}$ Zweideutige, wie vorhin.

$$\begin{array}{r|l} 12 & \\ \hline & 2 \\ 3. & \sqrt{5} \\ 3. & \sqrt{5} \end{array}$$

Wir nehmen die untern Zeichen in Angriff. In dem Ausdruck $x = -\alpha - \beta\,i$ kann auch $\alpha = -2 - 3\sqrt{5}.\,i$ und $\beta = 3\sqrt{5} + 12\,i$ bedeuten. Wir mustern zuerst die α Personen, die uns als Diebe bezeichnet sind; zwei unter ihnen wird der Leser gewiß als ehrliche Leute erkennen und die andern wird er vom negativen Standpunkte aus in das obere Quartier der Zweideutigen zurückschicken. Revidirt man nun die Akten in Betreff derjenigen Personen, welche vorläufig, weil sie mit der Signatur $-\beta.\,i$ behaftet sind, sämmtlich in das unten für Zweideutige eingerichtete Quartier gebracht waren, so zeigt sich bald, daß daselbst nur die ersten $3.\sqrt{5}$ Individuen passen, die andern müssen wegen des bei ihnen vorgefundenen Passes $+\,i$ um einen Quadranten weiter nach rechts geschafft werden, kurz sie sind auch ehrliche Leute, so gut wie jene 2. Da nun die Machinationen der oben und unten placirten zweideutigen Leute sich paralysiren, so bleibt nur die Thätigkeit von 14 ehrlichen Leuten übrig.

$$\begin{array}{r|r} 3. & \sqrt{5} \\ & 12 \\ \hline & 2 \\ 3. & \sqrt{5} \end{array}$$

Wir überlassen es dem Leser für $x = -\alpha + \beta\,i$ die Rechnung zu machen; er wird auf dieselben beiden Gleichungen für α und β kommen und also finden, daß entweder

$$\alpha = 10,\ \beta = 6.\sqrt{5} \text{ ist, oder daß sobald } \alpha = -2 \pm 3\sqrt{5}\ \,i \text{ ist,}$$

$$\beta = 3\sqrt{5} \mp 12\,i \text{ wird.}$$

Demnach wird er finden, daß auch hier

$$x = 2 \mp 3\sqrt{5}.\, i$$

$$+ 3\sqrt{5}.\, i \pm 12 \text{ ist,}$$

also bei den obern Zeichen $x = 2 + 12 = 14$

und bei den untern Zeichen $x = 2 + 6\sqrt{5}.\, i - 12 = -10 + 6\sqrt{5}.\, i.$

§ 31.

Jetzt wollen wir uns an die Deutung eines der compleren Ausdrücke für x machen, etwa des von uns schon bevorzugten Ausdruckes $x = -10 - 6.\sqrt{5}.\, i$. Hiernach betheiligten sich bei dem Geschäfte 10 Diebe (N) und 6. $\sqrt{5}$, also etwa 12 Negativ-Zweideutige (Z'). [Unter einem Negativ-Zweideutigen verstehe ich einen Menschen, der aufgehört hat, geradezu zu stehlen, also auf dem Wege der Besserung sich befindet, aber doch noch von der Ehrlichkeit ebenso weit entfernt ist, als von seiner frühern Handlungsweise; der Leser wird sich hienach selbst sagen, was er sich unter einem Positiv-Zweideutigen (Z) zu denken hat.] Der Aufgabe gemäß legt Jeder, d. h. jeder ehrliche Theilnehmer (P) 10 mal so viel Gulden ins Geschäft, als Theilnehmer sind und je nachdem die Theilnehmer sind. P legt also $-100 - 60.\sqrt{5}.\, i$ fl. ins Geschäft. Dieser Ausdruck zwingt uns, die Gelder, welche sich in der Gesellschaftskasse befinden, zu klassificiren, wir nehmen darin unter andern Gelder oder Papiere wahr, welche der Gesellschaft Nutzen bringen und bezeichnen einen Gulden davon mit p, ferner Papiere, welche der Gesellschaft zum Nachtheil gereichen, ihr Zeichen ist n, aber auch Dokumente, von denen es für den Augenblick unentschieden ist, ob man sie zu den Nutzen- oder zu den Schaden-bringenden zählen soll, unter ihnen bemerken wir einige, welche man vor kurzem noch zu den Nutzen-bringenden würde gerechnet haben, wir möchten sie hinschwebende Gelder nennen und bezeichnen einen Gulden von dieser Art mit z, andre, welche kürzlich noch zu den Schaden-bringenden gehörten, wir möchten sie herschwebende Gelder nennen und einen Gulden von dieser Beschaffenheit mit z' bezeichnen. Hiernach besteht die Ehrlichkeit eines Einzelnen diesmal darin, $100\, n + 60.\sqrt{5}.\, z'$ ins Geschäft zu geben, oder $100\, p + 60\sqrt{5}\, z$ aus dem Geschäft herauszunehmen (etwa vor Dieben zu retten). Natürlich wird ein Dieb das Gegentheil von dem thun, was ein Ehrlicher thäte. Jeder N wird also $100\, p + 60\sqrt{5}.\, z$ ins Geschäft geben, mithin geben alle 10 N, welche sich beim Geschäft betheiligten, $1000\, p + 600\sqrt{5}.\, z = f$. Was aber werden die 12 Z' thun, welche wir auch beim Geschäft erblicken? Ein N verwandelte die vier unterschiedenen Geldsorten in ihr Gegentheil, ein Z' wird sie durch seine Thätigkeit in das halbe Gegentheil verwandeln, und zwar wegen des bei ihm befindlichen Striches wird er da, wo P ein n gab, ein z geben, wo P ein z gab, ein p geben 2c., kurz jeder Z' wird ins Geschäft geben $100\, z + 60\sqrt{5}.\, n$, mithin geben alle Z', deren Anzahl $6\sqrt{5}$ ist, ins Geschäft $600.\sqrt{5}.\, z + 1800.\, n = g$. Demnach geben alle Theilnehmer zusammen ins Geschäft

$$f + g, \text{ d. h.}$$

$$1000\, p + 1800\, n + 1200\sqrt{5}.\, z. = 800\, n + 1200\sqrt{5}.\, z = 100\,(8\, n + 12\sqrt{5}.\, z)$$

(weil $1000\, p + 1000\, n = 0$ ist wegen des totalen Gegensatzes zwischen p und n), also 8 Beutel, angefüllt mit n's und $12\sqrt{5}$ Beutel, angefüllt mit z's, oder $8.\, \nu + 12\sqrt{5}.\, \zeta$, wobei die griechischen Buchstaben einen Beutel bedeuten sollen, angefüllt mit 100 Species der Art, welche der nämliche lateinische Buchstabe bezeichnet.

Nun beträgt der Gewinn bei diesem Geschäft 6 p.C. mehr als Personen, und zwar ehrliche dabei thätig sind; d. h. mit jedem Beutel, angefüllt mit 100 p, den man ins Geschäft giebt, kurz mit jedem π verdient die Gesellschaft $- 4 - 6 \sqrt{5}.\ i$ fl. $= 4.\ n + 6 \sqrt{5}.\ z'$. Natürlich wird mit jedem in die Kasse gelegten ν das Gegentheil und mit jedem ζ das positive halbe Gegentheil verdient werden. Unter dem positiven halben Gegentheil verstehen wir hier: während mit einem π ein p verdient wird, soll mit einem ζ ein z verdient werden, und während mit einem π ein z verdient wird, soll mit einem ζ ein n verdient werden, und so in der positiven Richtung fort. Das Gegentheil von $4.\ n + 6.\ \sqrt{5}.\ z'$ ist aber $4\ p + 6 \sqrt{5}.\ z$ und das positive halbe Gegentheil von $4\ n + 6\ \sqrt{5}.\ z'$ ist $4\ z' + 6.\ \sqrt{5}.\ p$. Mithin beträgt der Gewinn mit jenen 8. ν offenbar $32\ p + 48.\ \sqrt{5}.\ z = F$,
und mit jenen 12. $\sqrt{5}.\ \zeta$ gewiß $360\ p + 48\ \sqrt{5}.\ z' = G$.

Die ganze Gesellschaft gewinnt also im Ganzen F + G, d. h.

$$392.\ p + 48\ \sqrt{5}.\ z + 48\ \sqrt{5}.z' = 392.\ p = 392 \text{ fl.},$$

weil wegen des totalen Gegensatzes zwischen z und z' naturgemäß

$$48.\ \sqrt{5}.\ z + 48.\ \sqrt{5}.\ z' = 0 \text{ ist.}$$

Der Uebung wegen empfehlen wir dem Leser ähnliche Betrachtungen bei folgender, etwas veränderten Aufgabe anzustellen:

Aufgabe. Einige Personen, welche entweder P oder N oder Z oder Z' waren, treten in Verbindung, Jeder giebt 10 mal so viel Thaler ins Geschäft als Personen sind und je nachdem die Personen sind. Sie gewinnen damit 6 p.C. weniger als Personen sind, wobei sowohl die Beschaffenheit der Personen als der Einlagen gehörig zu berücksichtigen ist. Das Ergebniß sämmtlicher Operationen war ein Verlust von 392 rtl. Wie viel Personen von jeder Art waren?

Antwort. Aus $x^3 - 6\ x^2 = -- 3920$ folgt nun

$$x = - 14 \text{ oder } x = 10 \pm 6.\ \sqrt{5}\ i.$$

Einige Anhaltspunkte wegen der Deutung.

	Erste Lösung.	Zweite Lösung.	Dritte Lösung.
Personen.	— 14	$10 + 6.\ \sqrt{5}.\ i$	$10 - 6.\ \sqrt{5}.\ i$
Jeder zahlt . . .	— 140 rtl.	$100 + 60.\ \sqrt{5}.\ i$	$100 - 60.\ \sqrt{5}.\ i$
Alle	$+ 14^2\ .\ 10$ rtl.	$- 800 + 1200.\ \sqrt{5}.\ i$	$- 800 - 1200.\ \sqrt{5}.\ i$
oder Beutel à 100 rtl.	$^{196}/_{10}$	$- 8 + 12\ \sqrt{5}.\ i$	$- 8 - 12.\ \sqrt{5}.\ i$
Gewinn à Beutel .	— 20 rtl.	$4 + 6.\ \sqrt{5}.\ i$	$4 - 6.\ \sqrt{5}.\ i$
Gewinn mit allen B.	— 392 rtl.	— 392	— 392

§ 32.

27ste Aufgabe. Drei Armeekorps A, B und C werden ins Feld geschickt und sind auf 36 Wochen mit Lebensmitteln versehen. Mit diesem Proviant würde das Korps A 24 Wochen länger als B, B aber 40 Wochen länger als C auskommen. Wie viel mal ist das zweite (x) und dritte (y) Korps stärker als das erste?

Auflö ung. Aus den Gleichungen $(1 + x + y).\ 36 = \frac{(1 + x + y)}{x}.\ 36 + 24$

und $\frac{(1 + x + y)}{x}.\ 36 = \frac{(1 + x + y)}{y}.\ 36 + 40$

folgt $y = \frac{3 + 2x - 3x^2}{3.\ (x - 1)}$, oder auf einem andern Wege $y = \frac{3x}{8 - 5x}$. Durch einen dieser Werthe von y geht eine der beiden ersten Gleichungen in folgende über:

$$x^3 - {}^{43}/_{15}\, x^2 + {}^{2}/_{3}\, x + {}^{8}/_{5} = 0,$$

aus welcher sich ergiebt $x = 1^1/_5$, $x' = \frac{5 + \sqrt{73}}{6}$, $x'' = \frac{5 - \sqrt{73}}{6}$,

hienach ist ferner $y = 1^4/_5$, $y' = -\frac{10 + \sqrt{73}}{9}$ $y'' = -\frac{10 - \sqrt{73}}{9}$.

Erste Lösung. Um Brüche zu vermeiden, sagen wir, das erste Korps A habe aus 5, das zweite aus 6, das dritte aus 9 Regimentern bestanden; dann würde ein Regiment mit dem Vorrath 720 Wochen reichen, das erste Korps 144, das zweite 120, das dritte 80 Wochen.

Zweite Lösung. Auch hier möge das erste Korps aus 18, das zweite aus $15 + 3.\sqrt{73} = 41$ (circa) Regimentern bestanden haben, dann soll das dritte Korps C $- 20 - 2\sqrt{73} = - 37$ (circa) Regimenter gehabt haben. Demnach würde A $26 + 2\sqrt{73} = 44$ (c.), B $2 + 2\sqrt{73} = 19$ (c.), C $- 38 + 2\sqrt{73} = - 21$ (c.) Wochen mit dem Proviant ausgekommen sein. Aber wie, die **37** negativen Regimenter, die man für weniger als Nichts anzusehen pflegt, sollten 40 Wochen weniger auskommen als die **41** positiven Regimenter? Das kann unmöglich unsre Meinung sein. Um über diese Schwierigkeit hinwegzukommen, legen wir uns die Frage vor: Was haben wir unsrer Aufgabe gemäß unter einem positiven Regiment zu verstehen? Offenbar ein Regiment, welches im Lager vorhandene Lebensmittel verzehrt und zwar sämmtliche Vorräthe in einer bestimmten Zeit. Nun kann es nicht schwer werden, zu sagen, was ein negatives Regiment ist? Es verzehrt aus dem im Lager befindlichen Vorrathe nichts, im Gegentheil, es ernährt sich selber und schafft in derselben Zeit so viel Vorräthe in's Lager, als das positive Regiment braucht. Jetzt wird es auch klar sein, was wir darunter zu verstehen haben, daß die **37** negativen Regimenter — **21** Wochen brauchen, um die Vorräthe zu verzehren. Es kann offenbar nichts anders bedeuten, als daß sie die Eigenschaft haben, gewisse Räume in **21** Wochen mit Lebensmitteln anzufüllen. Da aber das Anfüllen eines Magazins immer als das Gegentheil von dem Leermachen desselben angesehen werden kann, und da das zweite Korps es in **19** Wochen, das dritte also wirklich in — **21** Wochen ausgeleert hat, so möge man immerhin nach algebraischem Sprachgebrauch sagen, daß B zu dem Ausleeren 40 Wochen mehr gebraucht hat als C; wir wissen, daß das keinen andern Sinn haben kann, als folgenden: die Zeit, welche C gebraucht hat, um das Magazin mit Lebensmitteln anzufüllen und die Zeit, welche B gebraucht hat, diese Lebensmittel zu verzehren, machen zusammen 40 Wochen aus. Wir würden also, der zweiten Lösung zu gefallen, die Aufgabe so zu stellen haben:

In einer Festung befinden sich zwei Korps proviantverzehrende Soldaten A und B und ein Korps proviantverschaffende Soldaten C. Als sie einrückten, fanden sie die Magazine gefüllt, aber nach 36 Wochen waren sie leer. Da zogen A und B aus, und als C die Magazine wieder gefüllt hatte, verließ es auch die Festung; dagegen rückte B ein, und als der Vorrath wieder verzehrt war, waren von dem Augenblicke an gerechnet, wo die neue Anfüllung begann, 40 Wochen verflossen. Wäre statt B das Korps A eingerückt, so hätte es 24 Wochen länger mit dem Proviant gereicht als B damit reichte. Wie viel mal stärker (x) ist B als A, und wie viel mal (y) ist C stärker als A?

Aus den Gleichungen $(1 + x - y).\ 36 = \frac{(1 + x - y)}{x}.\ 36 + 24$,

$$\frac{(1 + x - y).\ 36}{x} + \frac{(1 + x - y)}{y}.\ 36 = 40$$

folgt jetzt $y = \frac{3\ x}{5\ x - 8}$ und wieder $x^3 - {}^{43}/_{15}\ x^2 + {}^{2}/_{3}\ x + {}^{8}/_{5} = 0.$

Demnach ist wieder $x = 1\frac{1}{5}$, $x' = \frac{5 + \sqrt{73}}{6}$, $x'' = \frac{5 - \sqrt{73}}{6}$,

aber $y = -1\frac{4}{5}$, $y' = \frac{10 + \sqrt{73}}{9}$, $y'' = \frac{10 - \sqrt{73}}{9}$.

Dritte Lösung der Hauptaufgabe. Ein Jeder wird sich nun selbst sagen können, daß man die allgemeine Aufgabe folgender Maßen umzuschreiben und zu specialisiren hat, wenn die obige dritte Lösung $\left(x'' = \frac{5 - \sqrt{73}}{6},\ y'' = -\frac{10 - \sqrt{73}}{9}\right)$ vor den beiden andern den Vorrang gewinnen soll.

In eine Festung, deren Magazine mit Lebensmitteln angefüllt sind, rückt ein verzehrendes Korps A und zwei ernährende Korps (Fouragirer) B und C ein. Nichts desto weniger war nach 36 Wochen aller Vorrath aufgezehrt. Da rückten A und C aus und B füllte von neuem die Magazine. Als B damit fertig war, räumte es den Platz dem Korps A, und als nun abermals aller Proviant verzehrt war, waren seit der Zeit, da die letzte Füllung begann, 24 Wochen verflossen. Auch ist bekannt, daß C zur Anfüllung der Magazine 40 Wochen mehr gebraucht haben würde als B. Wie viel mal stärker ist B als A und C als A?

Nehmen wir wieder an, daß A aus 18 Regimentern (Verzehrern) bestand, so hatte B $3\sqrt{73} - 15$ und C $20 - 2\sqrt{73}$ Regimenter (Ernährer). Als alle drei Korps in der Festung waren, durften nur $13 - \sqrt{73}$ Regimenter aus den gefüllten Magazinen Proviant erhalten, mithin würde ein Regiment Verzehrer $(13 - \sqrt{73})$. 36 Wochen mit dem Vorrath gereicht haben, so wie andrerseits ein Regiment Ernährer eben so viel Wochen gebraucht hätte, das Magazin zu füllen. Folglich wurde A mit der Verzehrung des Vorrathes in $26 - 2\sqrt{73}$ Wochen fertig, dagegen hatte B mit der Herbeischaffung desselben $2\sqrt{73} - 2$ Wochen und C $2\sqrt{73} + 38$ Wochen zu thun.

In so fern es also zu jedem Dinge oder vielmehr zu dessen gerade in Betracht kommender Eigenschaft andre Dinge giebt, welche die entgegengesetzte oder halbentgegengesetzte Beschaffenheit haben, in so fern wird man auch stets die negativen und imaginären Auflösungen der betreffenden Probleme zu deuten im Stande sein.

Webelsche Hofbuchdruckerei.