Über

begrenzte Ableitungen mit komplexem Zeiger

von

P. Lindner,
Gymnasial-Oberlehrer.

Beilage zum Programm des Königlichen Gymnasiums zu Cöslin.

Cöslin 1890.
Gedruckt bei C. G. Hendess.

1890. Programm-No. 125.

Über begrenzte Ableitungen mit komplexem Zeiger.

1.

In der Theorie der Ableitungen mit beliebigem Index kann man drei Entwicklungsstufen unterscheiden: Die erste, durch die Namen Leibnitz, Bernoulli, Euler, Laplace und Fourier bezeichnete Stufe legt ihren Entwickeluugen noch keine Definition zu Grunde, sondern sucht gelegentlich durch Analogie die Werte einzelner Ableitungen mit gebrochenem Index zu ermitteln. Die zweite Stufe wird hauptsächlich durch Liouville[1]) vertreten: er stellt zwar eine bestimmte Definition an die Spitze seiner Betrachtungen, aber er sucht unbestimmte Ableitungen mit beliebigem Index d. h. Funktionen, welche für negativ ganzzahligen Index übergehen in das mehrfache unbestimmte Integral mit seinen willkürlichen Konstanten. Auf demselben Standpunkt stehen Oettinger[2]), Kelland[3]) und überhaupt die englischen Mathematiker, soweit ihr Kalkul ein nicht bloss symbolischer ist. Den Uebergang zur dritten Entwickelungsstufe bildet eine Jugendarbeit Riemann's.[4]) Er gelangt auf einem freilich nicht einwurfsfreien Wege zu einer Definition der begrenzten Ableitungen, aber er beschränkt dann doch seine Betrachtungen auf unbestimmte Ableitungen. Unabhängig von ihm und unter einander sind dann zu derselben Definition der „begrenzten Derivationen" gelangt die Herren Grünwald[5]) und Letnikoff.[6]) Ihre Arbeiten, denen sich eine Abhandlung des

---

[1]) Journal de l'école polytechnique, cah. XXI:

Mémoire sur quelques questions de géométrie et de mécanique, et sur un nouveau genre de calcul pour résoudre ces questions.

Mémoire sur le calcul des différentielles à indices quelquonques.

[2]) Crelle's Journal, Bd. 44: Zweiter Nachtrag zu der Theorie der analytischen Facultäten.

[3]) Transactions of the Royal Society of Edindurgh XIV, XVI:

On general differentiation.

[4]) Riemann's Werke. Nachlass. Abschnitt XIX: Versuch einer allgemeinen Auffassung der Integration und Differentiation.

[5]) Zeitschrift für Mathematik und Physik XII: Ueber begrenzte Derivationen und deren Anwendung.

Abhandlungen der Königl. böhmischen Gesellschaft der Wissenschaften. XI: Ueber die Entwickelung der begrenzten Derivationen nach positiven ganzen Potenzen des Index und die damit zusammenhängende Logial-Rechnung.

[6]) Die russischen Original-Abhandlungen sind für mich nicht zugänglich gewesen, sondern nur ihre Auszüge in den „Fortschritten der Mathematik." VI: Recherches relatives à la théorie des intégrales de la forme $\int_a^x (x-u)^{p-1} f(u)\, du$. — XIV: Neue Untersuchungen über trigonometrische Functionen. — XVII: Ueber hypersphärische Functionen und über die Entwickelung einer willkürlichen Function in Reihen, die nach hypersphärischen Functionen fortschreiten.

Herrn Most[1]) und eine Laurent'sche[2]) anschliessen, bezeichnen die dritte Entwickelungsstufe der Theorie der Bruchableitungen. Die Definitionen dieser Stufe verlieren jedoch ihren Sinn ganz oder teilweise, wenn die abzuleitende Funktion nicht in der Umgebung der unteren Grenze eindeutig ist.

Schon vor längerer Zeit bin ich zu einer Definition der begrenzten Ableitungen gelangt, die von vornherein für beliebig komplexe Gebiete der unabhängig Variabeln und für beliebig komplexen Zeiger auch in dem Falle Geltung behält, dass die abzuleitende Funktion nicht mehr in der Umgebung der unteren Grenze a eindeutig ist, sondern zu jener wichtigen Klasse von Funktionen gehört, die mit einer bestimmten, endlichen Potenz von x—a multipliziert, in der Umgebung des Punktes a eindeutig werden. Es sei mir im folgenden gestattet, einige Ergebnisse meiner Untersuchungen über diesen Gegenstand mitzuteilen:

Inbetreff der verwendeten Bezeichnungen sei von vornherein bemerkt:

x bedeutet eine beliebig komplexe, unabhängig variable Grösse, a, b, c, α, β, γ, ϱ, σ beliebige endliche, komplexe Zahlen, die in Bezug auf x konstant sind. f(x), $\varphi(x)$ bezeichnen Funktionen von x, die in der Umgebung von einem Punkte a einändrig sind. $f_\alpha(x) = (x-a)^\alpha f(x)$, $\varphi_\beta(x) = (x-a)^\beta \varphi(x)$ sind vieldeutige Funktionen mit dem Verzweigungswert a, und dem Verzweigungs-Exponenten α bezw. β; $|a|$ bezeichnet den absoluten Betrag von a; m, n, p, k bezeichnen positive, ganze Zahlen. $a_n = \frac{a(a-1)(a-2)\ldots\ldots(a-n+1)}{1.2.\ldots\ldots n}$ ist der Binomial-Koeffizient, $n! = 1.\,2.\,3.\,\ldots\,n$, Π und F sollen die Gauss'sche Bedeutung haben. $\left[\partial_x^\varrho f_\alpha(x)\right]_a^x$ nenne ich eine „zwischen a und x genommene Ableitung"; ϱ soll ihr „Zeiger", a die „untere Grenze", x die „obere Grenze", $f_\alpha(x)$ die „abzuleitende Funktion" heissen, während $\frac{d^n f_\alpha(x)}{d x^n}$ nur als n^{ter} Differential-Quotient, nicht aber als „Ableitung" bezeichnet werden soll.

Ausgehend von der Ableitung einer Potenz stellte ich nun an die Grösse $\left[\partial_x^\varrho (x-a)^\alpha\right]_a^x$ folgende Forderungen:

$$\text{I.}\quad \left[\partial_x^n (x-a)^\alpha\right]_a^x = \frac{d^n (x-a)^\alpha}{d x^n}$$

$$\text{II.}\quad \left[\partial_x^{-n} (x-a)^\alpha\right]_a^x = \int_a^x\int_a^x\int_a^x \ldots\ldots (x-a)^\alpha\, dx\, dx\, dx \ldots\ldots (n\,\text{mal})$$

$$\text{III.}\quad \left[\partial_x^\varrho \left\{(x-a)^\alpha + (x-a)^\beta + (x-a)^\gamma + \cdots\right\}\right]_a^x = \left[\partial_x^\varrho (x-a)^\alpha\right]_a^x + \left[\partial_x^\varrho (x-a)^\beta\right]_a^x + \left[\partial_x^\varrho (x-a)^\gamma\right]_a^x + \cdots$$

$$\text{IV.}\quad \left[\partial_x^{\varrho+\sigma} (x-a)^\alpha\right]_a^x = \left[\partial_x^\varrho \left\{\partial_x^\sigma (x-a)^\alpha\right\}_a^x\right]_a^x$$

$$\text{V.}\quad \left[\partial_x^\varrho (x-a)^\alpha\right]_a^x = \varphi(\alpha, \varrho)\,(x-a)^{\alpha-\varrho},$$ wo $\varphi(\alpha, \varrho)$ eine von x unabhängige Funktion von α und ϱ allein bezeichnet.

---

[1]) Zeitschrift für Mathematik und Physik: XVI: Ueber die Anwendung der Differential-Quotienten mit allgemeinem Index zum Integriren von Differentialgleichungen.

[2]) Nouvelles annales de mathématiques (3). III: Sur le calcul des dérivées à indices quelquonques.

$$\text{VI.}\quad \left[\partial_x^{\varrho}(x-a)^{\alpha}(x-a)^{\beta}\right]_a^x = (x-a)^{\beta}\left[\partial_x^{\varrho}(x-a)^{\alpha}\right]_a^x + \varrho_1 = \left[\partial_x^{1}(x-a)^{\beta}\right]_a^x \left[\partial_x^{\varrho-1}(x-a)^{\alpha}\right]_a^x + \ldots\ldots$$

Diese Forderungen führten zu Funktional-Gleichungen für $\varphi(\alpha, \varrho)$, als deren Lösung — abgesehen vom Faktor $c^{2m\pi i \varrho}$ —

$\varphi(\alpha, \varrho) = \dfrac{\Pi(\alpha)}{\Pi(\alpha-\varrho)}$ sich ergab, so dass

$\left[\partial_x^{\varrho}(x-a)^{\alpha}\right]_a^x = \dfrac{\Pi(\alpha)}{\Pi(\alpha-\varrho)}(x-a)^{\alpha-\varrho}$ folgte.

Nunmehr wurde ich durch die Entwickelung von der Funktion $f(x)$ nach dem Taylorschen Lehrsatz und die Ersetzung der Differential-Quotienten durch geschlossene Integrale auf die folgende Definition geleitet:

$$1.\quad \left[\partial_x^{\varrho} f_{\alpha}(x)\right]_a^x = \left[\partial_x^{\varrho}(x-a)^{\alpha} f(x)\right]_a^x = \frac{\Pi(\alpha)(x-a)^{\alpha-\varrho}}{2\pi i\,\Pi(\alpha-\varrho)}\int_{(a)} \frac{f(z)}{z-a} F\left(\alpha+1, 1, \alpha+1-\varrho, \frac{x-a}{z-a}\right) dz\ -$$

das Integral in positivem, einmaligem Umlauf auf einer die Punkte x und a umfassenden geschlossenen Kurve innerhalb des Gebietes geführt, in dem die Funktionen $f(z)$ u. $F\left(\alpha+1, 1, \alpha+1-\varrho, \frac{x-a}{z-a}\right)$ eindeutig, endlich und stetig sind, die Funktion F selbstverständlich abgesehen vom Punkte $z=a$.

Die durch 1) definierte Ableitung hat in dem ganzen Gebiet, in dem $f(x)$ einändrig bleibt — und dies Gebiet will ich das „Ableitungsgebiet" nennen — Sinn für jedes komplexe ϱ und jedes nicht negativ ganzzahlige α; sie ist im allgemeinen endlich, da die Funktion unter dem Integralzeichen in allen Punkten des geschlossenen Integrationsweges endlich bleibt. Nur für $x=a$ wird die Ableitung unendlich, wenn der reelle Teil von $\alpha-\varrho$ negativ ist. Für jeden Wert von x wird sie unendlich, wenn α eine negative, ganze Zahl ist, falls nicht zugleich $\alpha-\varrho$ eine negative, ganze Zahl ist. Mit der abzuleitenden Funktion $f_{\alpha}(x)$ teilt ferner ihre Ableitung die Eigenschaft, dass sie mit einer bestimmten, endlichen Potenz von $x-a$ multipliziert, in der Umgebung des Punktes a einändrig wird. Die Ableitung ist also selbst eindeutig, wenn wir unter $(x-a)^{\alpha-\varrho}$ den „Hauptwert" im Weierstrass'schen Sinne des Wortes verstehen.

Die Funktion $\left[\partial_x^{\varrho} f_{\alpha}(x)\right]_a^x$ kann nun auf mannigfache Arten dargestellt werden: entwickeln wir zunächst $F\left(\alpha+1, 1, \alpha+1-\varrho, \frac{x-a}{z-a}\right)$ in die gleichmässig konvergente, hypergeometrische Reihe

$$1 + \frac{\alpha+1}{\alpha+1-\varrho}\,\frac{x-a}{z-a} + \frac{(\alpha+1)(\alpha+2)}{(\alpha+1-\varrho)(\alpha+2-\varrho)}\left(\frac{x-a}{z-a}\right)^2 + \ldots\ldots,$$

so erhalten wir durch gliedweise Integration mit Hülfe des Umstandes, dass

$\dfrac{1}{2\pi i}\displaystyle\int_{(a)} \frac{f(z)}{(z-a)^{k+1}}\,dz = \frac{1}{1.2\ldots.k} f^{(k)}(a)$ ist,

$$2.\quad \left[\partial_x^{\varrho} f_{\alpha}(x)\right]_a^x = \frac{(x-a)^{\alpha-\varrho}\,\Pi(\alpha)}{\Pi(\alpha-\varrho)}\left\{f(a) + \frac{(\alpha+1)(x-a)}{1.(\alpha+1-\varrho)} f'(a) + \frac{(\alpha+1)(\alpha+2)(x-a)^2}{1.2(\alpha+1-\varrho)(\alpha+2-\varrho)} f''(a) + \ldots.\right\},$$ [1]

[1]) Der spezielle Fall $\alpha = o$ dieser Entwickelung ist zuerst von Herrn Grünwald veröffentlicht worden: Zeitschrift für Mathematik und Physik XII S. 458.

Riemann erwähnt diesen speziellen Fall ebenfalls; vergleiche: Riemann's Werke. S. 341 Anmerkung 2), wo wohl $n-\nu$ statt $\nu-n$ zu lesen ist.

eine Entwickelung, die innerhalb desselben Gebietes konvergiert, in dem f(x) eindeutig, endlich und stetig ist.

Die zweite Euler'sche Relation $F\left(\alpha+1, 1, \alpha+1-\varrho, \frac{x-a}{z-a}\right) = \frac{z-a}{z-x} F\left(1, -\varrho, \alpha+1-\varrho, \frac{x-a}{x-z}\right)$ ergiebt ferner für $\left|\frac{x-a}{x-z}\right| < 1$

$$\left[\partial_x^\varrho f_\alpha(x)\right]_a^x = \frac{(x-a)^{\alpha-\varrho}\,\Pi(\alpha)}{2\pi i\,\Pi(\alpha-\varrho)} \int_{(a)} \frac{f(z)}{z-x} F\left(1, -\varrho, \alpha+1-\varrho, \frac{x-a}{x-z}\right) dz$$

Durch gliedweise Integration erhalten wir dann mit Hülfe des Umstandes, dass $\frac{1}{2\pi i}\int \frac{f(z)}{(z-x)^{k+1}} dz = \frac{1}{1.2\ldots k} f^{(k)}(x)$ ist, die Entwickelung:

$$3.\quad \left[\partial_x^\varrho f_\alpha(x)\right]_a^x = \frac{(x-a)^{\alpha-\varrho}\,\Pi(\alpha)}{\Pi(\alpha-\varrho)} \left\{ f(x) + \varrho_1 \frac{x-a}{\alpha+1-\varrho} f'(x) + \varrho_2 \frac{(x-a)^2}{(\alpha+1-\varrho)(\alpha+2-\varrho)} f''(x) + \ldots\ldots \right\},$$ [1]

die sicher innerhalb des Gebietes konvergiert, in dem die Entwickelung von f(x+x—a) nach steigenden Potenzen von x—a konvergent ist; sie konvergiert aber im allgemeinen über dieses Gebiet hinaus, stellt also eine stetige Fortsetzung von 2) dar.

Auch als bestimmtes Integral lässt sich unser $\left[\partial_x^\varrho f_\alpha(x)\right]_a^x$ unter gewissen beschränkenden Bedingungen darstellen:

Wenn der reelle Teil von $\alpha+1 > 0$, und der von $\varrho < 0$ ist, so ist

$$F\left(1, \alpha+1, \alpha+1-\varrho, \frac{x-a}{z-a}\right) = \frac{\Pi(\alpha-\varrho)}{\Pi(\alpha)\,\Pi(-\varrho-1)} \int_0^1 u^\alpha (1-u)^{-\varrho-1} \left(1-\frac{x-a}{z-a}u\right)^{-1} du,$$ [2] oder durch die Substitution $a+(x-a)\,u = t$

$$F\left(1, \alpha+1, \alpha+1-\varrho, \frac{x-a}{z-a}\right) = \frac{\Pi(\alpha-\varrho)}{\Pi(\alpha)\,\Pi(-\varrho-1)} \int_a^x \frac{(t-a)^\alpha}{(x-a)^\alpha} \cdot \frac{(x-t)^{-\varrho-1}}{(x-a)^{-\varrho-1}} \cdot \frac{z-a}{z-t} \cdot \frac{1}{x-a} dt$$

$$= \frac{\Pi(\alpha-\varrho)\,(x-a)^{\varrho-\alpha}(z-a)}{\Pi(\alpha)\Pi(-\varrho-1)} \int_a^x \frac{(x-t)^{-\varrho-1}}{z-t} (t-a)^\alpha\, dt.$$

Also ist nach 1)

$$\left[\partial^\varrho f_\alpha(x)\right]_a^x = \frac{1}{\Pi(-\varrho-1)} \int_{(a)} \int_a^x \frac{f(z)(t-a)^\alpha (x-t)^{-\varrho-1}}{z-t}\, dt\, dz$$

$$= \frac{1}{\Pi(-\varrho-1)} \int_a^x (t-a)^\alpha (x-t)^{-\varrho-1} \int_{(a)} \frac{f(z)}{z-t}\, dz\, dt$$

$$= \frac{1}{\Pi(-\varrho-1)} \int_a^x (x-t)^{-\varrho-1} (t-a)^\alpha f(t)\, dt \quad \text{oder}$$

---

[1]) Den Fall $\alpha = 0$ dieser Entwickelung giebt Tardy: Intorno ad una formola di Leibnitz: Bulletino di bibliografia e di storia delle science matematiche e fisiche 1868. S. 183. (1).

[2]) Kummer, Crelle's Journal 15, S. 142.

Goursat, annales de l'école normale supérieure (2) X, supplément S. 9.

4. $\left[\partial_x^\varrho f_\alpha(x)\right]_a^x = \dfrac{1}{\Pi(-\varrho-1)}\displaystyle\int_a^x (x-t)^{-\varrho-1} f_\alpha(t)\,dt.$

Dies ist im wesentlichen der Ausdruck, zu dem Riemann, und unabhängig von ihm die Herren Grünwald und Letnikoff gelangen; der Ausdruck verhält sich zur Definition 1) etwa so, wie das Euler'sche Integral zweiter Gattung zur Gauss'schen Funktion Π. Obgleich er sich durch Einfachheit und „Geschmeidigkeit" empfiehlt, eignet er sich meines Erachtens als Definition der Ableitung deshalb weniger, weil er für ein ϱ mit positiv reellem Teil, also namentlich für positiv ganzzahligen Ableitungs-Zeiger seinen Sinn verliert. Das von den genannten Mathematikern gewählte Auskunftsmittel, „unter $\partial_x^\varrho z$, falls $\varrho > 0$, dasjenige zu verstehen, was aus $\partial_x^{\varrho-m} z$ (wo $m > \varrho$) durch mmalige Differentiation nach x hervorgeht",[1]) versagt mannigfach den Dienst, wie z. B. bei $\left[\partial_x^\varrho x^{\varrho-1}\right]_0^x$ und $\left[\partial_x^{\varrho-1}(x^2-1)^{\varrho-1}\right]_{\pm 1}^x$, wo die Funktionen $t^{\varrho-1}$ und $(t^2-1)^{\varrho-1}$ die Integration bis zur unteren Grenze nicht gestatten, falls der reelle Teil von $\varrho < 0$ ist. Ueberhaupt hat unter Zugrundelegung der Gleichung 4) als Definition die Grösse $\left[\partial_x^n (x-a)^\alpha f(x)\right]_a^x$ keinen Sinn, falls der reelle Teil von $\alpha + 1 < 0$, während nach der Definition 1), wie sich sogleich ergeben wird, $\left[\partial_x^n (x-a)^\alpha f(x)\right]_a^x$ mühelos in $\dfrac{dx\,(x-a)^\alpha\, f(x)}{dx^n}$ übergeht, sogar in dem Falle, dass α sich einer negativen ganzen Zahl unbegrenzt nähert.

2.

Wir gehen über zur Behandlung spezieller Fälle:

Für $\varrho = \alpha = 0$ geht die Entwickelung 2) in den Taylor'schen Lehrsatz über.

Für $\varrho = n$ wird ferner nach 2)

$$\left[\partial_x^n f_\alpha(x)\right]_a^x = \left[\partial_x^n (x-a)^\alpha f(x)\right]_a^x$$

$$= \frac{\Pi(\alpha)}{\Pi(\alpha-n)}(x-a)^{\alpha-n} f(a) + \frac{\Pi(\alpha+1)}{1.\Pi(\alpha+1-n)}(x-a)^{\alpha-n+1} f'(a) + \frac{\Pi(\alpha+2)}{1.2\,\Pi(\alpha+1-n)}(x-a)^{\alpha-n+2} f''(a) + \ldots,$$

also wird

5. $\left[\partial_x^n f_\alpha(x)\right]_a^x = \dfrac{d^n\,(x-a)^\alpha f(x)}{dx^n} = \dfrac{d^n f_\alpha(x)}{dx^n}$

Für $\varrho = -n$ wird dagegen nach 2)

$$\left[\partial_x^{-n} f_\alpha(x)\right]_a^x = \frac{\Pi(\alpha)}{\Pi(\alpha+n)}(x-a)^{\alpha+n} f(a) + \frac{\Pi(\alpha+1)}{1.\Pi(\alpha+n+1)}\cdot(x-a)^{\alpha+n+1} f'(a) + \frac{\Pi(\alpha+2)}{1.\,2\,\Pi(\alpha+n+2)}(x-a)^{\alpha+n+2} f''(a) + \ldots,$$

also ist

---

[1]) Riemann's Werke S. 341.

6. $\left[\partial_x^{-n} f_\alpha(x)\right]_a^x = \int_a^x\int_a^x\int_a^x \ldots\ldots f_\alpha(x)\,dx\,dx\,dx\ldots$ (n mal), falls der reelle Teil von $\alpha > -1$.

Für ganzzahlig negativen Zeiger geht also die Ableitung über in das mehrfache bestimmte Integral, falls dieses einen Sinn hat. Die Grösse $\left[\partial_x^{-n} f_\alpha(x)\right]_a^x$ unterscheidet sich jedoch vom mehrfachen Integral insofern, als sie im allgemeinen noch Sinn behält, wenn der reelle Teil von $\alpha + 1 < 0$ ist, während in diesem Falle die Integration bis zum Verzweigungspunkte nicht gestattet ist: nur für negativ ganzzahliges α werden beide Grössen unendlich.

Wenn $f(x) = 1$ ist, so erhalten wir nach 2)

7. $\left[\partial_x^\varrho (x-a)^\alpha\right]_a^x = \frac{\Pi(\alpha)}{\Pi(\alpha-\varrho)}(x-a)^{\alpha-\varrho}$, spezieller

8. $\left[\partial_x^\varrho x^\alpha\right]_0^x = \frac{\Pi(\alpha)}{\Pi(\alpha-\varrho)} x^{\alpha-\varrho}$, also z. B.

9. $\left[\partial_x^{\frac{1}{2}} x\right]_0^x = \frac{x^{\frac{1}{2}}}{\Pi(\frac{1}{2})} = 2\sqrt{\frac{x}{\pi}}$.

Es ist dies der historisch merkwürdige Wert, zu dem Euler durch Interpolation gelangt.[1])

Für $\alpha = -1$ wird $\left[\partial_x^\varrho x^{-1}\right]_0^x$ und auch speziell $\left[\partial_x^{-1} x^{-1}\right]_0^x$ unendlich; bei unserer Auffassung der Bruch-Ableitung sind wir jedoch nicht genötigt, in diesem Falle eine Ausnahme zu konstatieren, da ja auch $\int_0^x x^{-1}dx$ unendlich wird.

Wenn x^α, wie sich eben gezeigt hat, für gewisse Werte von α das Ableiten bis zum Punkte $x=0$ nicht gestattet, so erlaubt es stets diesen Prozess bis zum Punkte 1. Wir erhalten, da x^β in der Umgebung des Punktes 1 eindeutig ist, also das α von 2) verschwindet:

$$\left[\partial_x^\varrho x^\beta\right]_1^x = \frac{(x-1)^{-\varrho}}{\Pi(-\varrho)}\left\{1 + \frac{\beta}{1-\varrho}(x-1) + \frac{\beta(\beta-1)}{(1-\varrho)(2-\varrho)}(x-1)^2 + \ldots\right\};$$

10. $\left[\partial_x^\varrho x^\beta\right]_1^x = \frac{(x-1)^{-\varrho}}{\Pi(-\varrho)} F(-\beta, 1, 1-\varrho, 1-x)$

innerhalb des mit dem Radius 1 um den Punkt 1 geschlagenen Kreises.

Spezieller ergiebt sich

11. $\left[\partial_x^{-1} x^{-1}\right]_1^x = (x-1)\,F(1,1,2,1-x) = l\,x.$

---

[1]) Euler, Comment. acad. Petr. 1730 A. 1731. T. V § 29.

Es ordnet sich also bei unserer Auffassung der Ableitung einer Potenz der Fall, dass ihr Exponent gleich —1 wird, dem allgemeinen unter, während Liouville[1]) bei seiner Auffassung eine Ausnahme konstatieren muss, wie er es auch für das unbestimmte Integral $\int x^{-1} dx$ thut, während bei der Auffassung $\int_1^x x^{-1} dx = \lim_{\delta=0} \int_1^x x^{\delta-1} dx = \lim_{\delta=0} \frac{x^\delta - 1}{\delta} = lx$ eine vollständige Unterordnung unter den allgemeinen Fall $\int_1^x x^\alpha dx$ stattfindet.

Ist die abzuleitende Funktion in der Umgebung der unteren Grenze der Ableitung eindeutig, so ergiebt sich aus 1) für $\alpha = 0$:

$$12.\quad \left[\partial_x^\varrho f(x)\right]_a^x = \frac{(x-a)^{-\varrho}}{2\pi i\, \Pi(-\varrho)} \int_{(a)} \frac{f(z)}{z-a} F(1, 1, 1-\varrho, \frac{x-a}{z-a})\, dz$$

— ein Wert, der mit dem Laurent'schen, $\left[\partial_x^\varrho f(x)\right]_a^x = \frac{\Gamma(\varrho+1)}{2\pi i} \int \frac{f(z)}{(z-x)^{\varrho+1}} dz$,[2]) weder formell noch sachlich übereinzustimmen scheint.

Lassen wir in 12) das ϱ sich der positiven ganzen Zahl n nähern, so verschwinden die n ersten Glieder der Entwickelung von $F(1, 1, 1-\varrho, \frac{x-a}{z-a})$ nach steigenden Potenzen des letzten Arguments, und es ergiebt sich

$$\left[\partial_x^n f(x)\right]_a^x = \frac{(x-a)^{-1}}{2\pi i} \int_{(a)} \frac{f(z)}{z-a} \left\{ n! \left(\frac{x-a}{z-a}\right)^n + \frac{(n+1)!}{1} \cdot \left(\frac{x-a}{z-a}\right)^{n+1} + \ldots\ldots \right\} dz$$

$$= \frac{n!\,(x-n)^{-n}(x-a)^n}{2\pi i} \int_{(a)} \frac{f(z)}{(z-a)^{n+1}} \left(1 - \frac{x-a}{z-a}\right)^{-n-1} dz$$

$$= \frac{n!}{2\pi i} \int_{(a)} \frac{f(z)}{(z-x)^{n+1}} dz, \text{ also ist}$$

$$13.\quad \left[\partial_x^n f(x)\right]_a^x = \frac{d^n f(x)}{dx^n}$$

— ein Resultat, das insofern bemerkenswert ist, als von einer eindeutigen abzuleitenden Funktion die Ableitung mit ganzzahlig positivem Zeiger n für jede im Ableitungsbereich gelegene untere Grenze in den nten Differential-Quotienten übergeht.

In ganz einfacher Weise ergiebt sich ferner nach 2) und 12)

$$14.\quad \left[\partial_x^\varrho (ax+b)^\alpha\right]_c^x = \frac{(x-c)^{-\varrho}}{\Pi(-\varrho)} (ac+b)^\alpha F\left(-\alpha, 1, 1-\varrho, \frac{-a(x-c)}{ac+b}\right) \text{ für } \left|\frac{a(x-c)}{ac+b}\right| < 1, \text{ falls nicht etwa}$$

$c = -\frac{b}{a}$ ist.

---

[1]) Crelle's Journal XI S. 8: Mémoire sur le théorème des fonctions complémentaires.

[2]) Vergleiche das Nähere: Nouvelles annales de mathématiques (3) III S. 240.

Ein spezieller Fall von 14) nemlich

15. $$\left[\partial_x^{\varrho}(b-x)^{-1}\right]_a^x = \frac{(x-a)^{-\varrho}}{\Pi(-\varrho)}(b-a)^{-1}\,F\left(1, 1, 1-\varrho, \frac{x-a}{b-a}\right)$$

verdient Erwähnung; denn aus ihm ergiebt sich durch Vergleichung mit 12), dass man die in der Umgebung des Punktes a eindeutige Funktion $f(x) = \frac{1}{2\pi i}\int\limits_{(a)} \frac{f(z)}{z-x}\,dz$ nach x zwischen den Grenzen a und x ableitet, indem man von der Funktion $\frac{f(x)}{z-x}$ unter dem Integralzeichen nach dem Parameter x zwischen den Grenzen a und x die Ableitung nimmt.

Besonderes Interesse beansprucht die Ableitung der Funktion $x^{\alpha}(1-x)^{\beta}$:

Für $|x| < 1$ ergiebt sich nach 2):

$$\left[\partial_x^{\varrho} x^{\alpha}(1-x)^{\beta}\right]_0^x = \frac{\Pi(\alpha)}{\Pi(\alpha-\varrho)}x^{\alpha-\varrho}\left\{1 - \frac{(\alpha+1)\,\beta}{1.\,(\alpha+1-\varrho)}x + \frac{(\alpha+1)\,(\alpha+2)\,\beta\,(\beta-1)}{1.\,2\,(\alpha+1-\varrho)\,(\alpha+2-\varrho)}x^2 - + \ldots\ldots\right\}, \text{ oder}$$

16. $$\left[\partial_x^{\varrho} x^{\alpha}(1-x)^{\beta}\right]_0^x = \frac{\Pi(\alpha)}{\Pi(\alpha-\varrho)}x^{\alpha-\varrho}\,F(\alpha+1, -\beta, \alpha+1-\varrho, x).$$

Die hypergeometrische Reihe ist also im wesentlichen identisch mit der Ableitung von $x^{\alpha}(1-x)^{\beta}$: für andere Konstanten ergiebt sich nemlich

17. $$F(\alpha, \beta, \gamma, x) = \frac{\Pi(\gamma-1)}{\Pi(\beta-1)}x^{1-\gamma}\left[\partial_x^{\beta-\gamma} x^{\beta-1}(1-x)^{-\alpha}\right]_0^x.$$

Ferner erhalten wir für $|1-x| < 1$ durch die Darstellung 2)

18. $$\left[\partial_x^{\varrho}(x-1)^{\beta}x^{\alpha}\right]_1^x = \frac{\Pi(\beta)}{\Pi(\beta-\varrho)}(x-1)^{\beta-\varrho}\,F(\beta+1, -\alpha, \beta+1-\varrho, 1-x),$$

also ist $\left[\partial_x^{\varrho}(x-1)^{\beta}x^{\alpha}\right]_1^x$ eine stetige Fortsetzung von $\left[\partial_x^{\varrho} x^{\alpha}(1-x)^{\beta}\right]_0^x$.

Eine andere stetige Fortsetzung liefert die Darstellung 3) auf die Funktion $x^{\alpha}(1-x)^{\beta}$ angewandt:

$$\left[\partial_x^{\varrho} x^{\alpha}(1-x)^{\beta}\right]_0^x = \frac{\Pi(\alpha)}{\Pi(\alpha-\varrho)}x^{\alpha-\varrho}\left\{(1-x)^{\beta} - \frac{\varrho}{1}\cdot\frac{x}{\alpha+1-\varrho}\beta(1-x)^{\beta-1} + \frac{\varrho(\varrho-1)x^2\,\beta(\beta-1)(1-x)^{\beta-2}}{1.\,2\,(\alpha+1-\varrho)\,(\alpha+2-\varrho)} - + \ldots\right\}$$

19. $$\left[\partial_x^{\varrho} x^{\alpha}(1-x)^{\beta}\right]_0^x = \frac{\Pi(\alpha)}{\Pi(\alpha-\varrho)}x^{\alpha-\varrho}\,F\left(-\beta, -\varrho, \alpha+1-\varrho, \frac{x}{x-1}\right) \text{ für } \left|\frac{x}{x-1}\right| < 1.$$

und ebenso:

$$\left[\partial_x^{\varrho}(x-1)^{\beta}x^{\alpha}\right]_1^x = \frac{(x-1)^{\beta-\varrho}\,\Pi(\beta)}{\Pi(\beta-\varrho)}\left\{x^{\alpha} + \frac{\varrho\,(x-1)\,\alpha\,x^{\alpha-1}}{1.\,(\beta+1-\varrho)} + \frac{\varrho\,(\varrho-1)\,(x-1)^2\,\alpha\,(\alpha-1)\,x^{\alpha-2}}{1.\,2\,(\beta+1-\varrho)\,(\beta+2-\varrho)} + \ldots\ldots\right\}$$

20. $$\left[\partial_x^{\varrho}(x-1)^{\beta}x^{\alpha}\right]_1^x = \frac{x^{\alpha}(x-1)^{\beta}\,\Pi(\beta)}{\Pi(\beta-\varrho)}\,F\left(-\alpha, -\varrho, \beta+1-\varrho, \frac{x-1}{x}\right) \text{ für } \left|\frac{x-1}{x}\right| < 1.$$

Für die Funktion $(x^2-1)^\alpha$ ergiebt die Entwickelung 2), da $(x+1)^\alpha$ in der Umgebung des Punktes 1 für $\left|\frac{x-1}{2}\right|<1$ eindeutig ist,

$$\left[\partial_x^\varrho (x^2-1)^\alpha\right]_1^x = \frac{\Pi(\alpha)}{\Pi(\alpha-\varrho)}(x-1)^{\alpha-\varrho}\left\{2^\alpha + \frac{(\alpha+1)(x-1)\,\alpha.2^{\alpha-1}}{1.\,(\alpha+1-\varrho)} + \frac{(\alpha+1)(\alpha+2)(x-1)^2\alpha(\alpha+1)2^{\alpha-2}}{1.\,2\,(\alpha+1-\varrho)(\alpha+2-\varrho)} + \ldots\ldots\right\},$$

21. $$\left[\partial_x^\varrho (x^2-1)^\alpha\right]_1^x = \frac{\Pi(\alpha)\,(x-1)^{\alpha-\varrho}}{\Pi(\alpha-\varrho)}\,2^\alpha\,F\left(-\alpha,\alpha+1,\alpha+1-\varrho,\frac{1-x}{2}\right),$$

und ebenso

22. $$\left[\partial_x^\varrho (x^2-1)^\alpha\right]_1^x = \frac{(-2)^\alpha\Pi(\alpha)}{\Pi(\alpha-\varrho)}(x+1)^{\alpha-\varrho}\,F\left(-\alpha,\alpha+1,\alpha+1-\varrho,\frac{1+x}{2}\right) \text{ für } \left|\frac{1+x}{2}\right|<1.$$

Ersetzen wir in 21) ϱ durch $\varrho-1$, α durch $\varrho-\frac{1}{2}$ und berücksichtigen den aus der Definition 1) sich unmittelbar ergebenden Satz $\left[\partial_x^\varrho Cf_\alpha(x)\right]_\alpha^x = C\left[\partial_x^\varrho f_\alpha(x)\right]_\alpha^x$, — unter C eine beliebige Konstante verstanden — so erhalten wir:

$$\left[\partial_x^{\varrho-1}(1-x^2)^{\varrho-\frac{1}{2}}\right] = (-1)^{\varrho-\frac{1}{2}}(x-1)^{\frac{1}{2}}\frac{\Pi(\varrho-\frac{1}{2})}{\Pi(\frac{1}{2})}2^{\varrho-\frac{1}{2}}\,F\left(\tfrac{1}{2}-\varrho,\tfrac{1}{2}+\varrho,\tfrac{3}{2},\frac{1-x}{2}\right),$$

oder, wenn wir $\left(\frac{1-x}{2}\right)^{\frac{1}{2}} = \sin t$, infolgedessen $x=\cos 2t$, $2t = \text{arc. }\cos x$ setzen[1])

23. $$\left[\partial_x^{\varrho-1}(1-x^2)^{\varrho-\frac{1}{2}}\right]_1^x = \frac{(-2)^{\varrho-1}\,\Pi(\varrho-\frac{1}{2})}{\varrho\,\Pi(\frac{1}{2})}\sin(\varrho \text{ arc. }\cos x) \text{ für } \left|\frac{x-1}{2}\right|<1.$$

Ganz ähnlich ergiebt sich für $\left|\frac{x+1}{2}\right|<1$

24. $$\left[\partial_x^{\varrho-1}(1-x^2)^{\varrho-\frac{1}{2}}\right]_{-1}^x = \frac{2^{\varrho-1}\;\Pi(\varrho-\frac{1}{2})}{\varrho.\,\Pi(\frac{1}{2})}\sin(\varrho\,[\pi - \text{arc. }\cos x])$$

Gleichung 23) und 24) dehnen jene elegante Formel, die wir Jacobi verdanken, aus auf den Fall eines beliebigen Zeigers — 0 nicht ausgeschlossen —; denn wenn ϱ zur positiven ganzen Zahl n wird, so gehen 23) und 24) über in

$$\frac{d^{n-1}(1-x^2)^{n-\frac{1}{2}}}{dx^{n-1}} = (-1)^{n-1}\;3.\,5.\,7.\ldots(2n-1)\frac{\sin(n.\text{ arc. }\cos x)}{n}\;{}^{2)}$$

Setzen wir ferner in 21) $\varrho-1$ für ϱ und $\alpha=-\frac{1}{2}$, so ergiebt sich

$$\left[\partial_x^{\varrho-1}(x^2-1)^{-\frac{1}{2}}\right]_1^x = \frac{\Pi(-\frac{1}{2})(x-1)^{\frac{1}{2}-\varrho}}{\Pi(\frac{1}{2}-\varrho)\,2^{\frac{1}{2}}}\,F\left(\tfrac{1}{2},\tfrac{1}{2},\tfrac{3}{2}-\varrho,\frac{1-x}{2}\right) = \frac{\Pi(-\frac{1}{2})(x-1)^{\frac{1}{2}-\varrho}}{\Pi(\frac{1}{2}-\varrho)\,(x+1)^{\frac{1}{2}}}\,F\left(1-\varrho,\tfrac{1}{2},\tfrac{3}{2}-\varrho,\frac{x+1}{x-1}\right)$$

$$= \frac{(x-1)^{\frac{1}{2}-\varrho}}{(x+1)^{\frac{1}{2}}}\left\{\frac{\Pi(-\frac{1}{2})}{\Pi(\frac{1}{2}-\varrho)} + \frac{(1-\varrho)\,\Pi(\frac{1}{2})}{\Pi(\frac{3}{2}-\varrho)}\cdot\frac{x-1}{x+1} + \frac{(1-\varrho)(2-\varrho)\,\Pi(\frac{3}{2})}{1.\,2\;\Pi(\frac{5}{2}-\varrho)}\left(\frac{x-1}{x+1}\right)^2 + \ldots\ldots\right\}$$

---

1) Gauss' Werke, Bd. III S. 127. XVI.

2) Jacobi, Crelle's Journal XV: Formula transformationis integralium definitorum. S. 4.

Es ist aber[1])

$$\frac{1}{\Pi(\mathrm{k}+\frac{1}{2}-\varrho)}=\frac{\sin\pi(\varrho-\mathrm{k}-\frac{1}{2})}{\pi}\,\Pi(\varrho-\mathrm{k}-1-\tfrac{1}{2})=\frac{(-1)^{\mathrm{k}}(2\pi)^{\frac{1}{2}}\cos(\pi\varrho)\,\Pi(2\varrho-2\mathrm{k}-2)}{\pi\,2^{2\varrho-2\mathrm{k}-2}\,2^{\frac{1}{2}}\,\Pi(\varrho-\mathrm{k}-1)} \text{ und}$$

$$\Pi(\mathrm{k}-\tfrac{1}{2})=\frac{\Pi(2\mathrm{k})\,(2\pi)^{\frac{1}{2}}}{\Pi(\mathrm{k})\,2^{2\mathrm{k}}\,2^{\frac{1}{2}}}, \text{ demnach}$$

$$\frac{(1-\varrho)(2-\varrho)(3-\varrho)\ldots..(\mathrm{k}-\varrho)\,\Pi(\mathrm{k}-\frac{1}{2})}{\Pi(\mathrm{k})\,\Pi(\mathrm{k}+\frac{1}{2}-\varrho)}=\frac{\cos(\pi\varrho)\,\Pi(\varrho-1)}{2^{2(\varrho-1)}}\;\frac{\Pi(2\mathrm{k})}{\Pi(\mathrm{k})\,\Pi(\mathrm{k})}\cdot\frac{\Pi(2\varrho-2\mathrm{k}-2)}{\Pi(\varrho-\mathrm{k}-1)\,\Pi(\varrho-\mathrm{k}-1)};$$

setzen wir also $\frac{\Pi(\alpha)}{\Pi(\beta)\,\Pi(\alpha-\beta)}=\alpha_\beta$, so ergiebt sich

$$25.\quad\Big[\partial_{\mathrm{x}}^{\varrho-1}(\mathrm{x}^2-1)^{-\frac{1}{2}}\Big]_1^{\mathrm{x}}$$

$$=\frac{(\mathrm{x}-1)^{\frac{1}{2}-\varrho}\cos(\pi\varrho)\,\Pi(\varrho-1)}{(\mathrm{x}+1)^{\frac{1}{2}}\,2^{2(\varrho-1)}}\left\{(2\varrho-2)_{\varrho-1}+2_1\,(2\varrho-4)_{\varrho-2}\cdot\frac{\mathrm{x}-1}{\mathrm{x}+1}+4_2\,(2\varrho-6)_{\varrho-3}\left(\frac{\mathrm{x}-1}{\mathrm{x}+1}\right)^2+\ldots.\right\}$$

für $\left|\frac{\mathrm{x}-1}{\mathrm{x}+1}\right|<1$ als Ausdehnung einer Steinbrink'schen Formel auf beliebigen Zeiger; denn für $\varrho=\mathrm{n}$ folgt $\frac{\mathrm{d^n\,arc.\sin x}}{\mathrm{dx^n}}=\frac{(\mathrm{n}-1)!\,(\mathrm{x}+1)^{\mathrm{n}-1}}{2^{2(\mathrm{n}-1)}(1-\mathrm{x}^2)^{\mathrm{n}-\frac{1}{2}}}\,\Sigma\,(2\,\mathrm{k})_{\mathrm{k}}\,(2\mathrm{n}-2\mathrm{k}-2)_{\mathrm{n}-\mathrm{k}-1}\left(\frac{\mathrm{x}-1}{\mathrm{x}+1}\right)^{\mathrm{k}}$.[2])

Ganz ähnlich ergiebt sich aus 22)

$$26.\quad\Big[\partial_{\mathrm{x}}^{\varrho-1}(\mathrm{x}^2-1)^{-\frac{1}{2}}\Big]_{-1}^{\mathrm{x}}$$

$$=\frac{(\mathrm{x}+1)^{\frac{1}{2}-\varrho}\cos(\pi\varrho)\,\Pi(\varrho-1)}{(\mathrm{x}-1)^{\frac{1}{2}}\,2^{2(\varrho-1)}}\left\{(2\varrho-2)_{\varrho-1}+2_1\,(2\varrho-4)_{\varrho-2}\cdot\frac{\mathrm{x}+1}{\mathrm{x}-1}+4_2\,(2\varrho-6)_{\varrho-3}\left(\frac{\mathrm{x}+1}{\mathrm{x}-1}\right)^2+\ldots.\right\}$$

für $\left|\frac{\mathrm{x}+1}{\mathrm{x}-1}\right|<1$.

Setzen wir in 21) und 22) endlich $\alpha=\varrho$, so erhalten wir

$$27.\quad\Big[\partial_{\mathrm{x}}^{\varrho}(\mathrm{x}^2-1)^{\varrho}\Big]_1^{\mathrm{x}}=\Pi(\varrho)\,2^{\varrho}\,\mathrm{F}\left(-\varrho,\varrho+1,1,\frac{1-\mathrm{x}}{2}\right)\text{ für }\left|\frac{1-\mathrm{x}}{2}\right|<1,\text{ und}$$

$$28.\quad\Big[\partial_{\mathrm{x}}^{\varrho}(\mathrm{x}^2-1)^{\varrho}\Big]_{-1}^{\mathrm{x}}=\Pi(\varrho)\,(-2)^{\varrho}\,\mathrm{F}\left(-\varrho,\varrho+1,1,\frac{1+\mathrm{x}}{2}\right)\text{ für }\left|\frac{1+\mathrm{x}}{2}\right|<1.$$

Die Grössen in 27) und 28) sind — abgesehen von den konstanten Faktoren — Kugelfunktionen mit beliebig komplexem Index.

Für die Ableitung der Funktion $\mathrm{x}^\alpha\,\mathrm{e}^{\mathrm{x}}$ erhalten wir die in der ganzen Ebene gültige Entwickelung

$$\Big[\partial_{\mathrm{x}}^{\varrho}\mathrm{x}^{\alpha}\,\mathrm{e}^{\mathrm{x}}\Big]_0^{\mathrm{x}}=\frac{\Pi(\alpha)}{\Pi(\alpha-\varrho)}\;\mathrm{x}^{\alpha-\varrho}\left\{1+\frac{\alpha+1}{1.(\alpha+1-\varrho)}\,\mathrm{x}+\frac{(\alpha+1)(\alpha+2)}{1.2\,(\alpha+1-\varrho)(\alpha+2-\varrho)}\mathrm{x}^2+\ldots..\right\}$$

---

[1]) Gauss' Werke, Bd. III S. 150 [57].

[2]) Steinbrink, Theoria derivatorum altiorum ordinum. (158).

d. h. im wesentlichen jene merkwürdige Funktion, die Herr Kummer im § 26 seiner Abhandlung über die hypergeometrische Reihe behandelt und als Grenzfall derselben betrachtet; es ist also

$$29.\quad \left[\partial_x^\varrho x^\alpha e^x\right]_0^x = \frac{\Pi(\alpha)}{\Pi(\alpha-\varrho)} x^{\alpha-\varrho} \lim_{m=\infty} F\left(\alpha+1, m, \alpha+1-\varrho, \frac{x}{m}\right)$$

Für $\alpha = 0$ ergiebt sich bei beliebigem Zeiger $\left[\partial_x^\varrho e^x\right]_0^x$ nicht als e^x. Dieser hervorragende Wert wird vielmehr erst auftreten, wenn die untere Grenze der Ableitung $-\infty$ ist.

In ähnlicher Weise wie bei 29) zeigt sich

$$30.\quad \left[\partial_x^\varrho x^\alpha \sin x\right]_0^x = \frac{\Pi(\alpha)}{\Pi(\alpha-\varrho)} x^{\alpha-\varrho} \left\{ \frac{\alpha+1}{1.(\alpha+1-\varrho)} x - \frac{(\alpha+1)(\alpha+2)(\alpha+3)}{1.2.3(\alpha+1-\varrho)(\alpha+2-\varrho)(\alpha+3-\varrho)} x^3 + - \dots \right\},$$

$$31.\quad \left[\partial_x^\varrho x^\alpha \cos x\right]_0^x = \frac{\Pi(\alpha)}{\Pi(\alpha-\varrho)} x^{\alpha-\varrho} \left\{ 1 - \frac{(\alpha+1)(\alpha+2)}{1.2(\alpha+1-\varrho)(\alpha+2-\varrho)} x^2 + - \dots\dots \right\}$$

Die Funktion lx gestattet sicher das Ableiten bis zum Punkte 1: nach 2) ist für Punkte x innerhalb eines mit dem Radius 1 um den Punkt 1 geschlagenen Kreises

$$\left[\partial_x^\varrho \mathrm{l}x\right]_1^x = \frac{(x-1)^{-\varrho}}{\Pi(-\varrho)} \left\{ \frac{x-1}{1-\varrho} - \frac{1.(x-1)^2}{(1-\varrho)(2-\varrho)} + \frac{1.2(x-1)^3}{(1-\varrho)(2-\varrho)3-\varrho)} - + \dots\dots \right\}$$

$$32.\quad \left[\partial_x^\varrho \mathrm{l}x\right]_1^x = \frac{(x-1)^{1-\varrho}}{\Pi(1-\varrho)} F(1, 1, 2-\varrho, 1-x)$$

— ein Wert, dessen Vergleichung mit 11) zeigt, dass $\left[\partial_x^{\varrho-1} x^{-1}\right]_1^x = \left\{\partial_x^\varrho \left[\partial_x^{-1} x^{-1}\right]_1^x\right\}_1^x$ ist.

Bis zum Punkte 0 gestattet aber die Funktion lx nicht ohne weiteres den Ableitungs-Prozess, da lx in der Umgebung des Punktes 0 den Charakter einer einändrigen Funktion verliert. Nach 2) kann also $\left[\partial_x^\varrho \mathrm{l}x\right]_0^x$ nicht berechnet werden. Wohl aber können wir $\left[\partial_x^\varrho \mathrm{l}x\right]_0^x$ und allgemeiner $\left[\partial_x^\varrho (x-a)^\alpha \mathrm{l}(x-a)\right]_a^x$ als Grenzfall von 7) behandeln:

Es ist

$$\left[\partial_x^\varrho (x-a)^\alpha \frac{(x-a)^\delta - 1}{\delta}\right]_a^x = \frac{1}{\delta} \left\{ \frac{\Pi(\alpha+\delta)}{\Pi(\alpha+\delta-\varrho)} (x-a)^{\alpha+\delta-\varrho} - \frac{\Pi(\alpha)}{\Pi(\alpha-\varrho)} (x-a)^{\alpha-\varrho} \right\}$$

Gehen wir nun zur Grenze für $\delta = 0$ über, so erhalten wir:

$$\left[\partial_x^\varrho (x-a)^\alpha \mathrm{l}(x-a)\right]_a^x = \frac{\Pi(\alpha)}{\Pi(\alpha-\varrho)} (x-a)^{\alpha-\varrho} \left\{ \frac{\Pi'(\alpha)}{\Pi(\alpha)} + \mathrm{l}(x-a) - \frac{\Pi'(\alpha-\varrho)}{\Pi(\alpha-\varrho)} \right\}$$

oder, wenn wir mit Gauss $\dfrac{\mathrm{dl}\,\Pi(\alpha)}{d\alpha} = \Psi(\alpha)$ setzen:

$$33.\quad \left[\partial_x^{\varrho}(x-a)^{\alpha}\,l(x-a)\right]_a^x = \frac{\Pi(\alpha)\,(x-a)^{\alpha-\varrho}}{\Pi(\alpha-\varrho)}\left\{l(x-a)+\Psi(\alpha)-\Psi(\alpha-\varrho)\right\}$$

und spezieller für $\alpha = 0$:

$$34.\quad \left[\partial_x^{\varrho}\,l(x-a)\right]_a^x = \frac{(x-a)^{-\varrho}}{\Pi(-\varrho)}\left\{l(x-a)+\Psi(0)-\Psi(-\varrho)\right\}$$

für jedes beliebige ϱ — ein positiv ganzzahliges $\varrho = n$ nicht ausgeschlossen; in der That ist, da

$\Pi(-\varrho) = \dfrac{\pi\varrho}{\Pi(\varrho)\sin(\pi\varrho)}$, und

$-\Psi(-\varrho) = \dfrac{1}{\varrho} - \Psi(\varrho) - \pi \operatorname{cotg}(\pi\varrho)$ ist

$$\lim_{\varrho = n}\left[\partial_x^{\varrho}\,l(x-a)\right]_a^x = (-1)^{n-1}\,\Pi(n-1)\,(x-a)^{-n} = \frac{d^n\,l(x-a)}{dx^n}.$$

Die Formel 33) ist noch insofern von Interesse, als ihre Vergleichung mit 7) lehrt, dass man die Ableitung $\left[\partial_x^{\varrho}(x-a)^{\alpha}\right]_a^x = \dfrac{\Pi(\alpha)}{\Pi(\alpha-\varrho)}\,(x-a)^{\alpha-\varrho}$ nach dem Parameter α differentiiert, indem man die abzuleitende Funktion $(x-a)^{\alpha}$ nach α differentiiert.

Nach 2) ergiebt sich endlich

$$35.\quad \left[\partial_x^{\delta-\varepsilon}\,x^{\delta-1}\,F(\alpha,\beta,\gamma,x)\right]_0^x = \frac{\Pi(\delta-1)}{\Pi(\varepsilon-1)}\,x^{\varepsilon-1}\left\{1+\frac{\alpha.\beta.\delta}{1.\gamma.\varepsilon}\,x+\frac{\alpha(\alpha+1)\,\beta(\beta+1)\,\delta(\delta+1)}{1.2\,\gamma(\gamma+1)\,\varepsilon(\varepsilon+1)}\,x^2\,\ldots\ldots\right\}$$

für $|x| < 1$ d. h. eine hypergeometrische Reihe dritter Ordnung in dem Sinne des Worts, wie es die Herren Thomae und Goursat, Herr Pochhammer aber in seiner 2ten Abhandlung über Verallgemeinerungen der hypergeometrischen Reihe gebrauchen. Dass man in ganz ähnlicher Weise von der hypergeometrischen Reihe 3ter Ordnung zu der 4ten Ordnung und allgemein zu der nten durch wiederholtes Ableiten aufsteigen kann, ist ersichtlich.

3.

Bei der Aufstellung der Forderungen, die ich an die Grösse $\left[\partial_x^{\varrho}(x-a)^{\alpha}\right]_a^x$ stellte, wurde ich von dem Gesichtspunkt geleitet, dass diese Forderungen die für mehrfache Differentiation und Integration charakteristischen Eigenschaften aussprechen sollten. In der That ziehen nun die Forderungen III—VI des ersten Abschnitts die Haupteigenschaften mehrfacher Differentiation und Integration nach sich, d. h. für die durch 1) definierten Ableitungen gelten die Hauptgesetze der mehrfachen Differentiation und Integration. Es ist

$$36.\quad \left[\partial_x^{\varrho}C.f_{\alpha}(x)\right]_a^x = C.\left[\partial_x^{\varrho}\,f_{\alpha}(x)\right]_a^x,$$

— unter C eine beliebige inbezug auf x konstante Zahl verstanden — wie schon aus der Definition 1) unmittelbar abgeleitet wurde.

Ebenso einfach ergiebt sich aus ihr, dass, wenn $f_{1,\alpha}(x)$, $f_{2,\alpha}(x)$, $f_{3,\alpha}(x) \ldots\ldots f_{n,\alpha}(x)$ einzeln mit $(x-a)^\alpha$ dividiert eine in der Umgebung des Punktes a eindeutige Funktion ergeben

37. $$\left[\partial_x^\varrho\left\{f_{1,\alpha}(x)+f_{2,\alpha}(x)+f_{3,\alpha}(x)+\ldots\ldots f_{n,\alpha}(x)\right\}\right]_a^x$$

$$=\left[\partial_x^\varrho f_{1,\alpha}(x)\right]_a^x+\left[\partial_x^\varrho f_{2,\alpha}(x)\right]_a^x+\left[\partial_x^\varrho f_{3,\alpha}(x)\right]_a^x+\ldots\ldots\left[\partial_x^\varrho f_{n,\alpha}(x)\right]_a^x$$

ist. Auch zeigt sich, dass man die Ableitung einer unendlichen Reihe solcher Funktionen durch gliedweises Ableiten unter denselben Bedingungen findet, wie bei der Integration, also wenn die ursprüngliche und die resultierende Reihe gleichmässig konvergieren.[1])

Enthält ferner die abzuleitende Funktion den Parameter p, so zeigt die Definition 1) unmittelbar, dass unter den für die Differentiation eines Integrals geltenden Bedingungen

38. $$\frac{\partial\left[\partial_x^\varrho f_\alpha(x,p)\right]_a^x}{\partial p}=\left[\partial_x^\varrho\frac{\partial f_\alpha(x,p)}{\partial p}\right]_a^x \text{ ist.}$$

Dabei ist der Fall nicht ausgeschlossen, dass dieser Parameter die Grösse α sei; es ist vielmehr auch

39. $$\frac{\partial\left[\partial_x^\varrho(x-a)^\alpha f(x)\right]_a^x}{\partial\alpha}=\left[\partial_x^\varrho(x-a)^\alpha\, l(x-a)\, f(x)\right]_a^x,$$

wobei selbstverständlich $f(x)$ als unabhängig von α vorausgesetzt wird. Die rechte Seite der Gleichung 39) kann nämlich aufgefasst werden als $\lim\limits_{\delta=0}\dfrac{\left[\partial_x^\varrho\left\{(x-a)^{\alpha+\delta}-(x-a)^\alpha\right\}f(x)\right]_a^x}{\delta}$, und der Wert, dem dieser unter der Form $\frac{0}{0}$ erscheinende Quotient zustrebt, wird ja durch partielle Differentiation von $\left[\partial_x^\varrho(x-a)^\alpha f(x)\right]_a^x$ nach α erhalten, wie es die linke Seite der behaupteten Gleichung 39) erfordert.

Ebensowenig ist a als Differentiations-Parameter ausgeschlossen: vielmehr ist auch

40. $$\frac{\partial\left[\partial_x^\varrho(x-a)^\alpha f(x)\right]_a^x}{\partial a}=-\alpha\left[\partial_x^\varrho(x-a)^{\alpha-1}\; f(x)\right]_a^x,$$

wie sich durch Differentiation der Entwickelung 2) nach a ergiebt.

Auch der Satz vom Ableiten eines bestimmten Integrals nach einem Parameter gilt für beliebigen Zeiger: wenn $f_\alpha(x,u)=(x-a)^\alpha f(x,u)$, und $f(x,u)$ eine in der Umgebung des Punktes x—a einwertige Funktion ist, wenn ferner k und l konstante Zahlen sind, so ist

---

[1]) Thomé, Crelle's Journal Bd. LXXI. Die Frage über die Bedingungen für die Integrierbarkeit einer unendlichen Reihe harrt leider noch ihrer endgiltigen Lösung.

$$\left[\partial_x^\varrho \int_k^l f_\alpha(x,u)\,du\right]_a^x = \frac{(x-a)^{\alpha-\varrho}\,\Pi(\alpha)}{2\pi i\,\Pi(\alpha-\varrho)} \int_{(a)} \frac{1}{z-a} \int_k^l f(z,u)\,du\,F\left(\alpha+1,1,\alpha+1-\varrho,\frac{x-a}{z-a}\right) dz$$

$$= \int_k^l \frac{(x-a)^{\alpha-\varrho}\,\Pi(\alpha)}{2\pi i\,\Pi(\alpha-\varrho)} \int_{(a)} \frac{f(z,u)}{z-a} F\left(\alpha+1,1,\alpha+1-\varrho,\frac{x-a}{z-a}\right) dz\,du, \text{ also}$$

41. $$\left[\partial_x^\varrho \int_k^l f_\alpha(x,u)\,du\right]_a^x = \int_k^l \left[\partial_x^\varrho f_\alpha(x,u)\right]_a^x du,$$

falls $f(x,u)$ eine solche Funktion von x und u ist, dass für sie die Umkehrung der Reihenfolge von Integrationen gestattet ist, also gewiss, wenn $f(x,u)$ eine auf den betreffenden Integrationswegen stetige Funktion zweier Variabeln ist.

Der Satz

42. $$\left[\partial_x^\varrho \left\{\partial_x^\sigma f_\alpha(x)\right\}_a^x\right]_a^x = \left[\partial_x^{\varrho+\sigma} f_\alpha(x)\right]_a^x$$

gilt ebenfalls für beliebige Zeiger, falls die Ableitungen überhaupt Sinn haben, und falls durch das erste Ableiten nicht eine oder mehrere Potenzen der nach steigenden Potenzen von x—a entwickelten abzuleitenden Funktion zum Verschwinden gebracht werden; denn es ist

$$\left[\partial_x^\sigma f_\alpha(x)\right]_a^x = \frac{\Pi(\alpha)\,(x-a)^{\alpha-\sigma}}{2\pi i\,\Pi(\alpha-\sigma)} \int_{(a)} \frac{f(z)}{z-a}\,dz + \frac{\Pi(\alpha+1)\,(x-a)^{\alpha-\sigma+1}}{2\pi i\,\Pi(\alpha-\sigma+1)} \int_{(a)} \frac{f(z)}{(z-a)^2}\,dz + \dots\dots$$

ein für jedes endliche σ innerhalb desselben Bereiches gleichmässig konvergente Reihe, innerhalb dessen $f(x)$ ausnahmslos analytisch ist; also ist nach 37), 36) und 7)

$$\left[\partial_x^\varrho \left\{\partial_x^\sigma f_\alpha(x)\right\}_a^x\right]_a^x = \frac{\Pi(\alpha)\,(x-a)^{\alpha-\varrho-\sigma}}{2\pi i\,\Pi(\alpha-\varrho-\sigma)} \int_{(a)} \frac{f(z)}{z-a}\,dz + \frac{\Pi(\alpha+1)(x-a)^{\alpha-\varrho-\sigma+1}}{2\pi i\,\Pi(\alpha-\varrho-\sigma+1)} \int_{(a)} \frac{f(z)}{(z-a)^2}\,dz + \dots\dots$$

$$= \frac{\Pi(\alpha)\,(x-a)^{\alpha-\varrho-\sigma}}{2\pi i\,\Pi(\alpha-\varrho-\sigma)} \int_{(a)} \frac{f(z)}{z-a} F\left(\alpha+1,1,\alpha+1-\varrho-\sigma,\frac{x-a}{z-a}\right) dz$$

d. h. der Satz ist im allgemeinen bewiesen. Er erheischt jedoch in dem Falle eine Einschränkung, dass der zuerst vorgenommene Ableitungs-Prozess eine oder mehrere Potenzen der Entwickelung von $f_\alpha(x)$ zum Verschwinden bringt, — ein Umstand, der namentlich dann eintritt, wenn die abzuleitende Funktion in der Umgebung der unteren Grenze eindeutig ist, und zugleich der Zeiger der ersten Ableitung eine positive, ganze Zahl $\sigma = n$ ist, denn dann verschwinden wegen $\frac{1}{\Pi(-m)} = 0$ eins oder mehrere Glieder von $\left[\partial_x^\sigma f(x)\right]_a^x$, während die entsprechenden Glieder von $\left[\partial_x^{\varrho+\sigma} f(x)\right]_a^x$ im allgemeinen nicht verschwinden. Es müssen dann, wenn die Gleichung 42) richtig bleiben soll, die ausgefallenen Glieder wieder ergänzt werden. — Diese Einschränkung der Giltigkeit von 42) darf übrigens nicht wunder nehmen, da ja in dem Falle, dass der erste Zeiger σ positiv ganzzahlig, der zweite ϱ negativ ganzzahlig ist, eine ganz analoge Einschränkung nötig ist.

Eins der wichtigsten Theoreme über Ableitungen mit gebrochenem Zeiger ist zweifellos der Leibnitz'sche Satz über die Ableitung eines Produkts. Durch den Gedankengang, der mich zur Erfüllung der im ersten Abschnitt an die Grösse $\left[\partial_x^{\varrho}(x-a)^{\alpha}\right]_a^x$ gestellten Forderungen I—VI führte, wurde für mich die Vermuthung nahe gelegt, dass bei dem Liouville'schen Wert für $\partial_x^{\varrho}(x-a)^{\alpha}$ das Leibnitz'sche Theorem nicht gelte: Liouville gelangt zu dem von 7) abweichenden Ausdruck $\partial_x^{\mu}\frac{1}{x^n}=\frac{(-1)^{\mu}}{\Gamma(n)}\cdot\frac{\Gamma(n+\mu)}{x^{n+\mu}}$.[1] Wäre nun

$$\partial_x^{\mu}\left(\frac{1}{x^n}\cdot\frac{1}{x^p}\right)=\frac{1}{x^p}\,\partial_x^{\mu}x^{-n}+\mu_1\frac{dx^{-p}}{dx}\,\partial_x^{\mu-1}x^{-n}+\mu_2\frac{d^2x^{-p}}{dx^2}\partial_x^{\mu-2}x^{-n}+\ldots..,$$

so müsste

$$\frac{(-1)^{\mu}\,\Gamma(\mu+n+p)}{x^{\mu+n+p}\,\Gamma(n+p)}=\frac{(-1)^{\mu}}{x^{\mu+n+p}}\left\{\frac{\Gamma(\mu+n)}{\Gamma(n)}+\mu_1 p\frac{\Gamma(\mu+n-1)}{\Gamma(n)}+\mu_2\,p(p+1)\frac{\Gamma(\mu+n-2)}{\Gamma(n)}+\ldots..\right\}$$

sein, was bekanntlich für ein beliebig gebrochenes p nicht der Fall ist, da der Inhalt der verschlungenen Klammer im Falle der Konvergenz — wenn der reelle Teil von $1-n-p>0$ — den Wert

$$\frac{\pi}{\sin\overline{(n+\mu)\pi}\,\Gamma(n)\,\Gamma(1-\mu-n)}\,F(-\mu,p,1-\mu-n,1)=\frac{\sin(n\pi)\sin\overline{(n+p+\mu)\pi}}{\sin\overline{(n+\mu)\pi}\sin\overline{(n+p)\pi}}\cdot\frac{\Gamma(\mu+n+p)}{\Gamma(n+p)}$$

hat. In der That gilt also das Leibnitz'sche Theorem für zwei beliebige Exponenten bei dem Liouville'schen Wert für $\partial_x^{\mu}x^{\alpha}$ nicht, und kann demgemäss auch nicht für den entsprechenden Wert von $\partial_x^{\mu}f_{\alpha}(x)$ Geltung haben.

Um nun das Leibnitz'sche Theorem für den allgemeinsten Fall zu beweisen, den die Definition 1) zulässt, bedarf ich einer Formel, die zwar ein spezieller Fall dieses Theorems für beliebigen Ableitungszeiger ist, die aber an dieser Stelle auf anderm Wege abgeleitet werden muss. Diese Formel heisst:

$$\left[\partial_x^{\varrho}(1-x)^{-1}x^{\alpha+\beta}\right]_0^x$$

$$=x^{\beta}\left[\partial_x^{\varrho}(1-x)^{-1}x^{\alpha}\right]_0^x+\varrho_1\frac{dx^{\beta}}{dx}\left[\partial_x^{\varrho-1}(1-x)^{-1}x^{\alpha}\right]_0^x+\varrho_2\frac{d^2x^{\beta}}{dx^2}\left[\partial_x^{\varrho-2}(1-x)^{-1}x^{\alpha}\right]_0^x+\ldots...$$

oder nach 16)

$$43.\quad \frac{\Pi(\alpha+\beta)}{\Pi(\alpha+\beta-\varrho)}F(\alpha+\beta+1,1,\alpha+\beta+1-\varrho,x)=\frac{\Pi(\alpha)}{\Pi(\alpha-\varrho)}\Big\{F(\alpha+1,1,\alpha+1-\varrho,x)$$

$$+\frac{\varrho\cdot\beta}{1.(\alpha+1-\varrho)}\cdot F(\alpha+1,1,\alpha+2-\varrho,x)+\frac{\varrho(\varrho-1)\beta(\beta-1)}{1.2(\alpha+1-\varrho)(\alpha+2-\varrho)}F(\alpha+1,1,\alpha+3-\varrho,x)+\ldots.\Big\},$$

wenn $|x|<1$ und der reelle Teil von $\alpha+\beta+1>0$ ist.

Der Beweis dieser Formel lässt sich leicht durch Koeffizienten-Vergleichung erbringen: Die

[1] Crelle's Journal XI S. 3. A.

Reihe auf der rechten Seite von 43) konvergiert gleichmässig; denn die Reihe

$$1+\frac{\varrho.\beta}{1.(\alpha+1-\varrho)}+\frac{\varrho(\varrho-1)\beta(\beta-1)}{1.2(\alpha+1-\varrho)(\alpha+2-\varrho)}+\ldots\ldots$$

konvergiert sicher, falls der reelle Teil von $\alpha+\beta+1>0$ ist, und die absoluten Beträge der Glieder der Reihe

$F(\alpha+1,1,\alpha+1-\varrho,x)$, $F(\alpha+1,1,\alpha+2-\varrho,x)$, $F(\alpha+1,1,\alpha+3-\varrho,x)\ldots\ldots F(\alpha+1,1,\alpha+n-\varrho,x)$ nähern sich mit unbegrenzt wachsendem n dem festen Grenzwert 1 für jedes der Bedingung $|x|<1$ genügende x. Die gleichmässige Konvergenz der Reihe 43) folgt also aus einer der Bemerkungen, die Dirichlet zur Konvergenz der Reihe $\Sigma a_n b_n$ hinzufügt.[1]) Die Reihe 43) genügt somit den Voraussetzungen des Weierstrass'schen Doppelreihensatzes,[2]) und wir dürfen infolge dieses Satzes die rechte Seite von 43) formal nach steigenden Potenzen von x ordnen. Aus der Formel

$$\frac{\Pi(\alpha+n)}{\Pi(\alpha+n-\varrho)}\left\{1+\frac{\varrho\beta}{1.(\alpha+n+1-\varrho)}+\frac{\varrho(\varrho-1)\beta(\beta-1)}{1.2(\alpha+n+1-\varrho)(\alpha+n+2-\varrho)}+\ldots\ldots\right\}$$

für $n=0,1,2\ldots\ldots$ ergiebt sich dann die Richtigkeit der Gleichung 43) in ganz einfacher Weise.

Nunmehr gehe ich zum Beweise des Leibnitz'schen Theorems selber über:

Es ist nach 1)

$$\left[\partial_x^\varrho f_\alpha(x)\varphi_\beta(x)\right]_a^x=\frac{(x-a)^{\alpha+\beta-\varrho}\Pi(\alpha+\beta)}{2\pi i\Pi(\alpha+\beta-\varrho)}\int_{(a)}\frac{f(z)\varphi(z)}{z-a}F\left(\alpha+\beta+1,1,\alpha+\beta+1-\varrho,\frac{x-a}{z-a}\right)dz.$$

Entwickeln wir nun $\varphi(z)$ nach dem Taylorschen Lehrsatz und $F\left(\alpha+\beta+1,1,\alpha+\beta+1-\varrho,\frac{x-a}{z-a}\right)$ nach 43), wobei wir für den Augenblick der Kürze halber $F\left(\alpha+1,1,\alpha+1-\varrho,\frac{x-a}{z-a}\right)=F(\alpha,\varrho)$ setzen, so erhalten wir

$$\left[\partial_x^\varrho f_\alpha(x)\varphi_\beta(x)\right]_a^x=\frac{(x-a)^{\alpha+\beta-\varrho}\Pi(\alpha)}{2\pi i\Pi(\alpha-\varrho)}\int_{(a)}\frac{f(z)}{z-a}\left\{\varphi(x)+\frac{(z-x)\varphi'(x)}{1}+\frac{(z-x)^2}{1.2}\varphi''(x)+\ldots\ldots\right\}.$$

$$\left\{F(\alpha,\varrho)+\frac{\varrho.\beta}{1.(\alpha+1-\varrho)}F(\alpha,\varrho-1)+\frac{\varrho(\varrho-1)\beta(\beta-1)}{1.2(\alpha+1-\varrho)(\alpha+2-\varrho)}F(\alpha,\varrho-2)+\ldots\ldots\right\}dz.$$

$$=\frac{(x-a)^{\alpha-\varrho}\Pi(\alpha)}{2\pi i\Pi(\alpha-\varrho)}(x-a)^\beta\varphi(x)\int_{(a)}\frac{f(z)}{z-a}F(\alpha,\varrho)\,dz$$

$$+\frac{(x-a)^{\alpha-\varrho+1}\Pi(\alpha)}{2\pi i\Pi(\alpha-\varrho)}\int_{(a)}\frac{f(z)(x-a)^{\beta-1}}{z-a}\left\{\frac{\varrho.\beta F(\alpha,\varrho-1)}{1.(\alpha+1-\varrho)}\varphi(x)+\frac{(z-x)F(\alpha,\varrho)}{1}\varphi'(x)\right\}dz$$

$$+\frac{(x-a)^{\alpha-\varrho+2}\Pi(\alpha)}{2\pi i\Pi(\alpha-\varrho)}\int_{(a)}\frac{f(z)(x-a)^{\beta-2}}{z-a}\left\{\frac{\varrho(\varrho-1)\beta(\beta-1)}{1.2(\alpha+1-\varrho)(\alpha+2-\varrho)}F(\alpha,\varrho-2)\varphi(x)\right.$$

$$\left.+\frac{\varrho.\beta(z-x)}{1.(\alpha+1-\varrho)}F(\alpha,\varrho-1)\varphi'(x)+\frac{(z-x)^2}{1.2}F(\alpha,\varrho)\varphi''(x)\right\}dz$$

$$+\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots$$

---

[1]) Dirichlet, Vorlesungen über Zahlentheorie, herausgegeben von Dedekind, § 143.

[2]) Weierstrass, Monatsbericht der Königl. Akademie der Wissenschaften zu Berlin August 1880. 2.

Nach Gauss (Werke, Band III S. 130 Formel [8]) ergiebt sich aber, wenn die dortigen Grössen α, β, γ, x der Reihe nach durch $1, \alpha+1, \alpha+1-\varrho, \frac{x-a}{z-a}$ ersetzt werden, die auch für komplexe Argumente geltende Beziehung

$$0=(\alpha+1-\varrho)\frac{z-x}{z-a}F(\alpha,\varrho)-(\alpha+1-\varrho)-\varrho\frac{x-a}{z-a}F(\alpha,\varrho+1),$$

also ist

$$\frac{z-x}{z-a}F(\alpha,\varrho)=1+\frac{\varrho(x-a)}{(z-a)(\alpha+1-\varrho)}F(\alpha,\varrho-1)$$

und allgemeiner unterscheidet sich, wie die wiederholte Anwendung dieser Formel ergiebt, $\frac{(z-x)^n}{z-a}F(\alpha,\varrho)$ von $\frac{\varrho(\varrho-1)\ldots\ldots(\varrho-n+1)(x-a)^n}{(\alpha+1-\varrho)(\alpha+2-\varrho)\ldots\ldots(\alpha+n-\varrho)(z-a)}\cdot F(\alpha,\varrho-n)$ nur um eine gauze rationale Funktion von z, also ist

$$\int\limits_{(a)}\frac{(z-x)^n f(z)}{z-a}F(\alpha,\varrho)\,dz=\frac{\varrho(\varrho-1)\ldots\ldots(\varrho-n+1)(x-a)^n}{(\alpha+1-\varrho)(\alpha+2-\varrho)\ldots\ldots(\alpha+n-\varrho)}\int\limits_{(a)}\frac{f(z)}{z-a}F(\alpha,\varrho-n)\,dz,$$

da das geschlossene Integral einer Funktion, die innerhalb des Integrationsgebietes nirgends unendlich wird, verschwindet. Wir erhalten also

$$\Big[\partial_x^{\varrho} f_{\alpha}(x)\,\varphi_{\beta}(x)\Big]_a^x=(x-a)^{\alpha-\varrho}\frac{\Pi(\alpha)}{2\pi i\,\Pi(\alpha-\varrho)}(x-a)^{\beta}\varphi(x)\int\limits_{(a)}\frac{f(x)}{z-a}F(\alpha,\varrho)\,dz$$

$$+\varrho(x-a)^{\alpha-\varrho+1}\frac{\Pi(\alpha)}{2\pi i\,\Pi(\alpha-\varrho+1)}\Big[\beta(x-a)^{\beta-1}\varphi(x)+(x-a)^{\beta}\varphi'(x)\Big]\int\limits_{(a)}\frac{f(z)}{z-a}F(\alpha,\varrho-1)\,dz$$

$$+\frac{\varrho(\varrho-1)(x-a)^{\alpha-\varrho+2}\,\Pi(\alpha)}{1.2.2\pi i\,\Pi(\alpha-\varrho+2)}\Big[\beta(\beta-1)(x-a)^{\beta-2}\varphi(x)+2\beta(x-a)^{\beta-1}\varphi'(x)+(x-a)^{\beta}\varphi''(x)\Big]\int\limits_{(a)}\frac{f(x)}{z-a}F(\alpha,\varrho-2)\,dz$$

$$+\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots$$

d. h. nach 1)

$$\textbf{44.}\quad \Big[\partial_x^{\varrho} f_{\alpha}(x)\varphi_{\beta}(x)\Big]_a^x=\varphi_{\beta}(x)\Big[\partial_x^{\varrho} f_{\alpha}(x)\Big]_a^x+\varrho_1\varphi'_{\beta}(x)\Big[\partial_x^{\varrho-1} f_{\alpha}(x)\Big]_a^x+\varrho_2\varphi''_{\beta}(x)\Big[\partial_x^{\varrho-1} f_{\alpha}(x)\Big]_a^x+\ldots\ldots$$

unter der Bedingung, dass diese Reihe gleichmässig konvergiert. In der That schliesst diese Bedingung die andre für die Gültigkeit der beim Beweise benutzten Formel 43) in sich; denn unter der Voraussetzung der gleichmässigen Konvergenz darf man die Reihe auf der rechten Seite von 44) in Gemässheit des Weierstrass'schen Doppelreihen-Satzes formal nach steigenden Potenzen von x—a ordnen. Nach dem ersten Teil dieses Satzes muss dann der Koeffizient von $(x-a)^{\alpha+\beta-\varrho}$, nämlich $\frac{\Pi(\alpha)}{\Pi(\alpha-\varrho)}\left\{1+\frac{\varrho.\beta}{1.(\alpha+1-\varrho)}+\frac{\varrho(\varrho-1)\beta(\beta-1)}{1.2(\alpha+1-\varrho)(\alpha+2-\varrho)}+\ldots\ldots\right\}$ eine bestimmte endliche Zahl sein, und dazu ist notwendig, dass der reelle Teil von $\alpha+\beta+1>0$ sei. Überhaupt kann der Satz 44) auch an der Hand des Weierstrass'schen Doppelreihensatzes dadurch bewiesen werden, dass man die rechte Seite unter der Bedingung der gleichmässigen Konvergenz formal nach steigenden Potenzen von x—a ordnet.

Ersetzen wir, um eine bemerkenswerte Folgerung aus 44) zu ziehen, die dortigen Grössen ϱ, $f_\alpha(x)$, $\varphi_\beta(x)$ der Reihe nach durch -1, $\left[\partial_x^\varrho f_\alpha(x)\right]_a^x$, $\varphi_\beta(-x)$, so erhalten wir nach 42):

45. $$\left\{\partial_x^{-1}\left[\partial_x^\varrho f_\alpha(x)\right]_a^x \varphi_\beta(-x)\right\}_a^x = \left[\partial_x^{\varrho-1} f_\alpha(x)\right]_a^x \varphi_\beta(-x) + \left[\partial_x^{\varrho-2} f_\alpha(x)\right]_a^x \varphi'_\beta(-x) + \left[\partial_x^{\varrho-3} f_\alpha(x)\right]_a^x \varphi''_\beta(-x) + \ldots\ldots,$$

falls diese Reihe gleichmässig konvergiert. Es ist dies die Verallgemeinerung jener „nützlichen" Formel, die Herr Kronecker abgeleitet und mannigfach verwendet hat; denn für $\varrho = n$, $\alpha = 0$, $\beta = 0$ geht 45) über in:

$$\int_a^x f^{(n)}(x)\varphi(-x)\,dx = f^{(n-1)}(x)\varphi(-x + f^{(n-2)}(x)\varphi'(-x) + f^{(n-3)}(x)\varphi''(-x) + \ldots . + f^{(n-n)}(x)\varphi^{(n-1)}(-x)$$

$$+ \left[\partial_x^{-1} f(x)\right]_a^x \varphi^{(n)}(-x) + \left[\partial_x^{-2} f(x)\right]_a^x \varphi^{(n+1)}(-x) + \ldots\ldots..$$

$$= \sum_1^n {}_h \left\{ f^{(h-1)}(x)\varphi^{(n-h)}(-x)\right\} + \left[\partial_x^{-1} f(x)\varphi^{(n)}(-x)\right]_a^x, \text{ d. h.}$$

$$\int_a^x f^{(n)}(x)\varphi(-x)\,dx - \int_a^x f(x)\varphi^{(n)}(-x)\,dx = \sum_1^n {}_h \left\{ f^{(h-1)}(x)\varphi^{(n-h)}(-x)\right\}.$$ [1]

Durch Differentiation erhalten wir aus 45):

46. $$\left[\partial_x^\varrho f_\alpha(x)\right]_a^x \varphi_\beta(-x) = \frac{d\left[\partial_x^{\varrho-1} f_\alpha(x)\right]_a^x \varphi_\beta(-x)}{dx} + \frac{d\left[\partial_x^{\varrho-2} f_\alpha(x)\right]_a^x \varphi'_\beta(-x)}{dx} + \frac{d\left[\partial_x^{\varrho-3} f_\alpha(x)\right]_a^x \varphi''_\beta(-x)}{dx} + \ldots\ldots.,$$

unter der Bedingung der gleichmässigen Konvergenz dieser Reihe. In ganz ähnlicher Weise, wie die vorige, geht diese Formel für $\varrho = n$, $\alpha = 0$, $\beta = 0$ über in:

$$f^{(n)}(x)\varphi(-x) - f(x)\varphi^{(n)}(-x) = \sum_1^n {}_h \frac{d f^{(h-1)}(x)\,\varphi^{(n-h)}(-x)}{dx}$$ [2]

Auch die Hauptsätze über das Ableiten einer Funktion von einer Funktion gelten für beliebig komplexen Index: zunächst ist

47. $$\left[\partial_x^\varrho f_\alpha(x)\right]_a^x = \lim_{\varepsilon=0} \left[\partial_\varepsilon^\varrho f_\alpha(x+\varepsilon)\right]_{a-x}^x;$$

denn $\left[\partial_\varepsilon^\varrho f_\alpha(x+\varepsilon)\right]_{a-x}^x = \dfrac{(\varepsilon-a+x)^{\alpha-\varrho}\,\Pi(\alpha)}{2\pi i\,\Pi(\alpha-\varrho)} \displaystyle\int_{(a-x)} \frac{f(x+u)}{u-a+x}\, F\left(\alpha+1,\, 1,\, \alpha+1-\varrho,\, \frac{\varepsilon-a+x}{u-a+x}\right) du$

geht durch die Substitution $u = z - x$ über in

$\dfrac{(\varepsilon-a+x)^{\alpha-\varrho}\,\Pi(\alpha)}{2\pi i\,\Pi(\alpha-\varrho)} \displaystyle\int_{(a)} \frac{f(z)}{z-a}\, F\left(\alpha+1,\, 1,\, \alpha+1-\varrho,\, \frac{\varepsilon-a+x}{z-a}\right) dz$ — und diese Grösse wird für $\varepsilon = 0$

---

[1] Kronecker, Sitzungsberichte der Akademie der Wissenschaften zu Berlin 1885 F. J.

[2] Ebendaselbst F. D.

zu $\frac{(x-a)^{\alpha-\varrho}}{2\pi i\,\Pi(\alpha-\varrho)}\int\limits_{(a)}\frac{f(z)}{z-a}\,F\left(\alpha+1,\,1,\,\alpha+1-\varrho,\,\frac{x-a}{z-a}\right)dz=\left[\partial_x^\varrho f_\alpha(x)\right]_a^x$.

Ferner ist:

48. $\left[\partial_x^\varrho f_\alpha(ax+b)\right]_c^x=a^\varrho\left[\partial_u^\varrho f_\alpha(u)\right]_{ac+b}^u$ für $u=ax+b$;

denn, ist c Windungspunkt von $f_\alpha(ax+b)$ und zwar dergestalt, dass $(x-c)^{-\alpha}f_\alpha(ax+b)$ in der Umgebung von c eindeutig wird, so ist nach 1)

$$\left[\partial_x^\varrho f_\alpha(ax+b)\right]_c^x=\frac{(x-c)^{\alpha-\varrho}\Pi(\alpha)}{2\pi i\,\Pi(\alpha-\varrho)}\int\limits_{(c)}\frac{f_\alpha(az+b)\,(z-c)^{-\alpha}}{z-c}\,F\left(\alpha+1,\,1,\,\alpha+1-\varrho,\,\frac{x-c}{z-c}\right)dz.$$

Substituieren wir nun in das Integral $az+b=v$, so erhalten wir

$$\left[\partial_x^\varrho f_\alpha(ax+b)\right]_c^x=\frac{a^{\varrho-\alpha}\,(u-ac-b)^{\alpha-\varrho}\Pi(\alpha)}{2\pi i\,\Pi(\alpha-\varrho)}\int\limits_{(ac+b)}\frac{f_\alpha(v)\,a^\alpha(v-ac-b)^{-\alpha}}{v-ac-b}F\left(\alpha+1,1,\alpha+1-\varrho,\frac{u-ac-b}{v-ac-b}\right)dv,$$

d. h., da der Punkt $u=ac+b$ dergestalt Windungspunkt für $f_\alpha(u)$ ist, dass $f_\alpha(u).(u-ac-b)^{-\alpha}$ in der Umgebung des Punktes $u=ac+b$ einändrig ist:

$\left[\partial_x^\varrho f_\alpha(ax+b)\right]_a^x=a^\varrho\left[\partial_u^\varrho f_\alpha(u)\right]_{ac+b}^u$, wenn nach vollzogenem Ableitungs-Prozess u durch $ax+b$ ersetzt wird.

Der Satz 48) scheint mir besonders dringend für die Einführung der **begrenzten** Bruchableitungen zu sprechen; zu welchen Konzessionen man hinsichtlich dieses Satzes bei der Theorie der unbegrenzten Ableitungen getrieben wird, zeigen die diesen Punkt betreffenden Bemerkungen Oettinger's [1])

Auch der allgemeine Hoppe'sche Satz über die Ableitung einer Funktion von einer Funktion gilt für beliebig komplexen Zeiger unter einschränkenden Konvergenz-Bedingungen. Für den Beweis desselben ist der Gedankengang, den Ubbo H. Meyer[2]) im Falle eines positiv ganzzahligen Zeigers einschlägt, auch für den Fall eines beliebigen Zeigers verwendbar: es sei $y=\varphi(x)$, $f(y)=f[\varphi(x)]$. Dann ist nach 47)

$$\left[\partial_x^\varrho f\{\varphi(x)\}\right]_a^x=\lim_{\varepsilon=0}\left[\partial_\varepsilon^\varrho f\{\varphi(x+\varepsilon)\}\right]_{a-x}^\varepsilon=\lim_{\varepsilon=0}\left[\partial_\varepsilon^\varrho f\{\varphi(x)+\varphi(x+\varepsilon)-\varphi(x)\}\right]_{a-x}^\varepsilon.$$

Setzen wir nun $\varphi(x+\varepsilon)-\varphi(x)=\Theta$, und entwickeln $f(y+\Theta)$ in die Bürmann'sche Reihe, so erhalten wir

$$\left[\partial_x^\varrho f\{\varphi(x)\}\right]_a^x=\lim_{\varepsilon=0}\left[\partial_\varepsilon^\varrho\left\{f(y)+f'(y)\cdot\Theta+f''(y)\,\frac{\Theta^2}{1.2}+f'''(y)\frac{\Theta^3}{1.2.3}+\dots\right\}\right]_{a-x}^\varepsilon.$$

Da nun $f(y)$ und seine höheren Differential-Quotienten von ε unabhängig sind, so ergiebt sich:

---

[1]) Vergleiche Crelle's Journal Bd. 44. S. 43.

[2]) Sur les dérivées d'une fonction de fonction. Grunert's Archiv IV.

49. $$\left[\partial_x^\varrho f\left\{\varphi(x)\right\}\right]_a^x = B_0\, f(y) + B_1\, f'(y) + B_2\, f''(y) + \ldots\ldots$$

für $y = \varphi(x)$ und

$$B_k = \frac{1}{k!}\lim_{\varepsilon=0}\left[\partial_\varepsilon^\varrho \Theta^k\right]_{a-x}^{\varepsilon} = \frac{1}{k!}\lim_{\varepsilon=0}\left[\partial_\varepsilon^\varrho \left\{\varphi(x+\varepsilon)-\varphi(x)\right\}^k\right]_{a-x}^{\varepsilon},\ \text{oder nach 47)}$$

$$B_k = \frac{1}{k!}\left\{\left[\partial_x^\varrho y^k\right]_a^x - k_1 \cdot y\left[\partial_x^\varrho y^{k-1}\right]_a^x + k_2\, y^2\left[\partial_x^\varrho x^{k-2}\right]_a^x - + \ldots . \pm k_k\, y^k\left[\partial_x^\varrho y^0\right]_a^x\right\},\ \text{oder}$$

$$B_k = \frac{y^k}{k!}\left[\partial_x^\varrho\left(\frac{y}{\gamma}-1\right)^k\right]_a^x,$$ falls γ beim Ableiten als konstant angesehen und nach demselben durch y ersetzt wird.

Bedingungen für die Gültigkeit von 49) sind, dass die ursprüngliche Bürmann'sche Entwickelung sowohl, wie die resultierende Reihe 49) gleichmässig konvergent sind.

Der eben bewiesene Satz bildet die Verallgemeinerung zu der „Entwickelung der höheren Differential-Quotienten einer Funktion von z nach denen der Potenzen von z.“[1]) Diese Verallgemeinerung konnte von Liouville[2]) seiner Zeit nicht wohl gefunden werden, da der spezielle Hoppe'sche Satz noch nicht bekannt war.

Endlich ein Satz, der die Verallgemeinerung bildet zu der Thatsache, dass man den nten Differential-Quotienten einer Funktion durch eine Rekursionsformel finden kann, falls diese Funktion eine lineare Differential-Gleichung mit ganzen rationalen Funktionen als Koeffizienten befriedigt:

50. Genügt die abzuleitende Funktion einer Fuchs'schen[3]) homogenen Differential-Gleichung mter Ordnung mit k singulären Punkten, so befriedigt jede, zwischen einem dieser singulären Punkte einerseits und der unabhängig Variabeln andrerseits genommene Ableitung eine ebensolche Differential-Gleichung höchstens von der Ordnung mk mit denselben k singulären Punkten.

Beweis. Es genüge die abzuleitende Funktion y der Differential-Gleichung

$$\psi^m \frac{d^m y}{dx^m} = F_{k-1}(x)\,\psi^{m-1}\frac{d^{m-1}y}{dx^{m-1}} + F_{2k-2}(x)\,\psi^{m-2}\frac{d^{m-2}y}{dx^{m-2}} + \ldots . + F_{mk-m}(x)\cdot y,$$

wo $\psi = (x-a_1)\,(x-a_2)\ldots .(x-a_k)$, und

$F_l(x)$ eine ganze, rationale Funktion höchstens vom Grade l ist.

Dann ist diese Gleichung eine Identität; leiten wir sie also mit $\varrho + mk - m$ nach x zwischen einem der singulären Punkte a_1 und x gliedweise ab, so haben zunächst die Ableitungen der einzelnen Glieder gemäss der Definition 1) Sinn; ferner sind wir sicher, durch das Ableiten wiederum eine Identität zu erhalten, da ja der Ableitungs-Prozess eindeutig ist. Wenden wir nun beim Ableiten der einzelnen Glieder den Satz 44) an, so bricht die Entwickelung nach diesem Satz ab, falls wir als die zu differentiierenden Funktionen $\varphi_\beta(x)$ die ganzen, rationalen wählen. Diese Ent-

---

[1]) Hoppe, Theorie der höheren Differential-Quotienten S. 39. F. (6).

[2]) Sur le changement de la variable indépendante dans le calcul de différentielles à indices quelquonques. — Journal polytechnique, cah. XXIV (1835).

[3]) Zur Theorie der linearen Differential-Gleichungen mit veränderlichen Koeffizienten. 4. Borchardt's Journal LXVI.

wickelungen gelten also ohne beschränkende Konvergenz-Bedingungen. Ferner ist es nach 42) sicher, dass $\left[\partial_x^\varrho \frac{d^n y}{dx^n}\right]_{a_1}^x = \frac{d^n \left[\partial_x^\varrho y\right]_{a_1}^x}{dx^n}$ ist, falls a_1 wirklich ein Windungspunkt von y ist, aber nur dann, wegen der Einschränkung zu 42). Wir erhalten also, wenn wir $\left[\partial_x^\varrho y\right]_{a_1}^x = Y$ setzen, eine Identität von der Form:

$$\psi^m \frac{d^{mk}Y}{dx^{mk}} = \overline{F}_{k-1}(x)\,\psi^{m-1}\frac{d^{mk-1}Y}{dx^{mk-1}} + \overline{F}_{2k-2}(x)\,\psi^{m-2}\frac{d^{mk-2}Y}{dx^{mk-2}} + \ldots\ldots\ \overline{F}_0(x)\,Y.^{1)}$$

d. h. $Y = \left[\partial_x^\varrho y\right]_{a_1}^x$ genügt einer Fuchs'schen Differential-Gleichung mkter Ordnung mit den k singulären Punkten der erzeugenden Differential-Gleichung.

In besonders einfachen Fällen erhält man aus der erzeugenden Differential-Gleichung in y dadurch, dass man sie mit ϱ ableitet und $\partial_x^\varrho y = Y$ setzt, eine Gleichung in Y, welche dieselbe Form hat, wie die erzeugende. Dadurch findet ein Punkt seine Erklärung, den Spitzer berührt, wenn er sagt[2]: „es ist eine, mir äusserst merkwürdig vorkommende Erscheinung, dass die Gleichung (19) $(m+x)z'' + [A+B+(\alpha-\beta)(m+x)]z' + A(\alpha-\beta)z = 0$ λmal differenziert, genau dieselbe Form der Koeffizienten hat, wie die Gleichung in W, zu welcher man durch Annahme der Gleichung (19) in der Form $z = \int_{u_1}^{u_2} (x-u)^{\lambda-1}\, W\, du$ geführt wird. Ganz Ähnliches begegnete mir bei andern linearen Differential-Gleichungen, die komplicirteren Bau haben, als die Gleichung (19)."

Inderthat liefert nach 4) eine Summe von Ableitungen der Funktion y ein Integral von der Form $\int_{u_1}^{u_2} (x-u)^{\lambda-1}\, W\, du$.

Die Beschränktheit des mir zu Gebote stehenden Raumes zwingt mich, hier abzubrechen; es muss einer späteren Gelegenheit die Behandlung von Ableitungen mit unendlicher unterer Grenze, und die Anwendung der aufgestellten Prinzipien vorbehalten bleiben.

---

1) $\overline{F}_1(x)$ bezeichnet wiederum eine ganze rationale Funktion höchstens vom Grade l, aber selbverständlich eine andre, wie oben.

2) Spitzer, Studien über die Integration linearer Differential-Gleichungen. S. 21. Anmerkung 1)