 1889 §.

INDEX LECTIONUM

IN

LYCEO REGIO HOSIANO BRUNSBERGENSI

PER AESTATEM

A DIE XXIV. APRILIS ANNI MDCCCLXXXIX.

INSTITUENDARUM.

PRAECEDUNT **PROF. DR. WILHELMI KILLING**
DE DETERMINANTE QUODAM DISQUISITIONES MATHEMATICAE.

BRUNSBERGAE, 1889.
TYPIS HEYNEANIS (R. SILTMANN).

LYCEI REGII HOSIANI H. T. RECTOR

D^R. HUGO WEISS,

PROFESSOR PUBLICUS ORDINARIUS.

LYCEI REGII HOSIANI BRUNSBERGENSIS

RECTOR ET SENATUS

CIVIBUS SUIS

S.

Ueber eine gewisse Determinante.

In meiner Abhandlung: „Zur Theorie der Lie'schen Transformationsgruppen“, welche dem Verzeichnis der Vorlesungen für das Sommer-Semester 1886 vorgedruckt ist, habe ich die Aufgabe gestellt, alle verschiedenen Formen der Zusammensetzung von r-gliedrigen Gruppen zu bestimmen. Diese Aufgabe kommt bekanntlich darauf hinaus, alle wesentlich verschiedenen Systeme von r. $\binom{r}{2}$ Coefficienten c zu bestimmen, zwischen denen bestimmte Gleichungen bestehen. Ich suchte die gestellte Aufgabe ihrer Lösung näher zu bringen durch Untersuchung derjenigen linearen Gruppe, welche symbolisch durch

$$\sum_{\iota\varrho} \frac{\partial f}{\partial x_\iota} c_{\iota\varkappa\varrho} x_\varrho = \sum_\iota \frac{\partial f}{\partial x_\iota} U_{\iota\varkappa} \qquad (\varkappa = 1 \ldots r)$$

dargestellt wird. Einem aufmerksamen Leser konnte es unmöglich entgehen, dass alle Entwickelungen der Arbeit mit dieser Gruppe in engem Zusammenhange stehen; kommt es doch vor allem darauf hinaus, Eigenschaften der $U_{\iota\varkappa}$ aufzusuchen.

Der Schluss des § 5 giebt die Invarianten dieser Gruppe, allerdings nur unter der Voraussetzung, dass die Gruppe ihre eigene Haupt-Untergruppe sei, oder wie ich es dort bezeichnet habe, dass die in § 2 der Arbeit eingeführte Zahl p gleich der Zahl r der von einander unabhängigen infinitesimalen Transformationen sei. Abgesehen von der Ueberschrift stützt sich die Entwickelung dieses Paragraphen auf die Voraussetzung

$$\sum_\lambda c_{a\lambda\lambda} = 0 \qquad (\text{für } a = 1 \ldots r),$$

welche für $p = r$ immer erfüllt ist, aber auch für $p < r$ erfüllt sein kann, so dass in besonderen Fällen, wie § 6 hervorhebt, die Sätze des § 5 bestehen bleiben können.

Nun ist es immer bedenklich, wenn eine Eigenschaft, welche keinen durchgreifenden Unterschied begründet, zur Grundlage einer besonderen Untersuchung gemacht wird. Daher war es mir schon bei der Ausarbeitung der Abhandlung zweifelhaft, ob der dort eingeschlagene Weg zum Ziele führen würde. Wenn ich diesem Zweifel zunächst nicht nachgab, so lag der Grund vor allem in den merkwürdigen Beziehungen, zu denen ich in den §§ 3 u. 5 gelangte. Auch erwiesen sich die dort gefundenen Invarianten für einfache Gruppen nach jeder Richtung hin als charakteristische Functionen. Aber die invarianten Functionen verlieren immer mehr an Bedeutung, je grösser die Gliederzahl einer Gruppe im Vergleich zu der Gliederzahl derjenigen einfachen Gruppe ist, aus welcher sie durch Zusammensetzung gebildet ist. Nach einiger Zeit fand ich dann auch noch, dass in gewissen Fällen selbst für $p = r$ eine Gruppe der bezeichneten Art keine Invarianten besitzt.

Mittlerweile hatte ich die Lehre von der Zusammensetzung der Gruppen von einem andern Gesichtspunkte aus angegriffen. Wieder gelangte ich zu den Invarianten einer linearen Gruppe, aber diesmal derjenigen, welche von Herrn Lie als die adjungirte lineare Gruppe bezeichnet wird und in der Form

$$\sum_{\varrho\iota} x_\varrho \, c_{\varrho\varkappa\iota} \frac{\partial f}{\partial x_\iota} = \sum_\iota C_{\varkappa\iota} \frac{\partial f}{\partial x_\iota} \qquad (\varkappa = 1 \ldots . r)$$

dargestellt werden kann. Diese stellen sich aber bei der Lösung eines durchaus naturgemässen Problems heraus, nämlich bei der Bestimmung aller in einer gegebenen Gruppe enthaltenen zweigliedrigen Untergruppen, in denen eine gegebene eingliedrige Untergruppe enthalten ist. Indem ich diese Aufgabe weiter verfolgt habe, ist es mir gelungen, die Lehre von der Zusammensetzung der Gruppen zu einem gewissen Abschluss zu bringen. Ich habe die Ergebnisse dieser Untersuchungen in Abhandlungen „Die Zusammensetzung der stetigen endlichen Transformationsgruppen“ zusammengestellt, von denen zwei in den mathematischen Annalen bereits erschienen sind (der erste Teil in B. 31 S. 252 ff, der zweite in B. 33 S. 1 ff), während eine dritte bereits der Redaction eingereicht ist und eine vierte hoffentlich bald folgen wird. Es sei mir gestattet, hierauf etwas näher einzugehen.

Den Ausgangspunkt bildet das Problem, diejenigen zweigliedrigen Untergruppen zu bestimmen, denen ein gegebenes Element angehört. Dasselbe führt auf eine bestimmte Gleichung, die „charakteristische Gleichung“, mit welcher eine bestimmte Determinante, die „charakteristische Determinante“, eng zusammenhängt. Denkt man sich diese Gleichung für eine ganz allgemeine inf. Transformation aufgelöst, so gelangt man zu einer speziellen Wahl der r inf. Transformationen, bei welcher die sämmtlichen Ausdrücke für die $(X_\iota \; X_\varkappa)$ besonders einfach werden. Könnte man jetzt annehmen, dass die nichtverschwindenden Wurzeln der charakteristischen Gleichung im allgemeinen einfach sind, so würde die Frage nach den verschiedenen Arten, in welche die Gruppen betreffs ihrer Zusammensetzung zerfallen, eine recht einfache Lösung finden. Das ist jedoch nicht der Fall, und die Berücksichtigung der mehrfachen Wurzeln erfordert neue und zum Teil ziemlich lästige Ueberlegungen. Auch die Beantwortung der Frage, unter welchen Bedingungen das identische Verschwinden von Wurzeln der charakteristischen Gleichung das Verschwinden der entsprechenden Unterdeterminanten der charakteristischen Determinante nach sich zieht, begegnet besondern Schwierigkeiten.

Obwohl sich demnach das von mir angewandte Beweisverfahren als durchaus brauchbar erwiesen hat, möchte ich wünschen, demselben ein zweites an die Seite setzen zu können. Als ein solches möchte ich die direkte Untersuchung der charakteristischen Determinante ansehen. Diese Untersuchung scheint mir passend in zwei Teile zu zerfallen, indem man zunächst nur die Eigenschaft der c berücksichtigt, bei Verwechslung der beiden ersten Marken ihr Zeichen zu ändern, und dann die weiteren Gleichungen hinzuzieht, welche aus der Jacobischen Identität folgen. In dieser Hinsicht einen kleinen Beitrag zu liefern ist der Zweck der folgenden Untersuchung. Dieselbe ist demnach eine Umarbeitung und Erweiterung der ersten Paragraphen meiner im 31. Bande der mathematischen Annalen veröffentlichten Arbeit, namentlich derjenigen Resultate, welche vollständig rationaler Natur sind. Zwar sind die wichtigsten Beziehungen, auf welche sich die Ergebnisse der genannten Arbeiten stützen, ihrem Wesen nach irrationaler Natur; sie erscheinen nur nicht in dieser Form, weil die spezielle Darstellung zu Grunde gelegt wird. Das Analogon zu diesen Sätzen zu finden, ist mir bisher nicht gelungen; dennoch glaubte ich die vorliegende Arbeit veröffentlichen zu dürfen, da es sich um ein durchaus naturgemässes Problem handelt, und da die Verfolgung des Weges unbedingt neues Licht auf die Zusammensetzung der Gruppen werfen wird.

§ 1.

Eine allgemeine Eigenschaft der Unterdeterminanten.

Es seien r^2 lineare homogene Functionen $C_{\mathfrak{am}}$ der r veränderlichen Grössen $\eta_1 \dots \eta_r$ gegeben, so dass ist:

$$(1) \quad C_{\mathfrak{am}} = \sum_{\iota} \eta_{\iota} \, c_{\iota \mathfrak{am}} \, .$$

Die Coefficienten c sollen aber nicht beliebig gewählt werden können, sondern es sollen die Bedingungen bestehen:

$$(2) \quad c_{\mathfrak{abm}} + c_{\mathfrak{bam}} = o, \; c_{\mathfrak{aam}} = o.$$

Da infolge von (2) für jedes η

$$(3) \quad \sum_{\iota} \eta_{\iota} \, C_{\iota \mathfrak{m}} = o$$

ist, so verschwindet die Determinante

$$(4) \quad \begin{vmatrix} C_{11} & C_{21} & \dots & C_{r1} \\ C_{12} & C_{22} & \dots & C_{r2} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ C_{1r} & C_{2r} & \dots & C_{rr} \end{vmatrix}$$

identisch. Unsere Aufgabe soll sein, Eigenschaften der in dieser Determinante enthaltenen Unterdeterminanten zu finden.

Um eine Eigenschaft, die unmittelbar zu tage tritt, recht bequem darstellen zu können, führen wir folgende Bezeichnung ein. Es seien für $s < r$ die $\mathfrak{a\,b\,c} \dots \mathfrak{g}$ und die $\mathfrak{m\,n\,o} \dots \mathfrak{r}$ je s verschiedene Nummern aus der Reihe $1 \dots r$; dann soll der Coefficient von $C_{\mathfrak{am}}\, C_{\mathfrak{bn}}\, C_{\mathfrak{co}} \dots C_{\mathfrak{gr}}$ in (4) mit $\begin{pmatrix} \mathfrak{a\,b\,c} \dots \mathfrak{g} \\ \mathfrak{m\,n\,o} \dots \mathfrak{r} \end{pmatrix}$ bezeichnet werden. Diese Unterdeterminante hat offenbar die Eigenschaft, dass sie bei Vertauschung irgend zweier oberer Marken $\mathfrak{a\,b} \dots \mathfrak{g}$ und ebenso bei Vertauschung zweier unterer Marken $\mathfrak{m}\,\mathfrak{n}\,\dots\,\mathfrak{r}$ ihr Zeichen ändert, so dass ihr Wert jedesmal gleich null zu setzen ist, wenn entweder in der oberen oder in der unteren oder in beiden Reihen gleiche Marken vorkommen. Wenn zunächst $s = r - 1$ ist und $\mathfrak{a}\,\mathfrak{b}\,\dots\,\mathfrak{k}\,\mathfrak{l}$ sowie $\mathfrak{m}\,\mathfrak{n}\,\dots\,\mathfrak{s}\,\mathfrak{t}$ je eine Permutation der Nummern $1\,\dots\,r$ darstellen, so ist offenbar

$$\binom{\mathfrak{a}\,\mathfrak{b}\,\dots\,\mathfrak{k}}{\mathfrak{m}\,\mathfrak{n}\,\dots\,\mathfrak{s}} = \pm\, C_{\mathfrak{l}\mathfrak{t}}\,,$$

so dass für $s = r - 1$ der links stehende Ausdruck eine homogene lineare Function der s Grössen $\eta_\mathfrak{a}, \eta_\mathfrak{b}\,\dots\,\eta_\mathfrak{k}$ ist. Wenn dagegen s irgend eine kleinere Zahl ist, so überzeugt man sich leicht, dass in jedem Term von $\binom{\mathfrak{a}\,\mathfrak{b}\,\dots\,\mathfrak{g}}{\mathfrak{m}\,\mathfrak{n}\,\dots\,\mathfrak{r}}$ mindestens eine der Variabeln $\eta_\mathfrak{a}, \eta_\mathfrak{b}\,\dots\,\eta_\mathfrak{g}$ vorkommt. Sind nämlich $\mathfrak{h}\,\dots\,\mathfrak{l}$ die $r - s$ Marken, welche von $\mathfrak{a}\,\mathfrak{b}\,\dots\,\mathfrak{g}$ verschieden sind, und ebenso $\mathfrak{s}\,\mathfrak{t}\,\dots\,\mathfrak{w}$ die von $\mathfrak{m}\,\mathfrak{n}\,\dots\,\mathfrak{r}$ verschiedenen Marken, so ist

$$\binom{\mathfrak{a}\,\mathfrak{b}\,\dots\,\mathfrak{g}}{\mathfrak{m}\,\mathfrak{n}\,\dots\,\mathfrak{r}} = \pm \begin{vmatrix} C_{\mathfrak{h}\mathfrak{s}} & \dots & C_{\mathfrak{h}\mathfrak{w}} \\ \dots & \dots & \dots \\ C_{\mathfrak{l}\mathfrak{s}} & \dots & C_{\mathfrak{l}\mathfrak{w}} \end{vmatrix}.$$

Sucht man in der rechts stehenden Determinante den Coefficienten von $\eta_\mathfrak{h}^h\,\dots\,\eta_\mathfrak{l}^l$ für $h + \dots + l = r - s$, so erhält man lauter Determinanten, in denen gleiche Reihen vorkommen, welche also verschwinden. Das liefert den Satz:

Wenn $\mathfrak{a}\,\mathfrak{b}\,\dots\,\mathfrak{g}$ *und* $\mathfrak{m}\,\mathfrak{n}\,\dots\,\mathfrak{r}$ *je s ungleiche Marken der Reihe $1\,\dots\,r$ sind, so kann der Coefficient von* $C_{\mathfrak{a}\mathfrak{m}}\,C_{\mathfrak{b}\mathfrak{n}}\,\dots\,C_{\mathfrak{g}\mathfrak{r}}$ *in der Determinante (4) betrachtet werden als eine homogene lineare Function der s Variabeln* $\eta_\mathfrak{a}, \eta_\mathfrak{b}\,\dots\,\eta_\mathfrak{g}$, *wo die Coefficienten homogene Functionen $r - s - 1$ten Grades von $\eta_\iota\,\dots\,\eta_r$ sind.*

Dieser Satz folgt für $s = 1$ unmittelbar aus (3). Da nach dieser Gleichung $p_\iota = \eta_\iota$ $(\iota = 1\,\dots\,r)$ eine Lösung des Systems der r Gleichungen

$$\sum_\iota p_\iota\, C_{\iota\mathfrak{r}} = o \qquad (\mathfrak{r} = 1\,\dots\,r)$$

ist, anderseits aber auch für den Fall, dass nicht alle Unterdeterminanten $r - 1$ten Grades identisch verschwinden, bei beliebigem $\mathfrak{m}$ auch $p_\iota = \binom{\iota}{\mathfrak{m}}$ eine Lösung ist, so muss sein:

$$(5) \qquad \binom{\mathfrak{a}}{\mathfrak{m}} = \eta_\mathfrak{a}\, P_\mathfrak{m}\,,$$

wo $P_\mathfrak{m}$ eine homogene Function $r - 2$ten Grades ist.

Speziell ist der Coefficient von $C_{\mathfrak{a}\mathfrak{m}}$ in (4) das Produkt von $\eta_\mathfrak{a}$ in eine Function $r - 2$ten Grades, welche nur von der Marke $\mathfrak{m}$ abhängt; daher ist der Coefficient von $C_{\mathfrak{a}\mathfrak{m}}$ durch $\eta_\mathfrak{a}$ dividirt identisch mit dem durch $\eta_\mathfrak{b}$ dividirten Coefficienten von $C_{\mathfrak{b}\mathfrak{m}}$.

Mit Ausnahme der Fälle $s = 1$ und $s = r - 1$ sind in $\binom{\mathfrak{a}\,\mathfrak{b}\,\dots\,\mathfrak{g}}{\mathfrak{m}\,\mathfrak{n}\,\dots\,\mathfrak{r}}$ die Coefficienten von $\eta_\mathfrak{a}, \eta_\mathfrak{b}\,\dots\,\eta_\mathfrak{g}$ noch nicht vollständig bestimmt, da man z. B. zum Coefficienten von $\eta_\mathfrak{a}$ die $\eta_\mathfrak{b}\,F$

beliebig hinzufügen darf, wofern man nur zugleich vom Coefficienten von $\eta_{\mathfrak{b}}$ die $\eta_{\mathfrak{a}}$ F subtrahirt. Um diese Willkür zu beseitigen, bilden wir, wenn $\mathfrak{a}\,\mathfrak{b}\,\mathfrak{c} \ldots \mathfrak{h}\,\mathfrak{i}\,\mathfrak{k}\,\mathfrak{l}$ und $\mathfrak{m}\,\mathfrak{n}\,\mathfrak{o} \ldots \mathfrak{t}\,\mathfrak{u}\,\mathfrak{v}\,\mathfrak{w}$ je gerade Permutationen von $1 \ldots r$ darstellen, die folgenden rechts stehenden Ausdrücke, für welche jedesmal das links stehende Zeichen eingeführt werden soll:

$$(6) \qquad 2\begin{bmatrix} \mathfrak{a}\,\mathfrak{b} \ldots \mathfrak{h} \\ \mathfrak{m}\,\mathfrak{n}\,\mathfrak{o} \ldots \mathfrak{u} \end{bmatrix} = \begin{vmatrix} c_{\mathfrak{i}\mathfrak{k}\mathfrak{v}} & C_{\mathfrak{l}\mathfrak{v}} \\ c_{\mathfrak{i}\mathfrak{k}\mathfrak{w}} & C_{\mathfrak{l}\mathfrak{w}} \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} c_{\mathfrak{k}\mathfrak{l}\mathfrak{v}} & C_{\mathfrak{i}\mathfrak{v}} \\ c_{\mathfrak{k}\mathfrak{l}\mathfrak{w}} & C_{\mathfrak{i}\mathfrak{w}} \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} c_{\mathfrak{l}\mathfrak{i}\mathfrak{v}} & C_{\mathfrak{k}\mathfrak{v}} \\ c_{\mathfrak{l}\mathfrak{i}\mathfrak{w}} & C_{\mathfrak{k}\mathfrak{w}} \end{vmatrix}$$

$$(7) \qquad 3\begin{bmatrix} \mathfrak{a}\,\mathfrak{b} \ldots \mathfrak{g} \\ \mathfrak{m}\,\mathfrak{n}\,\mathfrak{o} \ldots \mathfrak{t} \end{bmatrix} = \begin{vmatrix} c_{\mathfrak{h}\mathfrak{i}\mathfrak{u}} & C_{\mathfrak{k}\mathfrak{u}} & C_{\mathfrak{l}\mathfrak{u}} \\ c_{\mathfrak{h}\mathfrak{i}\mathfrak{v}} & C_{\mathfrak{k}\mathfrak{v}} & C_{\mathfrak{l}\mathfrak{v}} \\ c_{\mathfrak{h}\mathfrak{i}\mathfrak{w}} & C_{\mathfrak{k}\mathfrak{w}} & C_{\mathfrak{l}\mathfrak{w}} \end{vmatrix}$$

$$+ \left| c_{\mathfrak{h}\mathfrak{k}}\; C_{\mathfrak{l}}\; C_{\mathfrak{i}} \right| + \left| c_{\mathfrak{h}\mathfrak{l}}\; C_{\mathfrak{i}}\; C_{\mathfrak{k}} \right| + \left| c_{\mathfrak{i}\mathfrak{k}}\; C_{\mathfrak{h}}\; C_{\mathfrak{l}} \right| + \left| c_{\mathfrak{i}\mathfrak{l}}\; C_{\mathfrak{k}}\; C_{\mathfrak{h}} \right| + \left| c_{\mathfrak{k}\mathfrak{l}}\; C_{\mathfrak{h}}\; C_{\mathfrak{i}} \right|,$$

wo die in den letzten fünf Determinanten angewandte Abkürzung unmittelbar aus der ersten Determinante zu ersehen ist.

Allgemein soll folgende Bildung gelten:

Wenn in $\begin{bmatrix} \mathfrak{a}\,\mathfrak{b}\,\mathfrak{c} \ldots \mathfrak{g} \\ \mathfrak{m}\,\mathfrak{n}\,\mathfrak{o} \ldots \mathfrak{s} \end{bmatrix}$ oben $s - 1$, unten s Marken stehen, so füge man beide mal die fehlenden $\mathfrak{h} \ldots \mathfrak{l}$, resp. $\mathfrak{t} \ldots \mathfrak{w}$ so hinzu, dass sie eine gerade Permutation der Nummern $1 \ldots r$ bilden. Aus $\mathfrak{h} \ldots \mathfrak{l}$ wähle man zwei Marken $\mathfrak{h}\,\mathfrak{i}$ aus, füge die andern $\mathfrak{k} \ldots \mathfrak{l}$ so hinzu, dass sie eine gerade Permutation darstellen, und bilde die Determinante

$$\begin{vmatrix} c_{\mathfrak{h}\mathfrak{i}\mathfrak{t}} & C_{\mathfrak{k}\mathfrak{t}} & \ldots & C_{\mathfrak{l}\mathfrak{t}} \\ c_{\mathfrak{h}\mathfrak{i}\mathfrak{u}} & C_{\mathfrak{k}\mathfrak{u}} & \ldots & C_{\mathfrak{l}\mathfrak{u}} \\ \ldots & \ldots & \ldots & \ldots \\ c_{\mathfrak{h}\mathfrak{i}\mathfrak{w}} & C_{\mathfrak{k}\mathfrak{w}} & \ldots & C_{\mathfrak{l}\mathfrak{w}} \end{vmatrix},$$

welche für den Augenblick mit $\Delta_{\mathfrak{i}\mathfrak{h}}$ bezeichnet werden möge; dann soll sein:

$$(8) \qquad (r - s)\begin{bmatrix} \mathfrak{a}\,\mathfrak{b} \ldots \mathfrak{g} \\ \mathfrak{m}\,\mathfrak{n}\,\mathfrak{o} \ldots \mathfrak{s} \end{bmatrix} = \sum_{(\mathfrak{h}\mathfrak{i})} \Delta_{\mathfrak{h}\mathfrak{i}},$$

wo jede Combination zweier Zahlen $\mathfrak{h}$ und $\mathfrak{i}$ aus der Reihe $\mathfrak{h}\,\mathfrak{i} \ldots \mathfrak{l}$ nur einmal zu nehmen ist.

Indem wir die so definirten Ausdrücke benutzen, gilt die folgende wichtige Gleichung:

$$(9) \qquad (-1)^{s-1}\begin{pmatrix} \mathfrak{a}\,\mathfrak{b}\,\mathfrak{c} \ldots \mathfrak{g}\,\mathfrak{h} \\ \mathfrak{m}\,\mathfrak{n}\,\mathfrak{o} \ldots \mathfrak{r}\,\mathfrak{s} \end{pmatrix} = \eta_{\mathfrak{a}}\begin{bmatrix} \mathfrak{b}\,\mathfrak{c} \ldots \mathfrak{g}\,\mathfrak{h} \\ \mathfrak{m}\,\mathfrak{n}\,\mathfrak{o} \ldots \mathfrak{r}\,\mathfrak{s} \end{bmatrix} - \eta_{\mathfrak{b}}\begin{bmatrix} \mathfrak{a}\,\mathfrak{c} \ldots \mathfrak{g}\,\mathfrak{h} \\ \mathfrak{m}\,\mathfrak{n}\,\mathfrak{o} \ldots \mathfrak{r}\,\mathfrak{s} \end{bmatrix} + \ldots \pm \eta_{\mathfrak{h}}\begin{bmatrix} \mathfrak{a}\,\mathfrak{b} \ldots \mathfrak{g} \\ \mathfrak{m}\,\mathfrak{n}\,\mathfrak{o} \ldots \mathfrak{r}\,\mathfrak{s} \end{bmatrix}.$$

Zum Beweise dieser Gleichung haben wir die rechte Seite mit $r - s$ zu multipliciren und die oben angegebenen Werte einzusetzen. Weil dann in jeder Determinante die letzten Marken identisch sind mit denen, welche in der auf der linken Seite stehenden Determinante vorkommen, so kann es sich bei jedem c nur um die beiden ersten und bei jedem C nur um die erste Marke handeln. Wir kürzen daher die vorkommenden Determinanten dadurch ab, dass wir von den letzten Marken ganz absehen. Hierdurch erhalten wir als Wert der mit $\pm\,(r - s)$ multiplicirten rechten Seite:

$$
\begin{array}{rl}
& \eta_{\mathfrak{a}} \,|\, c_{\mathfrak{a}\mathfrak{i}}\, C_{\mathfrak{k}} \ldots C_{\mathfrak{l}} \,| - \eta_{\mathfrak{a}} \,|\, c_{\mathfrak{a}\mathfrak{k}}\, C_{\mathfrak{i}} \ldots C_{\mathfrak{l}} \,| + \ldots + \eta_{\mathfrak{a}} \,|\, c_{\mathfrak{i}\mathfrak{k}}\, C_{\mathfrak{a}} \ldots C_{\mathfrak{l}} \,| + \ldots \\
(10) & + \eta_{\mathfrak{b}} \,|\, c_{\mathfrak{b}\mathfrak{i}}\, C_{\mathfrak{k}} \ldots C_{\mathfrak{l}} \,| - \eta_{\mathfrak{b}} \,|\, c_{\mathfrak{b}\mathfrak{k}}\, C_{\mathfrak{i}} \ldots C_{\mathfrak{l}} \,| + \ldots + \eta_{\mathfrak{b}} \,|\, c_{\mathfrak{i}\mathfrak{k}}\, C_{\mathfrak{b}} \ldots C_{\mathfrak{l}} \,| + \ldots \\
& + \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\
& + \eta_{\mathfrak{l}} \,|\, c_{\mathfrak{l}\mathfrak{i}}\, C_{\mathfrak{k}} \ldots C_{\mathfrak{l}} \,| - \eta_{\mathfrak{h}} \,|\, c_{\mathfrak{h}\mathfrak{k}}\, C_{\mathfrak{i}} \ldots C_{\mathfrak{l}} \,| + \ldots + \eta_{\mathfrak{h}} \,|\, c_{\mathfrak{i}\mathfrak{k}}\, C_{\mathfrak{h}} \ldots C_{\mathfrak{l}} \,| + \ldots
\end{array}
$$

Addiren wir zunächst die s Ausdrücke:

$$
(11) \qquad \eta_{\mathfrak{a}} \,|\, c_{\mathfrak{i}\mathfrak{k}}\, C_{\mathfrak{a}} \ldots C_{\mathfrak{l}} \,| + \eta_{\mathfrak{b}} \,|\, c_{\mathfrak{i}\mathfrak{k}}\, C_{\mathfrak{b}} \ldots C_{\mathfrak{l}} \,| + \ldots + \eta_{\mathfrak{h}} \,|\, c_{\mathfrak{i}\mathfrak{k}}\, C_{\mathfrak{h}} \ldots C_{\mathfrak{l}} \,|,
$$

so ist deren Summe infolge von (3) gleich

$$
- \eta_{\mathfrak{i}} \,|\, c_{\mathfrak{i}\mathfrak{k}}\, C_{\mathfrak{i}} \ldots C_{\mathfrak{l}} \,| - \eta_{\mathfrak{k}} \,|\, c_{\mathfrak{i}\mathfrak{k}}\, C_{\mathfrak{k}} \ldots C_{\mathfrak{l}} \,|,
$$

wobei noch berücksichtigt werden muss, dass Determinanten mit gleichen Kolonnen verschwinden. Alle dem Ausdrucke (11) entsprechenden Summen werden in gleicher Weise umgeformt und aus den erhaltenen Werten nehme man diejenigen Determinanten heraus, in denen $C_{\mathfrak{k}} \ldots C_{\mathfrak{l}}$ vorkommt; diese sind

$$
\eta_{\mathfrak{k}} \,|\, c_{\mathfrak{k}\mathfrak{i}}\, C_{\mathfrak{k}} \ldots C_{\mathfrak{l}} \,| + \ldots + \eta_{\mathfrak{l}} \,|\, c_{\mathfrak{l}\mathfrak{c}}\, C_{\mathfrak{k}} \ldots C_{\mathfrak{l}} \,|.
$$

Indem man hierzu aus jeder Reihe in (10) das erste Glied hinzufügt, erhält man die Determinante:

$$
|\, C_{\mathfrak{i}}\, C_{\mathfrak{k}} \ldots C_{\mathfrak{l}} \,|.
$$

In gleicher Weise addire man diejenigen Determinanten, in denen kein $C_{\mathfrak{k}}$, dagegen $C_{\mathfrak{i}} \ldots C_{\mathfrak{l}}$ vorkommen; die Summe liefert wieder denselben Wert. Indem man so fortfährt, erhält man $(r - s)$-mal dieselbe Determinante, wobei alle vorkommenden Glieder verbraucht werden, so dass die Formel (9) sich als richtig erweist.

Hierdurch ist wiederum gezeigt, dass die Unterdeterminante $\begin{pmatrix} \mathfrak{a}\,\mathfrak{b} \ldots \mathfrak{h} \\ \mathfrak{m}\,\mathfrak{n} \ldots \mathfrak{s} \end{pmatrix}$ für $\eta_{\mathfrak{a}} = \eta_{\mathfrak{b}} \ldots = \eta_{\mathfrak{h}} = 0$ notwendig verschwindet. Aus diesem Grunde durften wir uns oben beim Beweise dieses Satzes mit kurzen Andeutungen begnügen.

Die Gleichung (9) liefert folgenden Lehrsatz:

Sind $\mathfrak{a}\,\mathfrak{b} \ldots \mathfrak{h}$ *und* $\mathfrak{m}\,\mathfrak{n} \ldots \mathfrak{s}$ *je s verschiedene Marken aus der Reihe 1 . . . r, so kann der Coefficient von* $C_{\mathfrak{a}\mathfrak{m}}\, C_{\mathfrak{b}\mathfrak{n}} \ldots C_{\mathfrak{h}\mathfrak{s}}$ *in der Determinante (4) als homogene lineare Function von* $\eta_{\mathfrak{a}}, \eta_{\mathfrak{b}} \ldots \eta_{\mathfrak{h}}$ *mit veränderlichen Coefficienten betrachtet werden; wenn* $\mathfrak{n}$ *irgend eine der Marken* $\mathfrak{a}\,\mathfrak{b} \ldots \mathfrak{h}$ *ist, so ist der Coefficient von* $\eta_{\mathfrak{n}}$ *nur abhängig von den s — 1 Marken, welche nach Weglassung der Marke* $\mathfrak{n}$ *noch aus* $\mathfrak{a}\,\mathfrak{b} \ldots \mathfrak{h}$ *übrig bleiben.*

Für $s = 1$ wurde dieser Satz bereits oben in Gleichung (5) bewiesen. Um ein Beispiel für $s = 2$ anzugeben, bilde man die Coefficienten von $C_{1\mathfrak{m}}\, C_{2\mathfrak{n}}$, $C_{1\mathfrak{m}}\, C_{3\mathfrak{m}} \ldots C_{1\mathfrak{m}}\, C_{r\mathfrak{m}}$; der erste ist gleich $\eta_1 \begin{bmatrix} 2 \\ \mathfrak{m}\mathfrak{n} \end{bmatrix} - \eta_2 \begin{bmatrix} 1 \\ \mathfrak{m}\mathfrak{n} \end{bmatrix}$, der zweite gleich $\eta_1 \begin{bmatrix} 3 \\ \mathfrak{m}\mathfrak{n} \end{bmatrix} - \eta_3 \begin{bmatrix} 1 \\ \mathfrak{m}\mathfrak{n} \end{bmatrix}$, der letzte gleich $\eta_1 \begin{bmatrix} \mathrm{r} \\ \mathfrak{m}\mathfrak{n} \end{bmatrix} - \eta_\mathrm{r} \begin{bmatrix} 1 \\ \mathfrak{m}\mathfrak{n} \end{bmatrix}$; daher hat η_2 im ersten denselben Faktor wie η_3 im zweiten und wie η_r im letzten. Ebenso ist in $\begin{pmatrix} \mathfrak{a}\mathfrak{b}\mathfrak{c} \\ \mathfrak{m}\mathfrak{n}\mathfrak{o} \end{pmatrix}$ der Coefficient von $\eta_\mathfrak{a}$ gleich dem Coefficienten von $\eta_\mathfrak{b}$ in $\begin{pmatrix} \mathfrak{b}\mathfrak{b}\mathfrak{c} \\ \mathfrak{m}\mathfrak{n}\mathfrak{o} \end{pmatrix}$ u. s. w. Ueberhaupt ist der obige Satz die natürliche Erweiterung der durch die Gleichung (2) dargestellten Eigenschaft, welche den C_{am} und damit den Unterdeterminanten ersten Grades zukommt.

Jede Determinante $\mathrm{r}^{\mathrm{ten}}$ Grades hat r^2 erste Unterdeterminanten; dieselben werden durch den angegebenen Satz auf r Functionen $\mathrm{r}-2^{\mathrm{ten}}$ Grades zurückgeführt. Ebenso giebt es $\binom{\mathrm{r}}{2} \cdot \binom{\mathrm{r}}{2}$ zweite Unterdeterminanten; zu ihrer Darstellung genügen aber $\mathrm{r} \cdot \binom{\mathrm{r}}{2}$ Functionen, und während erstere auf den $\mathrm{r}-2^{\mathrm{ten}}$ Grad steigen, sind die letzteren nur vom $\mathrm{r}-3^{\mathrm{ten}}$ Grade. Allgemein können, wenn $\mathfrak{a}\mathfrak{b} \ldots \mathfrak{h}$ und $\mathfrak{m}\mathfrak{n} \ldots \mathfrak{s}$ je s Nummern der Reihe $1 \ldots \mathrm{r}$ darstellen, alle $\binom{\mathrm{r}}{\mathrm{s}} \cdot \binom{\mathrm{r}}{\mathrm{s}}$ Functionen $\begin{pmatrix} \mathfrak{a}\mathfrak{b} \ldots \mathfrak{h} \\ \mathfrak{m}\mathfrak{n} \ldots \mathfrak{s} \end{pmatrix}$ durch $\binom{\mathrm{r}}{\mathrm{s}-1} \cdot \binom{\mathrm{r}}{\mathrm{s}}$ Functionen dargestellt werden, wobei erstere vom $\mathrm{r}-\mathrm{s}^{\mathrm{ten}}$, letztere vom $\mathrm{r}-\mathrm{s}-1^{\mathrm{ten}}$ Grade sind.

§ 2.

Einige Eigenschaften der zur Darstellung der Unterdeterminanten benutzten Ausdrücke.

Indem man wieder die vorhin eingeführte kurze Bezeichnung benutzt, folgt:

$$\frac{\partial}{\partial \eta_\mathfrak{h}} \begin{pmatrix} \mathfrak{a}\mathfrak{b} \ldots \mathfrak{g}\mathfrak{h} \\ \mathfrak{m}\mathfrak{n} \ldots \mathfrak{r}\mathfrak{s} \end{pmatrix} = \left| c_{\mathfrak{h}\mathfrak{i}}\, C_\mathfrak{k} \ldots C_\mathfrak{l} \right| + \left| C_\mathfrak{i}\, c_{\mathfrak{h}\mathfrak{k}} \ldots C_\mathfrak{l} \right| + \ldots + \left| C_\mathfrak{i}\, C_\mathfrak{k} \ldots c_{\mathfrak{h}\mathfrak{l}} \right|$$

Hieraus, oder auch durch Anwendung der Gleichung (9) ergiebt sich:

$$(12) \qquad \begin{bmatrix} \mathfrak{a}\mathfrak{b} \ldots \mathfrak{g} \\ \mathfrak{m}\mathfrak{n}\mathfrak{o} \ldots \mathfrak{r}\mathfrak{s} \end{bmatrix} = \sum_\varrho \frac{\partial}{\partial \eta_\varrho} \begin{pmatrix} \mathfrak{a}\mathfrak{b} \ldots \mathfrak{g}\varrho \\ \mathfrak{m}\mathfrak{n} \ldots \mathfrak{r}\mathfrak{s} \end{pmatrix}.$$

Aus dieser Gleichung folgt unmittelbar:

$$(13) \qquad \sum_\sigma \frac{\partial}{\partial \eta_\sigma} \begin{bmatrix} \mathfrak{a}\mathfrak{b} \ldots \mathfrak{f}\sigma \\ \mathfrak{m}\mathfrak{n} \ldots \mathfrak{r}\mathfrak{s} \end{bmatrix} = 0.$$

Lässt man die untern Marken $\mathfrak{m}\mathfrak{n} \ldots \mathfrak{r}\mathfrak{s}$ ungeändert, bildet aber die $\binom{\mathrm{r}}{\mathrm{s}-1}$ Ausdrücke $\begin{bmatrix} \mathfrak{a}\mathfrak{b} \ldots \mathfrak{g} \\ \mathfrak{m}\mathfrak{n} \ldots \mathfrak{r}\mathfrak{s} \end{bmatrix}$, indem man für $\mathfrak{a}\mathfrak{b} \ldots \mathfrak{g}$ alle Combinationen $\mathrm{r}-1^{\mathrm{ter}}$ Ordnung wählt, so soll angenommen werden, dass alle diese Ausdrücke für ein gewisses System $\eta_1 \ldots \eta_\mathrm{r}$ verschwinden; dann ergiebt sich unmittelbar aus der Formel (9), dass auch alle Unterdeterminanten $\begin{pmatrix} \mathfrak{a}\mathfrak{b} \ldots \mathfrak{g}\mathfrak{h} \\ \mathfrak{m}\mathfrak{n} \ldots \mathfrak{r}\mathfrak{s} \end{pmatrix}$ für feste Werte von $\mathfrak{m}, \mathfrak{n} \ldots \mathfrak{r}, \mathfrak{s}$ ebenfalls verschwinden. Wenn aber umgekehrt bei festen Marken

$\mathfrak{m}\,\mathfrak{n}\ldots\mathfrak{r}\,\mathfrak{s}$ alle $\binom{r}{s}$ Unterdeterminanten $\begin{pmatrix}\mathfrak{a}\,\mathfrak{b}\ldots\mathfrak{g}\,\mathfrak{h}\\ \mathfrak{m}\,\mathfrak{n}\ldots\mathfrak{r}\,\mathfrak{s}\end{pmatrix}$ identisch verschwinden, so gilt dasselbe auch für alle Ausdrücke $\begin{bmatrix}\mathfrak{a}\,\mathfrak{b}\ldots\mathfrak{g}\\ \mathfrak{m}\,\mathfrak{n}\ldots\mathfrak{r}\,\mathfrak{s}\end{bmatrix}$, wie die Gleichung (12) lehrt. In beiden Sätzen wird die volle Uebereinstimmung der untern Reihe vorausgesetzt; der zweite unterscheidet sich aber dadurch vom ersten, dass er nur bei identischem Verschwinden richtig ist.

Da jeder Ausdruck $\begin{pmatrix}\mathfrak{a}\,\mathfrak{b}\ldots\mathfrak{g}\,\mathfrak{h}\\ \mathfrak{m}\,\mathfrak{n}\ldots\mathfrak{r}\,\mathfrak{s}\end{pmatrix}$, in welchem zwei der obern Marken gleich sind, identisch verschwindet, so ist

$$\begin{pmatrix}\mathfrak{a}\,\mathfrak{b}\ldots\mathfrak{g}\,\iota\\ \mathfrak{m}\,\mathfrak{n}\ldots\mathfrak{r}\,\mathfrak{s}\end{pmatrix}=\sum_{\varkappa} C_{\varkappa\mathfrak{t}}\begin{pmatrix}\mathfrak{a}\,\mathfrak{b}\ldots\mathfrak{g}\,\iota\,\varkappa\\ \mathfrak{m}\,\mathfrak{n}\ldots\mathfrak{r}\,\mathfrak{s}\,\mathfrak{t}\end{pmatrix},$$

wofern $\mathfrak{t}$ von $\mathfrak{m},\mathfrak{n}\ldots\mathfrak{r},\mathfrak{s}$ verschieden ist. Indem wir beiderseits nach η_ι differentiiren und dann nach ι summiren, folgt

$$\begin{bmatrix}\mathfrak{a}\,\mathfrak{b}\ldots\mathfrak{g}\\ \mathfrak{m}\,\mathfrak{n}\ldots\mathfrak{r}\,\mathfrak{s}\end{bmatrix}=\sum_{\varkappa} C_{\varkappa\mathfrak{t}}\begin{bmatrix}\mathfrak{a}\,\mathfrak{b}\ldots\mathfrak{g}\,\varkappa\\ \mathfrak{m}\,\mathfrak{n}\ldots\mathfrak{r}\,\mathfrak{s}\,\mathfrak{t}\end{bmatrix}+\sum_{\iota\varkappa} c_{\iota\varkappa\mathfrak{t}}\begin{pmatrix}\mathfrak{a}\,\mathfrak{b}\ldots\mathfrak{g}\,\iota\,\varkappa\\ \mathfrak{m}\,\mathfrak{n}\ldots\mathfrak{r}\,\mathfrak{s}\,\mathfrak{t}\end{pmatrix}.$$

Nun ersetze man das zweite Glied der rechten Seite durch den ihm nach (9) gleichen Ausdruck; dann erhält man nach einer leichten Umformung:

$$(14)\qquad \begin{bmatrix}\mathfrak{a}\,\mathfrak{b}\ldots\mathfrak{g}\\ \mathfrak{m}\,\mathfrak{n}\ldots\mathfrak{r}\,\mathfrak{s}\end{bmatrix}=\sum_{\varkappa} C_{\varkappa\mathfrak{t}}\begin{bmatrix}\mathfrak{a}\,\mathfrak{b}\ldots\mathfrak{g}\,\varkappa\\ \mathfrak{m}\,\mathfrak{n}\ldots\mathfrak{r}\,\mathfrak{s}\,\mathfrak{t}\end{bmatrix}$$

$$+\,\eta_{\mathfrak{a}}\sum_{\iota\varkappa} c_{\iota\varkappa\mathfrak{t}}\begin{bmatrix}\mathfrak{b}\ldots\mathfrak{g}\,\iota\,\varkappa\\ \mathfrak{m}\,\mathfrak{n}\ldots\mathfrak{r}\,\mathfrak{s}\,\mathfrak{t}\end{bmatrix}-\eta_{\mathfrak{b}}\sum_{\iota\varkappa} c_{\iota\varkappa\mathfrak{t}}\begin{bmatrix}\mathfrak{a}\ldots\mathfrak{g}\,\iota\,\varkappa\\ \mathfrak{m}\,\mathfrak{n}\ldots\mathfrak{r}\,\mathfrak{s}\,\mathfrak{t}\end{bmatrix}+\ldots\pm\eta_{\mathfrak{g}}\sum_{\iota\varkappa} c_{\iota\varkappa\mathfrak{t}}\begin{bmatrix}\mathfrak{a}\ldots\iota\,\varkappa\\ \mathfrak{m}\,\mathfrak{n}\ldots\mathfrak{r}\,\mathfrak{s}\,\mathfrak{t}\end{bmatrix},$$

wobei nur vorausgesetzt wird, dass $\mathfrak{t}$ von $\mathfrak{m}\,\mathfrak{n}\ldots\mathfrak{r}\,\mathfrak{s}$ verschieden ist.

Ganz entsprechend gilt die Gleichung:

$$(15)\qquad o=\sum_{\varkappa} C_{\varkappa\mathfrak{u}}\begin{bmatrix}\mathfrak{a}\,\mathfrak{b}\ldots\mathfrak{g}\,\varkappa\\ \mathfrak{m}\,\mathfrak{n}\ldots\mathfrak{r}\,\mathfrak{s}\,\mathfrak{t}\end{bmatrix}+\eta_{\mathfrak{a}}\sum c_{\iota\varkappa\mathfrak{u}}\begin{bmatrix}\mathfrak{b}\ldots\mathfrak{g}\,\iota\,\varkappa\\ \mathfrak{m}\,\mathfrak{n}\ldots\mathfrak{r}\,\mathfrak{s}\,\mathfrak{t}\end{bmatrix}-\ldots\ldots,$$

wo $\mathfrak{t}$ von $\mathfrak{u}$ verschieden ist.

Speziell gelten die Gleichungen:

$$(16)\qquad P_{\mathfrak{r}}=\sum_{\varkappa} C_{\varkappa\mathfrak{m}}\begin{bmatrix}\varkappa\\ \mathfrak{m}\,\mathfrak{r}\end{bmatrix},\quad o=\sum_{\varkappa} C_{\varkappa\mathfrak{n}}\begin{bmatrix}\varkappa\\ \mathfrak{m}\,\mathfrak{r}\end{bmatrix},$$

wo $\mathfrak{m}$ von $\mathfrak{r}$ und $\mathfrak{n}$ von $\mathfrak{m}$ und $\mathfrak{r}$ verschieden ist.

Vielleicht ist es angebracht, hierzu noch die folgenden Gleichungen hinzuzufügen:

$$\sum_{\varrho} C_{\mathfrak{a}\varrho} P_{\varrho} = o,$$

$$\begin{bmatrix} \mathfrak{a}\,\mathfrak{b} \ldots \mathfrak{g} \\ \mathfrak{m}\,\mathfrak{n} \ldots \mathfrak{r}\,\mathfrak{s} \end{bmatrix} = \sum C_{\mathfrak{h}\tau} \begin{bmatrix} \mathfrak{a}\,\mathfrak{b} \ldots \mathfrak{g}\,\mathfrak{h} \\ \mathfrak{m}\,\mathfrak{n} \ldots \mathfrak{r}\,\mathfrak{s}\,\tau \end{bmatrix} + \eta_{\mathfrak{a}} \sum_{\varkappa\tau} \begin{bmatrix} \mathfrak{b} \ldots \mathfrak{h}\,\varkappa \\ \mathfrak{m} \ldots \mathfrak{r}\,\mathfrak{s}\,\tau \end{bmatrix} - \ldots\ldots$$

Von den zahlreichen Folgerungen, welche aus den Gleichungen (14) — (16) gezogen werden können, soll nur die einfachste mitgeteilt werden.

Wenn $P_{\mathfrak{m}}$ und $P_{\mathfrak{n}}$ identisch verschwinden, ohne dass dies von allen P_{ϱ} gilt, so bestehen die r Gleichungen:

$$\sum_{\varkappa} C_{\varkappa\mathfrak{s}} \begin{bmatrix} \varkappa \\ \mathfrak{m}\,\mathfrak{n} \end{bmatrix} = o \qquad (\mathfrak{s} = 1 \ldots r).$$

Nun hat aber das System der r Gleichungen $\sum C_{\varkappa\mathfrak{s}}\, y_{\varkappa} = o$ nur die eine Lösung $y_1 : y_2 : \ldots : y_r = \eta_1 : \eta_2 : \ldots \eta_r$. Somit ist

$$\begin{bmatrix} 1 \\ \mathfrak{m}\,\mathfrak{n} \end{bmatrix} = \eta_1 S, \begin{bmatrix} 2 \\ \mathfrak{m}\,\mathfrak{n} \end{bmatrix} = \eta_2 S \ldots \begin{bmatrix} r \\ \mathfrak{m}\,\mathfrak{n} \end{bmatrix} = \eta_r S.$$

Wendet man hierauf die Gleichung (13) an, so folgt $S = o$; daher erhält man den Satz:

Wenn $P_{\mathfrak{m}}$ *und* $P_{\mathfrak{n}}$, *aber nicht alle* P_{ϱ} *identisch verschwinden, so müssen die* r *Ausdrücke* $\begin{bmatrix} \iota \\ \mathfrak{m}\,\mathfrak{n} \end{bmatrix}$ *für* $\iota = 1 \ldots r$ *ebenfalls identisch gleich null sein.*

Wählt man $\frac{r(r-2)}{2}$ Unbekannte $p_{\iota\varkappa}$ für $\iota, \varkappa = 1 \ldots r$ und für $p_{\iota\varkappa} + p_{\varkappa\iota} = o$, so hat das System der r Gleichungen:

$$\sum_{(\iota\varkappa)} p_{\iota\varkappa}\, c_{\iota\varkappa\mathfrak{m}} = o \qquad (\mathfrak{m} = 1 \ldots r)$$

mindestens $\frac{r(r-3)}{2}$ von einander unabhängige Lösungen. Verlangt man jetzt noch, dass für jede Combination von vier ungleichen Marken $\iota\, \varkappa\, \lambda\, \mu$ sein soll:

$$p_{\iota\varkappa}\, p_{\lambda\mu} + p_{\iota\lambda}\, p_{\mu\varkappa} + p_{\iota\mu}\, p_{\varkappa\lambda} = o,$$

so vertritt diese Forderung nach einem Satze des Herrn Frobenius $\frac{(r-2)(r-3)}{2}$ Bedingungen. Jedem solchen Wertsystem $p_{\iota\varkappa}$ kann man ein nicht verschwindendes System $\eta_{\iota}\, \zeta_{\varkappa} - \eta_{\varkappa}\, \zeta_{\iota}$ zuordnen, und dann füllen alle η_{ι}, welche so erhalten werden, eine (r—3)-fach ausgedehnte Mannigfaltigkeit aus. Setzen wir aber ein solches η_{ι} in die Gleichungen

$$\sum_{\varkappa} y_\varkappa C_{\varkappa m} = 0 \qquad (m = 1 \ldots r)$$

ein, so werden diese Gleichungen für $y_\varkappa = \eta_\varkappa + m\xi_\varkappa$ bei beliebigem Werte von m befriedigt; folglich müssen für diese Werte von η auch alle Unterdeterminanten $r - 1$ ten Grades und damit auch alle P_m verschwinden. Wir geben diesem Resultat folgende Fassung:

Wenn $r > 3$ *ist, so verschwinden alle Grössen* $P_1 \ldots P_r$ *gleichzeitig für eine* $(r-3)$*-fach ausgedehnte Mannigfaltigkeit von Wertsystemen* η. *Fasst man speziell für* $r = 4$ *die* $\eta_1 \ldots \eta_4$ *als homogene Coordinaten des Raumes auf, so haben die vier Flächen* $P_1 = 0 \ldots P_4 = 0$, *wofern zwischen den Coefficienten nicht besondere Bedingungen bestehen, zwei gerade Linien gemeinschaftlich.*

Auch für ein beliebiges r kann man die Verhältnisse der η mit Herrn Lie als die projectiven Coordinaten eines $(r-1)$-dimensionalen Raumes betrachten und dann nach der Ordnung des Gebildes fragen, in welchem sich die $(r-2)$-dimensionalen Gebilde $P_1 = 0 \ldots P_r = 0$ schneiden, wofern zwischen den c keine besonderen Bedingungen bestehen. Da aber die aus der Jacobischen Identität folgenden Relationen ganz spezielle Beziehungen zwischen den $P_1 = 0 \ldots P_r = 0$ nach sich ziehen, so möge hiervon Abstand genommen werden.

Die Herleitung der vorstehend angegebenen Beziehung zwischen den P_m ist im Wesen identisch mit dem Beweise, welchen Herr Engel für den Satz geliefert hat, dass jede Gruppe von mehr als drei Gliedern notwendig vertauschbare Transformationen besitzt, nur dass er diesen Beweis in geometrischer Einkleidung giebt. Während hier das dem Gebilde $P_1 = 0 \ldots P_r = 0$ gemeinschaftliche Gebilde $r - 3$ Ausdehnungen besitzt, erfordern die weiteren zwischen den c bestehenden Relationen, dass alle einen gemeinsamen Faktor besitzen.

§ 3.

Einige Sätze, welche für die speziellen c gelten.

Aus den Relationen zwischen den Coefficienten c, welche aus den Gleichungen:

$$(17) \qquad \sum_{\varrho} \left\{ c_{bc\varrho} (X_\varrho X_a) + c_{ca\varrho} (X_\varrho X_b) + c_{ab\varrho} (X_\varrho X_c) \right\} = 0$$

folgen, habe ich in meiner Arbeit im 31. Bande der mathematischen Annalen (S. 257) weitere Systeme hergeleitet, deren erstes bereits früher von Herrn Engel angegeben war. Es genüge, diese Gleichungen für die wenigsten Marken hinzuschreiben. Dieselben sind:

$$(18) \qquad \sum_{\varkappa\lambda} c_{ab\varkappa} c_{\varkappa\lambda\lambda} = 0$$

$$(19) \qquad \sum_{\varkappa\lambda\mu} \left(c_{ab\varkappa} c_{\mu c\lambda} + c_{ac\varkappa} c_{\mu b\lambda} \right) c_{\varkappa\lambda\mu} = 0$$

$$(20) \qquad \sum_{\varkappa\lambda\mu\nu} \left(c_{\mathfrak{a}\mathfrak{b}\varkappa}\, c_{\mu\mathfrak{c}\nu}\, c_{\nu\mathfrak{d}\lambda} + c_{\mathfrak{a}\mathfrak{c}\varkappa}\, c_{\mu\mathfrak{d}\nu}\, c_{\nu\mathfrak{b}\lambda} + c_{\mathfrak{a}\mathfrak{d}\varkappa}\, c_{\mu\mathfrak{b}\nu}\, c_{\nu\mathfrak{c}\lambda} \right) c_{\varkappa\lambda\mu} = 0$$

$$(21) \qquad \sum_{\varkappa\,..\,\varrho} \Big(c_{\mathfrak{a}\mathfrak{b}\varkappa}\, c_{\mu\mathfrak{c}\nu}\, c_{\nu\mathfrak{d}\varrho}\, c_{\varrho\mathfrak{e}\lambda} + c_{\mathfrak{a}\mathfrak{c}\varkappa}\, c_{\mu\mathfrak{d}\nu}\, c_{\nu\mathfrak{e}\varrho}\, c_{\varrho\mathfrak{b}\lambda}$$

$$+ c_{\mathfrak{a}\mathfrak{d}\varkappa}\, c_{\mu\mathfrak{e}\nu}\, c_{\nu\mathfrak{b}\varrho}\, c_{\varrho\mathfrak{c}\lambda} + c_{\mathfrak{a}\mathfrak{e}\varkappa}\, c_{\mu\mathfrak{b}\nu}\, c_{\nu\mathfrak{c}\varrho}\, c_{\varrho\mathfrak{d}\lambda} \Big) = 0,$$

und nach ihrem Muster können die weiteren Gleichungen sofort gebildet werden. Ich bemerke hierbei, dass die Marken $\mathfrak{a}\,\mathfrak{b}\,\mathfrak{c}\,\ldots$ nicht notwendig verschieden sein müssen. Auch möchte ich noch darauf hinweisen, dass dies System nicht im stande ist, das aus den Gleichungen (17) folgende System zu ersetzen. Ich habe nämlich in derselben Arbeit (S. 287 u. 289) bewiesen, dass für eine jede Gruppe vom Range null die r inf. Transformationen $X_1 \ldots X_r$ so gewählt werden können, dass im Ausdruck von $(X_\mathfrak{a}\, X_\mathfrak{b})$ für $\mathfrak{a} < \mathfrak{b}$ nur die $X_{\mathfrak{b}+1} \ldots X_r$ vorkommen; bei einer solchen Darstellung sind offenbar alle Gleichungen (18)—(21) . . . befriedigt. Da aber unter der angegebenen Beschränkung die c nicht willkürlich gewählt werden können, vielmehr die Gleichungen (17) noch weitere Beziehungen zwischen den Coefficienten verlangen, so sind nicht alle aus (17) folgenden Relationen in (18)—(21) . . enthalten.

Wir geben zunächst den Gleichungen (18)—(21) eine andere Form. Zu dem Ende multipliciren wir die Gleichung (18) mit $\eta_\mathfrak{a}$, die (19) mit $\eta_\mathfrak{a}\,\eta_\mathfrak{c}$, die (20) mit $\eta_\mathfrak{a}\,\eta_\mathfrak{c}\,\eta_\mathfrak{d}$, (21) mit $\eta_\mathfrak{a}\,\eta_\mathfrak{c}\,\eta_\mathfrak{d} \ldots$ und summiren nach $\mathfrak{a}, \mathfrak{c}, \mathfrak{d} \ldots$. Indem wir dann noch $\mathfrak{b}$ durch $\mathfrak{a}$ ersetzen, erhalten wir folgende Gleichungen:

$$(22) \qquad \sum_{\varkappa\lambda} C_{\mathfrak{a}\varkappa}\, c_{\varkappa\lambda\lambda} = 0$$

$$(23) \qquad \sum_{\varkappa\lambda\mu} C_{\mathfrak{a}\varkappa}\, c_{\varkappa\lambda\mu}\, C_{\mu\lambda} = 0$$

$$(24) \qquad \sum_{\varkappa\,..\,\nu} C_{\mathfrak{a}\varkappa}\, c_{\varkappa\lambda\mu}\, C_{\mu\nu}\, C_{\nu\lambda} = 0$$

$$(25) \qquad \sum_{\varkappa\,..\,\varrho} C_{\mathfrak{a}\varkappa}\, c_{\varkappa\lambda\mu}\, C_{\mu\nu}\, C_{\nu\varrho}\, C_{\varrho\lambda} = 0 \quad \text{u. s. w.}$$

Wie diese Gleichungen aus den früheren folgen, so lassen sich auch umgekehrt die Gleichungen (18) — (21) aus den vorstehenden ableiten; so folgt nach Vertauschung der Marken $\mathfrak{a}$ und $\mathfrak{b}$ die (21) aus (25), wenn man in letzterer den Coefficienten von $\eta_\mathfrak{b}\,\eta_\mathfrak{c}\,\eta_\mathfrak{d}\,\eta_\mathfrak{e}$ gleich null setzt.

Bilden wir das vollständige Differential von

$$\sum_{\lambda\,..\,\varrho} C_{\lambda\mu}\, C_{\mu\nu}\, C_{\nu\varrho}\, C_{\nu\lambda}$$

und ersetzen $d\eta_\varkappa$ durch $C_{\mathfrak{a}\varkappa}$, so erhalten wir die linke Seite von (25). Da dasselbe für alle ähnlich gebildeten Ausdrücke gilt, so erhalten wir den Satz:

Jede Function $\Sigma\, C_{\lambda\lambda}$, $\Sigma\, C_{\lambda\mu}\, C_{\mu\lambda}$, $\Sigma\, C_{\lambda\mu}\, C_{\mu\nu}\, C_{\nu\lambda}$ *u. s. w. genügt den r Differentialgleichungen:*

$$\sum_{\varkappa} C_{a\varkappa} \frac{\partial f}{\partial \eta_{\varkappa}} = 0 \qquad (a = 1 \ldots r).$$

Indem wir mit Herrn Lie die durch die r inf. Transformationen

$$\sum_{\varkappa} C_{a\varkappa} \frac{\partial f}{\partial \eta_{\varkappa}}$$

bestimmte Gruppe als die der gegebenen Gruppe adjungirte lineare Gruppe bezeichnen, können wir den vorstehenden Satz auch in folgender Weise aussprechen:

Alle Functionen $\Sigma\, C_{\lambda\lambda} \ldots \Sigma\, C_{\lambda_1\lambda_2}\, C_{\lambda_2\lambda_3}\, C_{\lambda_3\lambda_4} \ldots C_{\lambda_s\lambda_1}$ *sind Invarianten der adjungirten linearen Gruppe.*

Bilden wir jetzt unter Anwendung des bekannten Kroneckerschen Zeichens $\delta_{\iota\varkappa}$ die Determinante

$$(26) \qquad \left| C_{\iota\varkappa} - \delta_{\iota\varkappa}\, \omega \right|$$

für einen ganz beliebigen Wert von ω, so lässt sich dieselbe als Function r$^{\text{ten}}$ Grades von ω in der Form

$$(27) \qquad (-1)^r \left\{ \omega^r - \omega^{r-1}\, \psi_1(\eta) + \omega^{r-2}\, \psi_2(\eta) - \ldots \pm \omega\, \psi_{r-1}(\eta) \right\}$$

darstellen. Hier ist

$$\psi_1(\eta) = \Sigma\, C_{\lambda\lambda},\; \psi_2(\eta) = \frac{1}{2} \left\{ \left(\Sigma\, C_{\lambda\lambda}\right)^2 - \Sigma\, C_{\lambda\mu}\, C_{\mu\lambda} \right\};$$

ebenso lässt sich $\psi_3(\eta)$ durch $\Sigma\, C_{\lambda\mu}\, C_{\mu\nu}\, C_{\nu\lambda}$, $\Sigma\, C_{\lambda\mu}\, C_{\mu\lambda}$ und $\Sigma\, C_{\lambda\lambda}$ darstellen u. s. w. Dasselbe gilt auch umgekehrt, so dass sich alle im vorigen Lehrsatze bezeichneten Functionen rational durch $\psi_1 \ldots \psi_{r-1}$ ausdrücken lassen. Wir sind daher wieder zu dem Satze gelangt, dass die Determinante (26) bei beliebigem Werte von ω eine Invariante der adjungirten linearen Gruppe ist.

Im Princip unterscheidet sich der vorstehend gegebene Beweis nicht im geringsten von demjenigen, welchen ich in der citirten Arbeit (Annalen B. 31 S. 260) mitgeteilt habe; indessen ist die Form weit gefälliger, und aus diesem Grunde glaubte ich die vorstehende Herleitung veröffentlichen zu sollen. Abgesehen hiervon erregen die Gleichungen (22) — (25) neben den (18) — (21) einiges Interesse.

Die Gleichungen (18) — (21) können wir noch in einer andern Form darstellen, welche sich für den Beweis eines sogleich anzugebenden Satzes als besonders geeignet erweist Diese Form wollen wir nur für vier Summations-Buchstaben hinschreiben; es ist dies die Gleichung:

$$(28) \qquad \sum_{\varkappa \ldots \nu} \begin{vmatrix} C_{\mathfrak{a}\varkappa} & c_{\varkappa\lambda\varkappa} & C_{\mu\varkappa} & C_{\nu\varkappa} \\ C_{\mathfrak{a}\lambda} & c_{\varkappa\lambda\lambda} & C_{\mu\varkappa} & C_{\nu\lambda} \\ C_{\mathfrak{a}\mu} & c_{\varkappa\lambda\mu} & C_{\mu\mu} & C_{\nu\mu} \\ C_{\mathfrak{a}\nu} & c_{\varkappa\lambda\nu} & C_{\mu\nu} & C_{\nu\nu} \end{vmatrix} = 0,$$

welche wir unter Berücksichtigung des Umstandes, dass die erste Horizontalreihe als letzte Marke $\varkappa$, die zweite λ, die dritte μ und die vierte ν enthält, abgekürzt folgendermassen schreiben können:

$$\sum_{\varkappa \ldots \nu} \begin{vmatrix} C_{\mathfrak{a}} & c_{\varkappa\lambda} & C_{\mu} & C_{\nu} \end{vmatrix} = 0.$$

Die Richtigkeit der vorstehenden Gleichung erkennt man sofort, wenn man auf die einzelnen Glieder der Determinante die Gleichungen (18)—(21) anwendet.

Der Coefficient von ω^s in der Determinante (26) besteht aus der Summe

$$(29) \qquad \frac{1}{(r-s)!} \sum_{\varkappa \ldots \varrho} \begin{vmatrix} C_{\varkappa\varkappa} & C_{\lambda\varkappa} & \ldots & C_{\varrho\varkappa} \\ C_{\varkappa\lambda} & C_{\lambda\lambda} & \ldots & C_{\varrho\lambda} \\ \ldots & \ldots & \ldots & \ldots \\ C_{\varkappa\varrho} & C_{\lambda\varrho} & \ldots & C_{\varrho\varrho} \end{vmatrix},$$

wo die Zahl der Summations-Buchstaben gleich $r - s$ ist. Jede dieser Determinanten stellen wir in derjenigen Weise her, welche in § 1 angegeben ist und suchen dabei den Coefficienten von $\eta_{\mathfrak{a}}$. Wenn die $\mathfrak{m}\,\mathfrak{n} \ldots \mathfrak{s}$ je $s-1$ Nummern aus der Reihe $1 \ldots r$ sind, so wird dieser Coefficient bis auf das Zeichen durch

$$\frac{1}{(r-s-1)!} \sum_{\mathfrak{m}\mathfrak{n} \ldots \mathfrak{s}} \begin{bmatrix} \mathfrak{m}\,\mathfrak{n} \ldots \mathfrak{s} \\ \mathfrak{a}\,\mathfrak{m}\,\mathfrak{n} \ldots \mathfrak{s} \end{bmatrix}$$

dargestellt. Indem wir die in § 1 S. 7 angegebene Bildung dieser Ausdrücke benutzen und berücksichtigen, dass die letzten Marken in den einzelnen Reihen $\varkappa\,\lambda \ldots \varrho$ sind, können wir der vorstehenden Summe die Form geben:

$$\frac{1}{(r-s-1)!} \sum \begin{vmatrix} c_{\mathfrak{a}\varkappa} & C_{\lambda} & C_{\mu} & \ldots & C_{\varrho} \end{vmatrix} + \frac{1}{(r-s-1)!} \sum \begin{vmatrix} c_{\varkappa\lambda} & C_{\mathfrak{a}} & C_{\mu} & \ldots & C_{\varrho} \end{vmatrix}.$$

Hier verschwindet der zweite Summand infolge von (28), und der erste ist die Ableitung von (29). Daraus folgt:

Wird der Wert der Determinante (26) gleich (27) gesetzt, so ist

$$(30) \quad \sum_{\mathfrak{m}\mathfrak{n}\ldots\mathfrak{s}} \begin{bmatrix} \mathfrak{m}\mathfrak{n}\ldots\mathfrak{s} \\ \mathfrak{a}\mathfrak{m}\mathfrak{n}\ldots\mathfrak{s} \end{bmatrix} = \pm \frac{\partial \psi_s}{\partial \eta_{\mathfrak{a}}},$$

wofern die Zahl der auf der linken Seite stehenden untern Marken gleich $r - s$ ist. Speziell sind die bei der Darstellung der Unterdeterminanten $(r - s)$ ten Grades benutzten Grössen $P_1 \ldots P_r$ die Ableitungen von $\psi_{r-1}(\eta)$ nach $\eta_1 \ldots \eta_r$.

Hieraus ergiebt sich unmittelbar:

Wenn $\psi_s(\eta)$ identisch verschwindet, so müssen auch die r entsprechenden Ausdrücke

$$\sum_{\mathfrak{m}\mathfrak{r}\ldots\mathfrak{s}} \begin{bmatrix} \mathfrak{m}\mathfrak{n}\ldots\mathfrak{s} \\ \mathfrak{a}\mathfrak{m}\mathfrak{n}\ldots\mathfrak{s} \end{bmatrix}$$

für $\mathfrak{a} = 1 \ldots r$ identisch verschwinden.

Von besonderem Interesse ist der spezielle Fall:

Wenn $\psi_{r-1}(\eta)$ identisch gleich null ist, so verschwinden auch alle Unterdeterminanten $r - 1$ ten Grades von $|C_{\iota\varkappa}|$ identisch. Wofern aber $\psi_{r-1}(\eta)$ für ein bestimmtes, aber nicht für jedes Wertsystem verschwindet, müssen für dasselbe Wertsystem auch alle $\psi_\iota(\eta)$ gleich null sein.

Der letzte Teil des Satzes folgt daraus, dass in diesem Falle das System der Gleichungen

$$\sum C_{\mathfrak{a}\varkappa} \frac{\partial f}{\partial \eta_\varkappa} = 0 \qquad (\mathfrak{a} = 1 \ldots r)$$

nur eine einzige Lösung hat, also die sämmtlichen $\psi_\iota(\eta)$ durch eine einzige Function dargestellt werden können. Den vorstehenden Satz selbst habe ich bereits im 33. Bande der mathem. Annalen (S. 5) auf einem anderen Wege bewiesen.

W. Killing.

LECTIONES.

A. ORDINIS THEOLOGORUM.

Dr. Henricus Oswald, P. P. O., h. t. decanus.

I. Doctrinam de redemptione et de gratia ac justificatione tradet quater vel quinquies p. h. hora X.
II. Repetitiones dogmaticas disputandi et examinandi causa instituet semel p. h. hora X. sabb.
III. Praemissa introductione selecta capita libri Geneseos interpretabitur bis terve p. h. horis design.

Dr. Franciscus Dittrich, P. P. O.

I. Historiam ecclesiae primaevae enarrabit quater p. h. hora IX.
II. De arte christiana disseret semel p. h. hora IX.
III. Repetitiones de historia ecclesiastica instituet semel p. h. hora IX.

Dr. Hugo Weiss, P. P. O.

I. S. Pauli epistolam ad Romanos nec non epistolas quas dicunt pastorales interpretabitur ter p. h. hora VIII.
II. Introductionem generalem in sacras V. et N. T. libros dabit bis p. h. horis deff.
III. Repetitiones exegeticas instituet horis deff.

Dr. Julius Marquardt, P. P. O.

I. Theologiae moralis partem generalem exponet, repetitiones et disputationes adjungens, sexies p. h. hora XI.
II. Historiam literariam ecclesiae primaevae tradet hora def.

B. ORDINIS PHILOSOPHORUM.

Dr. Wilh. Killing, P. P. O., h. t. decanus.

I. De divinae revelationis legumque naturalium consensu disseret quater hebdomade hora VIII.
II. Fundamenta chemiae tradet bis hebd. hora VIII.
III. Geometriam analyticam docebit horis definiendis.

Dr. Jos. Bender, P. P. O.

I. Historiam generis humani primaevam resque populorum orientalium enarrabit ter per hebd. hora XI.
II. Praecipua literarum apud Germanos cultarum genera explicabit semel vel bis per hebd. hora XI.
III. Germanorum antiquitates imprimis res mythologicas exponet semel vel bis p. heb. h. XI.
IV. De praecipuis historicis eorumque scriptis disseret semel p. h. hor. def.

Dr. Wilh. Weissbrodt, P. P. O.

I. Inscriptiones graecas et latinas cum ethnicas tum christianas explicabit ter hebdomade hora IX.
II. De poesi lyrica Graecorum disseret et Pindari carmina cum commilitonibus leget bis hebdomade hora IX.
III. Exercitationes latine scribendi moderabitur h. def.

Dr. Jos. Krause, P. P. O.

I. Introductionem in studium philosophiae tradet bis per hebd. hora X.
II. Logicam et noëticam docebit quater per hebd. hora X.
III. Historiam philosophiae recentissimi temporis exponet semel per hebd. hora definienda.

Publica doctrinae subsidia.

I. Bibliotheca, cui praeest **Prof. Dr. Weiss**, commilitonibus patebit diebus Martis et Veneris hora II—III.
II. Instrumenta, quae ad physicen, mathematicam et astronomiam pertinent, asservat **Prof. Dr. Killing.**
III. Sculpturarum veterum imagines gypseas custodit **Prof. Dr. Weissbrodt.**

Renuntiatio judiciorum de certamine literario a commilitonibus Lycei Regii Hosiani anno superiore inito et quaestionum in annum currentem propositarum promulgatio.

Ordo Theologorum pro certamine literario has proposuerat quaestiones:

I. Ex instituto Regio:

Quid Vetus Testamentum de Christo et ecclesia christiana typice doceat, illustretur.

II. Ex stipendio Scheill-Busseano:

De initiis cultus divini in ecclesia primaeva christiana.

De priore quaestione Ordini commentatio tradita est his inscripta verbis: „Umbram enim habens lex futurorum bonorum, non ipsam imaginem rerum.“ Hebr. 10, 1.

Libelli scriptor nonnullorum recentiorum interpretum vestigia nimis presse secutus plures inter Vetus et Novum Testamentum similitudines conquisivit, quam secundum suam ipsius sententiam licuit. Quum vero quae congessit apte disposuerit nec non rem suam cum diligentia et animi quodam fervore tractaverit sermone usus plerumque polito et haud male latino, Ordo praemium constitutum ei adjudicavit.

Schedula rescissa prodiit nomen:

P. Bader, stud. theol.

De altera quaestione qui certamen iniit quae et veteres ecclesiae patres et nostri potissimum temporis auctores de re proposita scripserunt diligenter pervestigavit, non sine judicio ponderavit, recte disposuit atque facilitate quadam sermonis cultus divini primaevae ecclesiae imaginem expressit. Quapropter quamvis praeter aliquot levioris momenti defectus illud merito vituperandum videatur, quod nimia acerbitate in opiniones adversariorum invectus sit, Ordo commentationem praemio constituto ornandum censuit.

Schedula reclusa innotuit:

A. Woywod, stud. theol.

Ordo Philosophorum hanc quaestionem proposuerat:

Sculpturarum veterum imagines gypseae nostrae describantur.

Commentatio ordini subiecta est una his verbis insignita:

Segnius incitant animos demissa per aurem,
Quam quae sunt oculis subiecta fidelibus et quae
Ipse sibi tradit spectator. Horatius, ars poet. 180.

Quam qui conscripsit, diligenter et erudite in ea re versatus est scripsitque plerumque emendate, quapropter Ordo eum praemio constituto dignum esse censuit.

Rescissa schedula prodiit nomen:

P. Küssner, stud. theol.

In currentem annum commilitonibus hae quaestiones proponuntur

ab **Ordine Theologorum**

I. Ex instituto Regio: Quibus ex partibus hominis natura constet, et quae sit earum mutua relatio, exponatur.

II. Ex instituto Scheill-Busseano: Quibus modis et mediis Hosius Cardinalis Warmiensis ecclesiam sui temporis reformandam esse censuerit.

ab **Ordine Philosophorum**

Ex instituto Regio: Francisci Episcopi Warmiensis vita resque ipsius tempore cum in Prussia tum in Warmia gestae enarrentur.

Certantium commentationes sermone latino conscriptae et more consueto signatae ante diem festum Nativitatis Domini anni 1889 Rectori Lycei exhibendae sunt.

Victoribus praemia constituta sunt ex instituto Regio 75, ex stipendio Scheill-Busseano 100 marcarum.