INDEX LECTIONUM

IN

LYCEO REGIO HOSIANO BRUNSBERGENSI

PER HIEMEM

A DIE XV. OCTOBRIS ANNI MDCCCLXXXIV.
USQUE AD DIEM XV. MARTII ANNI MDCCCLXXXV.

INSTITUENDARUM.

PRAECEDIT **PROF. DR. WILHELMI KILLING** COMMENTATIO MATHEMATICA.

BRUNSBERGAE, 1884.

TYPIS HEYNEANIS.

LYCEI REGII HOSIANI H. T. RECTOR

Dr. WILHELMUS KILLING,

PROFESSOR PUBLICUS ORDINARIUS.

LYCEI REGII HOSIANI BRUNSBERGENSIS

RECTOR ET SENATUS

CIVIBUS SUIS

S.

Erweiterung des Raumbegriffes.

Die vorliegende Arbeit bezweckt, den Raumbegriff in einer Weise zu erweitern, welche mir kaum weniger notwendig erscheint, als diejenige, welche bisher vom Euklidischen Raume zu den Nicht-Euklidischen geführt hat. Ich schliesse mich hier an eine Abhandlung an, welche ich im Osterprogramm 1880 des Gymnasiums zu Brilon veröffentlicht habe, und zwar an den ersten Teil derselben. Dort stelle ich diejenigen Begriffe und Urteile zusammen, welche in der Geometrie nicht entbehrt und nicht auf eine geringere Zahl zurückgeführt werden können. Aus diesen „Grundbegriffen“ und „Grundsätzen“ leite ich dort den Begriff der Grenzgebilde und der Dimension her und deute bereits darauf hin, dass man zu verschiedenen Möglichkeiten gelangt. Jedes System von weiteren Begriffen und Urteilen, welches mit dem Grundsystem vereinbar ist, nenne ich eine Raumform. Als wichtigste Raumformen betrachte ich diejenigen, welche den von Euklid durch die ersten Definitionen implicite aufgestellten Voraussetzungen genügen. Ausser dem von ihm behandelten Systeme, der Euklidischen Raumform, genügen denselben noch drei andere Systeme; um ihre enge Beziehung zu den ersten Definitionen Euklids einerseits, aber zugleich ihre Verschiedenheit von seiner Geometrie anzudeuten, mögen dieselben als Nicht-Euklidische Raumformen bezeichnet werden. Dieselben können auf eine beliebig grosse Zahl von Dimensionen übertragen werden. Hiermit ist aber keineswegs der Begriff der Raumformen erschöpft.

Schon vor längerer Zeit hat Herr Klein die projektivischen Raumformen aufgestellt und aus denselben durch Spezialisirung die bekannten Raumformen hergeleitet*) (Math. Ann. B. 4 und 6.) Sobald der von Herrn Klein begonnene Schritt in voller Consequenz durchgeführt wird, bedarf es nur einer kleinen Verallgemeinerung, um zu unsern Raumformen zu gelangen. Das einzige Beispiel

*) Eine genauere Durchführung dieser Raumformen wird gegeben in dem Werk des Herrn Pasch: Vorlesungen über die neuere Geometrie (Leipzig 1882). Wegen der von Herrn Pasch gebrauchten Bezeichnung: Riemannscher Raum vergl. Borchardt's Journal B. 86 S. 72—83 u. B. 89. S. 266.

einer nicht projektivischen Raumform, welches meines Wissens bisher veröffentlicht ist, ist im 89. Bande von Borchardt's Journal (S. 284) mitgeteilt worden.

Über die Nicht-Euklidischen Raumformen hinaus geht auch Clifford in einigen Bemerkungen, welche sich in seiner Abhandlung: Prel. Sketch of Biquaternions (Proceed. of the L. Math. Soc. Vol. IV) auf den Seiten 387, 388 finden*). Es scheint jedoch, als ob er nur projektivische Raumformen im Auge habe und die Coordinaten als nach der Kleinschen Anweisung erhalten ansehe; andernfalls würden mehrere seiner Behauptungen falsch sein.

Die Grundlagen der Geometrie bildeten den Gegenstand mehrerer Vorlesungen, welche Herr Weierstrass im Sommer 1872 im math. Seminar zu Berlin gehalten hat. Der Inhalt derselben, soweit er hier in betracht kommt, war etwa kurz folgender: Vor allem muss eine rein geometrische Begründung angestrebt werden; will man aber von dem Begriffe der n-fach ausgedehnten stetigen Mannigfaltigkeit ausgehen, so kann man den Begriff der Abstandsfunktion hinzunehmen; für diesen Begriff wurden die charakteristischen Eigenschaften angegeben, und es wurde dazu aufgefordert, die allgemeine analytische Form für eine solche Funktion aufzusuchen. Ich glaube nachweisen zu können, dass man, ausgehend von diesem Begriffe, durch die Entwickelung genötigt wird, über denselben hinauszugehen, und dass man dann zu der von mir gegebenen Verallgemeinerung gelangt.

Der Zusammenhang der von mir aufgestellten Raumformen mit den von Riemann eingeführten n-fach ausgedehnten Mannigfaltigkeiten, für welche ein Linienelement existirt, bedarf einer längeren Auseinandersetzung. Man könnte denken, es bedinge einen Gegensatz, dass Riemann nur von Messung spricht, während ich die Bewegung voranstelle. Aber es handelt sich nicht um die mit einem Begriff verbundene Vorstellung, sondern um die denselben bestimmenden Sätze (Grundsätze), und es ist daher an sich gleichgültig, ob man von Bewegung oder Messung redet. Nur kann die Messung auch auf indirektem Wege erfolgen, und aus diesem Grunde umfassen die Riemannschen Mannigfaltigkeiten nicht nur Raumformen unter sich, sondern auch die in einer Raumform enthaltenen Grenzgebilde.

Andererseits bringt aber die Einführung des Linienelements eine Spezialisirung herbei, welche sich bei meiner Behandlung nur ganz künstlich erreichen lässt (cf. § 5 u. 6 der vorl. Arbeit).

Indessen scheint die Riemannsche Bestimmung nach einer andern Seite hin allgemeiner zu sein als die meinige. Riemann nimmt an, als Ausdruck für das Linienelement könne jede Funktion der Differentiale vorausgesetzt werden, welche stets positiv ist, und welche in einem gewissen constanten Verhältnis zunimmt, wenn alle Differentiale mit dieser Constanten multiplicirt werden. Die Annahme würde nur gestattet sein, wenn bei der Messung einer Linie ihre Lage im Raume gar nicht in betracht käme. Nun sagt aber die Forderung, die Länge einer Linie solle von ihrer Lage unabhängig sein, keineswegs, dass die Linie unabhängig von dem umgebenden Raume existire und unabhängig von demselben gemessen werden könne. Somit bedarf es meines Erachtens einer eigenen Untersuchung zu erforschen, welche Funktionen zum Ausdruck für das Linienelement geeignet sind, und ich halte es für einen Fehler, dass Riemann eine solche Untersuchung nicht angestellt hat. Es würde mir lieb sein, wenn man meine Meinung als falsch bewiese.

Es erübrigt noch, einige Worte zu sagen über das Werk des Herrn de Tilly: Essai sur les principes fondamentaux de la géométrie et de la mécanique (Bordeaux 1879). Dieses mit grossem

---

*) Für die gütige Zusendung zweier Bände dieser Proceedings sage ich der Verwaltung der Bibliothek der Technischen Hochschule zu Berlin auch hier meinen besten Dank; die Königl. Bibliothek zu Berlin gestattet leider nur, solche Werke in ihrem Lesezimmer einzusehen; in der Königsberger und der hiesigen Bibliothek sind die Proceedings nicht vorhanden.

Scharfsinn abgefasste Werk sucht aus dem blossen Begriffe des Abstandes zweier Punkte nachzuweisen, dass es ausser der Euklidischen nur die Lobatschewskysche und die Riemannsche Raumform gebe (die Polarform der letzteren ist dem Verf. fremd geblieben). Nun ist seine Art, den Abstandsbegriff einzuführen, nicht frei von Unzuträglichkeiten. Abgesehen davon, dass ein Begriff als undefinirbar an die Spitze gestellt wird, welcher einen definirbaren (und deshalb auch zu definirenden) Begriff (nämlich den des Punktes) zur Voraussetzung hat, sind mit diesem geometrischen Begriff analytische Voraussetzungen verbunden, deren Zahl nach den neueren Untersuchungen so gross ist, dass man fürchten muss, bei diesem Ausgange sich die wahren Voraussetzungen eher zu verdecken, als aufzuklären. Aber auch die Art und Weise, wie Herr de Tilly sein System aufbaut, giebt zu schweren Bedenken Veranlassung. Ich will davon absehen, dass trotz der gegenteiligen Versicherung mehrmals die Anschauung benutzt wird, da eine genaue Erörterung der ersten Begriffe diesen Mangel vielleicht beseitigt. Aber einige für den durchgeführten Aufbau fundamentale Sätze lassen sich aus dem Begriffe des Abstandes, wie er dort formulirt ist, nicht herleiten. Es sind die Sätze, dass es auf jeder Linie und auf jeder Fläche eine „région de croissance continue“ gebe. Der erste von diesen Sätzen würde nur richtig sein, wenn jede stetige Funktion eine Ableitung hätte; der Beweis des zweiten setzt einen Satz etwa von folgender Form voraus: „Man kann jede Fläche in der Umgebung eines jeden ihrer Punkte entstanden denken durch Bewegung einer veränderlichen Linie, und die Art dieser Entstehung kann so gewählt werden, dass die Linie niemals unendlich klein wird.“ Da das nicht angeht, so bedarf der Versuch des Herrn de Tilly, ehe er als streng anerkannt werden kann, zum mindesten einer bedeutenden Umgestaltung.

Was nun den von mir eingeschlagenen Weg betrifft, so ist es fraglich, ob derselbe zu sämtlichen Raumformen führt. Um die vollständige Durchführung zu ermöglichen, stelle ich einen Satz an die Spitze, von dem ich zweifelhaft bin, ob derselbe eine Folgerung aus den in der genannten Arbeit aufgestellten Voraussetzungen ist. Ich leite daraus in den vier ersten §§ die Bedingungen für alle diejenigen Raumformen her, welche dem vorausgesetzten Satze genügen; dass ich dabei manche Stetigkeitsbetrachtung nicht durchgeführt habe, wird man natürlich finden. Die §§ 5 u. 6 geben zu der aufgestellten Theorie die einfachsten Beispiele, auf welche ich mich schon des Raumes wegen glaubte beschränken zu müssen. Für zwei Dimensionen bieten diese Beispiele auch die unserer Erfahrung genügenden Raumformen. Während aber die Nicht-Euklidischen Ebenen eine wohl in sich begrenzte Gruppe bilden, ist die Euklidische Ebene als ganz specieller Fall in einer grösseren Gruppe enthalten; diese Gruppe enthält Räume, welche unserer Erfahrung direkt widerstreiten, aber auch solche, welche sich der Euklidischen Ebene ausserordentlich nähern. Diese Erscheinung ist keineswegs für meinen Ausgangspunkt charakteristisch. Auch bei den Untersuchungen des Herrn Klein bilden die Nicht-Euklidischen Raumformen (allerdings für $n > 2$ in Verbindung mit noch einigen andern) eine natürliche Gruppe; um aber zu der Euklidischen Raumform zu gelangen, sieht sich Herr Klein veranlasst, den rein projektivischen Standpunkt zu verlassen und andere Betrachtungen hinzuzufügen.

Der letzte § soll in aller Kürze auf eine wichtige Beziehung aufmerksam machen, durch welche verschiedene Raumformen mit einander verbunden werden, wenn für sie die charakteristischen Constanten identisch sind. Ich hoffe, auf diesen und einige andere Teile der Arbeit bald näher eingehen zu können.

§ 1.

Aufstellung von Coordinaten.

Es seien M und N irgend zwei Lagen desselben Körpers, in dem Sinne, welcher in der angegebenen Abhandlung dargelegt ist. Während der Körper I die Lage M einnimmt, deckt ein damit fest verbundener Körper II die Lage N, und zwar ist durch M und N und durch irgend eine Lage von I auch die gleichzeitige Lage II vollständig und eindeutig bestimmt. Sobald jetzt I die Lage N erhält, muss II eine bestimmte Lage P annehmen. Betrachten wir jetzt M als die Anfangs-, P als die Endlage eines Körpers, so nennen wir N die Mittellage desselben. Wir definiren dieselbe in folgender Weise:

„Werden zwei Lagen M und P desselben Körpers I als Anfangs- und Endlage unterschieden, so hat die Mittellage N die Eigenschaft, dass ein mit I fest verbundener und zu ihm congruenter Körper II, welcher in der Anfangslage M von I mit N zusammenfällt, in die Endlage P gelangt, sobald der Körper I die Lage N annimmt."

Anders ausgedrückt lautet diese Definition:

„Zu den beiden congruenten Raumteilen M und P, welche als Anfangs- und Endlage unterschieden werden, heisst derjenige Raumteil N die Mittellage, welcher zugleich mit P zur Deckung gelangt, wenn M aus seiner Anfangslage heraus nach N bewegt wird."

Wenn man M ungeändert lässt, aber für N immer andere, mit M congruente Raumteile annimmt, so wird sich auch P fortwährend ändern. Aber es ist nicht bewiesen, dass auch umgekehrt, wenn M und P beliebig angenommen sind, stets N gefunden werden kann. Jedenfalls widerstreitet eine solche Voraussetzung den aufgestellten Grundsätzen nicht, und wir legen deshalb den folgenden Untersuchungen den Satz zu Grunde:

„Um jeden Raumteil M lässt sich ein gewisses Gebiet abgrenzen, so dass, wenn man M als Anfangslage und irgend einen in dem Gebiete gelegenen mit M congruenten Raumteil P als Endlage betrachtet, zu beiden eine Mittellage existirt."

Sollte sich herausstellen, dass dieser Satz eine Folgerung aus unsern frühern Voraussetzungen ist, so gelten die folgenden Sätze ganz allgemein; wenn das nicht der Fall ist, so müssen die entwickelten Sätze auf diejenigen Raumformen eingeschränkt werden, für welche unsere Voraussetzung gilt. Es genüge, dies hier hervorzuheben, ohne dass es später stets von neuem erwähnt wird.

Aus dem angegebenen Satze lässt sich folgern, dass von einer beliebigen Anfangslage eines Körpers an (wenigstens bis zu einer gewissen Grenze) jede Lage durch eine gleichförmige Bewegung erlangt werden kann, wo einer gleichförmigen Bewegung die charakteristischen Eigenschaften zukommen:

1) Jede Linie, welche ein Punkt bei seiner Bewegung beschreibt, wird während derselben in sich verschoben;

2) gelangt A nach B und zugleich ein beliebiger Punkt C der von A beschriebenen Linie nach D, so wird auch B auf D fallen, sobald A nach C gelangt.

Den Beweis, welcher nicht ganz kurz ist, glaube ich hier übergehen zu sollen.

Ich will jetzt zeigen, wie man ein Stück einer in sich verschiebbaren Linie durch ein beliebiges anderes Stück derselben Linie messen kann. Da die Messung vermittelst der gleichförmigen Bewegung, bei welcher die Linie in Deckung mit ihrer Anfangslage bleibt, ausgeführt wird, es aber andererseits möglich ist, dass dieselbe Linie bei verschiedenen gleichförmigen Bewegungen in sich verschoben wird, so ist es möglich, dass sich bei Benutzung derselben Einheit verschiedene Masszahlen ergeben; die Messung gilt also nur in bezug auf eine bestimmte gleichförmige Bewegung. (Die Zeit für die

Messung zu benutzen, geht nicht an, da sich, wenigstens bei unserm Ausgangspunkt kein Mittel zu ihrer Messung bietet; es kommt hinzu, dass bei unserer Definition der gleichförmigen Bewegung die ungleiche Geschwindigkeit nicht ausgeschlossen ist).

Es genügt offenbar anzunehmen, dass die zu messenden Strecken von demselben Punkte ausgehen. Man wähle $A_0 A_1$ beliebig als Einheit; ist $A_1 A_2 \cong A_0 A_1$ (d. h. gelangt bei der betr. Bewegung A_1 in die Lage A_2, wenn A_0 auf A_1 gelangt,) so soll $A_0 A_2 = 2$ gesetzt werden. Ist ν eine beliebige ganze positive Zahl, ist $A_0 A_\nu = \nu$ gesetzt und ist $A_\nu A_{\nu+1} \cong A_0 A_1$, so soll auch $A_0 A_{\nu+1} = \nu + 1$ sein. Umgekehrt sei $A_{-1} A_0 \cong A_0 A_1$ und allgemein $A_{-\nu} A_{-\nu+1} \cong A_0 A_1$, so soll $A_0 A_{-\nu} = -\nu$ gesetzt werden. So lassen sich in eindeutiger Weise Strecken bestimmen, deren Masszahlen beliebige ganze Zahlen sind.

Jetzt sei $A_{\frac{1}{2}}$ die Mittellage von A_0 und A_1, also $A_0 A_{\frac{1}{2}} \cong A_{\frac{1}{2}} A_1$, dann wird $A_0 A_{\frac{1}{2}} = \frac{1}{2}$ gesetzt; durch die Mittellage von A_0 und $A_{\frac{1}{2}}$ bestimme man die Strecke gleich $\frac{1}{4}$ u. s. w. In derselben Weise, wie man aus der Einheitsstrecke diejenigen Strecken bildet, deren Masszahlen ganz sind, kann man aus der Strecke $\frac{1}{2^\mu}$ die Strecken $\frac{\nu}{2^\mu}$ für jedes ganzzahlige (positive und negative) ν bilden, und es ergiebt sich, dass gleichen Werten $\frac{\nu}{2^\mu}$ und $\frac{\nu \,.\, 2^\alpha}{2^{\mu+\alpha}}$ auch dieselbe Strecke zugeordnet wird.

Kann man eine Zahl σ nicht in der Form eines Bruches darstellen, dessen Zähler eine ganze Zahl und dessen Nenner eine Potenz von zwei ist, so kann man doch für jedes μ eine ganze Zahl α_μ bestimmen, so dass ist:

$$\frac{\alpha_\mu}{2^\mu} < \sigma < \frac{\alpha_\mu + 1}{2^\mu}.$$

Ist umgekehrt zu jedem ganzzahligen Werke von μ eine ganze Zahl α_μ zugeordnet und genügen die α_μ der Bedingung, dass stets

$$\alpha_{\mu+\nu} \geqq \alpha_\mu \,.\, 2^\nu \text{ und } \alpha_{\mu+\nu} + 1 \leqq (\alpha_\mu + 1)\, 2^\nu$$

ist, so giebt es nur eine einzige Zahl σ, welche für jedes μ der aufgestellten Gleichung genügt.

Der so bestimmten Zahl σ entspricht (nach Annahme des Anfangspunktes und der Einheitsstrecke) auch nur eine einzige Strecke, da für jedes μ die Lage des Endpunktes zwischen zwei Punkten eingeschlossen wird und diese Einschliessung einen einzigen Punkt charakterisirt. Der Beweis ergiebt sich sofort aus dem Satze:

„Sind A, B und P irgend drei Punkte auf einer in sich verschiebbaren Linie und liegt P zwischen A und B, und sucht man zu A und B die Mittellage C, zu A und C die neue Mittellage D u. s. f., so führt dieser Process, genügend oft wiederholt, zu einem Punkte, welcher zwischen A und P liegt“.

Zum Beweise dieses Satzes, welcher auf das „Axiom des Archimedes“ (Bezeichnung des Herrn Stolz, Math. Annalen XXII, 504) hinauskommt, nehme ich an, ein Punkt M teile A B in folgender Weise: Jeder Punkt N auf M B habe die Eigenschaft, dass ein ganzes Vielfache von A N grösser ist als A B; wenn dagegen L auf A M liegt, so soll A L bei keiner Zahl von Wiederholungen zu A B führen. Dann wird eine fortgesetzte Halbirung von A B auf einen Punkt führen, welcher zwischen M und B liegt, aber niemals zu einem Punkte L führen. Trage ich jetzt auf M B eine Strecke M N = A M ab, so lässt sich durch eine endliche Zahl von Wiederholungen ein Punkt P erreichen, welcher zwischen M und N liegt. Halbire ich aber A P, so muss die Mitte zwischen A und M liegen; also kann man auch zu diesem Punkte durch fortgesetzte Halbirung gelangen.

Hiernach kann zu jeder Masszahl die entsprechende Linie bestimmt werden; aber auch umgekehrt lässt sich, wie man sofort übersieht, jedes Stück einer in sich verschiebbaren Linie durch eine beliebig gewählte Strecke derselben Linie messen.

Die Aufstellung eines Coordinatensystems bietet keine Schwierigkeit. Einen beliebigen Punkt A_0 wähle man zum Anfangspunkte und setze fest, dass für ihn alle Coordinaten $x_1 \ldots x_n$ den Wert Null erhalten sollen. Jeder Punkt A derjenigen Linie, welche A_0 bei irgend einer gleichförmigen Bewegung beschreibt, soll die Coordinaten $x_1 = 0 \ldots x_{n-1} = 0$ haben. Die letzte Coordinate x_n dieses Punktes A soll durch die (positive oder negative) Masszahl von A_0 A gegeben sein, nachdem eine beliebige Strecke $A_0 A_1$ zur Einheit gewählt ist.

Alsdann wählt man irgend eine zweite regelmässige Bewegung, durch welche die so eben benutzte Linie weder in Ruhe bleibt, noch in sich verschoben wird. Die Linie, welche jetzt der Nullpunkt beschreibt, habe für $x_1 \ldots x_{n-2}, x_n$ verschwindende Werte, und die Werte von x_{n-1} werden nach Festsetzung einer beliebigen Einheit in derselben Weise bestimmt, wie vorher die x_n. Nun ist aber die Lage der durch die erste Bewegung erhaltenen Linie bestimmt, sobald die des Anfangspunktes bekannt ist; wenn also der Nullpunkt nach $(0 \ldots 0, a_{n-1}, 0)$, d. h. nach dem Punkte $x_1 = x_2 = \ldots x_{n-2} = x_n = 0, x_{n-1} = a_{n-1}$ gelangt, so kommt $(0 \ldots 0, a_n)$ in einen Punkt, dessen Coordinaten sind: $x_1 = \ldots = x_{n-2} = 0, x_{n-1} = a_{n-1}, x_n = a_n$.

In derselben Weise fährt man fort, indem man eine dritte gleichförmige Bewegung hinzunimmt, durch welche der Nullpunkt ausserhalb des Gebildes $x_1 = x_2 = \ldots = x_{n-2} = 0$ gelangt.

Für die Linie, welche der Nullpunkt alsdann beschreibt, sollen alle Coordinaten bis auf x_{n-2} verschwinden, und die letztere ähnlich wie vorher bestimmt werden. Die Lage, welche der Punkt $(0, 0 \ldots 0, a_{n-1}, a_n)$ annimmt, wenn der Nullpunkt auf $(0, 0 \ldots 0, a_{n-2}, 0, 0)$ gelangt, möge mit $(0 \ldots 0, a_{n-2}, a_{n-1}, a_n)$ bezeichnet werden. Jetzt füge man der Reihe nach eine neue Bewegung hinzu, bis man durch n regelmässige Bewegungen dazu gelangt, jedem System $(x_1 \ldots x_n)$ einen Punkt zuzuordnen.

Alsdann gilt der Satz:

„Bei der festgesetzten Anordnung entspricht jedem Wertsysteme $(x_1 \ldots x_n)$ ein einziger Punkt des Raumes, und umgekehrt kann man um den Nullpunkt ein Gebiet abgrenzen und ebenso um das Wertsystem $(0 \ldots 0)$ ein n-fach ausgedehntes Continuum $(x_1 \ldots x_n)$ bestimmen, so dass jedem Punkte des Gebietes ein System des Continuums entspricht, und zwar ein einziges".

Der erste Teil des Satzes bedarf keiner nähern Begründung, der zweite Teil ergibt sich wie folgt. Lässt man bei verschwindendem Werte von $x_1 \ldots x_{n-1}$ die x_n von Null aus wachsen, so gelangt man entweder wieder zum Anfangspunkte zurück oder nicht. Im letzten Falle, (bei welchem die Linie keineswegs unendlich zu sein braucht,) entsprechen ungleichen Werten von x_n auch verschiedene Punkte. Im ersten Falle giebt es einen ersten positiven und einen ersten negativen Wert von x_n, welche denselben Punkt bezeichnen. So lange x_n zwischen diesen Werten bleibt, wird jedem Punkte der Linie nur ein einziger Wert von x_n entsprechen. Diese Grenzen von x_n werden dadurch nicht beschränkt, dass x_{n-1} von Null verschiedene Werte erhält, wofern die Linie $(0 \ldots 0, x_n)$ bei der zweiten Bewegung keinen ruhenden Punkt enthält. Wenn aber dabei ein Punkt dieser Linie in Ruhe verbleibt, so gilt die Eindeutigkeit bis zum ersten ruhenden Punkte, also noch immer bis zu einem endlichen Werte von x_n. Ebenso kann das Gebiet für x_n infolge der spätern Bewegungen, sowie dadurch beschränkt werden, dass ein Punkt $(a_1 \ldots a_n)$ bei nicht verschwindenden Werten von $a_1 \ldots$ mit dem Nullpunkt zusammenfällt. Ähnliche Beschränkungen können für die andern Coordinaten eintreten; aber immerhin behält jede Coordinate einen endlichen Spielraum. Die Gesamtheit der Punkte, welche durch alle hiernach gestatteten Wertsysteme dargestellt werden, füllt aber einen gewissen, um den Nullpunkt gelegenen Raumteil an, was in derselben Weise gezeigt wird, in welcher wir zu einer Definition von der Zahl der Dimensionen gelangt sind und bewiesen haben, dass diese Zahl für jede Raumform eine feste Bedeutung hat.

Hiernach ist die Bestimmung der Coordinaten auf n gleichförmige Bewegungen, oder wenn man will, auf $(n + 1)$ Lagen desselben Körpers zurückgeführt. Diese Bewegungen müssen nur gewissen Beschränkungen unterliegen, können aber im übrigen ganz willkürlich gewählt werden. Diese Willkür kann häufig benutzt werden, um solche Coordinatensysteme zu erhalten, deren Anwendung zu den einfachsten Formeln führt. Man kann auch die Coordinaten $x_1 \ldots x_n$ durch ganz beliebige Bewegungen bestimmen und dann neue Coordinaten $y_1 \ldots y_n$ als Funktionen der x einführen. Diese Funktionen müssen von einander unabhängig sein; wenn sie ferner für $x_1 = x_2 = \ldots = x_n = 0$ die Werte $b_1 \ldots b_n$ annehmen, so muss um $(0 \ldots 0)$ ein Gebiet der x, und um $(b_1 \ldots b_n)$ ein Gebiet der y so abgegrenzt werden können, dass für beide Gebiete stetige und eindeutige Beziehung stattfindet.

Indem wir die Möglichkeit dieser allgemeinen Coordinatenbestimmung im Auge behalten, liefert die obige Entwicklung den Satz:

„In jeder Raumform von n Dimensionen lassen sich die Coordinaten und n gleichförmige Bewegungen so auswählen, dass zwischen denselben folgende Beziehung besteht: durch die erste Bewegung bleiben alle Coordinaten $x_2 \ldots x_n$ ungeändert und alle x_1 wachsen gleichzeitig um dieselbe Grösse; durch die zweite Bewegung bleiben in dem Gebilde, für welches $x_1 = 0$ ist, die $x_3 \ldots x_n$ ungeändert und die x_2 ändern sich gleichmässig; entsprechendes gilt bei der dritten Bewegung für das Gebilde $x_1 = x_2 = 0$ u. s. w.; endlich wachsen bei der letzten Bewegung für das Gebilde $x_1 = \ldots = x_{n-1} = 0$ die Coordinaten x_n um dieselbe Grösse".

§ 2.

Grad der Beweglichkeit.

Bei einer gleichförmigen Bewegung sind die von jedem Punkte zurückgelegten Wege, wenn jeder durch ein beliebiges Stück der von ihm beschriebenen Linie gemessen wird, einander proportional; dagegen werden die Coordinaten im allgemeinen nicht proportional sein. Aber durch den Begriff der gleichförmigen ist der der unendlich kleinen Bewegung gegeben, und es muss bewiesen werden, dass für eine solche auch die Veränderungen der Coordinaten proportional sind. Wir übergehen den Nachweis und geben dem Satze folgende Fassung:

„Die unendlich kleinen Veränderungen $dx_1 \ldots dx_n$, welche die Coordinaten $x_1 \ldots x_n$ durch eine unendlich kleine Bewegung erleiden, lassen sich als Produkte von n Funktionen $u^{(1)} \ldots u^{(n)}$ mit einer unendlich kleinen Grösse dt darstellen."

Gelangt also der Punkt x in die Lage $x + dx$, so kann gesetzt werden:

(1) $dx_1 = u^{(1)}\,dt \ldots dx_n = u^{(n)}\,dt$.

Hiernach wird jede unendlich kleine Bewegung durch n Funktionen u der Coordinaten bestimmt; jede von ihnen ist stetig und nach jeder Variabeln differentiirbar. Die Bewegung erleidet, solange von der Geschwindigkeit abgesehen wird, keine Änderung, wenn man alle $u^{(1)}$ mit derselben reellen Constanten multiplicirt.

Wenn eine Raumform die m unendlich kleinen Bewegungen zulässt:

$$(2)\quad \left\{\begin{array}{l} u_1^{(1)} \;.\;.\;.\;.\;.\; u_1^{(n)} \\ .\;.\;.\;.\;.\;.\;.\;.\;. \\ u_\varkappa^{(1)} \;.\;.\;.\;.\;.\; u_\varkappa^{(n)} \\ .\;.\;.\;.\;.\;.\;.\;.\;. \\ u_m^{(1)} \;.\;.\;.\;.\;.\; u_m^{(n)} \end{array}\right.$$

so ist in derselben auch die Bewegung möglich:

$$(3)\quad \sum_\lambda p_\lambda\, u_\lambda^{(1)}, \;.\;.\;.\;.\;.\; \sum_\lambda p_\lambda\, u_\lambda^{(n)},$$

wo die Grössen p_λ reell, von den x unabhängig, aber im übrigen ganz beliebig sind. Nun sind unendlich kleine Bewegungen mit einander vertauschbar, und die durch die Gleichungen (3) und (1) bestimmte Lage wird erhalten, wenn man die m Bewegungen in irgend einer Reihenfolge nach einander anwendet. Demnach bezeichnet man die Bewegung (3) als zusammengesetzt aus den Bewegungen (2), und die m Bewegungen (2) heissen unabhängig von einander, wenn keine von ihnen aus den übrigen zusammengesetzt ist, wenn also die Grössen (3) nur dadurch sämtlich zum Verschwinden gebracht werden können, dass man alle Coefficienten p gleich Null setzt. Ist m die grösste Zahl der von einander unabhängigen unendlich kleinen Bewegungen, so schreibt man der Raumform eine m-fache Beweglichkeit zu. Die Möglichkeit, dass diese Zahl unendlich gross angenommen werden könne, lassen wir ebenso ausser acht, wie wir früher die Zahl der Dimensionen als endlich vorausgesetzt haben; wir definiren somit:

„Eine Raumform hat m Grade von Beweglichkeit, wenn sich alle in ihr möglichen unendlich kleinen Bewegungen aus m von ihnen, aber nicht aus weniger zusammensetzen lassen".

§ 3.

Gleichungen zwischen den die Bewegung definirenden Functionen.

Jede Bewegung eines Körpers muss für ihn noch möglich sein, nachdem er in irgend einer Weise bewegt worden ist. Durch die unendlich kleine Bewegung u_ι sei der Punkt x nach einem Punkte $y = x + u_\iota\, d\sigma$ gelangt. Alsdann unterwerfen wir den Körper der Bewegung $u_\varkappa$. Dabei müssen aber in den Functionen $u_\varkappa$ die Variabeln x durch die y ersetzt werden. Dann ist:

$$\frac{dy_\varrho}{dt} = u_\varkappa^{(\varrho)} + d\sigma\left(u_\iota^{(1)} \frac{\partial u_\varkappa^{(\varrho)}}{\partial x_1} + \;.\;.\;.\;.\; + u_\iota^{(n)} \frac{\partial u_\varkappa^{(\varrho)}}{\partial x_n}\right).$$

Nun ist aber:

$$dy_\varrho = dx_\varrho + d\sigma\left(dx_1 \frac{\partial u_\iota^{(\varrho)}}{\partial x_1} + \;.\;.\;.\; + dx_n \frac{\partial u_\iota^{(\varrho)}}{\partial x_\varrho}\right)$$

oder wenn man die unendlich kleinen Grössen höherer Ordnung vernachlässigt,

$$dy_\varrho = dx_\varrho + d\sigma\left(\overset{(1)}{u}_\varkappa \frac{\partial \overset{(\varrho)}{u}_\iota}{\partial x_1} + \ldots + \overset{(n)}{u}_\varkappa \frac{\partial \overset{(\varrho)}{u}_\iota}{\partial x_\varrho}\right) dt.$$

Indem wir diesen Wert von dy_ϱ in die obige Gleichung einsetzen, sehen wir, dass jede Grösse $\overset{(\varrho)}{u}_\varkappa$ vermehrt wird um

$$\Sigma_\nu \left(\overset{(\nu)}{u}_\iota \frac{\partial \overset{(\varrho)}{u}_\varkappa}{\partial x_\nu} - \overset{(\nu)}{u}_\varkappa \frac{\partial \overset{(\varrho)}{u}_\iota}{\partial x_\nu}\right) d\sigma.$$

Da die neue Bewegung sich aus den gegebenen muss zusammensetzen lassen, so ist es möglich, den zuletzt gefundenen Ausdruck in der durch (3) angegebenen Form darzustellen. Somit lassen sich für jedes Wertepaar ι und $\varkappa$, welches aus den Zahlen $1 \ldots m$ ausgewählt werden kann, m Coefficienten $a_{\nu,\,\iota\varkappa}$ derartig bestimmen, dass die Gleichungen bestehen:

$$(4) \quad \Sigma_\nu \left(\overset{(\nu)}{u}_\iota \frac{\partial \overset{(\varrho)}{u}_\varkappa}{\partial x_\nu} - \overset{(\nu)}{u}_\varkappa \frac{\partial \overset{(\varrho)}{u}_\iota}{\partial x_\nu}\right) = a_{1,\,\iota\varkappa} \overset{(\varrho)}{u}_1 + \ldots + a_{m,\,\iota\varkappa} \overset{(\varrho)}{u}_m$$

$$(\varrho = 1 \ldots . n).$$

Ich führe die Abkürzung ein:

$$(5) \quad \overset{(\varrho)}{U}_{\iota\varkappa} = \Sigma_\nu \left(\overset{(\nu)}{u}_\iota \frac{\partial \overset{(\varrho)}{u}_\varkappa}{\partial x_\nu} - \overset{(\nu)}{u}_\varkappa \frac{\partial \overset{(\varrho)}{u}_\iota}{\partial x_\nu}\right);$$

dann ist die Gleichung (4):

$$(6) \quad \overset{(\varrho)}{U}_{\iota\varkappa} = \Sigma_\mu\, a_{\mu,\,\iota\varkappa}\, \overset{(\varrho)}{u}_\mu \qquad (\varrho = 1 \ldots n).$$

Es bestehen die Gleichungen:

$$(7) \quad \overset{(\varrho)}{U}_{\iota\varkappa} + \overset{(\varrho)}{U}_{\varkappa\iota} = 0, \quad \overset{(\varrho)}{U}_{\varkappa\varkappa} = 0,$$

also auch:

$$(8) \quad a_{\lambda,\,\iota\varkappa} + a_{\lambda,\,\varkappa\iota} = 0, \quad a_{\lambda,\,\varkappa\varkappa} = 0.$$

Sollen also die m Systeme (2) die Bewegungen der Raumform angeben, so müssen $\frac{m(m-1)}{1.\,2}$ Systeme von je n Gleichungen (6) bestehen. Diese Gleichungssysteme werden nicht durch neue vermehrt, wenn man die u_ι und $u_\varkappa$ durch lineare Functionen derselben ersetzt, da alsdann auch die $U_{\iota\varkappa}$ in lineare Functionen der $U_{\iota\varkappa}$ übergehen. Ebenso wenig würde man (die weitere Differentiirbarkeit vorausgesetzt) zu neuen Bedingungen gelangen, wenn man die höhern Differentialquotienten mit berücksichte.

Die Coefficienten $a_{\mu,\iota\varkappa}$ sind von den benutzten Coordinaten unabhängig. Ersetzt man die x durch Grössen y und ist etwa

$$x_\iota = \varphi_\iota (y_1 \ldots y_n),$$

so muss, wenn

$$dx_\iota = \overset{(\iota)}{u}\, dt,\ dy_\varkappa = \overset{(\varkappa)}{v}\, dt,\ \varphi_{\iota\varkappa} = \frac{\partial \varphi_\iota}{\partial y_\varkappa}$$

gesetzt wird, sein

$$\overset{(\iota)}{u} = \Sigma_\nu\ \varphi_{\iota\nu}\ \overset{(\nu)}{v}\ .$$

Indem man diese Werte in die Gleichungen (4) einsetzt, überzeugt man sich sofort, dass die Coefficienten a nicht verändert werden.

Besonders wichtig ist der Fall, dass für eine Combination $(\iota\varkappa)$ alle $a_{\nu,\iota\varkappa}$ verschwinden, dass also $U_{\iota\varkappa} = 0$ ist. Alsdann gilt dieselbe Bedingung auch für je zwei aus u_ι und $u_\varkappa$ zusammengesetzte Bewegungen $\alpha u_\iota + \beta\, u_\varkappa$ und $\gamma\, u_\iota + \delta u_\varkappa$. Diese Bedingung sagt aus, dass nicht nur die durch diese Functionen dargestellten unendlich kleinen Bewegungen, sondern auch beliebige endliche Fortsetzungen derselben vertauschbar sind.

Zum Beweise wähle ich, was im allgemeinen angeht, das Coordinatensystem so, dass durch die Bewegung $u_\varkappa$ im Gebilde $x_1 = 0$ die $x_3 \ldots x_n$ ungeändert bleiben und die x_2 sich um dieselbe Grösse t' ändern, und dass durch die Bewegung u_ι alle $x_2 \ldots x_n$ ungeändert bleiben und die x_1 sich um dieselbe Grösse t ändern. Dann ist $\overset{(1)}{u_\iota} = 1,\ \overset{(2)}{u_\iota} = \ldots \overset{(n)}{u_\iota} = 0$ und die Gleichung $U_{\iota\varkappa} = 0$ sagt aus:

$$\frac{\partial u_\varkappa}{\partial x_1} = 0;$$

also ist jedes $u_\varkappa$ von x_1 unabhängig, oder es ist $\overset{(2)}{u_\varkappa} = 1,\ \overset{(1)}{u_\varkappa} = \overset{(3)}{u_\varkappa} = \ldots = 0$. Die zweite Bewegung ändert also jedes x_2 um t', und der Satz ist gültig, sobald die vorausgesetzte Coordinatenbestimmung möglich ist. Tritt die letztere Bedingung nicht ein, bewegt sich also jeder Punkt bei beiden Bewegungen in derselben Linie, so werde wieder $\overset{(1)}{u_\iota} = 1,\ \overset{(2)}{u_\iota} = \ldots \overset{(n)}{u_\iota} = 0$ angenommen. Dann ist wieder jedes $u_\varkappa$ von x_1 unabhängig, und da sich die Punkte für $u_\varkappa$ in denselben Linien bewegen, muss $\overset{(2)}{u_\varkappa} = \ldots \overset{(n)}{u_\varkappa} = 0$ und $\overset{(1)}{u_\varkappa}$ eine blosse Function von $x_2 \ldots x_n$, etwa $f\,(x_2 \ldots x_n)$ sein. Somit wird auch durch die zweite Bewegung jedes x_1 nur einen constanten Zuwachs erhalten, wodurch der Satz allgemein bewiesen ist.

Auch die Umkehrung des Satzes lässt sich in derselben Weise zeigen.

Daran schliesst sich der Satz:

„Giebt es in einer Raumform von n Dimensionen n von einander unabhängige Bewegungen $u_1 \ldots u_n$, welche mit einander vertauschbar sind, ohne dass für zwei ihrem System angehörende jeder Punkt dieselbe Linie beschreibt, so kann man durch passende Wahl des Coordinatensystems bewirken, dass, wofern ι und $\varkappa$ aus den Zahlen 1 bis n gewählt werden, jedes $\overset{(\varkappa)}{u_\varkappa} = 1$, aber für ungleiche Werte ι und $\varkappa$: $\overset{(\iota)}{u_\varkappa} = 0$ ist.“

Die angegebenen Bewegungen lassen sich zur Aufstellung eines Coordinatensystems benutzen; demnach setze man:

$$\overset{(1)}{u_1} = 1,\ \overset{(2)}{u_1} = \ldots = \overset{(n)}{u_1} = 0.$$

Dann sagt die Gleichung $U_{\iota\varkappa}$ für $\iota = 1$ aus: $\dfrac{\partial u_\varkappa}{\partial x_1} = 0$. Da nach § 1 für $x_1 = 0$ sein soll: $\overset{(2)}{u}_2 = 1$, $\overset{(1)}{u}_2 = \overset{(3)}{u}_2 = \ldots \overset{(n)}{u}_2 = 0$, so gelten diese Gleichungen allgemein. Somit ist auch $\dfrac{\partial u_\varkappa}{\partial x_2} = 0$ und die Bewegung u_3 hat die geforderte Eigenschaft u. s. f.

Wenn dieser Satz gilt und die Coordinaten in der angegebenen Weise bestimmt sind, so gehört eine Bewegung, für welche jede bestimmende Function constant ist, dem System der n gegebenen Bewegungen an. Demnach folgt aus dem vorangehenden Satze:

„Wenn es in einer n-fach ausgedehnten Raumform mehr als n von einander unabhängige und mit einander vertauschbare Bewegungen giebt, so muss es in jedem daraus ausgewählten System von n Bewegungen mindestens zwei geben, für welche jeder Punkt dieselbe Linie beschreibt.“

Für $n = 1$ sind somit keine zwei Bewegungen vertauschbar, und da die im folgenden § abzuleitenden Gleichungen lehren, dass für $m > 3$ jedes System vertauschbare Bewegungen enthält, so ist für $n = 1$ der Grad der Beweglichkeit höchstens gleich 3. Für $n > 1$ ist es dagegen, wie kurz erwähnt werden soll, wohl möglich, dass die Bewegungen den im letzten Satze angegebenen Bedingungen genügen.

§ 4.

Gleichungen zwischen den Constanten a.

In den Gleichungen (6) dürfen die Coefficienten a, wenn $m > 2$ ist, nicht beliebig gewählt werden, sondern müssen gewissen Bedingungen genügen. Zu denselben gelangt man auf folgendem Wege:

Man wähle aus den Zahlen 1 . . . m drei beliebige ι, $\varkappa$, λ aus und bilde nach (6) den Ausdruck:

$$\overset{(\varrho)}{u}_\iota \overset{(\sigma)}{U}_{\varkappa\lambda} + \overset{(\varrho)}{u}_\varkappa \overset{(\sigma)}{U}_{\lambda\iota} + \overset{(\varrho)}{u}_\lambda \overset{(\sigma)}{U}_{\iota\varkappa}.$$

Diesen differentiire man nach x_ϱ und summire über alle Werte von ϱ. Ebenso bilde man die Ausdrücke:

$$\Sigma_\varrho \left(\overset{(\sigma)}{U}_{\varkappa\lambda} \frac{\partial \overset{(\varrho)}{u}_\iota}{\partial x_\varrho} + \overset{(\sigma)}{U}_{\lambda\iota} \frac{\partial \overset{(\varrho)}{u}_\varkappa}{\partial x_\varrho} + \overset{(\sigma)}{U}_{\iota\varkappa} \frac{\partial \overset{(\varrho)}{u}_\lambda}{\partial x_\varrho} \right) \text{ und } \Sigma_\varrho \left(\overset{(\varrho)}{U}_{\varkappa\lambda} \frac{\partial \overset{(\sigma)}{u}_\iota}{\partial x_\varrho} + \overset{(\varrho)}{U}_{\lambda\iota} \frac{\partial \overset{(\sigma)}{u}_\varkappa}{\partial x_\varrho} + \overset{(\varrho)}{U}_{\iota\varkappa} \frac{\partial \overset{(\sigma)}{u}_\lambda}{\partial x_\varrho} \right)$$

und subtrahire dieselben von der ersten Summe; dann folgt:

$$0 = \Sigma_{\nu\varrho} \left\{ a_{\nu,\varkappa\lambda} \left(\overset{(\varrho)}{u}_\iota \frac{\partial \overset{(\sigma)}{u}_\nu}{\partial x_\varrho} - \overset{(\varrho)}{u}_\nu \frac{\partial \overset{(\sigma)}{u}_\iota}{\partial x_\varrho} \right) + \ldots\ldots \right\}$$

oder

$$(9) \quad \Sigma_\nu \left(a_{\nu,\varkappa\lambda} \overset{(o)}{U}_{\iota\nu} + a_{\nu,\lambda\iota} \overset{(\sigma)}{U}_{\varkappa\nu} + a_{\nu,\iota\varkappa} \overset{(\sigma)}{U}_{\lambda\nu} \right) = 0.$$

Indem wir dem ν erst die Werte ι, $\varkappa$, λ beilegen und dann die Summation auf die übrigen Zahlen erstrecken, nimmt die Gleichung die Form an:

$$(10) \quad \left(a_{\varkappa,\varkappa\iota} + a_{\lambda,\lambda\iota} \right) U_{\varkappa\lambda} + \left(a_{\lambda,\lambda\varkappa} + a_{\iota,\iota\varkappa} \right) U_{\lambda\iota} + \left(a_{\iota,\iota\lambda} + a_{\varkappa,\varkappa\lambda} \right) U_{\iota\varkappa}$$
$$+ \Sigma'_\nu \left(a_{\nu,\varkappa\lambda} U_{\iota\nu} + a_{\nu,\lambda\iota} U_{\varkappa\nu} + a_{\nu,\iota\varkappa} U_{\lambda\nu} \right) = 0,$$

wo die Summation sich nur auf die von ι, $\varkappa$, λ verschiedenen Werte erstreckt.

In eine der beiden letzten Gleichungen kann man aus (6) die Werte für die U einsetzen und erhält, da zwischen den Grössen u keine lineare Gleichung bestehen kann, Beziehungen zwischen den Coefficienten $a_{\nu, \iota\varkappa}$. Dieselben sind also von der Zahl der Dimensionen ganz unabhängig und nur durch den Grad der Beweglichkeit beeinflusst.

Diese Gleichungen gelten immer, wenn die m Bewegungen $u_\varkappa$ von einander unabhängig sind. Es würde also angebracht sein zu zeigen, dass die Gleichungen (9) ein geschlossenes System bilden, welches in sich übergeht, wenn man die u durch lineare Functionen derselben ersetzt. Diesen Nachweis, der nicht ganz kurz ist, glaube ich jedoch hier nicht mitteilen zu sollen.

§ 5.

Die Raumformen mit zweifacher Beweglichkeit.

Die einfach beweglichen Raumformen, welche natürlich auch von einer Dimension sind, bedürfen keiner nähern Darlegung. Bei passender Wahl der bestimmenden Grösse x wird jede Bewegung alle x um dieselbe Grösse vermehren. Die beiden Arten, unendliche und geschlossene, sind analytisch dadurch unterschieden, dass bei der ersteren ungleichen Werten von x auch stets verschiedene Punkte entsprechen, und bei der letzteren alle x, welche sich um eine gewisse Periode unterscheiden, denselben Punkt bezeichnen.

Wenn die Beweglichkeit zweifach ist, so kann bei passender Wahl von u_1 bewirkt werden, dass $U_{12} = au_1$ ist, wo a, wenn es nicht verschwindet, gleich Eins gesetzt werden kann. Bei einer Dimension möge demnach $u_1 = 1$, $u_2 = x$ gesetzt werden; und wenn durch irgend eine Bewegung die Punkte x nach x' gelangen, so muss sein: $x' = ax + b$. Da hiernach höchstens der einem einzigen x entsprechende Punkt in Ruhe verbleibt, so kann kein Punkt durch verschiedene Werte von x dargestellt werden, und da keine Bewegung von einem endlichen Werte von x zu einem unendlichen führt, so fällt das geometrische Gebilde mit der analytischen Darstellung zusammen.

Ich erwähne zwei Arten, wie man sich diese Raumform vorstellen kann. Einmal denkt man sich die gerade Linie projektivisch so in sich verschoben, dass ein Punkt in Ruhe gehalten wird (etwa der unendlich ferne Punkt stets unendlich ferner Punkt bleibt). Ferner kann man die sämtlichen Geraden einer Lobatschewskyschen Ebene nehmen, welche zu einer gegebenen Richtung parallel sind. Beschreibt man irgend eine zu dieser Schar gehörende Grenzlinie (Kreis mit unendlich grossem Radius), so kann deren Bogen von einem beliebig gewählten Punkte an als bestimmende Grösse x betrachtet werden. Der Bewegung u_1 entspricht eine Verschiebung der Grenzlinie in sich, jeder andern die Verschiebung der Ebene längs einer Geraden der Schar.

Wenn ausser dem Grade der Beweglichkeit auch die Zahl der Dimensionen gleich zwei ist, so möge erst die Gleichung $U_{12} = 0$ untersucht werden. Dann sind die Bewegungen möglich: $x' = x + a$, $y' = y + b$. Wenn jedem Punkte nur ein einziges Coordinatenpaar entspricht, so wird die Raumform identisch mit der Euklidischen Ebene, wofern man in derselben nur die Parallelverschiebung gestattet. Hier können nur solche Strecken durch einander gemessen werden, welche parallelen Linien angehören.

Fällt der Punkt (0,0) mit den Punkten $(x_0 \; y_0)$ und $(x_1 \; y_1)$ zusammen, so wird jeder Punkt auch durch $x + m x_0 + nx_1$, $y + my_0 + ny_1$ dargestellt, wenn m und n beliebige ganze Zahlen sind. Bekannte Betrachtungen lehren, dass keine dritte Periode möglich ist. Ebenso sieht man unmittelbar, dass man stets $y_0 = 0$ und $x_1 = 0$ nehmen kann.

Für den Fall, dass der Punkt (0,0) durch jedes Wertepaar $(mx_0, 0)$, aber nur durch diese dargestellt wird, zerteilt jede geschlossene, aber nicht jede unendliche Linie den Raum. Durch jeden Punkt geht eine einzige in sich verschiebbare geschlossene Linie, aber durch zwei Punkte, welche nicht beide einer solchen Linie angehören, gehen unendlich viele in sich verschiebbare Linie. Ein Bild dieser Raumform giebt die gerade Cylinderfläche des Euklidischen Raumes.

Wenn der Raum zwei Perioden besitzt $(x_0, 0)$ und $(0, y_1)$, so wird er durch die Fläche dargestellt, deren Punkte im dreifach ausgedehnten Riemannschen Raume von einer Geraden gleichen Abstand besitzen. Hier ist der Zusammenhang derselbe, wie in einer Ringfläche: irgend zwei geschlossene Linien, welche sich nicht schneiden, zerlegen den Raum, aber nicht jede geschlossene Linie führt in Verbindung mit einer sie schneidenden geschlossenen Linie eine Teilung herbei. Unter den unendlich vielen durch einen Punkt gehenden geschlossenen und in sich verschiebbaren Linien sind die beiden Linien $x = a$ und $y = b$ ausgezeichnet.

Für die Bedingung $U_{12} = u_1$ kann man bei passender Wahl der Coordinaten setzen: $u_1 = 1, 0$; $u_2 = x, 1$. Da hier y periodisch sein kann, so werden durch diese Gleichungen zwei Raumformen dargestellt. Diese haben von den drei vorher angegebenen ausserdem, dass bei ihnen keine zwei Bewegungen vertauschbar sind, noch einen zweiten charakteristischen Unterschied. Bei den vorigen schneiden sich nämlich irgend zwei in sich verschiebbare Linien, sobald sie nicht zu derselben Schar gehören. Für die beiden letzten sind die Linien $y = \beta$ und $x + \alpha = \beta e^y$ in sich verschiebbar, und zwar wird die Schar der zugleich bewegten Linien dargestellt, wenn man dem β alle reellen Werte beilegt und α ungeändert lässt. Unter den Linien der Schar $x + \alpha = \beta e^y$ werden diejenigen eine gegebene Linie $x + \alpha' = \beta' e^y$ schneiden, für welche $\alpha - \alpha'$ und $\beta - \beta'$ dasselbe Zeichen haben; macht man $\beta = \beta'$, so nähern sich die Linien einander asymptotisch; wenn $\alpha - \alpha'$ und $\beta - \beta'$ verschiedenes Zeichen haben, so schneiden sich die Linien nicht.

§ 6.

Die Raumformen mit dreifacher Beweglichkeit.

Für drei Grade der Beweglichkeit nimmt die Gleichung (10) die Form an:

$$(a_{2,21} + a_{3,31})\, U_{23} + (a_{3,32} + a_{1,12})\, U_{31} + (a_{1,13} + a_{2,23})\, U_{12} = 0.$$

Wenn in dieser Gleichung nicht die Coefficienten der Grössen U verschwinden, so giebt es in dem System der Bewegungen solche, welche mit einander vertauschbar sind. Somit giebt es drei verschiedene Fälle:

I. $a_{2,21} + a_{3,31} = 0$, $a_{3,32} + a_{1,12} = 0$, $a_{1,13} + a_{2,23} = 0$.

II. $U_{12} = 0$, $a_{3,31} = a_{3,32} = 0$.

III. $U_{12} = U_{13} = 0$.

Für die erste Bedingung können stets drei reelle Bewegungen so ausgewählt werden, dass die entsprechenden Gleichungen sind:

(11) $U_{23} = \alpha u_1$, $U_{31} = \beta u_2$, $U_{12} = \gamma u_3$.

Will man für die zweite Bedingung die einfachsten Werte der Coefficienten erhalten, so hat man eine quadratische Gleichung zu lösen; dieselbe hat entweder zwei reelle verschiedene oder zwei imaginäre oder zwei gleiche Wurzeln, und daraus ergeben sich die drei speziellen Fälle:

$$(12)\quad\begin{cases} \text{a)},\ U_{12} = 0,\ U_{13} = \alpha u_1,\ U_{23} = \beta u_2; \\ \text{b)}\ U_{12} = 0,\ U_{13} = \alpha u_1 + u_2,\ U_{23} = -u_1 + \alpha u_2; \\ \text{c)}\ U_{12} = 0,\ U_{13} = u_1,\ U_{23} = u_2 + \alpha u_1. \end{cases}$$

Auch die Bedingung III. zerfällt in drei spezielle:

$$(13)\quad U_{12} = U_{13} = 0,\ \text{a)}\ U_{23} = u_1,\ \text{b)}\ U_{23} = u_2,\ \text{c)}\ U_{23} = 0.$$

I. In den Gleichungen (11) kann immer $\beta = \gamma = 1$ und dann $\gamma = \pm 1 = \varepsilon^2$ gesetzt werden, wo $\varepsilon = 1$ oder $= i$ sein soll. Die Herleitung der Werte von u_1, u_2, u_3 ist für die verschiedene Zahl der Dimensionen wesentlich dieselbe. Ich entwickle dieselbe für $n = 3$, da man daraus die für $n = 1$ und $n = 2$ geltenden Gleichungen sofort übersieht. Indem ich das in § 1 angegebene Coordinatensystem zu Grunde lege und für $u_1 : 1, 0, 0$ festsetze, liefern die Gleichungen $U_{31} = u_2$, $U_{12} = u_3$ die Folgerungen:

$$\begin{aligned} u_2 &= A \sin x,\ B \sin x + \cos x,\ C \sin x \\ u_3 &= A \cos x,\ B \cos x - \sin x,\ C \cos x, \end{aligned}$$

wo A, B, C blosse Functionen von y und z sind.

Hiernach nimmt die Gleichung $U_{23}' = \varepsilon u_1'$ die Form an:

$$-A^2 + \frac{\partial A}{\partial y} = \varepsilon.$$

Dieser Gleichung genügt für $\varepsilon = i$ der Wert $A = 1$, für beide Werte von ε aber

$$A = \varepsilon \operatorname{tg}(y\varepsilon),$$

wo man von einer Constanten absehen kann. Nur der letztere Wert ist für $n = 3$ gestattet.

Aus der Gleichung $U_{23}'' = \varepsilon u_1''$ folgt:

$$\frac{\partial B}{\partial y} = AB, \text{ also für } A = 1 \text{ ist: } B = e^{y + a},$$

$$\text{für } A = \varepsilon \operatorname{tg}(y\varepsilon) \text{ ist: } B = \frac{b}{\cos(y\varepsilon)},$$

wo für $n = 3$ nur $b = 0$ gestattet ist. Auf dieselbe Weise folgt:

$$C = \frac{1}{\cos(y\varepsilon)}.$$

Demnach sind die Werte der u für $n = 3$:

$$(14)\quad\begin{cases} u_1 = 1,\quad 0,\quad 0 \\ u_2 = \varepsilon \operatorname{tg}(y\varepsilon) \sin x,\ \cos x,\ \dfrac{\sin x}{\cos(y\varepsilon)} \\ u_3 = \varepsilon \operatorname{tg}(y\varepsilon) \cos x,\ -\sin x,\ \dfrac{\cos(x)}{\cos(y\varepsilon)}. \end{cases}$$

Für $n = 2$ erhält man verschiedene Formen, nämlich a)

$$(15)\quad\begin{cases} u_1 = 1,\quad 0 \\ u_2 = \sin x,\ B \sin x + \cos x \\ u_3 = \cos x,\ B \cos x - \sin x. \end{cases}$$

wo B entweder gleich Null oder gleich e^y gesetzt werden muss, und dann eine Form, welche für jedes ε gilt und deren Einfachheit sich darauf stützt, dass, wie eine leichte Rechnung zeigt, hier B = 0 gesetzt werden darf:

$$(16) \quad \begin{cases} u_1 = 1 & 0 \\ u_2 = \varepsilon \operatorname{tg}(y\,\varepsilon) \sin x\,, & \cos x \\ u_3 = \varepsilon \operatorname{tg}(y\,\varepsilon) \cos x\,, & -\sin x. \end{cases}$$

Endlich muss für $n = 1$ $\varepsilon = i$ gesetzt werden, und wir bekommen:

$$(17) \quad u_1 = 1, \; u_2 = \sin x, \; u_3 = \cos x.$$

Wir fügen einige Worte über die durch diese Gleichungen charakterisirten Raumformen bei.

In der einfach ausgedehnten Raumform, deren Bewegung durch die Gleichungen (17) angegeben ist, ist die allgemeinste unendlich kleine Bewegung bei beliebigen Werten von $\varkappa$, λ, μ: $dx = (\varkappa + \lambda \sin x + \mu \cos x)\, dt$. Sie ist also ganz gleich in allen Punkten, welche um ganze Vielfache von $2\,\pi$ von einander abstehen; alle Punkte, für welche $\varkappa + \lambda \sin x + \mu \cos x = 0$ ist, bleiben in Ruhe. Streng genommen giebt es unendlich viele Raumformen, da man entweder jedem Punkte nur ein einziges x zuordnen oder jedes Vielfache von $2\,\pi$ als Periode festsetzen kann. Lässt man den Punkt $2\,\pi$ mit dem Punkte Null zusammenfallen, so erhält man die projektivische Bewegung einer Geraden oder eines Kegelschnitts in sich.

Für zwei Dimensionen stellen die Gleichungen (16) die drei sogenannten Nicht-Euklidischen Raumformen dar. Man erkennt dies am einfachsten, wenn man die beiden Coordinaten durch die drei Weierstrass'schen Grössen ersetzt, zwischen denen die bekannte Relation besteht. Es bietet aber auch einiges Interesse, aus den obigen Gleichungen direkt die drei Arten des Raumes herzuleiten. Dann wird es natürlicher sein, eine andere Anordnung der Zeichen zu treffen und demnach $\sin x$ durch $\varepsilon \sin (x\,\varepsilon)$ und $\cos x$ durch $\cos (x\,\varepsilon)$ zu ersetzen. Den Beweis selbst glaube ich hier nicht mitteilen zu sollen.

Die Gleichungen (15) stellen für $B = e^y$ und bei der Periode $2\,\pi$ von x die Gesamtheit der Geraden in der Lobatschewskyschen Ebene (die Polarform derselben) dar; man kann statt dessen auch jedes Vielfache von $2\,\pi$ als Periode betrachten. Für $B = 0$ kann man sich eine Vorstellung von der betreffenden Raumform bilden, wenn man in der Lobatschewskyschen Ebene die Grenzlinie als Element auffasst. Soll in dieser Raumform bei der Bewegung $\varkappa\, u_1 + \lambda\, u_2 + \mu\, u_3$ ein Punkt (Element) in Ruhe bleiben, so muss $\varkappa + \lambda \sin x + \mu \cos x = 0$ und $\lambda \cos x - \mu \sin x = 0$ sein. Dies ist nur möglich, wenn $\varkappa^2 = \lambda^2 + \mu^2$ ist, und in diesem Falle bleiben alle Elemente in Ruhe, für welche x bestimmte Werte annimmt, während y sich noch beliebig ändern kann. Will man die genannte Vorstellung zu Grunde legen, so ziehe man für die zu bestimmende Grenzlinie diejenige Achse, welche durch einen festen Punkt geht; der Abstand des Schnittpunktes von dem festen Punkte ist y, der Winkel, welchen diese Achse mit einer festen Richtung bildet, ist x. Für x kann jedes beliebige Vielfache von $2\,\pi$, für y jede beliebige Grösse als Periode gewählt werden.

Um die durch die Gleichungen (14) dargestellten Raumformen zu übersehen, beachten wir zunächst die Änderungen von x und y. Diese sind von z ganz unabhängig und stimmen mit den durch die Gleichungen (16) dargestellten vollständig überein. Man kann also jedem Punkte einer der letzteren zweidimensionalen Raumformen eine Linie der dreidimensionalen dadurch zuordnen, dass man z unbestimmt lässt. Untersucht man jetzt die Drehung um den Nullpunkt, so liefert dieselbe, wenn z' den Anfangswert, z den zu irgend einem t gehörigen Wert bezeichnet:

$$\operatorname{tg}(z - z') = \sin x \operatorname{tg} t.$$

Diese Gleichung lehrt, dass z als Perioden nur Vielfache von π erhalten kann, dass aber, wenn $\nu\pi$ (bei ganzzahligem ν) für die mit irgend einem Wertpaare x y verbundenen Werte von z als Periode gewählt ist, dasselbe $\nu\pi$ auch für jedes andere Wertsystem x y Periode von z sein muss. Dieses Resultat ändert sich nicht, wenn man irgend eine andere Bewegung untersucht. Man kann daher in einer Lobatschewskyschen oder Riemannschen Ebene von jedem Punkte aus noch die sämtlichen Geraden ausgehen lassen, und die durch einen Punkt markirten Geraden oder die von einem Punkte ausgehenden Richtungen als Elemente auffassen. Speziell kann man für $\varepsilon = 1$ die Tangenten einer Kugel als Elemente betrachten.

II. Wenn ein Paar (und damit einfach unendlich viele) vertauschbarer Bewegungen vorhanden ist, so sind oben drei verschiedene Möglichkeiten angegeben. Jede derselben liefert für $n = 2$ wieder zwei verschiedene Raumformen, welche sich dadurch unterscheiden, dass im zweiten Falle die vertauschbaren Bewegungen dieselben in sich verschiebbaren Linien erzeugen. Für $n = 3$ kommt jedesmal nur der erste Fall in betracht; für dx und dy treten keine Änderungen ein, und der jedesmalige Wert von dz ist in Klammern beigefügt. Demnach erhalten wir im Falle a)

$$\begin{aligned} &1)\ u_1 = 1,\ 0,\ (0) \text{ und } &&2)\ u_1 = 0,\ e^{-ax} \\ &\quad\ u_2 = 0,\ 1,\ (0) &&\quad\ u_2 = 0,\ e^{-\beta x} \\ &\quad\ u_3 = \alpha x,\ \beta y,\ (1) &&\quad\ u_3 = 1,\ 0 \end{aligned}$$

Der Fall b) liefert:

$$\begin{aligned} &1)\ u_1 = 1,\quad 0,\quad (0) \text{ und } &&2)\ u_1 = 0,\ e^{-\alpha x}\cos x \\ &\quad\ u_2 = 0,\quad 1,\quad (0) &&\quad\ u_2 = 0,\ e^{-\alpha x}\sin x \\ &\quad\ u_3 = \alpha x + y,\ -x + \alpha y,\ (1) &&\quad\ u_3 = 1,\ 0 \end{aligned}$$

Endlich giebt der Fall c):

$$\begin{aligned} &1)\ u_1 = 1,\ 0,\ (0) \text{ und } &&2)\ u_1 = 0,\ e^{-x} \\ &\quad\ u_2 = 0,\ 1,\ (0) &&\quad\ u_2 = 0,\ e^{-\alpha x} \\ &\quad\ u_3 = \alpha y,\ y,\ (1) &&\quad\ u_3 = 1,\ 0. \end{aligned}$$

Die drei unter 1) angegebenen Raumformen lassen sich leicht in der (Euklidischen) Ebene darstellen; jede Bewegung $\varkappa u_1 + \lambda u_2$ stellt eine Parallelverschiebung dar und die Geraden werden in sich bewegt. Jede andere Bewegung stellt eine gewisse collineare Umgestaltung der Ebene dar, bei welcher für a) und b) ein Punkt in Ruhe bleibt. Im ersten Falle werden zwei sich in dem ruhenden Punkte schneidende Geraden in sich verschoben; im zweiten Falle sind die Geraden imaginär, im Falle c) wird die allgemeine Bewegung eine (und zwar eine einzige) Gerade in sich verschieben oder dieselbe ganz in Ruhe lassen. Der zweite Fall liefert für die Drehung um den Nullpunkt die Gleichungen:

$$x = e^{\alpha t}\left(x' \cos t - y' \sin t\right),\ y = e^{\alpha t}\left(x' \sin t + y' \cos t\right).$$

Jede Richtung kehrt also in ihre Anfangslage zurück, aber die einzelnen Punkte derselben nehmen nach einer vollständigen Umdrehung nur für $\alpha = 0$ ihre Anfangslage wieder an. Die Euklidische Ebene ist daher nur als spezieller Fall unter diesen Raumformen enthalten. Man kann diese Raumform darstellen durch die sämtlichen Geraden, welche in einer dreifach ausgedehnten Lobatschewskyschen Raumform einer festen Richtung parallel sind, wofern festgesetzt wird, dass jede Drehung um eine Gerade der Schar mit einer durch α charakterisirten Verschiebung längs derselben Geraden verbunden ist.

Die einzelnen Gleichungssysteme stellen nur je eine einzige Raumform dar, da sich x und y von $-\infty$ bis $+\infty$ erstrecken, keine Periodicität gestatten und endliche Werte durch keine Bewegung in unendliche übergehen können.

Die drei unter 2) angegebenen Raumformen können dargestellt werden, wenn man mit der Ebene die angegebene projektivische Umformung vornimmt und die Gerade als Element betrachtet. Im ersten Falle gelangt man jedoch von einer beliebig gewählten Geraden aus durch endliche Umformungen nicht zu jeder Geraden der Ebene, so dass die Gesamtheit der Geraden zwei völlig getrennte, aber in ihrem Wesen übereinstimmende Raumformen darstellt.

Für $n = 3$ sei es nur gestattet, auf diejenigen Flächen aufmerksam zu machen, welche so in sich bewegt werden können, dass jeder Punkt mit jedem andern Punkte zur Deckung gelangt. Solcher Flächen giebt es bei den unter I. enthaltenen Raumformen von drei Dimensionen nur für $\varepsilon = i$ eine (und zwar eine einzige) Schar. Hier gibt es mehrere Scharen und für die einzelnen Scharen gelten verschiedene Bewegungsgleichungen.

III. Wenn eine Bewegung mit allen andern vertauschbar ist, so sind die verschiedenen Formen leicht zu übersehen. Sind alle Bewegungen vertauschbar und alle drei Variabeln periodisch, so kann die Raumform in folgender Weise dargestellt werden: In einer fünffach ausgedehnten Riemannschen Raumform wähle man drei Gerade, von denen jede die absolute Polare der andern beiden ist, und bewege den Raum so, dass jede Gerade in Deckung mit ihrer Anfangslage bleibt; das dadurch von irgend einem Punkte beschriebene Gebilde ist die fragliche dreifach ausgedehnte Raumform.

§ 7.

Besondere Beziehungen zwischen einzelnen Raumformen.

Blicken wir unter den in den beiden letzten §§ skizzirten Raumformen auf diejenigen zurück, für welche die Coefficienten a in den Gleichungen (6) denselben Wert haben, so nehmen wir zwischen denselben eine auffallende Übereinstimmung wahr. Diese Übereinstimmung kann in folgender Weise formulirt werden:

„Zwei Raumformen, für welche die in den Gleichungen (6) auftretenden Constanten a denselben Wert haben, können stetig so auf einander abgebildet werden, dass diese Beziehung bei jeder Bewegung der einen Raumform bestehen bleibt, wenn gleichzeitig die andere in entsprechender Weise bewegt wird."

Hier heissen zwei unendlich kleine Bewegungen $p_1 u_1 + \ldots + p_m u_m$ und $q_1 u_1 + \ldots + q_m u_m$ entsprechend, wenn für jeden Wert von $\varkappa$ ist $p_\varkappa = q_\varkappa$.

Der allgemeine Beweis dieses Satzes würde uns hier zu weit führen. Es möge genügen, einige Beispiele anzuführen. Auf eine gewisse Gruppe habe ich schon früher aufmerksam gemacht: betrachtet man in irgend einer Euklidischen oder Nicht-Euklidischen Raumform von n Dimensionen die $(n-1)$-fach ausgedehnte Ebene als Element, so kommt man zu einer neuen Raumform, welche ich als die Polarform der ersteren bezeichnet habe (Borchardt's Journal B. 86. S. 82); beide Raumformen sind von derselben Dimension, genügen auch denselben Bewegungsgleichungen, können aber im übrigen recht verschieden sein. Mit demselben Rechte kann man irgend eine Ebene der Raumform als Element betrachten.

So hat die Plückersche Geradengeometrie dieselben Gleichungen (6), wie die entsprechende dreifach ausgedehnte Raumform.

Ich wähle jetzt einige der gefundenen Raumformen, um an ihnen die Art der gegenseitigen Beziehung zu erläutern.

1. $U_{12} = u_1$. Für diese Bedingung haben wir zwei Raumformen gefunden, eine von einer und eine von zwei Dimensionen. Vergleichen wir die daraus hergeleiteten Bewegungsgleichungen in x resp. in x und y, so zeigt sich, dass die Gleichungen für dx im letzteren Falle von y ganz unabhängig sind und mit den für die einfach ausgedehnte Raumform gefundenen übereinstimmen. Man kann also jedem Punkte $x = c$ der einfach ausgedehnten Raumform eine Linie $x = c$ der zweifach ausgedehnten zuordnen, wo dem y jeder beliebige Wert beigelegt werden kann. Um eine recht deutliche Vorstellung von dieser Zuordnung zu bekommen, betrachten wir als Elemente der einfach ausgedehnten Raumform die sämtlichen Geraden einer Lobatschewskyschen Ebene, welche einer bestimmten Richtung parallel sind, und als Elemente der zweifach ausgedehnten die Punkte dieser Ebene, indem wir nur solche Bewegungen gestatten, bei welchen die gegebene Richtung zu ihrer Anfangslage parallel bleibt. Zur Coordinatenbestimmung im letzteren Falle ziehen wir dieselbe Grenzlinie, welche für die andere benutzt worden ist; durch den zu bestimmenden Punkt ziehe man die Parallele und bezeichne das auf ihr bis zum Schnittpunkt abgeschnittene Stück als y, das Stück auf der Grenzlinie als x. Dann wird jede Bewegung durch die angegebenen Gleichungen dargestellt und die Vorstellung der beiden Raumformen fällt geradezu zusammen.

2. $U_{23} = - u_1$, $U_{31} = u_2$, $U_{12} = u_3$. Diese Gleichungen führen auf fünf Raumformen, eine von einer, drei von zwei und eine von drei Dimensionen. Die drei zweidimensionalen Raumformen sind identisch mit der Lobatschewskyschen Ebene, indem man entweder den Punkt oder die Gerade oder die Grenzlinie als Element betrachtet. Man kann dieselben behandeln unter Anwendung dreier Variabeln u, v, w, wenn man jede homogene lineare Transformation derselben gestattet, bei welcher die Form $- u^2 + v^2 + w^2$ ungeändert bleibt. Indem man den Anfangspunkt mit O, jeden beliebigen Punkt mit P, ferner O P mit r, den Winkel zwischen O P und einer festen Richtung O X mit φ bezeichnet, bedeutet für den Punkt P:

$$u = \mathrm{Ch}\, r,\ v = \mathrm{Sh}\, r \cos \varphi,\ w = \mathrm{Sh}\, r . \sin \varphi,$$

für die Gerade, welche in P auf O P senkrecht steht:

$$u = \mathrm{Sh}\, r,\ v = \mathrm{Ch}\, r \cos \varphi,\ w = \mathrm{Ch}\, r \sin \varphi,$$

und für die zur Richtung φ gehörige und durch P gehende Grenzlinie:

$$u = e^r,\ v = e^r \cos \varphi,\ w = e^r \sin \varphi.$$

Dann entspricht jedem System u, v, w je ein einziges Element; wir ordnen solche Elemente einander zu, für welche r und φ denselben Wert haben. Dann entspricht jedem Punkte eine Gerade mit Ausnahme eines Punktes, dem unendlich viele Geraden entsprechen, und jedem Punkte entsprechen zwei Grenzlinien mit Ausnahme eines Punktes, welchem unendlich viele zugeordnet sind. Jeder Geraden entspricht ein einziger Punkt und entsprechen zwei Grenzlinien, und jeder Grenzlinie ein Punkt und eine Gerade.

Noch in anderer Weise kann man die Lobatschewskysche Ebene zu ihrer Polarform in Beziehung setzen. Bekanntlich kann man die Lobatsckewskysche Ebene eindeutig auf das Innere einer in einer Ebene gelegenen Kegelschnittes abbilden; das Äussere bildet dann die Polarform ab.

Die Art und Weise, die Gesamtheit der Geraden und die der Grenzlinien auf die dreifach bewegliche eindimensionale Raumform abzubilben, ist sehr einfach. Man ordne jedem Punkte x alle diejenigen Geraden und diejenigen Grenzlinien zu, welche auf einer durch einen festen Punkt gezogenen Geraden senkrecht stehen, wenn diese Gerade mit einer festen, durch den festen Punkt gelegten Richtung den Winkel x bildet. Ähnlich kann auch die Zuordnung der Punkte vermittelt werden. Indessen ist diese Zuwendung für die Punkte und die Geraden nicht frei von Willkür. Hier kommt aber noch die Beziehung hinzu, dass die unendlich ferne Linie der zweifach ausgedehnten Raumformen eine einfach ausgedehnte Raumform der bezeichneten Art ist.

Die Beziehung zwischen den zwei- und dreifach ausgedehnten Raumformen ist schon oben angegeben. Man betrachte in der Lobatschewskyschen Ebene nicht den einzelnen Punkt als Element, sondern jede von dem Punkte ausgehende Richtung, oder man verbinde mit jeder Geraden oder mit jeder Grenzlinie die Gesamtheit der auf derselben enthaltenen Punkte. Jedesmal gelangt man zu derselben dreifach ausgedehnten Raumform, und es entspricht jedem Elemente der zweifach ausgedehnten eine Linie der dreifach ausgedehnten Raumform.

Die Zuordnung der Raumform von einer und der von drei Dimensionen wird vielleicht am natürlichsten durch die Gesamtheit der Grenzlinien vermittelt. Jedem Punkte der ersten entspricht die Gesamtheit der Grenzlinien, für welche v : w einen constanten Wert hat, und jeder solchen Grenzlinie entspricht eine Linie der dreifach ausgedehnten Raumform. Man kann aber die Zuordnung der ein- und dreidimensionalen Raumform auf das unendlich ferne Gebilde der letzteren beschränken, indem man jedem Punkte der ersteren eine Linie dieses Gebildes entsprechen lässt.

Ich halte es nicht für nothwendig, auch die Zuordnung der übrigen, oben gefundenen Raumformen zu besprechen.

LECTIONES.

A. ORDINIS THEOLOGORUM.

Dr. Franc. Hipler, P. P. O., h. t. Decanus.

I. Theologiam pastoralem docebit sexies per hebd. hora IX.
II. De jure matrimoniali disseret diebus Martis et Veneris hora VIII.
III. Eloquentiae sacrae praecepta tradere perget diebus Lunae et Jovis hora VIII.

Dr. Franc. Dittrich, P. P. O.

I. Historiam ecclesiae primaevae diebus Lunae, Martis, Mercurii, Jovis hora IX.
II. Historiam novissimi temporis die Veneris hora IX enarrabit.
III. De arte christiana disseret die Saturni hora IX.

Dr. Henr. Oswald, P. P. O.

I. De peccato originali et de generis humani redemptione doctrinam exponet quinquies vel sexies p. hebd. hora X.
II. Praemissa introductione selecta capita libri Geneseos interpretabitur bis terve p. hebd. hora def.
III. Grammaticam linguae Hebraicae docebit, adjungens exercitia interpretatoria, ter p. hebd. hora II.

Dr. Hugo Weiss, P. P. O.

I. Reliquam partem Evangelii Johannei et epistolam S. Pauli ad Ephesios interpretabitur quater p. hebd. hora VIII.
II. Apologeticen tradet bis p. hebd. hora II.
III. Repetitiones exegeticas instituet semel p. hebd. hora def.

Dr. Julius Marquardt, P. P. O.

I. Theologiae moralis partem specialem, quae est de virtutibus et officiis ad vitam socialem pertinentibus, tradet, addens repetitiones et disputationes, quinquies vel sexies p. hebd. hora XI.
II. Pauca de patrologia praefatus vitam et scripta patrum apostolicorum enarrabit horis def.

B. ORDINIS PHILOSOPHORUM.

Dr. Jos. Bender, P. P. O., h. t. Decanus.

I. Historiam generis humani primaevam resque populorum orientalium enarrabit ter per hebd. hora XI.
II. Historiam Prussiae imprimis Warmiae tradet bis per hebd. h. XI.
III. Historiam poësis christianae apud Germanos cultae exponet selectorumque carminum interpretatione illustrabit semel per hebd. h. XI.
IV. Repetitorium historicum cum exercitationibus criticis offert hor. def.

Dr. Frid. Michelis, P. P. O.

Nullas scholas habebit.

Dr. Wilh. Weissbrodt, P. P. O.

I. Historiam artis antiquae, imprimis sacrae bis hebdomade hora IX enarrabit.
II. Inscriptiones graecas et latinas bis hebdomade hora IX interpretabitur.
III. Exercitationes philologas horis deff. instituet.

Dr. Wilh. Killing, P. P. O.

I. Astronomiam popularem docebit ter quarterve per hebd. h. VIII.
II. Fundamenta chemiae tradet bis per hebd. h. VIII.
III. Calculum differentialem et integralem explicabit horis deff.

Dr. Jos. Krause.

I. Psychologiam docebit ter per hebd. hora X.
II. Metaphysicam tradet ter per hebd. hora X.

Publica doctrinae subsidia.

Bibliotheca, cui praeest **Prof. Dr. Weiss,** commilitonibus patebit diebus Martis et Veneris hora II—III.

Instrumenta, quae ad physicen, mathematicam et astronomiam pertinent, asservat **Prof. Dr. Killing.**

Renuntiatio judiciorum de certamine literario a commilitonibus Lycei Regii Hosiani anno superiore inito et quaestionum in annum currentem propositarum promulgatio.

Ordo Theologorum pro certamine literario hasce proposuerat quaestiones:

I. Ex instituto Regio: Data genuina justitiae definitione ejus species enumerentur, explicentur et quatenus ad Deum transferri possint, ostendatur; dein quomodo divina justitia cum ceteris Dei attributis ac praeprimis cum satisfactione Christi vicaria conveniat, discutiatur.

II. Ex instituto Scheill-Busseano: Quae differentia in primaeva ecclesia episcopos inter et presbyteros fuerit, exponatur.

Quod attinet ad prius argumentum difficile sane, sed quod ingenii acumen magnopere exercere potuerit, neminem fuisse qui in arenam descenderit ac de palma certaverit, theologorum Ordo dolenter fatetur.

De altera quaestione Ordini traditum est opusculum his inscriptum verbis: „Murus civitatis habens fundamenta duodecim et in ipsis duodecim nomina apostolorum agni".

Auctor hujus opusculi materiam satis amplam atque ad argumentum illustrandum idoneam ex libris, qui ad manus erant, congessit nec inepte disposuit. Ceteroquin minus diligenter ac feliciter processit adeoque praesertim bene scribendi et grammaticorum praecepta neglexit, ut quae libellum facile commendare potuerint, multis vitiis obscurata videantur. Quapropter Ordo theologorum (circumspectis omnibus rebus) scriptori dimidiam praemii constituti partem adjudicandam esse censuit.

Schedula reclusa nomen prodiit:

Rudolphus Buchholz, stud. theol.

Ordo Philosophorum commilitones de praemio Regio certaturos quaerere jusserat, quid Dante Alighieri in comoedia divina de rerum natura sentiatur.

Commentatio Ordini subjecta est una his verbis insignita: „Coeli enarrant gloriam Dei et opera ejus annuntiat firmamentum." Ps. XVIII, 2.

Quam qui conscripsit, satis accurate in re proposita versatus est, et quamquam nonnullis locis fusius scholasticorum sententias explicavit, tamen poetae non neglexit. Scripsit dilucide et, si a quibusdam locis discesseris, pure atque emendate. Quapropter praemium ei persolvendum esse Ordo judicavit.

Aperta charta prodiit nomen:

Augustinus Bludau, stud. phil.

Commilitonibus Lycei Regii Hosiani pro certamine literario in annum currentem has quaestiones proponit

Ordo Theologorum: I. Ex instituto Regio: De discrimine mortale inter et veniale peccatum intercedente ex mente sacrae scripturae et patrum disputetur.

II. Ex stipendio Scheill-Busseano: De ritibus funerum apud veteres christianos.

Ordo Philosophorum: Quid Aeschylus in „Prometheo vincto“ de divina justitia et providentia censeat, exponatur.

Certantium commentationes sermone latino scriptae et more consueto signatae ante d. XV. Januarii anni MDCCCLXXXV. Rectori Lycei tradendae sunt.

. Victoribus praemia constituta sunt ex instituto Regio LXXV, ex stipendio Scheill-Busseano C marcarum.