Ableitung

der

Poisson'schen Differentialgleichung

für die Potentialfunction
für rechtwinklige, krummlinige Coordinaten,

und zwar

mit Hülfe des theorema quartum

aus Gauss's Abhandlung

„De attractione corporum sphaeroidicorum homogeneorum".

Von

Adalbert Luke,
Gymnasial-Oberlehrer.

Programmabhandlung des Königl. Gymnasiums zu Marienburg.

Marienburg.
Druck von L. Giesow.
1880.

1880. Programm No. 30.

Ableitung

der Poisson'schen Differentialgleichung für die Potentialfunction für rechtwinklige, krummlinige Coordinaten, und zwar mit Hülfe des theorema quartum aus Gauss's Abhandlung „De attractione corporum sphaeroidicorum homogeneorum".

Zu den schwierigsten Problemen der Mechanik gehört ohne Zweifel, wie Gauss in der Einleitung seiner Abhandlung „De attractione corporum sphaeroidicorum homogeneorum" sagt, das Problem, die Anziehung, welche die Körper auf einander ausüben, exact zu berechnen. Seit der Aufstellung des Gravitationsgesetzes durch Newton hat dieses Problem daher die Mathematiker immer und immer wieder zu neuen Untersuchungen, zu neuen Anstrengungen angetrieben, endlich ein allgemeines und doch einfaches Verfahren, diese Anziehung zu berechnen, aufzufinden. Newton[1]) selbst, Mac Laurin[2]), Lagrange[3]), Legendre[4]), La Place[5]) und Poisson[6]), Biot[7]) und Plana[8]) be-

[1]) Newton (Natural Philosoph. Lib. I Prop. XC1) lehrt uns die Anziehung berechnen, welche ein homogenes Rotationsellipsoid auf einen in der Axe gelegenen Punct ausübt, ferner das einfache Verhältniss zwischen den Anziehungskräften aller Puncte innerhalb des Rotationsellipsoids, welche in ein und demselben Durchmesser liegen.

[2]) Mac Laurin (De caussa physica fluxus et refluxus maris in Recueil des pièces, qui ont remporté les prix de l'acad. royale des sc. T. IV. ferner Treatise of fluxions Bd. I ch. 14.) berechnet die Anziehung des Rotationsellipsoids auf in der Oberfläche selbst und in der erweiterten Aequatorialebene gelegene Puncte und löst hiemit die Aufgabe, die Anziehung auf Puncte innerhalb des Ellipsoids zu bestimmen.

[3]) Lagrange löst die Aufgabe, die Mac Laurin auf synthetischem Wege löst, auf analytischem Wege (Nouv. Mém. de l'acad. de Berlin 1773); einen analytischen Beweis liefert auch D'Alembert (Opuscules mathématiques par d'Alembert Tome VI 1773. Sur la figure de la terre).

[4]) Legendre löst zunächst die Aufgabe, die Anziehung eines Rotationselepsoids auf äussere Puncte für jede beliebige Lage der Puncte zu bestimmen und folgert die Gültigkeit seiner Sätze für jedes Elipsoid, ohne einen strengen Beweis für dieselbe zu geben; (Recherches sur l'attraction des sphéroides homogènes, Mémoires présentés à l'academie royale. des sc. 1788. Sur les integrales doubles).

[5]) La Place liefert schon 1782 einen Beweis für die Legendre'sche Lösung (Histoire de l'acad. royale. des sc. de Paris 1782, ferner Théorie du mouvement et de la figure elliptique des planètes und Mécanique céleste Vol. 2). Es möge mir hier vergönnt sein, den Ausspruch Lagrange's über die Lösungen von Legendre und La Place einzufügen: Lagrange sagt: On ne peut regarder leur solution, comme des chefs-d'oeuvres d'analyse, mais on peut desirer encore une solution plus directe et plus simple et les progrês continuels de l'analyse donnent lieu de l'espèrer (Nouv. Mém. de l'acad. de Berliu 1793 pag. 263).

[6]) Poisson. Mémoire sur l'attraction d'un ellipsoide homogène, lu à l'acad. le 7. octobr. 1833; Mémoires de l'acad roysale des c. de l'institut de France T. XIII, Poisson weist hier nach, dass die La Place'sche Differentialgleichung $\frac{d^2V}{dx^2} + \frac{d^2V}{dy^2} + \frac{d^2V}{d_2} = 0$ für die Potentialfunction nicht für jede Lage des Punctes gültig ist pag. 513.

[7]) Mémoires de l'instit. T. VI.|

[8]) Memorie di matematica a. di fisica della societé italiana T. XV.

schäftigen sich mit diesem Problem; Newton, Mac Laurin und Lagrange beschränken sich zunächst auf das Rotationsellipsoid, später bestimmt Lagrange die Anziehung eines jeden Ellipsoids in der Richtung der Hauptaxen, Legendre, La Place und Poisson lösen die allgemeine Aufgabe für jedes Ellipsoid, doch diese Arbeiten, sowie die von Biot und Plana, denen die 1788 veröffentlichte zweite Lösung von Legendre zu Grunde liegt, gehören zu den schwierigsten, verwickeltsten analytischen Untersuchungen: erst Gauss war es vorbehalten, eine einfache und doch allgemeine Lösung dieses Problems zu geben. Gauss[9]) liefert diese Lösung des Problems durch seine Abhandlungen „De attractione corporum sphaeroidicorum homogeneorum. Bd. V pag. 3. — Allgemeine Lehrsätze in Beziehung auf die im verkehrten Verhältnisse des Quadrates wirkenden Kräfte Bd. V pag. 197. und Theoria attractionis corporum sphaeroidicorum ellipticorum homogeneorum methodo nova tractata. Bd. V pag. 279. Bei der Lösung des Problems stellt Gauss in der zunächst genannten Abhandlung 6 Sätze auf, welche, wie er selbst[10]) hinzufügt, in vielen Fällen mit gutem Erfolge angewendet werden können, und so soll auch hier der vierte dieser Sätze zur Ableitung der Poisson'schen Differentialgleichung für die Potentialfunction, welche ja zur Berechnung der gegenseitigen Anziehung der Körper führt, benutzt werden, und zwar zur Ableitung der Gleichung für rechtwinklige, krummlinige Coordinaten im Raume.

Dieses vierte Theorem lautet:

Integrale $\int \frac{d\omega \cos MQ}{r^2}$ per totam superficiem extensum fit vel $= 0$, vel $= -2\pi$, vel $= -4\pi$ prout M iacet extra corpus, vel in eius superficie, vel intra corpus.

Ceterum, fügt Gaus hinzu, per eadem ratiocinia demonstratur generaliter integrale $\int \frac{P\, d\omega \cos MQ}{r^2}$ in casu primo evanescere, si P denotet functionem quamcunque rationalem quantitatum cos MX, cos MY, cos MZ.

Hier bedeutet $d\omega$ das Flächenelement, cos MQ den cos des Winkels zwischen der nach aussen hin auf der Oberfläche errichteten Normalen und der Linie r, die den Punct M mit dem Puncte der Oberfläche verbindet, endlich MX, MY, MZ die Winkel, welche r mit den Coordinatenaxen X, Y, Z bildet.

Unter der Potentialfunction versteht man die Summe aller Massentheilchen eines Körpers, je dividirt durch ihre Entfernungen von dem beeinflussten Puncte, dem man die Masse 1 beilegen kann; diese Function hat die Eigenschaft, dass ihre Derivirte nach einer Richtung hin die Componente der von der Masse auf den Punct ausgeübten Kraft nach dieser Richtung hin ergibt: Die Potentialfunction ist also $\Sigma \frac{m}{r}$. Diese Function wurde in die Theorie der Gravitation eingeführt von La Place[11]) ebenso in die Theorie der Electricität und des Magnetismus von Poisson[12]).

---

[9]) Gauss sagt in der Vorrede: Gratum itaque analystis atque astronomis fore speramus solutionem novam problematis celebratissimi per viam plane diversam procedentem, et ni fallimur ea simplicitate gaudentem, ut nihil amplius desiderandum linquat.

[10]) Gauss nennt diese Sätze disquisitiones praeliminares, quae in aliis quoque occasionibus opportune applicari poterumt.

[11]) Théorie des attractions des sphéroides et de la figure des planètes (Histoire de l'acad. royale des sc. 1782).

[12]) Bulletin de la societé philomatique T. III p. 368 ferner Mémoire sur la théorie du magnetisme en mouvement Mém. de l'acad. royale des sc. de l'inst. de France T. VI pag. 463; und Mém. sur l'attraction des sphéroides. (Connaissance des temps 1829 pag. 360) endlich in dem unter 6 angeführten Werke.

Die Benennung rührt her von Green[13]) und Gauss[14]). Gauss nennt die Function schlechthin das Potential, doch da unter dem Potential auch die Summe aus den Producten der Massen zweier materiellen Puncte dividirt durch ihre gegenseitige Entfernung verstanden wird, diese Summe ausgeführt über die Massen der Körper, also $\Sigma\frac{m\,m_1}{r}$, so soll hier die Bezeichnung Potentialfunction beibehalten werden[15]).

Diese Function genügt, wie La Place zuerst gezeigt hat, wenn man ein rechtwinkliges, geradliniges Coordinatensystem zu Grunde legt, der Gleichung $\frac{d^2V}{dx^2} + \frac{d^2V}{dy^2} + \frac{d^2V}{dz^2} = 0$, jedoch nur wenn der angezogene Punct ausserhalb der anziehenden Masse liegt. La Place[16]) hielt diese Gleichung für allgemein gültig, später erst berichtigte Poisson[17]) dieselbe dahin, dass $\frac{d^2V}{dx^2} + \frac{d^2V}{dy^2} + \frac{d^2V}{dz^2} = 0$ für einen äusseren, $\frac{d^2V}{dx^2} + \frac{d^2V}{dy^2} + \frac{d^2V}{dz^2} = 4\pi\delta$ für einen inneren Punct gilt, wenn δ die Dichtigkeit der Masse im Puncte x, y, z bedeutet. Da nun aber in sehr vielen Fällen die Lösung physikalischer Probleme bedeutend vereinfacht wird, wenn man von dem geradlinigen, rechtwinkligen Coordinatensysteme abgeht und das Coordinatensystem der zu behandelnden Aufgabe anpasst, so ist diese Gleichung für einzelne häufig zur Anwendung kommende Coordinatensysteme umgeformt, ebenso ist sie auch von Lamé[18]) für allgemeine rechtwinklige, krummlinige Coordinaten abgeleitet, jedoch auf dem Wege der zweimaligen Differentiation; hier soll ein kürzerer Weg eingeschlagen werden und die Gleichung $\frac{d^2V}{dx^2} + \frac{d^2V}{dy^2} + \frac{d^2V}{dz^2} = \triangle_2 V$ [19]) $= 0$

---

[13]) An Essay on the Application of mathematical Analysis to the theories of Electricity and Magnetism by George Green Nottingham 1828, abgedruckt in Crellès Journal Bd. 44 pag. 356. Pag. 359 heisst es: As this function, which gives in so simple a form the values of the forces by which a particle p of electricity, any hov situated, is impelled, will recur very frequently in what follows, we have ventured to call it the potential function to the system, and it will evidently be a function of the co-ordinates of the particle p under consideration.

[14]) Gauss in den schon erwähnten Schriften.

[15]) Den Unterschied zwischen Potentialfunction und Potential macht z. B. auch Betti „Theorica delle forze che agiscono secondo la legge di Newton Pisa 1865. Bernh. Riemann „Schwere, Electricität und Magnetismus, nach den Vorlesungen von Riemann, bearbeitet von Hattendorf, Hannover 1876.

Th. Kötteritzsch. Lehrcuch der Electrostatik. Leipzig 1872.

W. von Bezold. Physikalische Bedeutung der Potentialfunction, München 1861.

Ebenso macht Clausius in seiner Schrift „Die Potentialfunction und das Potential Leipzig 1877" diesen Unterschied.

Gauss dagegen nennt die in Frage stehende Function das Potential, ebenso Lejeune-Dirichlet „Vorlesungen über die im umgekehrten Verhältniss des Quadrats der Entfernung wirkenden Kräfte, bearbeitet von Dr. F. Grube, Leipzig 1876" ferner auch Lamé „Leçons sur les coordonnées curviligues Paris 1859".

[16]) In der schon erwähnten Abhandlung: Théorie des attractions des sphéroides et de la figure des planètes. Histoire de l'acad. des sc. 1782.

[17]) In der ebenfalls schon erwähnten Schrift „Mémoire sur l'attraction d'un ellipsoide homogène. (Mém. de l'acad. royale des sc. de l'inst, de Fr. Tom XIII). Pag. 514 heisst es: Or, j'ai fait voir, que si ce point appartient à la masse du corps attirant, on a

$$\frac{d^2V}{da^2} + \frac{d^2V}{db^2} + \frac{d^2V}{dz^2} = 4\pi\delta$$

en designant par δ la densité du corps, qui a lieu en ce même point; etwas tiefer heisst es auf derselben Seite; Si le point attiré est situé en dehors de la masse du corps attirant, on a l'équation

$$\frac{d^2V}{da^2} + \frac{d^2V}{db^2} + \frac{d^2V}{dc^2} = 0.$$

[18]) Lamé, Leçons sur les coordonnées curviligues pag. 22.

[19]) Für die Summe dieser zweiten Differentialquotienten von V sind vielfach andere Bezeichnungen üblich. Lamé bezeichnet dieselbe mit $\triangle_2 V$; Green gebraucht das Zeichen δV, Clausius in seiner oben angeführten Schrift $\triangle V$, weil δ auch das Zeichen für Variationen ist, Thomson und Tait $\nabla_2 V$. Die Bezeichnung von Lamé hat auch Betti in seiner ebenfalls schon angeführten Abhandlung.

oder — $4\pi k$, wenn k die Dichtigkeit im Puncte x, y, z bedeutet, für ein beliebiges rechtwinkliges, krummliniges Coordinatensystem abgeleitet werden mit Hülfe des oben erwähnten theorema puartum aus Gauss's Abhandlung „De attractione corporum sphaeroidicorum.“

I.

Bevor wir nun zu der Ableitung der Gleichung für rechtwinklige krummlinige Coordinaten im Raume schreiten, müssen wir auf diese selbst etwas näher eingehen.

Man bestimmt die Lage eines Punctes im Raume in der Regel durch seine Entfernungen von 3 zu einander senkrechten Elemen, den Coordinatenebenen, oder, was dasselbe ist, man betrachtet ihn als den Durchschnittspunct von 3 zu einander senkrechten Ebenen, welche parallel den Coordinatenebenen sind und deren Lage durch ihre Entfernungen von den Coordinatenebenen bestimmt ist. Diese Bestimmungsweise soll verallgemeinert werden, es soll der Punct als Durchschnittspunct dreier Flächen betrachtet werden, welche nur der Bedingung genügen, dass sie sich rechtwinklig schneiden. Auf diese Weise wird der Punct, wie bei der zuerst angeführten Bestimmungsweise durch seine Entfernungen von den 3 sich rechtwinklig schneidenden Coordinatenebenen, so jetzt durch die 3 Parameter bestimmt, welche den sich rechtwinklig schneidenden Flächen zukommen.

Es seien nun

$$f_1 (x, y, z) = 0$$
$$f_2 (x, y, z) = 0$$
$$f_3 (x, y, z) = 0$$

die Gleichungen der drei Flächen, welche sich rechtwinklig schneiden sollen, bezogen auf das rechtwinklig, geradlinige Coordinatensystem, oder falls man sofort den veränderlichen Parameter einführt

$$f_1 (x, y, z) = \varrho_1$$
$$f_2 (x, y, z) = \varrho_2$$
$$f_3 (x, y, z) = \varrho_3;$$

es repräsentirt dann jede Gleichung eine Familie von Oberflächen, aus welcher die einzelne Fläche durch Festsetzung des Parameters bestimmt wird.

Zunächst müssen nun die Bedingungsgleichungen abgeleitet werden, denen den Flächen genügen müssen, wenn sie sich rechtwinklig schneiden. Sollen sich die Flächen rechtwinklig schneiden, so müssen sich auch die im Schnittpuncte an die einzelnen Flächen gelegten Tangentialebenen rechtwinklig schneiden d. h. es müssen sich die Normalen, welche man auf die einzelnen Flächen im Durchschnittspuncte errichten kann, rechtwinklig schneiden.

Die Normale N_1, welche man auf der Fläche $f_1 = \varrho_1$, im Puncte P (x, y, z) errichten kann, bildet nun mit den geradlinigen, rechtwinkligen Coordinatenaxen Winkel, deren Cosinus durch folgende Gleichungen gegeben sind:

$$\cos N_1 X = \frac{\frac{d\varrho_1}{dx}}{\sqrt{\left(\frac{d\varrho_1}{dx}\right)^2 + \left(\frac{d\varrho_1}{dy}\right)^2 + \left(\frac{d\varrho_1}{dz}\right)^2}}$$

$$\cos N_1 Y = \frac{\frac{d\varrho_1}{dy}}{\sqrt{\left(\frac{d\varrho_1}{dx}\right)^2 + \left(\frac{d\varrho_1}{dy}\right)^2 + \left(\frac{d\varrho_1}{dz}\right)^2}}$$

$$\cos N_1 Z = \frac{\frac{d\varrho_1}{dz}}{\sqrt{\left(\frac{d\varrho_1}{dx}\right)^2 + \left(\frac{d\varrho_1}{dy}\right)^2 + \left(\frac{d\varrho_1}{dz}\right)^2}}$$

oder wenn wir nach Lamé die Abkürzung einführen:

$$h_1 = \sqrt{\left(\frac{d\varrho_1}{dx}\right)^2 + \left(\frac{d\varrho_1}{dy}\right)^2 + \left(\frac{d\varrho_1}{dz}\right)^2}$$

$$\cos N_1 X = \frac{1}{h_1} \cdot \frac{d\varrho_1}{dx}$$

$$\cos N_1 Y = \frac{1}{h_1} \cdot \frac{d\varrho_1}{dy}$$

$$\cos N_1 Z = \frac{1}{h_1} \cdot \frac{d\varrho_1}{dz}$$

ebenso werden die Winkel, welche die Normalen N_2 und N_3, in P auf den Flächen $f_2 = \varrho_2$ und $f_3 = \varrho_3$ errichtet, mit den Coordinatenaxen bilden, den Gleichungen genügen müssen.

$$\cos N_2 X = \frac{1}{h_2} \frac{d\varrho_2}{dx}$$

$$\cos N_2 Y = \frac{1}{h_2} \frac{d\varrho_2}{dy}$$

$$\cos N_2 Z = \frac{1}{h_2} \frac{d\varrho_2}{dy} \text{ ferner:}$$

$$\cos N_3 X = \frac{1}{h_3} \frac{d\varrho_3}{dx}$$

$$\cos N_3 Y = \frac{1}{h_3} \frac{d\varrho_3}{dy}$$

$$\cos N_3 Z = \frac{1}{h_3} \frac{d\varrho_3}{dz}$$

Nun sollen die Normalen senkrecht auf einander stehen d. h. $\cos N_2 N_3 = \cos N_3 N_1 = \cos N_1 N_2 = \cos R = 0$. Daraus ergeben sich folgende Gleichungen:

$$\cos N_2 X \cos N_3 X + \cos N_2 Y \cos N_3 Y + \cos N_2 Z \cos N_3 Z = 0$$

$$\cos N_3 X \cos N_1 X + \cos N_3 Y \cos N_1 Y + \cos N_3 Z \cos N_1 Z = 0$$

$$\cos N_1 X \cos N_2 X + \cos N_1 Y \cos N_2 Y + \cos N_1 Z \cos N_2 Z = 0 \text{ oder:}$$

$$\frac{1}{h_2 h_3}\left(\frac{d\varrho_2}{dx}\frac{d\varrho_3}{dx} + \frac{d\varrho_2}{dy}\frac{d\varrho_3}{dy} + \frac{d\varrho_2}{dz}\frac{d\varrho_3}{dz}\right) = 0$$

$$\frac{1}{h_2 h_3}\left(\frac{d\varrho_3}{dx}\frac{d\varrho_1}{dx} + \frac{d\varrho_3}{dx}\frac{d\varrho_1}{dy} + \frac{d\varrho_3}{dz}\frac{d\varrho_1}{dz}\right) = 0$$

$$\frac{1}{h^1 h_2}\left(\frac{d\varrho_1}{dx}\frac{d\varrho_2}{dx} + \frac{d\varrho_1}{dy}\frac{d\varrho_2}{dy} + \frac{d\varrho_1}{dz}\frac{d\varrho_2}{dz}\right) = 0.$$

Wenn die Normaleu N_1, N_2, N_3 nun rechte Winkel mit einander bilden, müssen auch umgekehrt folgende Gleichungen bestehen:

$$\cos Y N_1 \cos Z N_1 + \cos Y N_2 \cos Z N_2 + \cos Y N_3 \cos Z N_3 = 0$$

$$\cos Z N_1 \cos X N_1 + \cos Z N_2 \cos X N_2 + \cos Z N_3 \cos X N_3 = 0$$

$$\cos X N_1 \cos Y N_1 + \cos X N_2 \cos Y N_2 + \cos X N_3 \cos Y N_3 = 0 \text{ oder:}$$

$$\frac{1}{h_1{}^2}\frac{dy}{d\varrho_1}\frac{dz}{d\varrho_1} + \frac{1}{h_2{}^2}\frac{dy}{d\varrho_2}\frac{dz}{d\varrho_2} + \frac{1}{h_3{}^2}\frac{dy}{d\varrho_3}\frac{dz}{d\varrho_3} = 0$$

$$\frac{1}{h_1{}^2}\frac{dz}{d\varrho_1}\frac{dx}{d\varrho_1} + \frac{1}{h_2{}^2}\frac{dz}{d\varrho_2}\frac{dx}{d\varrho_2} + \frac{1}{h_3{}^2}\frac{dz}{d\varrho_3}\frac{dx}{d\varrho_3} = 0$$

$$\frac{1}{h_1{}^2}\frac{dx}{d\varrho_1}\frac{dy}{d\varrho_1}+\frac{1}{h_2{}^2}\frac{dx}{d\varrho_2}\frac{dy}{d\varrho_2}+\frac{1}{h_3{}^2}\frac{dx}{d\varrho_3}\frac{dy}{d\varrho_3}=0.$$

Beide Systeme von Gleichungee werdeu später zur Anwendung kommen.

II.

Bevor wir weitere Formeln, die sich aus der Orthogonalität der Flächen ergeben, ableiten, kehren wir zurück zu dem theorema quartum. Es soll das $\int \frac{P\, d\omega \cos MQ}{r^2}$ ausgedehnt werden über die Oberfläche eines Elementes des durch diese allgemeinen rechtwinkligen, krummlinigen Coordinatenflächen getheilten Raumes, über die Oberfläche eines Raumelementes, welches also begrenzt wird von den Flächen:

$f_1 = \varrho_1$ und der unendlich benachbarten $f_1 = \varrho_1 + d\varrho_1$
$f_2 = \varrho_2$,, ,, ,, $f_2 = \varrho_2 + d\varrho_2$
$f_3 = \varrho_3$,, ,, ,, $f_3 = \varrho_3 + d\varrho_3$

Die Endpuncte dieses Körperelementes werden also die Coordinaten haben

$$\varrho_1,\ \varrho_2,\ \varrho_3$$
$$\varrho_1,\ \varrho_2,\ \varrho_3 + d\varrho_3$$
$$\varrho_1,\ \varrho_2 + d\varrho_2,\ \varrho_3$$
$$\varrho_1,\ \varrho_2 + d\varrho_2,\ \varrho_3 + d\varrho_3$$
$$\varrho_1 + d\varrho_1,\ \varrho_2,\ \varrho_3$$
$$\varrho_1 + d\varrho_1,\ \varrho_2,\ \varrho_3 + d\varrho_3$$
$$\varrho_1 + d\varrho_1,\ \varrho_2 + d\varrho_2,\ \varrho_3$$
$$\varrho_1 + d\varrho_1,\ \varrho_2 + d\varrho_2,\ \varrho_3 + d\varrho_3$$

Die Kanten dieses Körperelementes werden die unendlich kleinen Bogen sein, welche die Flächen auf einander abschneiden und für welche man, da die Flächen sich rechtwinklig schneiden, bei den unendlich kleinen Dimensionen die Differentiale der auf den Flächen in den Eckpuncten errichteten Normalen setzen kann. Das Körperelement wird mithin begrenzt von 6 Flächen, welche man als Rechtecke ansehen kann. Auf der Fläche $f_1 = \varrho_1$ wird durch die beiden anderen Flächen ein Rechteck ausgeschnitten mit den Seiten $d\, n_2$ und $d\, n_3$ und dieser Fläche entspricht auf der unendlich nahe benachbarten Fläche $\varrho_1 + d\varrho_1$ ein Rechteck, welches man aus dem vorigen dadurch erhält, dass man ϱ_1 in $\varrho_1 + d\varrho_1$ übergehen lässt; auf der Fläche $f_2 = \varrho_2$ wird das Rechteck mit den Seiten $d\, n_3$ und $d\, n_1$ und auf der unendlich nahe benachbarten ein anderes ausgeschnitten, welches man aus dem ersteren erhält durch den Uebergang von ϱ_2 in $\varrho_2 + d\varrho_2$; endlich wird das Körperelement von 2 Flächen begrenzt, von denen die auf $f_3 = \varrho_3$ ausgeschnittene zu Seiten $d\, n_1$ und $d\, n_2$ hat und von denen die zweite erhalten wird, wenn ϱ_3 um $d\varrho_3$ wächst.

Bei dieser Vorstellungsweise sind die unendlich kleinen Grössen höherer Ordnungen gegen die Grössen niedriger Ordnungen vernachlässigt, denn betrachtet man die Grenzfläche auf $f_1 = \varrho_2$ so hat dieselbe die Ecken

$$\varrho_1\ \varrho_2\ \varrho_3$$
$$\varrho_1,\ \varrho_2,\ \varrho_3 + d\varrho_3$$
$$\varrho_1,\ \varrho_2 + d\varrho_2,\ \varrho_3$$
$$\varrho^1,\ \varrho_2 + d\varrho_2,\ \varrho_3 + d\varrho_3;$$

man erhält mithin ein Viereck, in welchem die in $\varrho_1\ \varrho_2\ \varrho_3$ zusammenstossenden Seiten $d\, n_2$ und $d\, n_3$ sind, während die dritte Seite aus $d\, n_2$ durch Uebergang von ϱ_3 in $\varrho_3 + d\varrho_3$ und die vierte aus $d\, n_3$ durch Uebergang von ϱ_2 in $\varrho_2 + d\varrho_2$ erhalten wird; die Aenderung, die in $d\, n_2$ bei dem Wachsen von ϱ_3 um $d\varrho_3$, und diejenige, welche in $d\, n_3$ beim Wachsen von ϱ_2 um $d\varrho_2$ eintritt, wird nicht berücksichtigt, da eben unendlich kleine Grössen höherer gegen die niedriger Ordnungen vernachlässigt werden können.

Das $\int \frac{P\,d\,\omega\,\cos M\,Q}{r^2}$ ist also auszudehnen über 6 Flächen, von denen 3 die Werthe haben $d\,n_2\,d\,n_3$, $d\,n_3\,d\,n_2$, $d\,n_1\,d\,n_2$, während die 3 anderen Flächen aus diesen erhalten werden, wenn man ϱ_1 um $d\,\varrho_1$, ϱ_2 um $d\,\varrho_2$, ϱ_3 um $d\,\varrho_3$ wachsen lässt.

Es sei nun $P = \int dm$, wenn dm die Dichtigkeit der Masse im Punkte $\varrho_1 \varrho_2 \varrho_3$ ist, und diese Dichtigkeit sei eine stete Funktion von ϱ_1, ϱ_2, ϱ_3, so geht $\int \frac{P\,d\omega \cos M\,Q}{r^2}$ über in $\int\int \frac{dm}{r^2} \cos MQ d\omega$; es ist aber

$$\cos M\,Q = \cos M\,X \cos Q\,X + \cos M\,Y \cos Q\,Y + \cos M\,Z \cos Q\,Z$$

$$= \frac{a-x}{r} \cdot \frac{d\,x}{d\,n} + \frac{b-y}{r}\,\frac{d\,y}{d\,n} + \frac{c-z}{r}\,\frac{d\,z}{d\,n} \text{ also:}$$

$$\int\int \frac{d\,m}{r^2} \cos M\,Q\,d\,\omega = \int\int \frac{d\,m}{r^2} \left(\frac{a-x}{r}\,\frac{d\,x}{d\,n} + \frac{b-y}{r}\,\frac{d\,y}{d\,n} + \frac{c-z}{r}\,\frac{d\,z}{d\,n} \right) d\,\omega, \text{ oder}$$

$$\text{da } V = \int \frac{d\,m}{r} \text{ ist; } \int\int \frac{d\,m}{r^2} \cos M\,Q\,d\,\omega = \int \left(\frac{\partial\,V}{\partial\,x}\,\frac{d\,x}{d\,n} + \frac{\partial\,V}{\partial\,y}\,\frac{d\,y}{d\,n} \right.$$

$$\left. + \frac{d\,V}{d\,z}\,\frac{d\,z}{d\,n} \right) d\,\omega = \int \frac{d\,V}{d\,n}\,d\,\omega.$$

So lange nun die Componente der Anziehung nach der Normalen und der Differentialquotient $\frac{\partial\,V}{\partial\,n}$ je einen bestimmten Werth haben, ist $\int \frac{d\,m}{r^2} \cos M\,Q = \frac{\partial V}{\partial n}$; dieses trifft an jeder Stelle der Oberfläche zu, wenn kein endlicher Theil der Masse in der Oberfläche selbst liegt, ist dieses der Fall, so ändert sich $\frac{\partial V}{\partial n}$ beim Durchgang durch die Oberfläche um $4\,\pi\,m_0$, wenn man unter m_0 die Dichtigkeit im Durchgangspuncte versteht. Für alle Puncte innerhalb eines beliebig gestalteten mit Masse erfüllten Raumes, nur nicht in der Oberfläche, wenn dieselbe einen endlichen Theil der Masse enthält, und an Unstetigkeitsstellen der Dichtigkeit ist mithin $\int \frac{\partial V}{\partial\,n}\,d\,\omega = \int d\,\omega \int \frac{d\,m}{r^2} \cos M\,Q = \int dm \int \frac{d\,\omega}{r^2} \cos M\,Q.$

$\int \frac{d\,\omega}{r^2} \cos M\,Q$ ist nun $= 0$ oder $- 2\,\pi$ oder $- 4\,\pi$, je nachdem der Punct ausserhalb, auf der Oberfläche oder innerhalb der Masse liegt, es ist also $\int \frac{\partial\,V}{\partial\,n}\,d\,\omega = 0, = - \int 2\,\pi\,d\,m, = \int - 4\,\pi\,d\,m = 0$ oder $- 2\,\pi \int d\,m$ oder $- 4\,\pi \int d\,m$ und bezeichnet m die Masse innerhalb des Raumes, ist also $\int d\,m = m$ so erhalten wir $\int \frac{\partial V}{\partial n}\,d\,\omega = 0$ vel $- 2\,\pi\,m$ vel $- 4\,\pi\,m$; hier ist das $\int \frac{\partial V}{\partial\,n}\,d\,\omega$ über die Oberfläche des Körpers auszudehnen.

Dieses Integral besteht aus 6 Elementern, eines derselben ist gleich dem Rechteck, gebildet aus $d\,n_2\,d\,n_3$, multiplicirt mit der Derivirten von V nach der Normalen, welche nach aussen hin positiv gerechnet wird; die Normale bildet aber beim Eintritt mit dem Radius r einen stumpfen Winkel, der cos M Q ist also negativ und damit das Element positiv werde, ist demselben, also auch der Derivirten das negative Zeichen zu geben, man erhält also das Element $- \left(\frac{\partial V}{\partial n}\,d\,n_2\,d\,n_3 \right)_{\varrho_1}$. Das Element, welches die unendlich nahe benachbarte Fläche $\varrho_1 + d\,\varrho_1$ ergibt, wird aus obigen durch Uebergang von ϱ_1 in $\varrho_1 + d\,\varrho_1$ erhalten; da hier aber die positive Richtung von r mit der positiven, nach aussen hin gerichteten Normalen einen spitzen Winkel bildet, so kommt dem cosinus

2

selbst schon das positive Vorzeichen zu, mithin ist die Derivirte auch positiv zu nehmen: dieses Element des Integrals ist also $+ \left(\frac{\partial V}{\partial n_1} d n_2 \, d s\right) \varrho_1 + d_1$.

Durh Summation beider Elemente ergibt sich

$$\frac{\partial \left(\frac{\partial V}{\partial n_1} d n_2 \, d n_3\right) d \varrho_1}{\partial \varrho_1}$$

Auf gleiche Weise erhalte ich die anderen Elemente des Integrals

$$- \left(\frac{\partial V}{\partial n_2} d n_3 \, d n_1\right) \varrho_2 \text{ und } + \left(\frac{\partial V}{\partial n_2} d n_3 \, d n_1\right) \varrho_2 + d \varrho_3$$

oder durch die Summation

$$\frac{\partial \left(\frac{d V}{d n_2} d n_3 \, d n_1\right) d \varrho_2}{\partial \varrho_2} \text{ und}$$

$$- \left(\frac{\partial V}{\partial n_3} d n_1 \, d n_2\right) \varrho_3 \text{ und } + \left(\frac{\partial V}{\partial n_3} d n_1 \, d n_2\right) \varrho_3 + d \varrho_3 \text{ oder}$$

$$\frac{\partial \left(\frac{\partial V}{\partial n_3} d n_1 \, d n_2\right) d \varrho_3}{\partial \varrho_3}$$

somit erhalte ich die Gleichung

$$\frac{\partial \left(\frac{\partial V}{\partial n_1} d n_2 \, d n_3\right) d \varrho_1}{\partial \varrho_1} + \frac{\partial \left(\frac{\partial V}{\partial n_2} d n_3 \, d n_1\right) d \varrho^2}{\partial \varrho_2} + \frac{\partial \left(\frac{\partial V}{\partial n_3} d n_1 \, d n_2\right) d \varrho_3}{\partial \varrho_3} = 0$$

$$\text{vel} = - 2 \pi m$$

$$\text{vel} = - 4 \pi m.$$

Zu dieser Gleichung gelangt man auch durch folgenden von Green[20]) aufgestellten Satz:

Wenn $d \tau$ ein Element eines vollständig begrenzten Raumes ist und U und V irgend zwei Functionen der Raumcoordinaten sind, welche mit ihren Differentialquotienten erster und zweiter Ordnung in dem ganzen Raume überall endlich bleiben, dann ist

$$\int \left(\frac{\partial U}{\partial n} \frac{\partial V}{\partial n} + \frac{\partial U}{\partial y} \frac{\partial V}{\partial y} + \frac{\partial U}{\partial z} \frac{\partial V}{\partial z}\right) d \tau = - \int U \frac{\partial V}{\partial n} d \omega - \int U \triangle_2 V d \tau.$$

Nimmt man nun an, U sei = 1, so erhält man, da die Potentialfunction V den Bedingungen genügt

$$\int \frac{\partial V}{\partial n} d \omega = - \int \left(\frac{\partial^2 V}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 V}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 V}{\partial z^2}\right) d \tau;$$

nach der Poisson'schen Differentialgleichung ist aber

$$\frac{\partial^2 V}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 V}{\partial y^2} + \frac{\partial^4 V}{\partial z^2} \; 0 \text{ vel } - 2 \pi \text{ vel } - 4 \pi \text{ mithin}$$

$$\int \frac{\partial V}{\partial n} d \omega = \text{vel} - 2 \pi \int d \tau = - 2 \pi m \text{ vel } - 4 \pi \int d \tau = - 4 \pi m.$$

---

[20]) Green: On th theories of Electricity and Magnetism. Crellés Journal Bd. 44 pag. 360, welche Gleichung auch Clausius in seinem angeführten Werke über die Potentialfunction anwendet pag. 107, ebenso Lejeune-Dirichlet, Dirichlet's Vorlesungen von Grube pag. 30, endlich auch Riemann, siehe Riemann's Vorlesungen von Hattendorf pag. 71.

III.

Die Normale, welche auf $f^1 = \varrho_1$ im Puncte x, y, z errichtet wird, bildet nun mit den geradlinigen, rechtwinkligen Coordinatenaxen Winkel, deren cosinus sind

$$\cos Q X = \frac{d x}{d n_1}$$
$$\cos Q Z = \frac{d y}{d n_1}$$
$$\cos Q Z = \frac{d z}{d n_1}$$

anderseits sind diese Grössen

$$\cos Q X = \frac{1}{h^1} \frac{\partial \varrho_1}{\partial x}$$
$$\cos Q Y = \frac{1}{h^1} \frac{\partial \varrho_1}{\partial y}$$
$$\cos Q Z = \frac{1}{h_1} \frac{\partial \varrho_1}{\partial z} \text{ mithin}$$

$$\frac{d x}{d n_1} = \frac{1}{h_1} \frac{\partial \varrho_1}{\partial x}$$
$$\frac{d y}{d n_1} = \frac{1}{h_1} \frac{\partial \varrho_1}{\partial y}$$
$$\frac{d z}{d n_1} = \frac{1}{h_1} \frac{\partial \varrho_1}{\partial z} \text{ ferner ist}$$

$$d \varrho_1 = \frac{\partial \varrho_1}{\partial x} d x + \frac{\partial \varrho_1}{\partial y} d y + \frac{\partial \varrho_1}{\partial z} d z =$$

$$h_1 \left(\frac{\partial x}{\partial u_1} d x + \frac{\partial y}{\partial n_1} d y + \frac{\partial z}{\partial n_1} d z\right) = h_1 \left(\frac{d x^2 + dy^2 + d z^2}{d n^1}\right) = h_1 \ d n_1 \text{ ebenso}$$

$$d \varrho_2 = h_2 \ d n_2$$
$$d \varrho_3 = h_3 \ d n_3$$
$$\text{also } d n_1 = \frac{1}{h_1} d \varrho_1$$
$$d n_2 = \frac{1}{h_2} d \varrho_2$$
$$d n_3 = \frac{1}{h_3} d \varrho_3 \text{ ferner ist } \frac{\partial V}{\partial n_1} = \frac{\partial V}{\partial \varrho_1} \frac{\partial \varrho_1}{\partial n_1}$$

$$\frac{\partial \varrho_1}{\partial n_1} = \frac{\partial \varrho_1}{\partial n} \frac{\partial x}{\partial n_1} + \frac{\partial \varrho_1}{\partial y} \frac{\partial y}{\partial n_1} = \frac{\partial \varrho_1}{\partial z} \frac{\partial z}{\partial n_1}$$
$$= h^1 \left[\left(\frac{d x}{d n_1}\right)^2 + \left(\frac{d y}{d n_1}\right)^2 + \left(\frac{d z}{d n_1}\right)^2\right]$$
$$= h^1 \text{ und es wird } \frac{\partial V}{\partial n_1} = h^1 \frac{\partial V}{\partial \varrho^1}.$$

Die Differentialgleichung geht also über in die Gleichung

$$\frac{d \left(\frac{h_1}{h_2 h_3} \frac{\partial V}{\partial \varrho^1} d \varrho_2 \ d \varrho_3\right)}{\partial \varrho_1} d \varrho_1 + \frac{d \left(\frac{h_2}{h_3 h^1} \frac{\partial V}{\partial \varrho_1} d \varrho_3 \ d \varrho_1\right)}{\partial \varrho_2} d \varrho_2 + \frac{d \left(\frac{h_3}{h_1 h_2} \frac{\partial V}{\partial \varrho_3} d \varrho_1 \ d \varrho_2\right)}{\partial \varrho_3} d \varrho_3$$

$$= d \varrho_1 \ d \varrho_2 \ d \varrho_3 \left[\frac{\partial \left(\frac{h_1}{h_2 h_3} \frac{\partial V}{\partial \varrho_1}\right)}{\partial \varrho_1} + \frac{\partial \left(\frac{h_2}{h_3 h_1} \frac{\partial V}{\partial \varrho_3}\right)}{\partial \varrho_2} + \frac{\partial \left(\frac{h_3}{h_1 h_2} \frac{\partial V}{\partial \varrho}\right)}{\partial \varrho_3} \right] \begin{matrix} 0 \\ = - 2 \pi m \\ = - 4 \pi m \end{matrix}$$

m ist hier $= \int d m$ ausgedehnt über den Elementarkörper, also $= K \ d n_1 \ d n_2 \ dn_3$ $= \frac{K \ d \varrho_1 \ d \varrho_2 \ d \varrho_3}{h_1 \ h_2 \ h_3}$, wenn K die Dichtigkeit im Puncte $\varrho_1 \ \varrho_2 \ \varrho_3$ bedeutet; es lautet also die

Poisson'sche Differentialgleichung für allgemeine, rechtwinklige, krummlinige Coordinaten:

$$d\varrho_1 \; d\varrho_2 \; d\varrho_3 \left[\frac{\partial\left(\frac{h_1}{h_2 h_3} \frac{\partial V}{\partial \varrho_1}\right)}{\partial \varrho_1} + \frac{\partial\left(\frac{h_2}{h_3 h_1} \frac{\partial V}{\partial \varrho_2}\right)}{\partial \varrho_2} + \frac{\partial\left(\frac{h_3}{h_1 h_2} \frac{\partial V}{\partial \varrho_3}\right)}{\partial \varrho_3} \right] = \begin{matrix} 0 \\ -2\pi \\ -4\pi \end{matrix} \left\{ \frac{K \; d\varrho^1 \; d\varrho_2 \; d\varrho_3}{h_1 \; h_2 \; h_3} \right.$$

oder endlich

$$h_1 \; h_2 \; h_3 \left[\frac{\partial\left(\frac{h_1}{h_2 h_2} \frac{\partial V}{\partial \varrho_1}\right)}{\partial \varrho_1} + \frac{\partial\left(\frac{d_1}{h_3 h_1} \frac{\partial V}{\partial \varrho_2}\right)}{\partial \varrho_2} + \frac{\partial\left(\frac{h_3}{h_1 h^2} \frac{\partial V}{\partial \varrho_3}\right)}{\partial \varrho_3} \right] = \begin{matrix} 0 \\ -2\pi K \\ -4\pi K \end{matrix}$$

wenn K die Dichtigkeit im Puncte $\varrho_1 \; \varrho_2 \; \varrho_3$ bedeutet, 0, $-2\pi K$, $-4\pi K$ je nachdem der angezogene Punct ausserhalb, auf der Oberfläche oder innerhalb der anziehenden Masse liegt.

IV.

Auf dem eben entwickelten Wege soll die Poisson'sche Differentialgleichung zunächst für die gebräuchlichen räumlichen Polarcoordinaten abgeleitet werden. Die Flächen sind hier folgende, erstens concentrische Kugelflächen mit dem Radius ϱ_1, $f_1(x, y, z) = \varrho_1$, zweitens gerade Kegelflächen, deren Leitlinien mit der X Achse den Winkel φ bilden, $f_2(x, y, z) = \varphi$, drittens endlich Ebenen, welche durch die X Achse gehen und mit der X Y Ebene den Winkel ψ bilden. Die Kugelfläche mit dem Radius $\varrho = r$ wird den ganzen Raum durchlaufen, wenn man r von 0 bis ∞ wachsen lässt, ebenso die Kegelfläche, wenn $\varrho_2 = \varphi$ von 0 bis 4π wächst, endlich auch die Ebene wenn ψ von 0 bis 2π wächs; von dem Nachweise, dass sich diese Flächen rechtwinklig schneiden, dürfte wol Abstand genommen werden können. Die Gleichungen der Flächen lauten

$$\varrho_1 = r = \sqrt{x^2 + y^2 + z^2}$$

$$\varrho_2 = \varphi = \text{arc cos} \frac{x}{\sqrt{x^2 + y^2 + z^2}}$$

$$\varrho_3 = \psi = \text{arc tg} \frac{y}{z}$$

oder drückt man x, y,z durch r, φ, ψ aus

$$x = r \cos \varphi$$

$$y = r \sin \varphi \cos \psi$$

$$z = r \sin \varphi \sin \psi$$

Daraus folgt

$$\frac{\partial x}{\partial r} = \cos \varphi$$

$$\frac{\partial y}{\partial r} = \sin \varphi \cos \psi$$

$$\frac{\partial z}{\partial r} = \sin \varphi \sin \psi$$

$$\frac{\partial x}{\partial \varphi} = - r \sin \varphi$$

$$\frac{\partial y}{\partial \varphi} = r \cos \varphi \sin \varphi$$

$$\frac{\partial z}{\partial \varphi} = r \cos \varphi \sin \psi$$

$$\frac{\partial x}{\partial \psi} = 0$$

$$\frac{\partial y}{\partial \psi} = - r \sin \varphi \sin \psi$$

$$\frac{\partial z}{\partial \psi} = r \sin \varphi \cos \psi.$$

Wie oben abgeleitet besteht nun die Gleichung

$$\frac{dx}{dn_1} = \frac{1}{h_1} \frac{\partial \varrho_1}{\partial x} \text{ oder}$$

$$\frac{\partial x}{\partial \varrho_1} \frac{\partial \varrho_1}{\partial n_1} = \frac{1}{h^1} \frac{\partial \varrho_1}{\partial x}$$ es ist aber, wie ebenfalls schon abgeleitet ist, $\frac{\partial \varrho_1}{\partial x_1} = h_1$ also erhalten wir

$$h_1 \frac{\partial x}{\partial \varrho_1} = \frac{1}{h_1} \frac{\partial \varrho_1}{\partial x} \text{ oder } \frac{\partial x}{\partial \varrho_1} = \frac{1}{h_1^2} \frac{\partial \varrho_1}{\partial x} \text{ und ebenso}$$

$$\frac{\partial y}{\partial \varrho_1} = \frac{1}{h_1^2} \frac{\partial \varrho_1}{\partial y}$$

$$\frac{\partial z}{\partial \varrho_1} = \frac{1}{h_1^2} \frac{\partial \varrho_1}{\partial z}$$

$$\frac{\partial x}{\partial \varrho_2} = \frac{1}{h_2^2} \frac{\partial \varrho_2}{\partial x}$$

$$\frac{\partial y}{\partial \varrho_2} = \frac{1}{h_2^2} \frac{\partial \varrho_2}{\partial y}$$

$$\frac{\partial z}{\partial \varrho_2} = \frac{1}{h_2^2} \frac{\partial \varrho_2}{\partial z}$$

$$\frac{\partial x}{\partial \varrho_3} = \frac{1}{h_3^2} \frac{\partial \varrho_3}{\partial x}$$

$$\frac{\partial y}{\partial \varrho_2} = \frac{1}{h_3^2} \frac{\partial \varrho_3}{\partial y}$$

$$\frac{\partial z}{\partial \varrho_3} = \frac{1}{h_3^2} \frac{\partial \varrho_3}{\partial z}$$

ferner gehen die Ausdrücke h_1 h_2 h_3 über in folgende

$$h_1 = \sqrt{\left(\frac{\partial \varrho_1}{\partial x}\right)^2 + \left(\frac{\partial \varrho_1}{\partial y}\right)^2 + \left(\frac{\partial \varrho_1}{\partial z}\right)^2} = h_1^2 \sqrt{\left(\frac{\partial x}{\partial \varrho_1}\right)^2 + \left(\frac{\partial y}{\partial \varrho_1}\right)^2 + \left(\frac{\partial z}{\partial \varrho_1}\right)^2} \text{ mithin}$$

$$h_1 = \frac{1}{\sqrt{\left(\frac{\partial x}{\partial \varrho_1}\right)^2 + \left(\frac{\partial y}{\partial \varrho_1}\right)^2 + \left(\frac{\partial z}{\partial \varrho_1}\right)^2}}$$

$$h_2 = \frac{1}{\sqrt{\left(\frac{\partial x}{\partial \varrho_2}\right)^2 + \left(\frac{\partial y}{\partial \varrho_1}\right)^1 + \left(\frac{\partial z}{\partial \varrho_1}\right)^2}}$$

$$h_3 = \frac{1}{\sqrt{\left(\frac{\partial x}{\partial \varrho_3}\right)^2 + \left(\frac{\partial y}{\partial \varrho_3}\right)^2 + \left(\frac{\partial z}{\partial \varrho_3}\right)^2}}$$

Es wird also

$$h_1 = \frac{1}{\sqrt{\cos^2\varphi + \sin^2\varphi(\sin^2\psi + \cos^2\psi)}} = \frac{1}{\sqrt{\cos^2\varphi + \sin^2\varphi}} = 1$$

$$h_2 = \frac{1}{\sqrt{r^2\sin^2\varphi + r^2\cos^2\varphi(\sin^2\psi + \cos^2\psi)}} = \frac{1}{\sqrt{r^2(\sin^2\varphi + \cos^2\varphi)}} = \frac{1}{r}$$

$$h_3 = \frac{1}{\sqrt{r^2\sin^2\varphi(\sin^2\psi + \cos^2\psi)}} = \frac{1}{\sqrt{r^3\sin^2\varphi}} = \frac{1}{r\sin\varphi}$$

Die Poisson'sche Gleichung geht also über in folgende:

$$\frac{1}{r^2 \sin\varphi}\left[\frac{\partial\left(r^2 \sin\varphi \frac{\partial V}{\partial r}\right)}{\partial r} + \frac{\partial\left(\sin\varphi \frac{\partial V}{\partial \varphi}\right)}{\partial \varphi} + \frac{\partial\left(\frac{1}{\sin\varphi} \frac{\partial V}{\partial \psi}\right)}{\partial \psi}\right] = \begin{array}{l} 0 \\ -2\pi K \text{ oder} \\ -4\pi K \end{array}$$

$$\frac{1}{r^2 \sin\varphi}\left[\frac{\sin\varphi\, \partial\left(r^2 \frac{\partial V}{\partial r}\right)}{\partial r} + \frac{\partial\left(\sin\varphi \frac{\partial V}{\partial \varphi}\right)}{\partial \varphi} + \frac{1}{\sin\varphi} \frac{\partial^2 V}{\partial \psi^2}\right] = \begin{array}{l} 0 \\ -2\pi K \\ -4\pi K. \end{array}$$

Zu derselben Gleichung gelangt Lejeune Dirichlet[21]) auf einem directeren, bedeutend kürzeren Wege, hier ist dieser Weg eingeschlagen worden, da die Anwendung der allgemeinen Formel auf ein bestimmtes System erläutert werden sollte. Dirichlet bestimmt direct die Differentiale der Normalen, welche sind $d\,r$, $r\, d\,\varphi$ und $r \sin\varphi\, d\,\psi$; $\frac{\partial V}{\partial n}$ in der Richtung in welcher sich r ändert ist $\frac{\partial V}{\partial r}$ und $\int \frac{\partial V}{\partial r}\, d\,\omega$ ist auszudehnen über die Fläche, welche zu Seiten hat, $r \sin\varphi\, d\,\psi$ und $r\, d\,\varphi$, und über die dieser gegenüberliegende Fläche, welche aus der genannten durch Uebergang von r in $r + d\,r$ erhalten wird. $\frac{\partial V}{\partial n}$ in der Richtung, in der sich φ ändert, ist $\frac{\partial V}{r\, \partial \varphi}$, auszudehnen ist $\int \frac{\partial V}{\partial n}\, d\,\omega$ über $r \sin\varphi\, d\,r\, d\,\psi$ und über eine zweite, welche aus dieser entsteht, wenn φ um $d\,\varphi$ wächst, endlich ist $\frac{\partial V}{\partial n}$ in der Richtung, in der sich ψ ändert $\frac{\partial V}{r \sin\varphi\, \partial \psi}$ und $\int \frac{\partial V}{r \sin\varphi\, \partial\psi}\, d\,\omega$ auszudehnen üder $r\, d\,r\, d\,\varphi$ und die gegenüberliegende Fläche, die aus dieser beim Uebergang von ψ in $\psi + d\,\psi$ entsteht, Die Gleichung $\int \frac{\partial V}{\partial n}\, d\,\omega = 0$ geht dann, wenn man noch berücksichtigt, dass aus dem oben angeführten Grunde, dem ersten von je zwei zusammengehörigen Integralelementen das negative Zeichdn, dem zweiten das positive zukommt, über in

$$\frac{\partial\left(r^2 \sin\varphi\, d\,\varphi\, d\,\psi \frac{\partial V}{\partial r}\right)}{\partial r} d\,r + \frac{\partial\left(\sin\varphi\, \partial\, r\, d\,\psi \frac{\partial V}{\partial \varphi}\right)}{\partial \varphi} d\,\varphi + \frac{\partial\left(\frac{d\,r\, d\,\varphi}{\sin\varphi} \frac{\partial V}{\partial \psi}\right)}{\partial \psi} d\,\psi \begin{array}{l} \ 0 \\ = -2\pi m \\ = -4\pi m \end{array}$$

$$\left[\frac{\sin\varphi\, \partial\left(r^2 \frac{\partial V}{\partial r}\right)}{\partial r} + \frac{\partial \sin\varphi \frac{\partial V}{\partial \varphi}}{\partial \varphi} + \frac{1}{\sin\psi} \frac{\partial^2 V}{\partial \psi^2}\right] d\,r\, d\,\varphi\, d\,\psi \begin{array}{l} = 0 \\ = -2\pi K\, r^2 \sin\varphi\, d\,\varphi\, d\,\psi\, d\,r \\ = -4\pi K\, r^2 \sin\varphi\, d\,\varphi\, d\,\psi\, d\,r \end{array}$$

$$\frac{1}{r^2 \sin\varphi}\left[\frac{\sin\varphi\, \partial\left({}^2\frac{\partial V}{\partial r}\right)}{\partial r} + \frac{\partial \sin\varphi \frac{\partial V}{\partial \varphi}}{\partial \varphi} + \frac{1}{\sin\psi} \frac{\partial^2 V}{\partial \psi^2}\right] \begin{array}{l} = 0 \\ = -2\pi K \\ = -4\pi K. \end{array}$$

V.

Als zweites Beispiel möge hier die Ableitung derselben Gleichung für elliptische Coordinaten folgen; für elliptische Coordinaten leitet Lamé die Poisson'sche Gleichung in seinem schon erwähnten Werke auf höchst elegante Weise ab, doch soll hier die kürzere Ableitung Jacoby's zu Grunde gelegt werden, welche sich in seiner Abhandlung über die partielle Differentialgleichung $\frac{\partial^2 V}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 V}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 V}{\partial y^2} = 0$ Bd. II pag. 44 vorfindet.

---

21) Lejeune Dirichlet. Vorlesungen über die im umgekehrten Verhältniss des Quadrates der Entfernung wirkenden Kräfte von Dr. Grube pag. 80.

Die Gleichungen der Coordinatenflächen seien:

$$\frac{x^2}{\varrho_1^2} + \frac{y^2}{\varrho_1^2 - b^2} + \frac{z^2}{\varrho_1^2 - c^2} = 1$$
$$\frac{x^2}{\varrho_2^2} + \frac{y^2}{\varrho_2^2 - b^2} + \frac{z^2}{c^2 - \varrho_2^2} = 1$$
$$\frac{x^2}{\varrho_3^2} + \frac{y^2}{b^2 - \varrho_3^2} + \frac{z^2}{c^2 - \varrho_3^2} = 1.$$

Macht man nun die Bedingung, dass

$$\varrho_1 > c \quad c > \varrho_2 > b \quad b > \varrho_3,$$

so stellt die erste Gleichung Ellipsoide, die zweite einflächige, die dritte zweiflächige Hyperboloide dar, in denen die Hauqtschnitte dieselben Brennpuncte haben, die X Y Schnitte und X Z Schnitte die Puncte der X Achse, welche um b resp. c, die Y Z Schnitte die Puncte der Y Achse, welche um $\sqrt{c^2 - b^2}$ vom Mittelpuncte entfernt sind

Aus obigen Gleichungen ergeben sich für x y z die Gleichungen

$$x^2 = \frac{\varrho_1^2 \varrho_2^2 \varrho_3^2}{b^2 c^2}$$
$$y^2 = \frac{(\varrho_1^2 - b^2)(\varrho_2^2 - b^2)(b^2 - \varrho_3^2)}{b^2 (c^2 - b^2)}$$
$$z^2 = \frac{(\varrho_1^2 - c^2)(c^2 - {}_2{}^2)(c^2 - \varrho_3^2)}{c^2 (c^2 - b^2)}$$

Lässt man nun die Parameter ϱ_1 ϱ_2 ϱ_3 die Werthe zwischen den ihnen gesteckten Grenzen durchlaufen, so durchlaufen die Flächen und zwar jede Familie von Flächen den ganzen Raum.

Nimmt ϱ_3 seinen kleinsten Werth $\varrho_3 = 0$ an, so ist $x^2 = \frac{\varrho_1^2 \varrho_2^2 \varrho_3^2}{b^2 c^2} = 0$ und die Gleichung der dritten Fläche geht über, da $\frac{x^2}{\varrho_3^2} = \frac{\varrho_1^2 \varrho_2^2}{b^2 c^2}$ ist in die Gleichung $\frac{y^2}{b^2} + \frac{z_2}{c^2} = \frac{\varrho_1^2 \varrho_2^1}{b^2 c^2} - 1$ welcher Gleichung für sämmtliche Werthe von ϱ_1, ϱ_2 die y z Ebene entspricht; die erste Fläche der Familie der getheilten Hyperboloide, ist also die y z Ebene, nimmt ϱ_3 zu, so verdoppelt sich die y z Ebene und bläht sich zu dem getheilten Hyperboloid auf. Für den grössten Werth von ϱ^3, $\varrho^3 = b$ wird $y^2 = \frac{(\varrho^2 - b^2)\ \varrho_2{}^2 - b^2)(b^2 - \varrho_3{}^2)}{b^2 (c^2 - b^2)} = 0$ und $\frac{y^2}{b - \varrho^2{}_3} = \frac{\varrho_1{}^2 - b^2)\ (\varrho_2{}^2 - r^2)}{b^2 (c^2 - b^2)}$, die der Fläche also

$$\frac{x^2}{b^2} - \frac{z^2}{c^2 - b^2} = 1 + \frac{(\varrho_1{}^2 - b^2)\ (\varrho_2{}^2 - b^2)}{b^2 (c^2 - b^2)}$$

mithin ist die letzte Fläche dieser Familie der Theil der X Z Ebene, welcher innerhalb der Hyperbel liegt, welche durch die Gleichung $\frac{x^2}{b^2} - \frac{z^2}{c^2 - b^2} = 1$ gegeben ist.

Nimmt ϱ_2 seinen kleinsten Werth $\varrho_2 = b$ an, so wird $y^2 = \frac{(\varrho_1^2 - b^2)(\varrho_2^2 - b^2)(b^2 - \varrho_3^2)}{b^2 (c^2 - b^2)} = 0$ und $\frac{y^2}{\varrho_2^2 - b^2} = \frac{(\varrho_1^2 - b^2)\ (b^2 - \varrho_3^2)}{b^2 (c^2 - b^2)}$, mithin muss die erste Fläche der Familie der einfachen Hyperboloide der Gleichung $\frac{x^2}{b^2} - \frac{z^2}{c_2^2 - b^2} = 1 - \frac{(\varrho_1^2 - b^2)\ (b^2 - \varrho_3^2)}{b^2 (c^2 - b^2)}$ für alle Werthe von ϱ_1 und ϱ_3 genügen d. h. diese Fläche bildet den Theil der XZ Ebene, welcher ausserhalb der Hyperbel, deren Gleichung $\frac{x^2}{b^2} - \frac{z^2}{c^2 - b^2} = 1$ ist, liegt. Bei wachsendem ϱ_2 verdoppelt sich wiederum dieser Theil der XZ Ebene und es entstehen einfache Hyperboloide bis endlich für $\varrho_2 = c$ das Hyperboloid übergeht in einen Theil der XY Ebene Für $\varrho_2 = c$ ist nämlich $z^2 = \frac{(\varrho_1^2 - c^2)\ (c^2 - \varrho_2^2)\ (c^2 - \varrho^2)}{c^2 (c^2 - b^2)} = 0$ und $\frac{z^2}{c^2 - \varrho_2^2} = \frac{(\varrho_1^2 - c^2)\ (c^2 - \varrho_3^2)}{c^2 (c^2 - b^2)}$, die Gleichung dieser Fläche ist also

$$\frac{x^2}{c^2} + \frac{y^2}{c^2 - b^2} = 1 + \frac{(\varrho_1{}^2 - c^2)\ (c^2 - \varrho_3{}^2)}{c_2\ (c^2 - b^2)}$$

d. h. es ist die Fläche der Theil der XYEbene, welcher ausserhalb der Ellipse liegt, deren Gleichung $\frac{x^2}{c^2} + \frac{y^2}{c^2 - b^2} = 1$ ist,

Wenn man endlich dem Parameter ϱ_1 seinen kleinsten Werth $\varrho_1 = c$ beilegt, so wird $z^2 = \frac{(\varrho_1{}^2 - c^2)\ (c^2 - \varrho_2{}^2)\ (c^2 - \varrho_3{}^2)}{c^2\ (c^2 - b^2)} = 0$ und $\frac{z^2}{\varrho_1{}^2 - c^2} = \frac{(c^2 - \varrho_2{}^2)\ (c^2 - \varrho_3{}^2)}{c^2\ (c^2 - b^2)}$, die Gleichung der ersten Fläche aus der Familie der Ellipsoide ist mithin $\frac{x^2}{c^2} + \frac{y^2}{c^2 - b^2} = 1 - \frac{(c^2 - \varrho_2{}^2)\ (c^2 - \varrho_3{}^2)}{c^2\ (c^2 - b^2)}$ d. h. die Fläche ist der Theil der XYEbene innerhalb der Ellipse, welche der Gleichung $\frac{x^2}{c^2} + \frac{y^2}{c^2 - c^2} = 1$ genügt. Bei wachsendem ϱ_1 entstehen nun durch Verdoppelung dieses Theiles der XY Ebene und durch allmähliges Aufblähen Ellipsoide, welche den ganzen Raum durchlaufen, die letzte Fläche endlich, für $\varrho^1 = \infty$ ist, ist dann die Kugeloberfläche mit dem Radius $r = \infty$ denn nur diese genügt der Gleichung $\frac{x^2}{\varrho_1{}^2} + \frac{y^2}{\varrho_1{}^2 - b^2} + \frac{z^2}{\varrho_1{}^2 - c^2} = 1.$

Der Theil der XYEbene, welcher innerhalb der Ellipse, deren Gleichung $\frac{x^2}{c^2} + \frac{y^2}{c^2 - b^2} = 1$ ist, liegt, gehört zu der Familie der Ellipsoide, dieser Theil bläht sich auf, das Ellipsoid wächst und geht, nachdem es den ganzen Raum durchlaufen hat, über in die Kugeloberfläche mit unendlich grossem Radius.

Der Theil der XYEbene ausserhalb der Ellipse gehört zu der Familie der einfachen Hyperboloide, dieser Theil verdoppelt sich in der Richtung der ZAchse und bildet so einfache Hyperboloide, welche wiederum den ganzen Raum durchlaufen bis endlich die erste Fläche dieser Familie mit dem Theile der ZXEbene zusammenfällt, welche ausserhalb der Hyperbel liegt, deren Gleichung $\frac{x^2}{c^2} - \frac{z^2}{c^2 - b^2} = 1$ ist.

Der Theil der XZEbene innerhalb der Hyperbel $\frac{x^2}{c^2} - \frac{z^2}{c^2 - b^2} = 1$ gehört der dritten Familie an, dieser verdoppelt sich auch und bauscht sich zu getheilten Hyperboloiden auf, bis die erste Fläche dieser Familie mit der YZEbene zusammenfällt.

Zunächst wäre nun nachzuweisen, dass diese Flächen sich rechtwinklig schneiden d. h. dass die Gleichungen bestehen.

$$\frac{1}{h_2 h_3}\left[\frac{\partial \varrho_2}{\partial x}\frac{\partial \varrho_3}{\partial x} + \frac{\partial \varrho_2}{\partial y}\frac{\partial \varrho_3}{\partial y} + \frac{\partial \varrho_2}{\partial z}\frac{\partial \varrho_3}{\partial z}\right] = 0$$

$$\frac{1}{h_3 h_1}\left[\frac{\partial \varrho_3}{\partial x}\frac{\partial \varrho_1}{\partial x} + \frac{\partial \varrho_3}{\partial y}\frac{\partial \varrho_1}{d y} + \frac{\partial \varrho_3}{\partial z}\frac{\partial \varrho_1}{\partial z}\right] = 0$$

$$\frac{1}{h_1 h_2}\left[\frac{\partial \varrho_1}{\partial x}\frac{\partial \varrho_2}{\partial x} + \frac{\partial \varrho_1}{\partial y}\frac{\partial \varrho_2}{\partial y} + \frac{\partial \varrho_1}{\partial z}\frac{\partial \varrho_2}{\partial z}\right] = 0 \text{ oder}$$

$$h_2\ h_3\left[\frac{\partial x}{\partial \varrho_2}\frac{\partial x}{\partial \varrho_3} + \frac{\partial y}{\partial \varrho_2}\frac{\partial y}{\partial \varrho_3} + \frac{\partial z}{\partial \varrho_2}\frac{\partial z}{\partial \varrho_3}\right] = 0$$

$$h_3\ h_1\left[\frac{\partial x}{\partial \varrho_3}\frac{\partial x}{\partial \varrho_1} + \frac{\partial y}{\partial \varrho_3}\frac{\partial y}{\partial \varrho_1} + \frac{\partial z}{\partial \varrho_1}\frac{\partial z}{\partial \varrho_1}\right] = 0$$

$$h_1\ h_2\left[\frac{\partial x}{\partial \varrho_1}\frac{\partial x}{\partial \varrho_2} + \frac{\partial y}{\partial \varrho_1}\frac{\partial y}{\partial \varrho_2} + \frac{\partial z}{\partial \varrho_1}\frac{\partial z}{\partial \varrho_2}\right] = 0.$$

Es ist nun $2\,X\,\partial X = \frac{2\,\varrho_1\,\partial\varrho_1\,\varrho_2^2\,\varrho_3^2}{b^2\,c^2}$

$$\frac{\partial x}{\partial\varrho_1} = \frac{\varrho_2\,\varrho_3}{b\,c},\quad \frac{\partial y}{\partial\varrho_1} = \frac{\varrho_1\sqrt{(\varrho_2^2-b^2)\,(b^2-\varrho_3^2)}}{b\sqrt{(\varrho_1^2-b^2)\,(c^2-b^2)}}$$

$$\frac{\partial x}{\partial\varrho_2} = \frac{\varrho_3\,\varrho_1}{b\,c},\quad \frac{\partial y}{\partial\varrho_2} = \frac{\varrho_2\sqrt{(\varrho_1^2-b^2)\,(b^2-\varrho_3^2)}}{b\sqrt{(\varrho_2^2-b^2)\,(c_2-b^2)}}$$

$$\frac{\partial x}{\partial\varrho_3} = \frac{\varrho_1\,\varrho_2}{b\,c},\quad \frac{\partial y}{\partial\varrho_3} = -\frac{\varrho_3\sqrt{(\varrho_1^2-b^2)\,(\varrho_2^2-b^2)}}{b\sqrt{(c^2-\varrho_3^2)\,(c^2-b^2)}}$$

$$\frac{\partial z}{\partial\varrho_1} = \frac{\varrho_1\sqrt{(c^2-\varrho_2^2)\,(c^2-\varrho_3^2)}}{c\sqrt{(\varrho_1^2-c^2)\,(c^2-b^2)}}$$

$$\frac{\partial z}{\partial\varrho_2} = -\frac{\varrho_2\sqrt{(\varrho_1^2-c^2)\,(c^2-\varrho_3^2)}}{c\sqrt{(c^2-\varrho_2^2)\,(c^2-b^2)}}$$

$$\frac{\partial z}{\partial\varrho_3} = -\frac{\varrho_3\sqrt{(\varrho_1^2-c^2)\,(c^2-\varrho_2^2)}}{c\sqrt{(c^2-\varrho_3^2)\,(c^2-b^2)}}\quad \text{mithin}$$

$$\frac{\partial x}{\partial\varrho_2}\frac{\partial x}{\partial\varrho_3} = \frac{\varrho_1^2\,\varrho_2\,\varrho_3}{b^2\,c^2}$$

$$\frac{\partial y}{\partial\varrho_2}\frac{\partial y}{\partial\varrho_3} = -\frac{\varrho_1\,\varrho_2\,(\varrho_1^2-b^2)}{b^2\,(c^2-b^2)}$$

$$\frac{\partial z}{\partial\varrho_2}\frac{\partial z}{\partial\varrho_3} = \frac{\varrho_1\,\varrho_2\,(\varrho_1^2-c^2)}{c^2\,(c^2-b^2)}\quad \text{mithin}$$

$$\frac{\partial x}{\partial\varrho_2}\frac{\partial x}{\partial\varrho_3} + \frac{\partial y}{\partial\varrho_2}\frac{\partial y}{\partial\varrho_3} + \frac{\partial z}{\partial\varrho_2}\frac{\partial z}{\partial\varrho_3} = \varrho_1\,\varrho_2\left[\frac{\varrho_1^2}{b^2\,c^2} - \frac{\varrho_1^2-b^2}{b^2\,(c^2-b^2)} + \frac{\varrho_1^2-c^2}{c^2\,(c^2-b^2)}\right]$$

$$= \varrho_1\,\varrho_2\left[\frac{\varrho_1^2\,[c^2-b^2-c^2+b^2]+b^2\,c^2-b^2\,c^2}{b^2\,c^2\,(c^2-b^2)}\right] = 0.$$

Ebenso bestehen die anderen Gleichungen, es schneiden sich also die Flächen orthogonal.

Es müssen nun die Ausdrücke $h_1\;h_2\;h_3$ berechnet werden.

$$h_1 = \sqrt{\left(\frac{\partial\varrho_1}{\partial x}\right)^2 + \left(\frac{\partial\varrho_1}{\partial y}\right)^2 = \left(\frac{\partial\varrho_1}{\partial z}\right)^2} = \frac{1}{\sqrt{\left(\frac{\partial x}{\partial\varrho_1}\right)^2 + \left(\frac{\partial y}{\partial\varrho^1}\right)^2 + \left(\frac{\partial z}{\partial\varrho_1}\right)^2}}$$

$$= \frac{1}{\sqrt{\frac{\varrho_2^2\,\varrho_3^2}{b^2\,c^2} + \varrho_1^2\,\frac{(\varrho_2^2-b^2)\,(b_2-\varrho_3^2)}{b^2\,(c^2-b^2)\,(\varrho_1^2-b^2)} + \varrho_1^2\,\frac{(c^2-\varrho_2^2)\,(c^2-\varrho_3^2)}{c^2\,(c^2-b^2)\,(\varrho_1^2-c^2)}}}$$

Macht man die Grössen unter dem Wurzelzeichen gleichnamig und reducirt, so erhält man

$$h^1 = \frac{1}{\sqrt{\frac{(\varrho_1^2-\varrho_2^2)\,(\varrho_1^2-\varrho_3^2)}{(\varrho_1^2-b^2)\,(\varrho_1^2-c^2)}}}$$

$$= \sqrt{\frac{(\varrho_1^2-b^2)\,(\varrho_1^2-c^2)}{(\varrho_1^2-\varrho_2^2)\,(\varrho_1^2-\varrho_3^2)}}$$

Auf dieselbe Weise erhält man

$$h_2 = \sqrt{\frac{(c^2 - \varrho_2^2)\ (\varrho_2^2 - b^2)}{(\varrho_1^2 - \varrho_2^2)\ (\varrho_2^2 - \varrho_3^2)}}$$

$$h_3 = \sqrt{\frac{(c^2 - \varrho_3^2)\ (b^2 - \varrho_3^2)}{(\varrho_1^2 - \varrho_3^2)\ (\varrho_2^2 - \varrho_3^2)}}$$

Es wird also $\frac{h_1}{h_2\, h_3} = \sqrt{\frac{(\varrho_1^2 - b^2)\ (\varrho_1^2 - c^2)\ (\varrho_2^2 - \varrho_3^2)^2\ (\varrho_1^2 - \varrho_2^2)\ (\varrho_1^2 - \varrho_3^2)}{(c^2 - \varrho_2^2)\ (c^2 - \varrho_3^2)\ (\varrho_2^2 - b^2)\ (b^2 - \varrho_3^2)\ (\varrho_1^2 - \varrho_2^2)\ (\varrho_1^2 - \varrho_3^2)}}$

$$= (\varrho_2^{\,2} - \varrho_3^{\,2}) \sqrt{\frac{(\varrho_1^2 - b^2)\ (\varrho_1^2 - c^2)}{(c^2 - \varrho_2^2)\ (c^2 - \varrho_3^2)\ (\varrho_2^2 - b^2)\ (b^2 - \varrho_3^2)}}$$

$$\frac{h^2}{h_1\, h_3} = (\varrho_1^{\,2} - \varrho_3^{\,2}) \sqrt{\frac{(\varrho_2^2 - b^2)\ (c^2 - \varrho_2^2)}{(c^2 - \varrho_2^2)\ (b^2 - \varrho_3^2)\ (\varrho_1^2 - b^2)\ (\varrho_1^2 - c^2)}}$$

$$\frac{h_3}{h_1\, h_2} = (\varrho_1^{\,2} - \varrho_2^{\,2}) \sqrt{\frac{(c^2 - \varrho_3^2)\ (b^2 - \varrho_3^2)}{(\varrho_1^2 - c^2)\ (\varrho_1^2 - b^2)\ (c^2 - \varrho_2^2)\ (\varrho_2^2 - b^2)}}$$

Also lautet die Gleichung:

$$\sqrt{\frac{(\varrho_1^2 - c^2)\ (\varrho_1^2 - b^2)\ (c^2 - \varrho_2^2)\ (\varrho_2^2 - b^2)\ (c^2 - \varrho_3^2)\ (b^2 - \varrho_3^2)}{(\varrho_1^2 - \varrho_2^2)\ (\varrho_1^2 - \varrho_3^2)\ (\varrho_2^2 - \varrho_3^2)}} \left[\frac{\partial \left\{ (\varrho_2^2 - 3^2) \sqrt{\frac{(\varrho_1^2 - b^2)\ (\varrho_1^2 - c^2)}{(c^2 - \varrho_2^2)(\varrho_2^2 - b^2)(c^2 - \varrho_3^2)(b^2 - \varrho_3^2)}}\ \frac{\partial V}{\partial \varrho_1} \right\}}{\partial\ \varrho_1} \right.$$

$$\left. + \frac{\partial \left\{ (\varrho_1^2 - \varrho_3^2) \sqrt{\frac{(\varrho_2^2 - b^2)\ (c^2 - \varrho_2^2)}{(\varrho_1^2 - c^2)\ (\varrho_1^2 - b^2)\ (b^2 - \varrho_3^2)\ (c^2 - \varrho_3^2)}}\ \frac{\partial V}{\partial \varrho_2} \right\}}{\partial\ \varrho_2} + \frac{\partial \left\{ (\varrho_1^2 - \varrho_2^2) \sqrt{\frac{(c^2) - \varrho_3^2)\ (b^2 - \varrho_3^2)}{(\varrho_1^2 - b^2)\ (\varrho_1^2 - c^2)\ (\varrho_2^2 - b^2)\ (c^2 - \varrho_2^2)}}\ \frac{\partial V}{\partial \varrho_3} \right\}}{\partial\ \varrho_3} \right]$$

$$= 0 \text{ vel } = -\ 2\,\pi\, K \text{ vel } = -\ 4\,\pi\, K.$$

$$\sqrt{\frac{(\varrho_1^2 - c^2)\ (\varrho_1^2 - b^2)\ (c^2 - \varrho_2^2)\ (\varrho_2^2 - b^2)\ (c^2 - \varrho_3^2)\ (b^2 - \varrho_3^2)}{(\varrho_1^2 - \varrho_2^2)\ (\varrho_1^2 - \varrho_3^2)\ (\varrho_2^2 - \varrho_3^2)}} \left[\frac{(\varrho_2^2 - \varrho_3^2)}{\sqrt{(c^2 - \varrho_2^2)\ (\varrho_2^2 - b^2)\ (c^2 - \varrho_3^2)\ (b^2 - \varrho_3^2)}} \right.$$

$$\frac{\partial \left\{ \sqrt{(\varrho_1^2 - b^2)\ (\varrho_1^2 - c^2)}\ \frac{\partial V}{\partial \varrho_1} \right\}}{\partial\ \varrho_1} + \frac{\varrho_1^2 - \varrho_3^2}{\sqrt{(\varrho_1^2 - c^2)\ (\varrho_1^2 - b^2)\ (c^2 - \varrho_3^2)\ (b^2 - \varrho_3^2)}}\ \frac{\partial \left\{ \sqrt{(c^2 - \varrho_3^2)\ (\varrho_2^2 - b^2)}\ \frac{\partial V}{\partial \varrho_2} \right\}}{\partial\ \varrho_2}$$

$$\left. + \frac{\varrho_1^2 - \varrho_2^2}{\sqrt{(\varrho_1^2 - c^2)\ (\varrho_1^2 - b^2)\ (c^2 - \varrho_2^2)\ (\varrho_2^2 - b^2)}}\ \frac{\partial \left\{ \sqrt{(c^2 - \varrho_3^2)\ (b^2 - \varrho_3^2)}\ \frac{\partial V}{\partial \varrho_3} \right\}}{\partial\ \varrho_3} \right] = \begin{matrix} 0 \\ -\ 2\ \pi\ K \\ -\ 1\ \pi\ K \end{matrix}$$

$$\frac{1}{(\varrho_1^2 - \varrho_2^2)(\varrho_1^2 - \varrho_3^2)(\varrho_2^2 - \varrho_3^2)} \left[\begin{matrix} (\varrho_2^2 - \varrho_3^2) \sqrt{(\varrho_1^2 - c^2)(\varrho_1^2 - b^2)}\ \dfrac{\partial \left\{ \sqrt{(\varrho_1^2 - c^2)(\varrho_1^2 - b^2)}\ \frac{\partial V}{\partial \varrho_1} \right\}}{\partial\ \varrho_1} \\ + (\varrho_1^2 - \varrho_3^2) \sqrt{(\varrho_2^2 - b^2)(c^2 - \varrho_2^2)}\ \dfrac{\partial \left\{ \sqrt{(c^2 - \varrho_2^2)\ (\varrho_2^2 - b^2)}\ \frac{\partial V}{\partial \varrho_2} \right\}}{\partial\ \varrho_2} \\ + (\varrho_1^2 - \varrho_2^2) \sqrt{(\varrho_1^2 - \varrho_3^2)(b^2 - \varrho_3^2)}\ \dfrac{\partial \left\{ \sqrt{(c^2 - \varrho_3^2)\ (b^2 - \varrho_3^2)}\ \frac{\partial V}{\partial \varrho_3} \right\}}{\partial\ \varrho_3} \end{matrix} \right] \begin{matrix} -\ 0 \\ = -\ 2\,\pi\, K \\ -\ 4\,\pi\, K. \end{matrix}$$

Diese Gleichung vereinfacht sich ungemein, wenn man neue Variabeln einführt, welche gegeben sind durch die Gleichungen

$$\frac{d\,\varrho_1}{\sqrt{(\varrho_1^2 - c^2)\,(\varrho_1^2 - b^2)}} = d\,u_1 \quad u_1 = \int \frac{d\,\varrho_1}{\sqrt{(\varrho_1^2 - c^2)\,(\varrho_1^2 - b^2)}}$$

$$\frac{d\,\varrho_2}{\sqrt{(\varrho_2^2 - b^2)\,(c^2 - \varrho_2^2)}} = d\,u_2 \quad u_2 = \int \frac{d\,\varrho_2}{\sqrt{(\varrho_2^2 - b^2)\,(c^2 - \varrho_2^2)}}$$

$$\frac{d\,\varrho_3}{\sqrt{(c^2 - \varrho_3^2)\,(b^2 - \varrho_3^2)}} = d\,u_3 \quad u_3 = \int \frac{d\,\varrho_3}{\sqrt{(c^2 - \varrho_3^2)\,(b^2 - \varrho_3^2)}}$$

Setzt man diese Variabeln in obige Gleichung ein, so nimmt diese die einfache Form an

$$\frac{1}{(\varrho_1^2 - \varrho_2^2)\,(\varrho_1^2 - \varrho_3^2)\,(\varrho_2^2 - \varrho_3^2)} \left[(\varrho_2^2 - \varrho_3^2)\frac{\partial^2 V}{\partial u_1^2} + (\varrho_1^2 - \varrho_2^2)\frac{\partial^2 V}{\partial u_2^2} + (\varrho_1^2 - \varrho_2^2)\frac{\partial^2 V}{\partial u_3^2}\right] = \begin{matrix} -0 \\ -2\,\pi\,K \\ -4\,\pi\,K. \end{matrix}$$

Im Vorstehenden habe ich mir erlaubt, die Poisson'sche Differentialgleichung für die Potentialfunction für die beiden gebräuchlichsten krummlinigen, rechtwinkligen Coordinatensysteme abzuleiten, doch muss mann bei der Behandlung physikalischer Aufgaben, um zur Lösung derselben zu gelangen, in den meisten Fällen noch zu anderen Coordinatensystemen greifen, welche man den zu behandelnden Aufgaben anpassen muss; stets erhält man dann aus der allgemeinen Form der Poisson'schen Differentialgleichung mit Leichtigkeit die speciellen Formen. Statt neue Belege für den Nutzen der allgemeinen Form anzuführen, verweise ich auf das schon mehrfach erwähnte Werk von Lamé: „Leçons sur les coordonnées curvilignes et leurs divers applications Paris 1859“, in welchem Lamé dieselbe Gleichung noch für mehrere andere Coordinatensysteme ableitet; endlich möchte ich noch auf eine der elegantesten Anwendungen rechtwinkliger, krummliniger Coordinaten auf physikalische Probleme aufmerksam machen, welche Dr. Wangerin in seiner preisgekrönten Schrift: „Reduction der Potentialgleichung für gewisse Rotationskörper auf eine einfache Differentialgleichung, Leipzig 1875“, gemacht hat.

Fehler-Berichtigung.

Seite 5, Zeile 10, 17, 39 und 42 von oben muss ∂ stehen statt d, ebenso Seite 6, Zeile 1 und 2 von unten, endlich Seite 7 in sämmtlichen Zeilen und Seite 8, Zeile 1 von oben.