Jahres-Bericht

der

Realschule zu Graudenz

für das Jahr 1858,

erstattet

von

G. B. Jacobi,
Director der Realschule.

Voran eine mathematische Abhandlung von dem Lehrer Krusemarck.

Graudenz, 1858.
Druck von Gustav Röthe.

Jahres-Bericht

der

Realschule zu Graudenz

für das Jahr 1858,

erstattet

von

G. B. Jacobi,
Director der Realschule.

Voran eine mathematische Abhandlung von dem Lehrer Krusemarck.

Graudenz, 1858.
Druck von Gustav Röthe.

Principien der Vibrationstheorie.

Die mathematische Bestimmung der physikalischen Erscheinungen, welche in einer vibrirenden oder undulirenden Bewegung mit sehr kleinen Schwingungsamplituden ihre Erklärung finden, also namentlich aller der Akustik und der Optik angehörenden, beruht auf der Integration partieller Differentialgleichungen, welche eines Theils aus den allgemeinen Grundgleichungen der Hydrodynamik abgeleitet, anderen Theils unter Einführung attractiver oder repulsiver Molecularkräfte direct aufgestellt werden. Zu ähnlichen Differentialgleichungen führt auch die analytische Bestimmung der Wärmebewegung, obgleich man hierbei von einer vibrirenden Bewegung nicht ausgeht, sondern vielmehr die Wärme als etwas Materielles, in stetiger Strömung Begriffenes ansieht. Es wird aber nach neueren Untersuchungen immer wahrscheinlicher, daß auch die Wärme auf Massenschwingungen beruhe; ja mehrere thermische Erscheinungen, namentlich die Polarisation und Interferenz der Wärmestrahlen, sind ohne undulatorische Anschauungen gar nicht zu erklären. Man ist daher zu der Frage berechtigt, ob es nicht möglich sei, die Differentialgleichung der Wärmebewegung ebenfalls aus einem undulatorischen Princip abzuleiten. Dieses zu entscheiden und überhaupt den inneren Zusammenhang der drei genannten physikalischen Disciplinen festzustellen, ist der Zweck dieser Abhandlung. Es wird in derselben erstens aus der Annahme attractiver Molecularkräfte eine allgemeine Bewegungsgleichung abgeleitet, in welcher jede beliebige Art sehr kleiner Massenschwingungen ihren analytischen Ausdruck findet, und zweitens wird nachgewiesen, daß die partiellen Differentialgleichungen der Akustik, Optik und Wärmelehre in jener allgemeinen Bewegungsgleichung als specielle Fälle enthalten sind und, wie sie, sich aus derselben ableiten lassen.

Cap. 1. Von der Continuität der Körper.

§ 1. Wir denken uns jeden Körper, derselbe sei fest oder flüssig, als ein Continuum, dergestalt, daß sein Volumen von seiner Masse vollständig und ohne Lücken ausgefüllt werde. Ist der betrachtete Körper fest, so nehmen wir an, daß seine Oberfläche, so lange dieselbe sich ihrer Form nach nicht ändert, im Raume eine unveränderliche Lage behalte, und in diese Lage stets wieder zurückkehre, so oft der Körper, nachdem er irgend welche Formveränderungen erfahren hatte, genau wieder denselben innern Zustand annimmt, in welchem er sich vor jenen Formveränderungen befunden hatte. Ist der Körper flüssig, so denken wir uns denselben von den Wänden eines Gefäßes vollständig eingeschlossen und nehmen an, dieses Gefäß habe im Raume eine unveränderliche Lage. Kurz, wir schließen jede Möglichkeit einer Translations- oder Rotationsbewegung des ganzen Körpers aus unserer Betrachtung ganz aus und beschäftigen uns nur mit dem inneren Zustande desselben, und mit den Veränderungen, denen dieser in Folge gewisser sehr kleiner äußerer Impulse ausgesetzt ist. Der Körper, welches auch sein Aggregatzustand sei, befinde sich im Zustande des inneren Gleichgewichts, d. h. jedes, noch so kleine Theilchen seiner Masse behalte, wenn nicht ein äußerer Impuls eintritt, gegen alle übrigen Massentheilchen eine unveränderte Lage. Die absolute Lage aller, der Masse des Körpers angehörenden Punkte beziehen wir auf ein gemeinsames, im Raume festliegendes, rechtwinkeliges Axensystem, in welchem x, y, z die laufenden Coordinaten des inneren Raumes des Körpers sein mögen.

Unter **homogenen** Körpern versteht man nun solche, von denen gleiche Volumina überall gleiche Massen enthalten, und Dichtigkeit eines homogenen Körpers ist das Verhältniß seiner Gesammtmasse zu seinem Volumen. Ist der Körper nicht homogen, so kann man doch ein unendlich kleines Theilchen desselben als homogen ansehen, und man versteht unter **Dichtigkeit eines Körpers in einem bestimmten Punkte** das Verhältniß der Masse eines unendlich kleinen, diesen Punkt umschließenden Massentheilchens zu dem Volumen dieses Theilchens. Bezeichnet man mit ϑ die Dichtigkeit eines Körpers im Punkte x, y, z, so ist aus der gegebenen Definition ersichtlich, daß ϑ eine Function von x, y, z sein muß. Bei einem homogenen Körper reducirt sich diese Function offenbar auf eine Constante, die wir mit ϑ_0 bezeichnen wollen.

§ 2. Denkt man sich jetzt das Gleichgewicht sehr wenig gestört, indem man irgend ein unendlich kleines Massentheilchen des Körpers sehr wenig von seiner Gleichgewichtslage entfernt, so werden dadurch auch alle übrigen Massentheilchen um sehr wenig deplacirt werden. Ein beliebiges Theilchen M, welches sich ursprünglich an einer Stelle x, y, z befand, wird dadurch an eine andere, sehr wenig von jener entfernte Stelle $x+\xi$, $y+\eta$, $z+\zeta$ gelangen, wobei ξ, η, ζ sehr kleine Längen vorstellen, die wir in Zukunft Verschiebungen nennen wollen.

Ein zweites unendlich kleines Massentheilchen M', welches im ursprünglichen Gleichgewichtszustande an einer, unendlich wenig von jener entfernten Stelle $x+dx$, $y+dy$, $z+dz$ sich befand, also in einer Entfernung:

$$ds = \sqrt{dx^2+dy^2+dz^2}$$

von dem Theilchen M, wird durch dieselbe Störung an eine Stelle $x+\xi+d(x+\xi)$, $y+\eta+d(y+\eta)$, $z+\zeta+d(z+\zeta)$ getrieben, und wenn die gegenseitige Entfernung beider Theilchen, während jedes an seinem neuen Platze sich befindet, mit $ds(1+\varepsilon)$ bezeichnet wird, so hat man offenbar:

$$ds^2(1+\varepsilon)^2 = (dx+d\xi)^2+(dy+d\eta)^2+(dz+d\zeta)^2.$$

Hierin bezeichnet ε den Ausdehnungscoefficienten des ds, d. h. das Verhältniß der Zu- oder Abnahme, welche ds durch die Störung erfährt, zu seiner ursprünglichen Länge. Diese Längenzunahme kann aber, da die Störung als sehr klein vorausgesetzt wurde, nur sehr klein sein im Vergleich mit ds selbst; es muß folglich ε eine sehr kleine Größe sein. Vernachlässigt man daher in obiger Gleichung das Quadrat von ε gegen seine erste Potenz, dividirt beide Theile durch ds^2 und entwickelt den Ausdruck rechts, so kommt:

$$\begin{aligned} 1+2\varepsilon &= \left(\frac{dx}{ds}+\frac{d\xi}{ds}\right)^2+\left(\frac{dy}{ds}+\frac{d\eta}{ds}\right)^2+\left(\frac{dz}{ds}+\frac{d\zeta}{ds}\right)^2 \\ &= 1+2\left(\frac{dx}{ds}\frac{d\xi}{ds}+\frac{dy}{ds}\frac{d\eta}{ds}+\frac{dz}{ds}\frac{d\zeta}{ds}\right) \\ &\quad +\left(\frac{d\xi}{ds}\right)^2+\left(\frac{d\eta}{ds}\right)^2+\left(\frac{d\zeta}{ds}\right)^2. \end{aligned}$$

Nun sind die Verschiebungen ξ, η, ζ sehr kleine Größen, folglich $d\xi$, $d\eta$, $d\zeta$ sehr klein im Vergleich mit dx, dy, dz; die drei Differentialverhältnisse $\frac{dx}{ds}$, $\frac{dy}{ds}$, $\frac{dz}{ds}$ dagegen sind keineswegs sehr klein, da ihre Quadratsumme der Einheit gleich ist. Hieraus folgt, daß, während der Ausdruck:

$$\frac{dx}{ds}\frac{d\xi}{ds}+\frac{dy}{ds}\frac{d\eta}{ds}+\frac{dz}{ds}\frac{d\zeta}{ds}$$

als eine sehr kleine Größe erster Ordnung angesehen wird, der Ausdruck:

$$\left(\frac{d\xi}{ds}\right)^2+\left(\frac{d\eta}{ds}\right)^2+\left(\frac{d\zeta}{ds}\right)^2$$

als sehr kleine Größe zweiter Ordnung betrachtet werden muß. Vernachlässigt man daher diesen Term, so reducirt sich obige Gleichung auf:

$$\varepsilon = \frac{dx}{ds}\,\frac{d\xi}{ds} + \frac{dy}{ds}\,\frac{d\eta}{ds} + \frac{dz}{ds}\,\frac{d\zeta}{ds}.$$

§ 3. Wir sahen nun, daß durch die Störung des Gleichgewichts sämmtliche Punkte des Körpers sehr kleine Verschiebungen erfahren. Diese Verschiebungen werden aber im Allgemeinen nicht für alle Punkte dieselben sein, sondern von Punkt zu Punkt andere Werthe haben. Denkt man sich folglich den Punkt x, y, z der Reihe nach alle möglichen Stellen im Körper einnehmend, und bezeichnet die Verschiebungen, die ihm an jeder Stelle zukommen, mit ξ, η, ζ, so muß man diese Größen als veränderlich und von der Lage des Punktes x, y, z abhängig ansehen. Mit einem Worte, die Verschiebungen ξ, η, ζ sind Functionen von x, y, z. Differentiirt man demgemäß, so kommt:

$$\frac{d\xi}{ds} = \frac{\partial\xi}{\partial x}\,\frac{dx}{ds} + \frac{\partial\xi}{\partial y}\,\frac{dy}{ds} + \frac{\partial\xi}{\partial z}\,\frac{dz}{ds};$$

$$\frac{d\eta}{ds} = \frac{\partial\eta}{\partial x}\,\frac{dx}{ds} + \frac{\partial\eta}{\partial y}\,\frac{dy}{ds} + \frac{\partial\eta}{\partial z}\,\frac{dz}{ds};$$

$$\frac{d\zeta}{ds} = \frac{\partial\zeta}{\partial x}\,\frac{dx}{ds} + \frac{\partial\zeta}{\partial y}\,\frac{dy}{ds} + \frac{\partial\zeta}{\partial z}\,\frac{dz}{ds}.$$

Die drei Derivirten $\frac{dx}{ds}$, $\frac{dy}{ds}$, $\frac{dz}{ds}$ sind aber die Cosinus der Winkel, welche die Richtung ds mit den drei Axen bildet; bezeichnet man folglich diese drei Cosinus mit α, β, γ und setzt für die Derivirten $\frac{d\xi}{ds}$, $\frac{d\eta}{ds}$, $\frac{d\zeta}{ds}$ ihre erhaltenen Werthe, so kommt:

$$(1)\quad \left\{ \begin{aligned} \varepsilon = \alpha & \left(\alpha\,\frac{\partial\xi}{\partial x} + \beta\,\frac{\partial\xi}{\partial y} + \gamma\,\frac{\partial\xi}{\partial z}\right) \\ + \beta & \left(\alpha\,\frac{\partial\eta}{\partial x} + \beta\,\frac{\partial\eta}{\partial y} + \gamma\,\frac{\partial\eta}{\partial z}\right) \\ + \gamma & \left(\alpha\,\frac{\partial\zeta}{\partial x} + \beta\,\frac{\partial\zeta}{\partial y} + \gamma\,\frac{\partial\zeta}{\partial z}\right) \end{aligned} \right.$$

als Werth des Ausdehnungscoefficienten des ds, d. h. der unendlich kleinen Entfernung zweier, im Gleichgewichtszustande einander unendlich nahe liegender Punkte.

Man kann diesen Ausdruck offenbar auch so schreiben:

$$(2)\quad \left\{\begin{aligned} \varepsilon = &\ \alpha \frac{\partial}{\partial x}(\alpha\xi + \beta\eta + \gamma\zeta) \\ &+ \beta \frac{\partial}{\partial y}(\alpha\xi + \beta\eta + \gamma\zeta) \\ &+ \gamma \frac{\partial}{\partial z}(\alpha\xi + \beta\eta + \gamma\zeta), \end{aligned}\right.$$

was für einige weiter unten vorkommende Transformationen von Wichtigkeit ist.

§ 4. Wenn man den Ausdruck (1) oder (2) als den wahren Werth des Ausdehnungscoefficienten ε annimmt (ein Resultat, das sich, wie wir gesehen haben, von der Wahrheit um gewisse sehr kleine Größen zweiter Ordnung entfernt), so überzeugt man sich leicht, daß dann die Richtung des ds als durch die Störung des Gleichgewichts ungeändert anzusehen ist. In der That, es sind:

$$\frac{dx + d\xi}{ds(1+\varepsilon)};\quad \frac{dy + d\eta}{ds(1+\varepsilon)};\quad \frac{dz + d\zeta}{ds(1+\varepsilon)}$$

die Cosinus der drei Winkel, welche die Richtung des $ds(1+\varepsilon)$ mit den Axen bildet; mithin ist:

$$\frac{dx + d\xi}{ds(1+\varepsilon)}\frac{dx}{ds} + \frac{dy + d\eta}{ds(1+\varepsilon)}\frac{dy}{ds} + \frac{dz + d\zeta}{ds(1+\varepsilon)}\frac{dz}{ds}$$

$$= \frac{1}{1+\varepsilon}\left[\left(\frac{dx}{ds}\right)^2 + \left(\frac{dy}{ds}\right)^2 + \left(\frac{dz}{ds}\right)^2 + \frac{d\xi}{ds}\frac{dx}{ds} + \frac{d\eta}{ds}\frac{dy}{ds} + \frac{d\zeta}{ds}\frac{dz}{ds}\right]$$

der Cosinus des Winkels zwischen den Richtungen des ds und des $ds(1+\varepsilon)$, also des Ablenkungswinkels des ds. Nun ist aber:

$$\left(\frac{dx}{ds}\right)^2 + \left(\frac{dy}{ds}\right)^2 + \left(\frac{dz}{ds}\right)^2 = 1$$

und die Summe der übrigen Glieder in der eckigen Klammer ist, wie im § 2 gezeigt wurde, gleich ε. Es ist folglich der Cosinus des Ablenkungswinkels gleich Eins, also die Ablenkung selbst Null.

Wenn also die Formel (1) oder (2) des vorigen Paragraphen als wahrer Werth des ε angenommen wird, so muß man gleichzeitig annehmen, daß die Länge ds durch die Störung des Gleichgewichts nur eine Verlängerung oder Verkürzung, aber keine Richtungsveränderung erfährt.

§ 5. Außer den Veränderungen der relativen Lage der einzelnen Theilchen des Körpers muß offenbar die Störung des Gleichgewichts auch eine Veränderung der Dichtigkeit zur Folge haben, wenn nicht überall Zerreißungen stattfinden sollen. Solche Fälle aber, wo eine geringe Störung des Gleichgewichts überall Zerreißungen bewirkt, schließen wir aus unserer Betrachtung ganz aus, und nehmen statt dessen an, daß die Masse des betrachteten Körpers auch nach einer erfolgten sehr geringen primitiven Störung des Gleichgewichts, oder Erschütterung, sein Volumen continuirlich ausfülle. Wie man sich dieses als möglich zu denken, und welchen Kräften man ein solches Verharren eines Körpers in völliger Continuität zuzuschreiben habe, wird weiter unten gezeigt werden; für jetzt genüge die bloße Annahme, daß die Continuität nicht beeinträchtigt werde.

Unter dieser Annahme ist aber einleuchtend, daß durch die Erschütterung eine Veränderung der Dichtigkeit, und zwar überall, stattfinden muß. In der That, denkt man sich im Innern des Körpers ein unendlich kleines Massentheilchen, so ändert sich nach dem Bisherigen durch die Störung die relative Lage aller auf der Oberfläche dieses Theilchens liegenden Punkte; es wird folglich die Form dieser Oberfläche, und im Allgemeinen auch das von ihr eingeschlossene Volumen geändert, während die Masse, welche dieses Volumen erfüllt, ungeändert bleibt; und dieses wäre unmöglich, wenn sich die Dichtigkeit an dieser Stelle nicht änderte.

§ 6. Wir wollen nun annehmen, die Dichtigkeit des Körpers sei ursprünglich, also im Gleichgewichtszustande, durch die ganze Masse constant; ihr Werth sei ϑ_0. Wird jetzt das Gleichgewicht sehr wenig gestört, so ändert sich, wie wir eben gesehen haben, auch die Dichtigkeit an jeder Stelle, und wird z. B. im Punkte x, y, z nicht mehr durch ϑ_0, sondern durch:

$$\vartheta = \vartheta_0 (1 + \sigma)$$

ausgedrückt, wo σ die Condensation, d. h. das Verhältniß der Dichtigkeitszu- oder abnahme zur ursprünglichen Dichtigkeit bezeichnet, eine Größe, die ebenso wie ε, ξ, η, ζ, nur sehr kleiner Werthe fähig ist.

Auch dieses σ wird, ebenso wie jene vier Größen, eine Function von x, y, z sein, da offenbar im Allgemeinen die Masse des Körpers an verschiedenen Stellen verschieden condensirt oder verdünnt werden wird.

Um die Abhängigkeit des σ von x, y, z zu bestimmen, kann man mit Vortheil von dem Princip Gebrauch machen, daß, so lange ein Körper seine besondere Beschaffenheit behält, wodurch er sich von anderen Körpern unterscheidet, auch seine Masse in jedem noch so kleinen Theilchen dieselbe bleibt. Werden die einzelnen Theilchen eines Körpers gegeneinander verschoben, wie bei dem obigen Hergange, so verstehen wir jenes Princip nicht in der Weise, als ob ein im Raume festliegendes Volumenelement von stets sich erneuernder Masse erfüllt werde, sondern wir nehmen vielmehr an, ein und dasselbe unendlich kleine Volumenelement, welches durch die primitive Störung des Gleichgewichts seine Form ändert, schließe nach der Störung genau dieselbe

Masse ein, wie vorher. Diese Vorstellung gewährt den Vortheil, daß die Herleitung der Continuitätsgleichung, welche wir sogleich kennen lernen werden, für alle Arten von Körpern gültig ist.

§ 7. Der Einfachheit wegen, denken wir uns um den Punkt x, y, z, während der Körper sich im inneren Gleichgewichte befindet, eine unendlich kleine Kugel mit dem Radius ds beschrieben. Die Dichtigkeit innerhalb dieser kleinen Kugel ist dann ϑ_0 und ihr Volumen gleich $\frac{4}{3}\pi ds^3$. Wird jetzt das Gleichgewicht sehr wenig gestört, so ändert sich einerseits die Dichtigkeit innerhalb der Kugel und nimmt dort den Werth $\vartheta = \vartheta_0(1+\sigma)$ an; andererseits nimmt die Kugel selbst eine andere Lage und ihre Oberfläche eine andere Form, auch ihr Volumen im Allgemeinen einen andern Werth an; nur die Masse, welche von dieser Oberfläche eingeschlossen wird, bleibt nach obigem Princip genau dieselbe, welche im Gleichgewichtszustande die kleine Kugel erfüllte.

Nun verhalten sich die Dichtigkeiten gleicher Massen homogener Körper umgekehrt, wie die Volumina, von denen diese Massen eingeschlossen werden. Bedenkt man folglich, daß man unendlich kleine Massen als homogen ansehen kann und bezeichnet mit ω das Volumen, in welches die kleine Kugel durch die Erschütterung übergeht, so hat man:

$$\vartheta_0 : \vartheta = \omega : \frac{4\pi}{3} ds^3,$$

oder, wenn man für ϑ seinen Werth $\vartheta_0(1+\sigma)$ setzt:

$$\frac{1}{1+\sigma} = \frac{3\omega}{4\pi ds^3}.$$

§ 8. Um das Volumen ω zu berechnen, denken wir uns dasselbe in lauter Elemente von folgender Form: $r^2 \sin\theta \partial r \partial\theta \partial\varphi$ zerlegt, welche im Vergleich mit ω selbst unendlich klein sind, so daß also der Radiusvector r eine unendlich kleine Größe ist. Hierbei bezeichnet θ den Winkel zwischen dem Radiusvector r und der z-Axe und φ den Neigungswinkel der durch r und die z-Axe gelegten Ebene gegen die yz-Ebene. Das Element $r^2 \sin\theta \partial r \partial\theta \partial\varphi$ hat man über das ganze Volumen des ω zu integriren. Die Integration in Bezug auf r läßt sich sogleich ausführen; dieselbe erstreckt sich für jede mögliche Richtung des r, d. h. für jedes beliebige Werthsystem der beiden Winkel θ, φ von Null bis zu dem dieser Richtung entsprechenden Radiusvector der krummen Oberfläche des ω. Jeder dieser Radienvectoren ist aber nach dem Bisherigen gleich dem Werthe, den das in diese Richtung fallende ds durch die Störung annimmt, also gleich $ds(1+\varepsilon)$, worin man für ε seinen Werth aus § 2, und in diesem für α, β, γ die Cosinus der drei Richtungswinkel des ds zu setzen hat, weil ja nach dem im § 4 Bewiesenen die Richtungen des ds und des $ds(1+\varepsilon)$ zusammenfallen. Das auf r sich beziehende Integral ist folglich $= \frac{ds^3}{3}(1+\varepsilon)^3$, worin man für α, β, γ die Cosinus der drei Richtungswinkel des ds zu setzen hat.

In Bezug auf θ, φ sind resp. π, 2π die oberen Integrationsgrenzen, während die untere Grenze für alle drei Integrationen Null ist. Vernachlässigt man daher noch in der Entwickelung von $(1+\varepsilon)^3$ das Quadrat und den Cubus von ε gegen sein erste Potenz, so hat man:

$$\omega = \frac{ds^3}{3}\int_0^{2\pi}\int_0^{\pi}(1+3\varepsilon)\sin\theta\,\partial\theta\,\partial\varphi.$$

§ 9. Während nun der Radiusvector r bei der Integration nach θ, φ alle möglichen Richtungen annimmt, d. h. während θ, φ alle möglichen Werthsysteme durchlaufen, werden die Cosinus der drei Richtungswinkel des r stets durch: $\sin\theta\sin\varphi$, $\sin\theta\cos\varphi$, $\cos\theta$ ausgedrückt; man muß folglich nach Obigem in dem Werthe des ε:

$$\alpha = \sin\theta\sin\varphi,\ \beta = \sin\theta\cos\varphi,\ \gamma = \cos\theta$$

setzen, damit der Ausdruck: $ds(1+\varepsilon)$ für jede Richtung des r seine obere Grenze werde. Man erhält hierdurch:

$$\begin{aligned}\varepsilon = {} & \frac{\partial\xi}{\partial x}\sin^2\theta\sin^2\varphi + \frac{\partial\xi}{\partial y}\sin^2\theta\sin\varphi\cos\varphi + \frac{\partial\xi}{\partial z}\sin\theta\cos\theta\sin\varphi \\ & + \frac{\partial\eta}{\partial x}\sin^2\theta\sin\varphi\cos\varphi + \frac{\partial\eta}{\partial y}\sin^2\theta\cos^2\varphi + \frac{\partial\eta}{\partial z}\sin\theta\cos\theta\cos\varphi \\ & + \frac{\partial\zeta}{\partial x}\sin\theta\cos\theta\sin\varphi + \frac{\partial\zeta}{\partial y}\sin\theta\cos\theta\sin\varphi + \frac{\partial\zeta}{\partial z}\cos^2\theta.\end{aligned}$$

Multiplicirt man diesen Ausdruck mit $\sin\theta\,\partial\theta\,\partial\varphi$ und integrirt nach θ von o bis π und nach φ von o bis 2π, so verschwinden alle Glieder, bis auf diejenigen, welche in der Diagonalreihe stehen, und diese geben:

$$\frac{4\pi}{3}\left(\frac{\partial\xi}{\partial x} + \frac{\partial\eta}{\partial y} + \frac{\partial\zeta}{\partial z}\right).$$

Setzt man daher den eben gefundenen Werth des ω in die in § 7 erhaltene Gleichung und bemerkt noch, daß der von ε unabhängige Theil des ω gleich $\frac{4}{3}\pi ds^3$ ist, so erhält man:

$$\frac{1}{1+\sigma} = 1 + \frac{\partial\xi}{\partial x} + \frac{\partial\eta}{\partial y} + \frac{\partial\zeta}{\partial z},$$

oder endlich, wenn man den ersten Theil dieser Gleichung nach Potenzen von σ entwickelt und alle alle höheren Potenzen des σ gegen die erste vernachlässigt:

$$[1]\quad \sigma + \frac{\partial\xi}{\partial x} + \frac{\partial\eta}{\partial y} + \frac{\partial\zeta}{\partial z} = o.$$

Dieses ist die Gleichung des beharrlichen Zusammenhanges aller Theilchen des Körpers, oder schlechthin die Continuitätsgleichung; dieselbe gilt also nicht nur für flüssige Körper, für welche sie gewöhnlich auf eine andere Art bewiesen wird, sondern für alle Körper.

Cap. 2. Von den elastischen Kräften.

§ 10. Wir waren im vorigen Capitel von der Annahme ausgegangen, daß der Körper sich Anfangs im Gleichgewichte befunden habe, und daß dieses Gleichgewicht durch irgend einen Impuls sehr wenig gestört werde. Es muß jetzt untersucht werden, wie überhaupt ein inneres Gleichgewicht möglich sei, und was im Innern des Körpers vorgehe, wenn dieses Gleichgewicht gestört wird.

Man sagt, wie bereits bemerkt wurde, ein Körper befinde sich im innern Gleichgewichte, wenn alle noch so kleinen Massentheilchen desselben stets dieselbe Form und relative Lage zu einander behalten, so lange keine neuen Kräfte in Wirksamkeit treten. Es kann sich daher irgend eins dieser Massentheilchen nicht anders im Gleichgewichte befinden, als wenn alle auf dasselbe wirkenden Kräfte einander aufheben Welche Kräfte aber unter den einzelnen Massentheilchen eines Körpers wirksam sind, während derselbe sich äußerlich in Ruhe befindet, läßt sich experimentell nicht ergründen; man muß daher über den inneren Zustand eines jeden Körpers von einer besonderen Hypothese ausgehen.

Poisson und Cauchy nehmen, den Grundvorstellungen der Atomistik entsprechend, an, daß jedes Atom auf alle übrigen Atome desselben Körpers mit gewissen anziehenden oder abstoßenden Kräften wirke, die sich als Functionen der gegenseitigen Entfernungen je zweier der als auf einander wirksam gedachten Atome ausdrücken lassen. Von derselben Hypothese wollen wir bei der nachfolgenden Untersuchung ausgehen; nur denken wir uns nicht Atome, welche durch Zwischenräume von einander getrennt sind, sondern alle unendlich kleinen, continuirlich an einanderliegenden Massentheilchen als auf einander wirkend und formuliren demgemäß jene Hypothese in folgender Weise:

§ 11. Jedes der unendlich vielen unendlich kleinen Massentheilchen, in welche man den continuirlichen Körper auf irgend eine Art getheilt denken kann, steht mit der ganzen übrigen Masse des Körpers in attractiver oder repulsiver Wechselwirkung, die man nach den Principien der Mechanik berechnet, indem man die Kraft aufsucht, mit der irgend zwei dieser Theilchen aufeinander wirken, darauf das eine von beiden allmählig alle möglichen Lagen im Körper annehmen läßt, und schließlich die nach den drei Axen geschätzten Resultanten aller der so berechneten Kräfte summirt.

Die beschleunigende Kraft, mit der irgend zwei solcher Massentheilchen aufeinander wirken, läßt sich, so nehmen wir ferner an, als Function der Entfernung beider Theilchen von einander ausdrücken, so daß, wenn r diese Entfernung bezeichnet, die beschleunigende Kraft durch $f(r)$ ausgedrückt wird, wo f eine Function bezeichnet, deren Natur experimentell zu ergründen ist. Was hierbei die Entfernung r zweier unendlich kleinen Theilchen besagt, ist leicht einzusehen. Läßt man nämlich die Dimensionen eines kleinen Volumens immer mehr und mehr abnehmen, so müssen sich alle auf der Oberfläche dieses Volumens liegenden Punkte immer mehr einander nähern und in einen einzigen Punkt zusammenzufallen streben, welcher für jedes der unendlich vielen Theilchen eines Körpers eine bestimmte Lage in demselben hat. Die gegenseitige Entfernung der beiden Punkte, zu denen auf diese Art zwei Massentheilchen eines Körpers im Augenblicke ihres Verschwindens zusammenschmelzen würden, ist die oben mit r bezeichnete Länge.

Was endlich die Intensität der Kraft $f(r)$ betrifft, so nehmen wir an, daß diese Kraft nur auf sehr kleine Entfernungen eine merkliche Wirkung habe, auf einigermaßen beträchtliche Entfernungen aber nicht mehr wahrnehmbar sei. Wir stellen uns also unter $f(r)$ eine solche Function vor, welche mit wachsendem r so stark abnimmt, daß nur diejenigen Werthe, welche einem sehr kleinen r entsprechen, in Betracht kommen, dagegen die zu größeren Werthen des r gehörigen des $f(r)$ gegen jene ohne Weiteres vernachlässigt werden dürfen.

Die Function $f(r)$ selbst muß nun für jede Art von Körpern besonders bestimmt werden; im Allgemeinen aber muß man annehmen, daß diese Function von der Länge und Richtung des r abhänge. Denn denkt man sich um irgend ein Massentheilchen M herum mehrere andere, M', M'', M'''.... nach verschiedenen Richtungen hin liegend, aber sämmtlich um dieselbe Strecke r von M entfernt, so folgt aus obiger Annahme nur, daß die Wechselwirkung jedes dieser umliegenden Theilchen mit jenem M sich als Function von r ausdrücken lasse, also sich ändere, wenn alle diese Theilchen dem M näher, oder weiter von ihm fortrücken; keineswegs aber folgt aus dieser Annahme, daß die Function von r, durch welche die genannte Wechselwirkung ausgedrückt wird, für alle die Theilchen M', M'', M'''.... dieselbe sei, sondern sie wird sich im Allgemeinen mit der Richtung der geraden Linie ändern, welche man sich durch die beiden auf einander wirkenden Theilchen gezogen denkt.

Da diese Abhängigkeit der Kraft von ihrer Wirkungsrichtung zunächst nicht in Betracht kommt, so wollen wir dieselbe der Bequemlichkeit wegen nach wie vor durch $f(r)$ bezeichnen, also die Abhängigkeit des f von denjenigen Größen, durch welche die Richtung des r bestimmt wird, als durch das Operationszeichen f implicite ausgedrückt ansehen.

§ 12. Die meisten, ja in mehr oder minder hohem Grade wohl alle Körper ohne Ausnahme, suchen nun, sobald man sie aus ihrem inneren Gleichgewichtszustande in oben beschriebener Weise gestört hat, in denselben zurückzukehren. Man muß daher annehmen, daß in allen noch so kleinen Massentheilchen eines jeden Körpers ein Bestreben wohnt, eine bestimmte relative Lage zu einander und eine bestimmte Dichtigkeit zu behalten, und dieselbe nach jeder momentanen Erschütterung stets wiederzugewinnen. Ist die primitive Erschütterung so stark, daß die Kraft $f(r)$, durch welche der innere Zusammenhang der Theilchen erzeugt wird, vollständig vernichtet wird, so tritt eine Zerreißung oder eine andere wesentliche Veränderung des ganzen Körpers ein. Von solchen primitiven Erschütterungen ist in unserer Abhandlung nicht die Rede. Wir betrachten vielmehr nur solche primitive Erschütterungen, welche es den einzelnen Theilchen nicht unmöglich machen, in ihren Gleichgewichtszustand zurückzukehren.

Um unnöthige Distinctionen zu vermeiden, betrachten wir nur elastische Körper, und verstehen darunter solche, deren einzelne Theilchen nach sehr kleinen primitiven Erschütterungen ein Bestreben, in ihren Gleichgewichtszustand zurückzukehren, wirklich äußern. Die Kräfte, denen man dieses Bestreben zuzuschreiben hat, die sogenannten elastischen Kräfte, sind jetzt näher zu bestimmen.

§ 13. Wir hatten angenommen, daß zwei, um die sehr kleine Strecke r von einander entfernte unendlich kleine Massentheilchen im Gleichgewichtszustande mit einer Kraft $f(r)$ auf einander wirken. Nach der Störung werden dieselben beiden Theilchen um eine andere Strecke r' von einander abstehen. Um nun die Kraft bestimmen zu können, welche jetzt zwischen beiden Theilchen thätig ist, wird es nothwendig, obige Annahme einer weiteren Entwikkelung zu unterwerfen.

Wir nehmen zu diesem Zwecke als eine wesentliche Eigenschaft elastischer Körper an, daß durch sehr kleine primitive Erschütterungen keine neuen Kräfte hervorgerufen werden, sondern, daß nach wie vor nur diejenigen Kräfte wirken, welche bereits im Gleichgewichtszustande thätig waren Es ist dieses dieselbe Annahme, von welcher Poisson in seiner Denkschrift „über das Gleichgewicht und die Bewegung fester elastischer Körper" und Cauchy in seinen Abhandlungen über das Licht ausgeht, und welche überhaupt dem Wesen der

Körper so angemessen ist, daß wohl kein Zweifel über ihre Zulässigkeit entstehen dürfte.

Aus dieser Annahme folgt, daß die Elasticitätskraft, welche vor der Störung $f(r)$ zum Ausdrucke hatte, nach erfolgter Störung durch $f(r')$ ausgedrückt wird, vorausgesetzt, daß die Störung selbst nur sehr gering war. Unter sehr kleinen Störungen und Erschütterungen verstehen wir hierbei solche Verschiebungen der einzelnen Theilchen, durch welche alle in Betracht kommenden Raumgrößen sich nur um Größen ändern, welche im Vergleich mit ihnen selbst sehr klein sind.

Hiernach ist die Differenz $r'-r$ sehr klein im Vergleich mit r selbst; setzt man daher $r'=r(1+\varsigma)$, so ist ς eine sehr kleine Größe. Der Ausdruck für die Elasticitätskraft, welche nach der Störung thätig ist, wird $f(r')$ $=f[r(1+\varsigma)]$, und wenn man diesen Ausdruck vermöge des Taylorschen Satzes nach Potenzen von ς entwickelt und alle höheren Potenzen dieser sehr kleinen Größe gegen die erste vernachlässigt, so reducirt sich derselbe auf:

$$f(r)+rf'(r)\varsigma,$$

wo f' die blos auf r sich beziehende, also von dessen Richtung unabhängige partielle Differentiation andeutet.

§ 14. Um den Coefficienten ς zu bestimmen, bezeichnen wir mit x, y, z: $x+x'$, $y+y'$, $z+z'$, die Coordinaten zweier um die sehr kleine Strecke r von einander entfernten Theilchen im Gleichgewichtszustande; so ist:

$$(r) \qquad r^2 = x'^2+y'^2+z'^2,$$

und hierbei sind x', y', z' lauter sehr kleine Größen.

Durch die Erschütterung gelangt nun der Punkt x, y, z an die Stelle $x+\xi$, $y+\eta$, $z+\zeta$ und der Punkt $x+x'$, $y+y'$, $z+z'$ an eine Stelle $x+x'+\xi'$, $y+y'+\eta'$, $z+z'+\zeta'$, wo ξ', η', ζ' offenbar die Werthe sind, welche resp. ξ, η, ζ, annehmen, wenn man vom Punkte x, y, z zu $x+x'$, $y+y'$, $z+z'$ übergeht, d. h. wenn man x, y, z resp. um x', y', z' vermehrt. Entwickelt man folglich ξ', η', ζ' vermöge des Taylorschen Satzes nach Potenzen von x', y', z', vernachlässigt alle höheren Potenzen und Produkte gegen die ersten Potenzen, und bezeichnet die Verhältnisse $\frac{x'}{r}$, $\frac{y'}{r}$, $\frac{z'}{r}$, resp. durch α, β, γ, so kommt:

$$\frac{\xi'-\xi}{r} = \alpha\frac{\partial\xi}{\partial x} + \beta\frac{\partial\xi}{\partial y} + \gamma\frac{\partial\xi}{\partial z};$$

$$\frac{\eta'-\eta}{r} = \alpha\frac{\partial\eta}{\partial x} + \beta\frac{\partial\eta}{\partial y} + \gamma\frac{\partial\eta}{\partial z};$$

$$\frac{\zeta'-\zeta}{r} = \alpha\frac{\partial\zeta}{\partial x} + \beta\frac{\partial\zeta}{\partial y} + \gamma\frac{\partial\zeta}{\partial z}.$$

Der gegenseitige Abstand $r(1+\varsigma)$ beider Punkte nach erfolgter Störung des Gleichgewichts wird ausgedrückt durch:

$$r^2(1+\varsigma)^2=(x'+\xi'-\xi)^2+(y'+\eta'-\eta)^2+(z'+\zeta'+\zeta)^2,$$

oder wenn man entwickelt und die Gleichung (r) berücksichtigt:

$$2\varsigma+\varsigma^2=2\left(\alpha\,\frac{\xi'-\xi}{r}+\beta\,\frac{\eta'-\eta}{r}+\gamma\,\frac{\zeta'-\zeta}{r}\right)$$
$$+\left(\frac{\xi'-\xi}{r}\right)^2+\left(\frac{\eta'-\eta}{r}\right)^2+\left(\frac{\zeta'-\zeta}{r}\right)^2,$$

oder endlich nach Vernachlässigung aller sehr kleinen Größen zweiter Ordnung:

$$\varsigma=\alpha\,\frac{\xi'-\xi}{r}+\beta\,\frac{\eta'-\eta}{r}+\gamma\,\frac{\zeta'-\zeta}{r}.$$

Nun sind aber $\frac{x'}{r}$, $\frac{y'}{r}$, $\frac{z'}{r}$ die Cosinus der drei Richtungswinkel des r; setzt man folglich für die drei Größen: $\frac{\xi'-\xi}{r}$, $\frac{\eta'-\eta}{r}$, $\frac{\zeta'-\zeta}{r}$ ihre oben erhaltenen Werthe, und erinnert sich der im § 2 vorgenommenen Entwickelungen, so überzeugt man sich, daß ς genau mit dem Ausdehnungscoefficienten ε übereinstimmt. Auch erkennt man nach einer fast buchstäblichen Wiederholung der im § 4 angestellten Betrachtung, daß bei dem Grade der Genauigkeit, bei welchem $\varsigma=\varepsilon$ als Werth des Ausdehnungscoefficienten des r angenommen wird, die Richtungen r und $r(1+\varepsilon)$ zusammenfallen.

Es ist folglich: $f(r)+rf'(r)\varepsilon$ der Ausdruck derjenigen beschleunigenden Kraft, mit welcher zwei, ursprünglich um eine Strecke r von einander entfernte Theilchen nach der Störung auf einander wirken.

§ 15. Aus dem Bisherigen sieht man, daß die Kraft:

$$(f)\qquad f(r)+rf'(r)\varepsilon$$

sowohl von der Länge des r, als auch von seiner Richtung abhängt; denn einerseits ist ε augenscheinlich eine Function von den Cosinus α, β, γ der drei Richtungswinkel des r; andrerseits sind nach dem weiter oben Bemerkten $f(r)$ und $rf'(r)$ außer von der Länge des r auch von seiner Richtung abhängig, eine Abhängigkeit, welche nicht anders denkbar ist, als indem man beide Größen mittelbar oder unmittelbar als Functionen von denselben drei Cosinus α, β, γ ansieht. Es wird also jener Ausdruck (f) der Ausdruck für alle die beschleunigenden Kräfte, welche zwischen dem Theilchen x, y, z und einem beliebigen anderen, um r von ihm entfernten wirksam sind, während r in eine Richtung α, β, γ fällt. Läßt man daher α, β, γ, r allmählig alle möglichen Werthe durchlaufen, so liefert derselbe Ausdruck der Reihe nach alle die Kräfte, mit denen das Theilchen x, y, z auf alle umliegenden wirkt, oder mit denen es von jenen angegriffen wird.

Hiernach ist es nun leicht, das virtuelle Moment aller der Kräfte zu finden, deren Wirkung ein beliebiges Massentheilchen überhaupt ausgesetzt ist. Da nämlich der Ausdruck (f) die beschleunigende Elasticitätskraft vorstellt, so ist nach den Gesetzen anziehender Kräfte: $\mu[f(r)+rf'(r)\varepsilon]\,dm$ der Ausdruck für die Kraft, mit der zwei einander sehr nahe liegende Theilchen μ, dm auf einander wirken. Das Bestreben dieser Kraft ist, die beiden Theilchen, welche nach der Störung sich in einer Entfernung $r'=r(1+\varepsilon)$ von einander befinden, wieder in ihre ursprüngliche Entfernung r von einander zu versetzen. Denkt man sich daher zuerst das Theilchen dm als das wirkende, so sucht die Kraft das Theilchen μ längs der Wirkungsrichtung r' um die Strecke $r'-r=r\varepsilon$ fortzuführen, und zwar nach dm hin, oder von ihm fort, je nachdem beide Theilchen durch die Störung von einander entfernt, oder einander genähert worden waren, d. h. je nachdem $r\varepsilon$ positiv oder negativ ist. Die virtuelle Geschwindigkeit des Theilchens μ längs der Wirkungsrichtung der Kraft wird daher nach dem üblichen Algorithmus durch $\delta(r\varepsilon)$ ausgedrückt, und das virtuelle Moment der Kraft ist folglich:

$$(M) \qquad \mu[f(r)+rf'(r)\varepsilon]\delta(r\varepsilon)dm.$$

Hätte man statt des Theilchens dm das andere μ als das wirkende angesehen, so hätte man offenbar $-\delta(r\varepsilon)$ als virtuelle Geschwindigkeit ansehen, aber auch die Kraft selbst mit entgegengesetztem Zeichen nehmen müssen, hätte also genau denselben Ausdruck für das virtuelle Moment erhalten.

Es ist folglich der Ausdruck (M) überhaupt das virtuelle Moment der Wechselwirkung beider Theilchen μ, dm. Läßt man in demselben die Größen α, β, γ, dm alle möglichen Werthe durchlaufen, während r von o an bis zu einer sehr kleinen oberen Grenze zunimmt, so erhält man die virtuellen Momente der Kräfte, mit denen der Punkt μ von allen sehr nahe umliegenden angegriffen wird, und die Summe:

$$(S) \qquad \mu S[f(r)+rf'(r)\varepsilon]\delta(r\varepsilon)dm$$

aller dieser Momente ist nach dem Princip der virtuellen Geschwindigkeiten das virtuelle Moment der Wechselwirkung zwischen dem Theilchen μ und allen ihm sehr nahe liegenden. Wir haben aber gesehen, daß überhaupt nur sehr benachbarte Theilchen von merklicher Wirkung aufeinander sind; man muß folglich den Ausdruck (S) als das virtuelle Moment aller der Kräfte ansehen, welche überhaupt auf das Massentheilchen μ einwirken.

Cap. 3. Allgemeine Bewegungsgleichungen.

§ 16. Wir hatten oben gesehen, daß die Verschiebungen: ξ, η, ζ des Punktes x, y, z Functionen von x, y, z sind. Ueberläßt man nun den Punkt $x+\xi$, $y+\eta$, $z+\zeta$, oder vielmehr das in diesem Punkte befindliche

Massentheilchen μ, sich selbst, so muß in Folge der Kräfte, deren virtuelles Moment wir soeben kennen gelernt haben, nothwendig eine Bewegung eintreten, in Folge deren sich der Punkt μ nach Verlauf einer unendlich kleinen Zeit dt nicht mehr an der Stelle $x+\xi$, $y+\eta$, $z+\zeta$, sondern an einer anderen, unendlich wenig von dieser entfernten Stelle $x+\xi'$, $y+\eta'$, $z+\zeta'$ befinden wird. An dieser Stelle werden nun wieder andere Kräfte auf das Theilchen μ wirken, deren virtuelles Moment von jenem (S) verschieden ist, aber aus jenem erhalten wird, wenn man, ohne r, α, β, γ zu ändern, für ξ, η, ζ diejenigen Werthe ξ', η', ζ' setzt, welche diese Größen zu dieser Zeit annehmen.

In Folge der Wirkung dieser Kräfte wird nun der Punkt μ nach Verlauf eines weiteren unendlich kleinen Zeitintervalls wieder an eine andere Stelle gelangen und daselbst von Kräften angegriffen werden, deren virtuelles Moment man aus (S) ebenfalls dadurch bestimmt, daß man für ξ, η, ζ die gebührenden Werthe setzt, u. s. f. Man muß folglich ξ, η, ζ als Functionen der Zeit ansehen und kann dann das virtuelle Moment der in jedem Augenblicke auf das Theilchen μ wirkenden elastischen Kräfte aus dem Ausdrucke (S) erhalten, indem man für ξ, η, ζ einfach die in jedem Augenblicke ihnen zukommenden Werthe setzt.

§ 17. Um diese Werthe zu bestimmen, muß man die Bewegungsgleichungen suchen, wozu wir uns des d'Alembertschen Princips bedienen. Nach diesem Princip findet bei der Bewegung irgend eines Systems von Punkten, die in ganz beliebigen Verbindungen stehen können, und durch irgend welche Kräfte angegriffen werden, mit Hülfe jener Verbindungen in jedem Augenblicke Gleichgewicht statt zwischen diesen Kräften und zwischen solchen, welche gleich und entgegengesetzt sind, mit denjenigen, welche jedem einzelnen Punkte des Systems, wenn es frei wäre, die Bewegung ertheilen würde, welche derselbe wirklich befolgt.

Während nun der Punkt μ an einer Stelle $x+\xi$, $y+\eta$, $z+\zeta$ sich befindet, sind:

$$\mu\frac{d^2(x+\xi)}{dt^2},\quad \mu\frac{d^2(y+\eta)}{dt^2},\quad \mu\frac{d^2(z+\zeta)}{dt^2}$$

die drei Hauptcomponenten derjenigen Kräfte, welche diesem Punkte, wenn er frei wäre, die wirklich resultirende Bewegung ertheilen würden. Aber die Coordinaten: x, y, z hängen nur von der ursprünglichen Lage des Punktes μ im Körper ab und ändern sich während der ganzen Dauer der Bewegung nicht; es sind also x, y, z von t unabhängig und nur ξ, η, ζ, als die einzigen während der Bewegung sich ändernden Größen, sind Functionen von t. Bedient man sich daher, um anzudeuten, daß x, y, z, t von einander unabhängige Variable sind, der partiellen Differentialzeichen, so reduciren sich jene drei Kräfte auf:

$$\mu \frac{\partial^2 \xi}{\partial t^2}, \ \mu \frac{\partial^2 \eta}{\partial t^2}, \ \mu \frac{\partial^2 \zeta}{\partial t^2}.$$

§ 18. Um auszudrücken, daß zwischen diesen Kräften, wenn man ihre Richtungen umkehrt, und den gegebenen Kräften Gleichgewicht stattfindet, bedienen wir uns des Princips der virtuellen Geschwindigkeiten. Die drei virtuellen Geschwindigkeiten des Punktes μ längs der drei Axen werden nach der gebräuchlichen Beziehungsart durch:

$$\delta(x+\xi), \ \delta(y+\eta), \ \delta(z+\zeta)$$

ausgedrückt. Aber die Größen x, y, z sind in Bezug auf jede mögliche Verschiebung eines dem Körper angehörigen Punktes constant; man muß folglich diese drei virtuellen Geschwindigkeiten auf: $\delta\xi$, $\delta\eta$, $\delta\zeta$ reduciren. Die Summe der virtuellen Momente der oben angeführten drei Kräfte ist folglich:

$$\mu \left(\frac{\partial^2 \xi}{\partial t^2} \delta\xi + \frac{\partial^2 \eta}{\partial t^2} \delta\eta + \frac{\partial^2 \zeta}{\partial t^2} \delta\zeta \right)$$

Was das virtuelle Moment der gegebenen Kräfte betrifft, so haben wir es, da unserer Annahme nach, der Körper keiner äußeren Einwirkung unterworfen ist, nur mit dem im § 15 bestimmten Moment der Elasticitätskräfte zu thun, also mit der Summe (S). Auch in diesem Ausdrucke muß man bedenken, daß das r, als der unveränderliche Radiusvector, der zwei einander sehr nahe liegende Theilchen im Gleichgewichtszustande mit einander verbindet, ebenfalls an den durch die Bewegung dieser Theilchen eintretenden Veränderungen keinen Theil hat; man muß folglich auch r in Bezug auf die durch die Characteristik δ angedeuteten virtuellen Verschiebungen als constant ansehen, so daß also obiges Moment folgende Form annimmt:

$$\mu S r [f(r) + r f'(r) \varepsilon] \delta\varepsilon dm.$$

§ 19. Dem Massenelemente μ giebt man am Zweckmäßigsten die Form $\vartheta \partial x \partial y \partial z$. Setzt man hierin für ϑ seinen Werth $\vartheta_0 (1+\sigma)$ und bringt man hierin das d'Alembertsche Princip vermöge des Princips der virtuellen Geschwindigkeiten in Ansatz, so erhält man für die allgemeine Bewegungsgleichung folgende Form:

$$\iiint \Big\{ \vartheta_0 (1+\sigma) \left(\frac{\partial^2 \xi}{\partial t^2} \delta\xi + \frac{\partial^2 \eta}{\partial t^2} \delta\eta + \frac{\partial^2 \zeta}{\partial t^2} \delta\zeta \right)$$
$$- S\vartheta_0 (1+\sigma) [f(r) + r f'(r) \varepsilon] \, r \, \delta\varepsilon \, dm \Big\} \partial x \partial y \partial z = o,$$

wobei das dreifache Integral sich über die ganze Masse des Körpers erstreckt. Nun sind nicht nur ξ, η, ζ selbst, sondern auch die nach t genommenen Derivirten dieser Größen sehr klein; man darf daher die Producte aus diesen Derivirten in die sehr kleine Größe δ vernachlässigen; ebenso darf man ohne Weiteres das Product $\sigma\varepsilon$ gegen ε selbst außer Acht lassen. Die eben geschriebene Bewegungsgleichung nimmt dadurch folgende Form an:

$$(\Delta)\quad \left\{ \begin{aligned} \int\!\!\int\!\!\int \Big\{ & \frac{\partial^2 \xi}{\partial t^2}\delta\xi + \frac{\partial^2 \eta}{\partial t^2}\delta\eta + \frac{\partial^2 \zeta}{\partial t^2}\delta\zeta \\ & - S r\,[(1+\sigma)f(r) + r f'(r)\varepsilon]\,\delta\varepsilon\, dm \Big\} \partial x\,\partial y\,\partial z = o; \end{aligned} \right.$$

denn der Factor ϑ_0 ist eine wesentliche Constante, kann daher, da er allen Gliedern gemeinsam ist, fortbleiben.

Außer dieser Bewegungsgleichung hat man nun noch die Gleichungen zu erfüllen, welche aus den Verbindungen des Systems entspringen. Solcher Gleichungen werden zweierlei auftreten, nämlich eine, welche allen Körpern, von welchem Aggregatzustande und von welcher Form dieselben auch sein mögen, gemeinsam ist, und dann besondere Bedingungsgleichungen für besondere Arten von Körpern. Die Gleichungen letzterer Art können natürlich nur in den auf besondere Körper sich beziehenden Capiteln behandelt werden; die erstere, auf alle Körper ohne Ausnahme bezügliche dagegen muß sogleich erörtert werden.

§ 20. Diese Bedingung besteht in nichts Anderem, als in dem bereits im § 2 ausgesprochenen Princip von der Unveränderlichkeit der Masse. Man braucht also nur auszudrücken, daß jedes noch so kleine Volumenelement nach der Störung des Gleichgewichts dieselbe Masse einschließen muß, wie vorher, oder was dasselbe sagt, man braucht nur den Zuwachs, den die Masse eines unendlich kleinen Volumenelements durch die Erschütterung erhält, gleich Null zu setzen.

Giebt man nun diesem unendlich kleinen Massentheilchen die Form einer, mit dem unendlich kleinen Radius ds um den Punkt x, y, z beschriebenen Kugel, so ist deren Masse vor der Erschütterung offenbar $= \frac{4}{3}\pi\vartheta_0\, ds^3$, und der Werth, den die Masse durch die Erschütterung annimmt, läßt sich ganz auf dieselbe Art finden, wie oben im § 7 das Volumen ω, nur mit dem Unterschiede, daß man jetzt unter dem Integralzeichen den Factor $\vartheta = \vartheta_0(1+\sigma)$ hinzuzufügen hat. Die Annullirung des Zuwachses, den die Masse der kleinen Kugel durch die Erschütterung erhält, giebt daher:

$$\frac{\vartheta_0}{3} ds^3 \int_0^{2\pi}\!\!\int_0^{\pi} (1+\sigma)(1+\varepsilon)^3 \sin\theta\,\partial\theta\,\partial\varphi - \frac{4\pi}{3}\vartheta_0\, ds^3 = o.$$

Vernachlässigt man nun in der Entwickelung des Ausdruckes $(1+\sigma)$ $(1+\varepsilon)^3$ alle Producte und Potenzen der beiden sehr kleinen Größen σ, ε, so reducirt sich derselbe auf $1+\sigma+3\varepsilon$, und obige Gleichung auf:

$$\frac{4\pi}{3}\vartheta_0\, ds^3\left[\frac{1}{4\pi}\int_0^{2\pi}\int_0^{\pi}(1+\sigma+3\varepsilon)\sin\theta\partial\theta\partial\varphi-1\right]=o.$$

Hierin ist aber, wie bereits im § 8 gezeigt wurde, (da σ von r, θ, φ unabhängig ist):

$$\int_0^{2\pi}\int_0^{\pi}(1+\sigma)\sin\theta\partial\theta\partial\varphi=4\pi(1+\sigma)$$

$$\int_0^{2\pi}\int_0^{\pi}3\varepsilon\sin\theta\partial\theta\partial\varphi=4\pi\left(\frac{\partial\xi}{\partial x}+\frac{\partial\eta}{\partial y}+\frac{\partial\zeta}{\partial z}\right).$$

Man sieht also, daß jene Gleichung mit der Continuitätsgleichung genau übereinstimmt. Diese Gleichung enthält aber außer den Derivirten der Verschiebungen: ξ, η, ζ noch die unbekannte Function σ. Es kann folglich die aus der Unveränderlichkeit der Masse entspringende Gleichung zu keiner zwischen ξ, η, ζ selbst stattfindenden Relation führen, sondern kann nur dazu dienen, um σ als Function von ξ, η, ζ auszudrücken.

§ 21. Das virtuelle Moment:

$$\iiint S\, r[f(r)(1+\sigma)+rf'(r)\varepsilon]\,\delta\varepsilon\, dm\,\partial x\partial y\partial z$$

ist nun einiger Transformationen fähig, die wir jetzt der Reihe nach vornehmen wollen.

Was zunächst die durch das Zeichen S angedeutete Summation anlangt, so erstreckt sich dieselbe über alle möglichen Werthsysteme α, β, γ, dm, jedoch nur über sehr kleine Werthe des r. Nach unserer Voraussetzung sind aber die Functionen f, f' nur für sehr kleine r von merklichem Werthe, für größere Werthe des r dagegen von Null fast gar nicht verschieden. Läßt man daher in obiger Summe das r immer mehr und mehr zunehmen, so treten einerseits zu der Summe selbst nur unmerklich kleine Glieder hinzu, andrerseits aber kann man in diesen hinzutretenden Gliedern die Dichtigkeit des dm willkürlich bestimmen, weil die Fehler, welche durch eine solche willkürliche Bestimmung entstehen, durch die Factoren $f(r)$, $f'(r)$ vernichtet werden. Man kann demnach in den erwähnten Gliedern für die Dichtigkeit eines jeden der Massentheilchen dm die Dichtigkeit setzen, welche innerhalb einer mit sehr kleinem Radius r um den Punkt x, y, z beschriebenen Kugel in irgend einem Puncte stattfindet. Die Dichtigkeit innerhalb eines sehr kleinen Volumenelements darf aber als constant angesehen werden, und man darf demgemäß annehmen, daß in allen Punkten innerhalb der kleinen Kugel dieselbe Dichtigkeit ϑ stattfinde, wie in ihrem Mittelpunkte x, y, z. Man gelangt daher zu dem Schlusse, daß in der ganzen Summe, bis zu einem wie großen r man dieselbe auch ausdehnen mag, überall ϑ als die Dichtigkeit genommen werden darf.

Auf die Function ε kann eine Zu- oder Abnahme des r keinen Einfluß haben; denn es ist aus der Form dieser Function ersichtlich, daß sie nur von α, β, γ, also von der Richtung des r abhängt, dagegen von seiner Länge unabhängig ist. Man kann folglich die auf r bezügliche Summation jetzt ohne Weiteres von Null bis ∞ sich erstrecken lassen.

Um Irrthümern vorzubeugen, möge noch bemerkt werden, daß die Function ε immer nur den Ausdehnungscoefficienten eines sehr kleinen r ausdrücken kann, weil für größere Werthe des r die Coordinaten x', y', z' ebenfalls aufhören würden, sehr klein zu sein, wodurch die im § 14 vorgenommenen Entwickelungen ihre Gültigkeit verlieren würden. Läßt man nun in dem virtuellen Momente das r größere Werthe annehmen, so wird dadurch nicht etwa ε zugleich auch der Ausdehnungscoefficient dieser größeren Längen, sondern man darf nur schließen, daß obige Summe durch dieses Wachsen des r nicht aufhört, das virtuelle Moment darzustellen.

§ 22. Dem Massenelemente dm giebt man nach dem Bisherigen am Zweckmäßigsten die Form:

$$\vartheta r^2 \sin\theta \, \partial r \, \partial\theta \, \partial\varphi,$$

wodurch die Summe S die Form eines dreifachen Integrals annimmt, welches sich in Bezug auf θ, φ von o bis resp. π, 2π erstreckt, während o und ∞ die Integrationsgrenzen in Bezug auf r werden.

Die Anwendung dieser Form des Massenelements gewährt, wie bereits im § 8 besprochen wurde, den Vortheil, daß man überall in ε ohne Weiteres:

$$\alpha = \sin\theta \sin\varphi, \quad \beta = \sin\theta \cos\varphi, \quad \gamma = \cos\theta$$

setzen kann, wo θ den Winkel zwischen r und der z-Axe und φ den Neigungswinkel der rx-Ebene gegen die yz-Ebene bezeichnet.

Setzt man noch für ϑ seinen Werth $\vartheta_0(1+\sigma)$ und vernachlässigt in der Entwickelung des Productes

$$(1+\sigma)\,[(1+\sigma)f(r)+rf'(r)\varepsilon]$$

die Producte σ^2, ε, so reducirt sich unser virtuelles Moment auf:

$$\iiint\int_0^{2\pi}\int_0^{\pi}\int_0^{\infty} r^3[(1+2\sigma)f(r)+rf'(r)\varepsilon]\,\delta\varepsilon \sin\theta \, \partial r \, \partial\theta \, \partial\varphi \, \partial x \, \partial y \, \partial z.$$

§ 23. Wenn man die Summe S unter dieser Form in die Bewegungsgleichung des § 19 einsetzt, so überzeugt man sich zuvörderst, daß der von σ und ε unabhängige Theil derselben verschwindet.

In der That, die allgemeine Bewegungsgleichung muß auch die Gleichgewichtsbedingungen enthalten, muß also auch stattfinden, wenn die Erschütterung gänzlich unterbleibt, oder wenn die Masse, nachdem sie ihre Bewegung vollendet hat, endlich wieder zur Ruhe kommt. In beiden Fällen werden sowohl die Kräfte $\frac{\partial^2\xi}{\partial t^2}$, $\frac{\partial^2\eta}{\partial t^2}$, $\frac{\partial^2\zeta}{\partial t^2}$, als auch die Größen σ, ε Null. Was die Variation $\delta\varepsilon$ anlangt, so folgt aus dem eben Bemerkten keineswegs, daß dieselbe ebenfalls verschwinde. Nimmt man nämlich von ε die Variation und vertauscht die Zeichen ∂ und δ, so besteht die Variation $\delta\varepsilon$ aus lauter nach x, y, z genommenen partiellen Derivirten der drei Variationen $\delta\xi$, $\delta\eta$, $\delta\zeta$ und diese drücken in unserem Falle virtuelle Verschiebungen aus, also von der Zeit t vollkommen unabhängige, unendlich kleine Längen, denen man also, auch wenn ξ, η, ζ selbst verschwinden, doch von Null verschiedene Werthe geben kann.

Versetzt man sich demnach in den Anfangszustand, in welchem sowohl σ, als ε Null sind, so erhält man:

$$[o] \quad \int\int\int\int_0^{2\pi}\int_0^{\pi}\int_0^{\infty} r^3 f(r)\delta\varepsilon \sin\theta\,\partial r\,\partial\theta\,\partial\varphi\,\partial x\,\partial y\,\partial z = o,$$

und diese Gleichung muß, da die Größen r und $\delta\varepsilon$ von allen auf den Bewegungszustand bezüglichen Größen unabhängig sind, fortwährend stattfinden.

§ 24. Zu demselben Resultate gelangt man, wenn man, ganz abgesehen von einer primitiven Erschütterung, die Bedingungen des inneren Gleichgewichts aufsucht.

Diese Gleichgewichtsbedingung besteht nämlich darin, daß die Summe der virtuellen Momente aller im Körper wirksamen Kräfte Null sei. Diese Kräfte sind aber keine anderen, als diejenigen, deren Resultante für je zwei als auf einander wirkend gedachte Massentheilchen μ, dm durch $f(r)$ ausgedrückt wird, und deren Wirkungsrichtung mit der des r zusammenfällt. Die Gleichgewichtsbedingung ist folglich, wenn man mit Δr die virtuelle Geschwindigkeit des Punctes x, y, z längs der Richtung r bezeichnet:

$$\int\int\int\int_0^{2\pi}\int_0^{\pi}\int_0^{\infty} r^2 f(r)\,\Delta r \sin\theta\,\partial r\,\partial\theta\,\partial\varphi\,\partial x\,\partial y\,\partial z = o.$$

Was die Form des Δr betrifft, so bezeichnen wir mit Δx, Δy, Δz die virtuellen Geschwindigkeiten des Punctes x, y, z längs der drei Axen, und mit $\Delta' x$, $\Delta' y$, $\Delta' z$ die des Punctes $x+x'$, $y+y'$, $z+z'$. So hat man unter Δr die Längenzu- oder abnahme zu verstehen, welche die gegenseitige Entfernung r der beiden Punkte x, y, z; $x+x'$, $y+y'$, $z+z'$ durch die virtuellen Verschiebungen erfährt, durch welche beide Puncte resp. an die Stellen $x+\Delta x$, $y+\Delta y$, $z+\Delta z$, $x+x'+\Delta' x$, $y+y'+\Delta' y$, $z+z'+\Delta' z$ gelangen. Es muß daher: $(r+\Delta r)^2 = (x'+\Delta' x-\Delta x)^2 + (y'+\Delta' y-\Delta y)^2 + (z'+\Delta' z-\Delta z)^2$ werden und dieses reducirt sich nach Vernachlässigung sehr kleiner Größen zweiter Ordnung auf:

$$\Delta r = \alpha(\Delta' x-\Delta x) + \beta(\Delta' y-\Delta y) + \gamma(\Delta' z-\Delta z).$$

Hierbei muß man $\Delta' x$, $\Delta' y$, $\Delta' z$ als die Werthe ansehen, welche resp. Δx, Δy, Δz annehmen, wenn man x, y, z resp. um x', y', z' vermehrt; entwickelt man daher nach Potenzen von x', y', z' und bleibt bei den ersten Potenzen stehen, so erhält man:

$$\Delta' x = \Delta x + r\left(\alpha\frac{\partial \Delta x}{\partial x} + \beta\frac{\partial \Delta x}{\partial y} + \gamma\frac{\partial \Delta z}{\partial z}\right);$$

$$\Delta' y = \Delta y + r\left(\alpha\frac{\partial \Delta y}{\partial x} + \beta\frac{\partial \Delta y}{\partial y} + \gamma\frac{\partial \Delta y}{\partial z}\right);$$

$$\Delta' z = \Delta z + r\left(\alpha\frac{\partial \Delta z}{\partial x} + \beta\frac{\partial \Delta z}{\partial y} + \gamma\frac{\partial \Delta z}{\partial z}\right).$$

Setzt man diese Werthe in obigen Ausdruck für Δr so wird:

$$\begin{aligned}\Delta r = r\Big[&\alpha\left(\alpha\frac{\partial \Delta x}{\partial x} + \beta\frac{\partial \Delta x}{\partial y} + \gamma\frac{\partial \Delta x}{\partial z}\right);\\ &+\beta\left(\alpha\frac{\partial \Delta y}{\partial x} + \beta\frac{\partial \Delta y}{\partial y} + \beta\frac{\partial \Delta y}{\partial z}\right);\\ &+\gamma\left(\alpha\frac{\partial \Delta z}{\partial x} + \beta\frac{\partial \Delta z}{\partial y} + \gamma\frac{\partial \Delta z}{\partial z}\right)\Big].\end{aligned}$$

Da hierin die Größen Δx, Δy, Δz beliebige virtuelle Verschiebungen vorstellen, so sind diese Größen genau dieselben, welche wir bei der Bewegungsgleichung mit $\delta\xi$, $\delta\eta$, $\delta\zeta$ bezeichnet hatten. Denn da, wie wir bereits vorher bemerkten, die virtuellen Verschiebungen von der Zeit unabhängig sind, so erleiden dieselben durch den Uebergang vom Gleichgewichtszustande zum Zustande der Bewegung, und umgekehrt, keine Aenderung. Das Δr wird hierdurch genau gleich $r\delta\varepsilon$, wodurch die angeführte Gleichung mit der am Schluß des vorigen Paragraphen erhaltenen [o] völlig übereinstimmt.

Das virtuelle Moment reducirt sich vermöge dieser Gleichung auf:

$$\vartheta^0\int\!\!\int\!\!\int\!\!\int_0^{2\pi}\int_0^{\pi}\int_0^{\infty} r\,[2f(r)\,\sigma + rf'(r)\varepsilon]\,\delta\varepsilon \sin\theta\,\partial r\,\partial\theta\,\partial\varphi\,\partial x\,\partial y\,\partial z.$$

§ 25. Die Gleichung [o] muß in allen einzelnen Fällen identisch erfüllt werden und dient in solchen Fällen zur Bestimmung der Function f.

Man kann diese Gleichung auf eine passendere Form bringen. Zunächst wird es zweckmäßig sein, anstatt des auf r, θ, φ bezüglichen dreifachen Integrals wieder ein einfaches Integralzeichen zu gebrauchen, indem man das Element $r^2 \sin\theta\,\partial r\,\partial\theta\,\partial\varphi$ einfach mit $d\omega$ bezeichnet, während das Integral selbst über den ganzen unendlichen Raum ausgedehnt wird. Setzt man jetzt in [o] für $\delta\varepsilon$ seinen aus § 3 (2) abgeleiteten Werth und integrirt darauf im ersten Theile nach x, im zweiten nach y, im dritten nach z, so nimmt jene Gleichung folgende Form an:

$$\begin{aligned}&\int\!\!\int\!\!\int rf(r)\,\alpha(\alpha\delta\xi + \beta\delta\eta + \gamma\delta\zeta)\,d\omega\,\partial y\,\partial z\\ +&\int\!\!\int\!\!\int rf(r)\,\alpha(\alpha\delta\xi + \beta\delta\eta + \gamma\delta\zeta)\,d\omega\,\partial x\,\partial z\\ +&\int\!\!\int\!\!\int rf(r)\,\gamma(\alpha\delta\xi + \beta\delta\eta + \gamma\delta\zeta)\,d\omega\,\partial x\,\partial y = o,\end{aligned}$$

worin überall x, y, z durch die Gleichung der Oberfläche des Körpers mit einander zusammenhängen.

Bezeichnet man nun mit n die Richtung der nach Außen gerichteten Normale der Oberfläche, mit $d\Omega$ das auf dieser Normale senkrechte Oberflächenelement, und mit $\overline{nx}$, $\overline{ny}$, $\overline{nz}$, die drei Richtungswinkel der Normale, so hat man

$$\partial y\partial z = -d\Omega\cos\overline{nx};\ \partial x\partial z = -d\Omega\cos\overline{ny};\ \partial x\partial y = -d\Omega\cos\overline{nz}.$$

Führt man daher $d\Omega$ als Integrationselement ein, so kann man die drei auf x, y, z bezüglichen Doppelintegrale vereinigen und obige Gleichung auf folgende Art schreiben:

$$\int\!\!\int rf(r)\,(\alpha\cos\overline{nx} + \beta\cos\overline{ny} + \gamma\cos\overline{nz})\,(\alpha\delta\xi + \beta\delta\eta + \gamma\delta\zeta)\,d\omega\,d\Omega = o,$$

oder endlich:

$$[o]\qquad \int\!\!\int rf(r)\cos\overline{nr}\,(\alpha\delta\xi + \beta\delta\eta + \gamma\delta\zeta)\,d\omega\,d\Omega = o,$$

wo $\overline{nr}$ den Winkel zwischen der Normale n und dem Radiusvector r bezeichnet.

Die drei Variationen $\delta\xi$, $\delta\eta$, $\delta\zeta$ sind hierbei nicht völlig willkürlich, sondern müssen einer besonderen Bedingung genügen. Da nämlich in der Gleichung [o], wie wir schon sagten, die drei Größen x, y, z stets die Coordinaten eines Punctes der Oberfläche des Körpers bezeichnen und $\delta\xi$, $\delta\eta$, $\delta\zeta$ stets unendlich kleine Incremente dieser Größen so sind immer:

$$\frac{\delta\xi}{\sqrt{\delta\xi^2 + \delta\eta^2 + \delta\zeta^2}},\quad \frac{\delta\eta}{\sqrt{\delta\xi^2 + \delta\eta^2 + \delta\zeta^2}},\quad \frac{\delta\zeta}{\sqrt{\delta\xi^2 + \delta\eta^2 + \delta\zeta^2}}$$

die Cosinus der Winkel, welche eine, durch den Punct x, y, z an die krumme Oberfläche des Körpers gezogene Tangente mit den drei Coordinatenaxen bildet. Man hat folglich:

$$(\delta)\qquad \cos\overline{nx}\,\delta\xi + \cos\overline{ny}\,\delta\eta + \cos\overline{nz}\,\delta\zeta = o,$$

so oft, wie in obiger Gleichung, der Punct x, y, z auf der Oberfläche des Körpers liegt.

§ 26. Ersetzt man der Bequemlichkeit wegen überall das auf r, θ, φ bezügliche dreifache Integral durch ein einfaches, auf das Element $d\omega$ bezügliches, wie im vorigen Paragraphen geschah, und setzt zur Abkürzung:

$$2\vartheta_0\, rf(r) = h;\ \vartheta_0\, r^2 f'(r) = k,$$

so gestaltet sich nach allem Bisherigen und unter Berücksichtigung der Gleichung [o] die allgemeine Bewegungsgleichung, wie folgt:

$$[2]\qquad \left\{\int\!\!\int\!\!\int \left[\frac{\partial^2\xi}{\partial t^2}\delta\xi + \frac{\partial^2\eta}{\partial t^2}\delta\eta + \frac{\partial^2\zeta}{\partial t^2}\delta\zeta \right.\right. \\ \left. + \int (h\sigma + k\varepsilon)\,\delta\varepsilon\, d\omega\right]\partial x\partial y\partial z = o.$$

In mehreren Fällen, namentlich wenn es sich um optische Erscheinungen handelt, ist die eben angeführte Gleichung für das weitere Studium des Bewegungszustandes noch einer Transformation zu unterwerfen. Führt man zu diesem Zwecke, nach Vertauschung der Zeichen ∂, δ, für $\delta\varepsilon$ seinen aus der Gleichung § 3. (2) abgeleiteten Werth ein, so kann man das auf x, y, z bezügliche dreifache Integral durch theilweise Integration so umformen, daß statt der nach x, y, z genommenen partiellen Derivirten des Ausdrucks: $\alpha\delta\xi+\beta\delta\eta+\gamma\delta\zeta$ überall dieser Ausdruck selbst vorkommt. Setzt man daher der Kürze wegen:

$$\begin{aligned}\delta T = &\iiint (h\sigma+k\varepsilon)\,\alpha\,(\alpha\delta\xi+\beta\delta\eta+\gamma\delta\zeta)\,\partial\omega\,\partial y\,\partial z\\ &+\iiint (h\sigma+k\varepsilon)\,\beta\,(\alpha\delta\xi+\beta\delta\eta+\gamma\delta\zeta)\,\partial\omega\,\partial x\,\partial z\\ &+\iiint (h\sigma+k\varepsilon)\,\gamma\,(\alpha\delta\xi+\beta\delta\eta+\gamma\delta\zeta)\,\partial\omega\,\partial x\,\partial y,\end{aligned}$$

wo im ersten dreifachen Integral für x, im zweiten für y, im dritten für z je diejenigen Werthe als Functionen der beiden anderen Variablen zu setzen sind, welche ihnen auf der Oberfläche des Körpers zukommen, und welche durch die Gleichung dieser Fläche bestimmt werden, so erscheint die Gleichung [2] unter der Form:

$$[3]\quad\left\{\begin{aligned}\iiint\Bigg\{&\left\{\frac{\partial^2\xi}{\partial t^2}+\int\alpha\left[\alpha\frac{\partial(h\sigma+k\varepsilon)}{\partial x}+\beta\frac{\partial(h\sigma+k\varepsilon)}{\partial y}+\gamma\frac{\partial(h\sigma+k\varepsilon)}{\partial z}\right]\partial\omega\right\}\delta\xi\\ &+\left\{\frac{\partial^2\eta}{\partial t^2}+\int\beta\left[\alpha\frac{\partial(h\sigma+k\varepsilon)}{\partial x}+\beta\frac{\partial(h\sigma+k\varepsilon)}{\partial y}+\gamma\frac{\partial(h\sigma+k\varepsilon)}{\partial z}\right]\partial\omega\right\}\delta\eta\\ &+\left\{\frac{\partial^2\zeta}{\partial t^2}+\int\gamma\left[\alpha\frac{\partial(h\sigma+k\varepsilon)}{\partial x}+\beta\frac{\partial(h\sigma+k\varepsilon)}{\partial y}+\gamma\frac{\partial(h\sigma+k\varepsilon)}{\partial z}\right]\partial\omega\right\}\delta\zeta\Bigg\}\\ &\cdot\partial x\,\partial y\,\partial z=\delta T.\end{aligned}\right.$$

Der Integralausdruck δT läßt sich vermöge derselben Transformationen, welche wir im vorigen Paragraphen mit dem ersten Theile der Gleichung [o] vorgenommen hatten, auf eine übersichtlichere Form bringen, nämlich:

$$(T)\qquad \delta T=\iint (h\sigma+k\varepsilon)\cos\overline{nr}\,(\alpha\delta\xi+\beta\delta\eta+\gamma\delta\zeta)\,d\omega\,d\Omega,$$

wo $d\Omega$ das Element der Oberfläche bezeichnet.

Was die Constanten h, k anlangt, so ist h offenbar eine wesentlich positive Größe, da erstens ϑ_0 positiv ist, zweitens r innerhalb der Integrationsgrenzen o und ∞ liegt und drittens $f(r)$, als Ausdruck für die Intensität der primitiven Elasticität, ebenfalls nur positiv sein kann; die Constante k dagegen ist wesentlich negativ. Denn da, unserer Annahme gemäß, die Function $f(r)$ mit wachsendem r abnimmt und umgekehrt, so haben die beiden Differentiale: dr, $df(r)$, stets entgegengesetztes Vorzeichen; es ist folglich $f'(r)$ negativ, und mithin auch k.

Diese beiden Constanten h und k, sind die Bestimmungsgrößen, von denen die charakteristischen Eigenschaften der im Folgenden näher zu betrachtenden Körper abhängen.

Cap. 4. Differentialgleichungen der Akustik.

§ 27. Die Erscheinungen der Akustik finden ihre Erklärung in der Annahme, daß bald direct, bald durch Mittheilung der Vibrationen fester elastischer Körper, die atmosphärische Luft in Schwingungen geräth. Man hat es also in der Akustik hauptsächlich mit den Vibrationen fester Körper und der Wellenbewegung der Luft zu thun.

Wie bereits im § 11. bemerkt wurde, sind die Größen h und k im Allgemeinen Functionen der drei Veränderlichen r, θ, φ, und zwar sind es diejenigen Functionen, durch welche die primitive Elasticität der einzelnen Körper bestimmt wird. Wir betrachten jetzt zuerst homogene feste Körper und nehmen als ein Resultat der Erfahrung an, daß bei solchen Körpern die primitive Elasticität nach allen Richtungen hin dieselbe sei. Dadurch werden h und k Functionen blos von r, dagegen von θ, φ unabhängig. Man kann folglich überall in den auf das Element $d\omega$ bezüglichen Integralen die Integration nach θ, φ sogleich ausführen.

Betrachten wir zuvörderst die Gleichung [o] unter der im § 25 gegebenen Form, so reducirt sich dieselbe vermöge der Integralformeln:

$$\int_0^{2\pi}\int_0^{\pi} \alpha^2 \sin\theta\,\partial\theta\,\partial\varphi = \frac{4\pi}{3};\quad \int_0^{2\pi}\int_2^{\pi} \beta\gamma \sin\theta\,\partial\theta\,\partial\varphi = o;$$

$$\int_0^{2\pi}\int_0^{\pi} \beta^2 \sin\theta\,\partial\theta\,\partial\varphi = \frac{4\pi}{3};\quad \int_0^{2\pi}\int_0^{\pi} \alpha\gamma \sin\theta\,\partial\theta\,\partial\varphi = o;$$

$$\int_0^{2\pi}\int_0^{\pi} \gamma^2 \sin\theta\,\partial\theta\,\partial\varphi = \frac{4\pi}{3};\quad \int_0^{2\pi}\int_0^{\pi} \alpha\beta \sin\theta\,\partial\theta\,\partial\varphi = o$$

einfach auf:

$$\int\int_0^{\infty} r^3 f(r)\,dr\,(\cos\overline{nx}\,\delta\xi + \cos\overline{ny}\,\delta\eta + \cos\overline{nz}\,\delta\zeta)\,d\Omega = o,$$

und dieser Gleichung geschieht vermöge jener (δ) im § 25 von selbst Genüge, man darf also nicht, mit Poisson, schließen, daß das auf r bezügliche Integral verschwinden müsse.

§ 28. Zur Bestimmung der Vibrationen bedienen wir uns im vorliegenden Falle der Gleichung [2].

Setzt man in derselben für σ seinen Werth aus der Continuitätsgleichung [1] und für ε seinen Werth § 3 (1), so überzeugt man sich, daß der Ausdruck unter dem Integralzeichen aus lauter Producten aus den von θ, φ unabhängigen Größen h, k, σ und den partiellen Derivirten der drei Verschiebungen ξ, η, ζ nach x, y, z oder den Variationen dieser Derivirten in folgende Winkelfunctionen: α^2, β^2, γ^2, $\beta\gamma$, $\alpha\gamma$, $\alpha\beta$; α^4, β^4, γ^4, $\beta^2\gamma^2$, $\alpha^2\gamma^2$, $\alpha^2\beta^2$, $\alpha^2\beta\gamma$, $\alpha\beta^2\gamma$, $\alpha\beta\gamma^2$, $\beta^3\gamma$, $\beta\gamma^3$, $\alpha\gamma^3$, $\alpha^3\gamma$, $\alpha^3\beta$, $\alpha\beta^3$ besteht. Nun ist:

$$\int_0^{2\pi}\int_0^{\pi}\alpha^4 \sin\theta\, d\theta\, d\varphi = \frac{4\pi}{5}; \quad \int_0^{2\pi}\int_0^{\pi}\beta^2\gamma^2 \sin\theta\, d\theta\, d\varphi = \frac{4\pi}{15};$$

$$\int_0^{2\pi}\int_0^{\pi}\beta^4 \sin\theta\, d\theta\, d\varphi = \frac{4\pi}{5}; \quad \int_0^{2\pi}\int_0^{\pi}\alpha^2\gamma^2 \sin\theta\, d\theta\, d\varphi = \frac{4\pi}{15};$$

$$\int_0^{2\pi}\int_0^{\pi}\gamma^4 \sin\theta\, d\theta\, d\varphi = \frac{4\pi}{5}; \quad \int_0^{2\pi}\int_0^{\pi}\alpha^2\beta^2 \sin\theta\, d\theta\, d\varphi = \frac{4\pi}{15};$$

$$\int_0^{2\pi}\int_0^{\pi}\beta^3\gamma \sin\theta\, d\theta\, d\varphi = \int_0^{2\pi}\int_0^{\pi}\beta\gamma^3 \sin\theta\, d\theta\, d\varphi$$

$$= \int_0^{2\pi}\int_0^{\pi}\alpha\gamma^3 \sin\theta\, d\theta\, d\varphi = \int_0^{2\pi}\int_0^{\pi}\alpha^3\gamma \sin\theta\, d\theta\, d\varphi$$

$$= \int_0^{2\pi}\int_0^{\pi}\alpha^3\beta \sin\theta\, d\theta\, d\varphi = \int_0^{2\pi}\int_0^{\pi}\alpha\beta^3 \sin\theta\, d\theta\, d\varphi = o;$$

$$\int_0^{2\pi}\int_0^{\pi}\alpha^2\beta\gamma \sin\theta\, d\theta\, d\varphi = \int_0^{2\pi}\int_0^{\pi}\alpha\beta^2\gamma \sin\theta\, d\theta\, d\varphi$$

$$= \int_0^{2\pi}\int_0^{\pi}\alpha\beta\gamma^2 \sin\theta\, d\theta\, d\varphi = o.$$

Vermöge dieser und der im vorigen Paragraphen angeführten Integralformeln reducirt sich das auf $d\omega$ bezügliche Integral, wenn man noch die Bezeichnung:

$$H = \frac{4\pi}{3}\int_0^{\infty} hr^2 dr; \quad K = \frac{4\pi}{15}\int_0^{\infty} kr^2 dr$$

einführt und für σ seinen Werth aus der Continuitätsgleichung setzt, auf:

$$-H\left(\frac{\partial\xi}{\partial x}+\frac{\partial\eta}{\partial y}+\frac{\partial\zeta}{\partial z}\right)\delta\left(\frac{\partial\xi}{\partial x}+\frac{\partial\eta}{\partial y}+\frac{\partial\zeta}{\partial z}\right)$$

$$+K\Bigg[3\frac{\partial\xi}{\partial x}\,\delta\,\frac{\partial\xi}{\partial x}+3\frac{\partial\eta}{\partial y}\,\delta\,\frac{\partial\eta}{\partial y}+3\frac{\partial\zeta}{\partial z}\,\delta\,\frac{\partial\zeta}{\partial z}$$

$$+\frac{\partial\eta}{\partial y}\,\delta\,\frac{\partial\zeta}{\partial z}+\frac{\partial\zeta}{\partial z}\,\delta\,\frac{\partial\eta}{\partial y}+\frac{\partial\zeta}{\partial z}\,\delta\,\frac{\partial\xi}{\partial x}+\frac{\partial\xi}{\partial x}\,\delta\,\frac{\partial\zeta}{\partial z}+\frac{\partial\xi}{\partial x}\,\delta\,\frac{\partial\eta}{\partial y}+\frac{\partial\eta}{\partial y}\,\delta\,\frac{\partial\xi}{\partial x}$$

$$+\left(\frac{\partial\eta}{\partial z}+\frac{\partial\zeta}{\partial y}\right)\delta\left(\frac{\partial\eta}{\partial z}+\frac{\partial\zeta}{\partial y}\right)+\left(\frac{\partial\zeta}{\partial x}+\frac{\partial\xi}{\partial z}\right)\delta\left(\frac{\partial\zeta}{\partial x}+\frac{\partial\xi}{\partial z}\right)$$

$$+\left(\frac{\partial\xi}{\partial y}+\frac{\partial\eta}{\partial x}\right)\delta\left(\frac{\partial\xi}{\partial y}+\frac{\partial\eta}{\partial x}\right)\Bigg],$$

was man offenbar folgendermaßen schreiben kann:

$$\frac{K-H}{2}\delta\left(\frac{\partial\xi}{\partial x}+\frac{\partial\eta}{\partial y}+\frac{\partial\zeta}{\partial z}\right)^2+K\delta\left[\left(\frac{\partial\xi}{\partial x}\right)^2+\left(\frac{\partial\eta}{\partial y}\right)^2+\left(\frac{\partial\zeta}{\partial z}\right)^2\right.$$
$$\left.+\frac{1}{2}\left(\frac{\partial\eta}{\partial z}+\frac{\partial\zeta}{\partial y}\right)^2+\frac{1}{2}\left(\frac{\partial\zeta}{\partial x}+\frac{\partial\xi}{\partial z}\right)^2+\frac{1}{2}\left(\frac{\partial\xi}{\partial y}+\frac{\partial\eta}{\partial x}\right)^2\right].$$

Setzt man folglich mit Kirchhoff:

$$(1)\qquad \lambda+\mu+\nu=\frac{\partial\xi}{\partial x}+\frac{\partial\eta}{\partial y}+\frac{\partial\zeta}{\partial z};$$

$$(2)\qquad \lambda^2+\mu^2+\nu^2=\left(\frac{\partial\xi}{\partial x}\right)^2+\left(\frac{\partial\eta}{\partial y}\right)^2+\left(\frac{\partial\zeta}{\partial z}\right)^2$$
$$+\frac{1}{2}\left(\frac{\partial\eta}{\partial z}+\frac{\partial\zeta}{\partial y}\right)^2+\frac{1}{2}\left(\frac{\partial\zeta}{\partial x}+\frac{\partial\xi}{\partial z}\right)^2+\frac{1}{2}\left(\frac{\partial\xi}{\partial y}+\frac{\partial\eta}{\partial x}\right)^2$$

und bedient sich des Zeichens:

$$G=\frac{K-H}{2K}$$

so wird:

$$[4]\qquad \left\{\begin{aligned}&\int\!\!\int\!\!\int\left(\frac{\partial^2\xi}{\partial t^2}\delta\xi+\frac{\partial^2\eta}{\partial t^2}\delta\eta+\frac{\partial^2\zeta}{\partial t^2}\delta\zeta\right)\partial x\,\partial y\,\partial z\\&=K\delta\int\!\!\int\!\!\int[\lambda^2+\mu^2+\nu^2+G(\lambda+\mu+\nu)^2]\,\partial x\,\partial y\,\partial z\end{aligned}\right.$$

die allgemeine Bewegungsgleichung für die Vibrationen fester Körper.

Was hierin die Constante G betrifft, so findet Poisson $G=\frac{1}{2}$, weil nach ihm $H=o$ ist; wir finden nur, daß G positiv sein muß, weil H positiv und K negativ ist.

§ 29. Um die Schwingungen gasförmiger Körper zu bestimmen, bedienen wir uns der Gleichung [3]. Nimmt man an, die Luft besitze ebenfalls nach allen Richtungen hin dieselbe Elasticität, so wird wieder h und k von θ und φ unabhängig, und man kann ohne Weiteres die Integrationen nach θ, φ vermöge derselben Formeln, wie im vorigen Paragraphen, ausführen; die Bewegungsgleichung wird dadurch:

$$\int\!\!\int\!\!\int\left\{\left\{\frac{\partial^2\xi}{\partial t^2}+K\left[\frac{\partial^2\xi}{\partial x^2}+\frac{\partial^2\xi}{\partial y^2}+\frac{\partial^2\xi}{\partial z^2}+(1+2G)\frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{\partial\xi}{\partial x}+\frac{\partial\eta}{\partial y}+\frac{\partial\zeta}{\partial z}\right)\right]\right\}\delta\xi\right.$$
$$+\left\{\frac{\partial^2\eta}{\partial t^2}+K\left[\frac{\partial^2\eta}{\partial x^2}+\frac{\partial^2\eta}{\partial y^2}+\frac{\partial^2\eta}{\partial z^2}+(1+2G)\frac{\partial}{\partial y}\left(\frac{\partial\xi}{\partial x}+\frac{\partial\eta}{\partial y}+\frac{\partial\zeta}{\partial z}\right)\right]\right\}\delta\eta$$
$$\left.+\left\{\frac{\partial^2\zeta}{\partial t^2}+K\left[\frac{\partial^2\zeta}{\partial x^2}+\frac{\partial^2\zeta}{\partial y^2}+\frac{\partial^2\zeta}{\partial z^2}+(1+2G)\frac{\partial}{\partial z}\left(\frac{\partial\xi}{\partial x}+\frac{\partial\eta}{\partial y}+\frac{\partial\zeta}{\partial z}\right)\right]\right\}\delta\zeta\right\}$$
$$\cdot\,\partial x\,\partial y\,\partial z=\delta T.$$

Die Variation δT läßt sich vermöge derselben Integralformeln, welche zur Reduction des dreifachen Integrals dienten, auf folgende Form bringen:

$$\delta T = \int \Big[2G \left(\frac{\partial \xi}{\partial x} + \frac{\partial \eta}{\partial y} + \frac{\partial \zeta}{\partial z} \right) (\cos \overline{nx}\, \delta\xi + \cos \overline{ny}\, \delta\eta + \cos \overline{nz}\, \delta\zeta)$$

$$+ \left(\frac{\partial \xi}{\partial x} \cos \overline{nx} + \frac{\partial \eta}{\partial x} \cos \overline{ny} + \frac{\partial \zeta}{\partial x} \cos \overline{nz} \right) \delta\xi$$

$$+ \left(\frac{\partial \xi}{\partial y} \cos \overline{nx} + \frac{\partial \eta}{\partial y} \cos \overline{ny} + \frac{\partial \zeta}{\partial y} \cos \overline{nz} \right) \delta\eta$$

$$+ \left(\frac{\partial \xi}{\partial z} \cos \overline{nx} + \frac{\partial \eta}{\partial z} \cos \overline{ny} + \frac{\partial \zeta}{\partial z} \cos \overline{nz} \right) \delta\zeta$$

$$+ \frac{d\xi}{dn} \delta\xi + \frac{d\eta}{dn} \delta\eta + \frac{d\zeta}{dn} \delta\zeta \Big] \, d\Omega,$$

indem man anstatt eines Ausdrucks von der Form:

$$\frac{\partial \psi}{\partial x} \cos \overline{nx} + \frac{\partial \psi}{\partial y} \cos \overline{ny} + \frac{\partial \psi}{\partial z} \cos \overline{nz}$$

immer die nach der Richtung der Normale genommene Derivirte von ψ setzen kann. Nun sind offenbar: $\frac{d\xi}{dn}$, $\frac{d\eta}{dn}$, $\frac{d\zeta}{dn}$ die Cosinus der drei Richtungswinkel der Normale n, mithin:

$$\frac{d\xi}{dn} \delta\xi + \frac{d\eta}{dn} \delta\eta + \frac{d\zeta}{dn} \delta\zeta = o,$$

und aus denselben Gründen, auf denen das Bestehen der Gleichung (δ) § 25 beruht, verschwinden die Coefficienten von $\delta\xi$, $\delta\eta$, $\delta\zeta$; man hat folglich:

$$\delta T = o.$$

Da nun zwischen den drei Variationen $\delta\xi$, $\delta\eta$, $\delta\zeta$, bei gasförmigen Körpern keine Beziehung stattfindet, so muß man diese drei Größen als völlig von einander unabhängig ansehen. Es ist folglich das Verschwinden des ersten Theils der allgemeinen Bewegungsgleichung nicht anders möglich, als wenn die Coefficienten von $\delta\xi$, $\delta\eta$, $\delta\zeta$ besonders verschwinden. Dieses führt zu den drei Gleichungen:

$$\frac{\partial^2 \xi}{\partial t^2} + K \left[\frac{\partial^2 \xi}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 \xi}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 \xi}{\partial z^2} + (1 + 2G) \frac{\partial}{\partial x} \left(\frac{\partial \xi}{\partial x} + \frac{\partial \eta}{\partial y} + \frac{\partial \zeta}{\partial z} \right) \right] = o;$$

$$\frac{\partial^2 \eta}{\partial t^2} + K \left[\frac{\partial^2 \eta}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 \eta}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 \eta}{\partial z^2} + (1 + 2G) \frac{\partial}{\partial y} \left(\frac{\partial \xi}{\partial x} + \frac{\partial \eta}{\partial y} + \frac{\partial \zeta}{\partial z} \right) \right] = o;$$

$$\frac{\partial^2 \zeta}{\partial t^2} + K \left[\frac{\partial^2 \zeta}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 \zeta}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 \zeta}{\partial z^2} + (1 + 2G) \frac{\partial}{\partial z} \left(\frac{\partial \xi}{\partial x} + \frac{\partial \eta}{\partial y} + \frac{\partial \zeta}{\partial z} \right) \right] = o.$$

§ 30. Aus der Form dieser drei Gleichungen schließt man leicht vermöge des Lagrange-schen Theorems, daß, wenn die drei Größen ξ, η, ζ zu irgend einer Zeit die partiellen, resp. nach x, y, z genommenen Derivirten einer Function von x, y, z, sind, sie es zu jeder beliebigen Zeit sein müssen. Zählt man daher die Zeit von dem Augenblicke an, wo die drei Verschiebungen Null sind, so kann man zu einer beliebigen Zeit t setzen:

$$\xi = \frac{\partial s}{\partial x}, \quad \eta = \frac{\partial s}{\partial y}, \quad \zeta = \frac{\partial s}{\partial z},$$

wo s eine unbekannte Function von x, y, z, t ist.

Hieraus folgt:

$$\frac{\partial \eta}{\partial z} = \frac{\partial \zeta}{\partial y}, \quad \frac{\partial \zeta}{\partial x} = \frac{\partial \xi}{\partial z}, \quad \frac{\partial \xi}{\partial y} = \frac{\partial \eta}{\partial x}.$$

Vermöge dieser drei Formeln verwandeln sich obige drei Differentialgleichungen in:

$$\frac{\partial^2 \xi}{\partial t^2} = c^2 \left(\frac{\partial^2 \xi}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 \xi}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 \xi}{\partial z^2} \right);$$

$$\frac{\partial^2 \eta}{\partial t^2} = c^2 \left(\frac{\partial^2 \eta}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 \eta}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 \eta}{\partial z^2} \right);$$

$$\frac{\partial^2 \zeta}{\partial t^2} = c^2 \left(\frac{\partial^2 \zeta}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 \zeta}{\partial y^2} + \frac{\partial \zeta^2}{\partial z^2} \right),$$

wobei der Kürze wegen:

$$2K(1 + G) = -c^2,$$

gesetzt ist. Addirt man diese drei Gleichungen, nachdem man die erste nach x, die zweite nach y, die dritte nach z differentiirt hat und berücksichtigt die Continuitätsgleichung, so kommt:

$$\frac{\partial^2 \sigma}{\partial t^2} = c^2 \left(\frac{\partial^2 \sigma}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 \sigma}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 \sigma}{\partial z^2} \right),$$

welches die bekannte Differentialgleichung der akustischen Luftschwingungen ist.

Cap. 5. Differentialgleichungen der Optik.

§ 31. Die partiellen Differentialgleichungen, deren Integrale Cauchy zur Erklärung der optischen Erscheinungen anwendet, ergeben sich ebenfalls aus der allgemeinen Bewegungsgleichung [3]. Damit diese Gleichung unabhängig von jeder besonderen Gestalt der Oberfläche stattfinde, ist zunächst erforderlich, daß das Oberflächenintegral für sich verschwinde. Ferner muß man die drei Variationen $\delta\xi$, $\delta\eta$, $\delta\zeta$, sowohl durch die ganze Aethermasse hindurch, als auch auf deren Oberfläche, d. h. im Unendlichen, von einander als völlig unabhängig ansehen, also ihre Coefficienten einzeln annulliren.

Wir denken uns nun, daß an der Oberfläche des Aethers für jede beliebige Verschiebung der dort befindlichen Massentheilchen die Dichtigkeit constant, also die Condensation Null sei. So muß unter dem Integralzeichen in δT jede der drei Derivirten: $\frac{\partial \xi}{\partial x}$, $\frac{\partial \eta}{\partial y}$, $\frac{\partial \zeta}{\partial z}$ verschwinden. Annullirt man daher in δT die Coefficienten von $\delta\xi$, $\delta\eta$, $\delta\zeta$ und die der Derivirten von ξ, η, ζ, so kommt:

$$\int k\alpha^2\beta\gamma\, d\omega = \int k\alpha\beta^2\gamma\, d\omega = \int k\alpha\beta\gamma^2 d\omega = o,$$
$$\int k\,\beta^3\gamma\, d\omega = \int k\,\alpha\gamma^3\, d\omega = \int k\,\alpha^3\beta\, d\omega =$$
$$\int k\,\beta\gamma^3\, d\omega = \int k\,\alpha^3\gamma\, d\omega = \int k\,\alpha\beta^3\, d\omega = o.$$

Die Gleichung [o] im § 25 gilt für alle Körper, also auch für solche, bei denen die Condensation an der Oberfläche nicht verschwindet; dieselbe muß folglich unabhängig von den besonderen Werthen der drei Derivirten $\frac{\partial \xi}{\partial x}$, $\frac{\partial \eta}{\partial y}$, $\frac{\partial \zeta}{\partial z}$ stattfinden. Wie dem auch sei, so besteht immer zwischen den drei Variationen $\delta\xi$, $\delta\eta$, $\delta\zeta$ an der Oberfläche die Relation (δ) § 25. Multiplicirt man diese Gleichung mit einem unbestimmten Factor $-\lambda d\Omega$, integrirt das Product über die ganze Oberfläche und addirt dieses Integral zum ersten Theile der Gleichung [o], so darf man nun die drei Variationen $\delta\xi$, $\delta\eta$, $\delta\zeta$ als unabhängig von einander ansehen und erhält durch Annullirung ihrer Coefficienten:

$$\left[\int h\alpha^2 d\omega - \lambda\right] \cos\overline{nx} + \int h\,\alpha\beta\, d\omega \cos\overline{ny} + \int h\,\alpha\gamma\, d\omega \cos\overline{nz} = o;$$
$$\int h\,\alpha\beta\, d\omega \cos\overline{nx} + \left[\int h\,\beta^2\, d\omega - \lambda\right] \cos\overline{ny} + \int h\,\beta\gamma\, d\omega \cos\overline{nz} = o;$$
$$\int h\,\alpha\gamma\, d\omega \cos\overline{nx} + \int h\,\beta\gamma\, d\omega \cos\overline{ny} + \left[\int h\,\gamma^2\, d\omega - \lambda\right] \cos\overline{nz} = o.$$

Diese drei Gleichungen müssen aber ebenfalls unabhängig von der Form der Oberfläche, also auch von der Richtung der Normale n stattfinden; setzt man folglich die Coefficienten der Cosinus der drei Richtungswinkel dieser Normale einzeln gleich Null, so erhält man:

$$\int h\,\beta\gamma\, d\omega = \int h\,\alpha\gamma\, d\omega = \int h\,\alpha\beta\, d\omega = o;$$
$$\int h\,\alpha^2\, d\omega = \int h\,\beta^2\, d\omega = \int h\,\gamma^2\, d\omega = \lambda.$$

§ 32. Setzt man jetzt in der allgemeinen Bewegungsgleichung [3] die Coefficienten der drei virtuellen Geschwindigkeiten $\delta\xi$, $\delta\eta$, $\delta\zeta$ gleich Null und führt der Kürze wegen die Zeichen:

$$A = -\int k\alpha^4 d\omega;\ B = -\int k\beta^4 d\omega;\ C = -\int k\gamma^4 d\omega$$

$$A' = -\int k\beta^2\gamma^2 d\omega;\ B' = -\int k\alpha^2\gamma^2 d\omega;\ C' = -\int k\alpha^2\beta^2 d\omega$$

ein, so ergeben sich unter Berücksichtigung der im vorigen Paragraphen gewonnenen Gleichungen aus der allgemeinen Bewegungsgleichung [3] folgende drei partielle Differentialgleichungen:

$$\frac{\partial^2\xi}{\partial t^2} = (\lambda+A)\frac{\partial^2\xi}{\partial x^2} + C'\frac{\partial^2\xi}{\partial y^2} + B'\frac{\partial^2\xi}{\partial z^2} + (\lambda+2C')\frac{\partial^2\eta}{\partial x\partial y} + (\lambda+2B')\frac{\partial^2\zeta}{\partial x\partial z};$$

$$\frac{\partial^2\eta}{\partial t^2} = C'\frac{\partial^2\eta}{\partial x^2} + (\lambda+B)\frac{\partial^2\eta}{\partial y^2} + A'\frac{\partial^2\eta}{\partial z^2} + (\lambda+2C')\frac{\partial^2\xi}{\partial x\partial y} + (\lambda+2A')\frac{\partial^2\zeta}{\partial y\partial z};$$

$$\frac{\partial^2\zeta}{\partial t^2} = B'\frac{\partial^2\zeta}{\partial x^2} + A'\frac{\partial^2\zeta}{\partial y^2} + (\lambda+C)\frac{\partial^2\zeta}{\partial z^2} + (\lambda+2B')\frac{\partial^2\xi}{\partial x\partial z} + (\lambda+2A')\frac{\partial^2\eta}{\partial y\partial z}.$$

Die Integrale dieser drei Differentialgleichungen stimmen genau mit den Werthen überein, welche Cauchy für die drei Verschiebungen ξ, η, ζ findet; es ist also nicht nöthig, für jetzt auf diese Untersuchung näher einzugehen.

Cap. 6. Von der Wärme.

§ 33. Die ältere Ansicht, wonach die Wärme etwas Materielles ist, erscheint bei dem jetzigen Standpuncte der Wissenschaft als unhaltbar; man muß vielmehr die von Ampère zuerst genauer entwickelte Ansicht, daß die Wärmeerscheinungen in einer vibrirenden Bewegung ihren Grund haben, für die allein richtige halten. Von dieser Ansicht wollen wir bei der folgenden Untersuchung ausgehen und über die Natur der Wärme, ganz den wirklich erfolgenden Erscheinungen gemäß, folgende Bestimmung machen.

Wir waren oben bei der Bestimmung der elastischen Kräfte von der Annahme ausgegangen, daß, wenn man irgend ein Massentheilchen eines Körpers sehr wenig aus seiner Gleichgewichtslage entfernt, dadurch Kräfte hervorgerufen werden, welche den Gleichgewichtszustand wieder herzustellen streben. Da hierbei keine Kräfte als wirksam betrachtet werden, welche die einzelnen Körpertheilchen noch weiter von einander zu entfernen vermögen, als durch die primitive Erschütterung geschah, so folgte, daß die Verschiebungen ξ, η, ζ nie größer werden konnten, als sie zu Anfang waren. Diese Annahme wäre nun den Wärmeerscheinungen nicht entsprechend, da die Fundamentaleigenschaft der Wärme darin besteht, das Volumen der Körper um Größen zu verändern, die ziemlich beträchtlich sein können, so daß also die Verschiebungen der einzelnen Theilchen keineswegs sehr kleine Größen bleiben, wenn sie es auch zu Anfang, d. h. in Folge einer sehr kleinen primitiven Störung des Gleichgewichts, gewesen sein mögen. Um diesen Hergang zu erklären, nehmen wir anstatt einer einzigen primitiven Erschütterung, eine continuirliche Reihenfolge solcher Erschütterungen an, von denen zwar jede einzelne, wenn sie allein erfolgte, nur solche Deplacirungen der einzelnen Theilchen bewirken würde, welche während der ganzen Dauer der Bewegung sehr klein blieben, deren Gesammtheit aber allmählich eine beträchtliche Verschiebung bewirken kann, indem jede folgende schon eintritt, ehe die einzelnen Theilchen in Folge der nächst vorhergehenden zur Ruhe gelangt sind.

Nach der Sprache der Infinitesimalrechnung besagt nun eine solche continuirliche Reihe primitiver Erschütterungen soviel, daß, wenn einmal zu einer Zeit t eine Erschütterung erfolgte, die nächste Erschütterung nach Verlauf einer unendlich kleinen Zeit dt, also zur Zeit $t+dt$ eintritt, während in dem Zeitintervall dt keinerlei äußere Einwirkung auf die Theilchen des Körpers stattfindet. Um den oben beschriebenen Hergang analytisch festzustellen, braucht man daher nur auszudrücken, daß jedes Massentheilchen während des Zeitintervalls dt vermöge der Kräfte, welche in dieser Zeit wirken, sich im Gleichgewichte befinde.

§ 34. Bezeichnet man mit u, v, w die drei Seitengeschwindigkeiten irgend eines Massentheilchens x, y, z so hat man:

$$(1) \quad u = \frac{dx}{dt}, \quad v = \frac{dy}{dt}, \quad w = \frac{dz}{dt},$$

und die drei beschleunigenden Kräfte sind demgemäß:

$$\frac{du}{dt}, \quad \frac{dv}{dt}, \quad \frac{dw}{dt};$$

endlich sind udt, vdt, wdt die Verschiebungen, welche das Theilchen x, y, z während der Zeit dt längs der drei Axen erfährt. Bezeichnet man ferner mit $\varepsilon' dt$ den Ausdehnungscoefficienten der Länge:

$$(2) \quad ds = \sqrt{dx^2 + dy^2 + dz^2}$$

während der Zeit dt, so ist:

$$\varepsilon' dt = \frac{d^2 s}{ds\, dt}\, dt, \text{ also } \varepsilon' = \frac{d^2 s}{ds\, dt}.$$

Nun folgt aus (1) (2)

$$\frac{ds}{dt} = \sqrt{u^2 + v^2 + w^2},$$

also hat man:

$$\varepsilon' = \frac{d\sqrt{u^2+v^2+w^2}}{ds} = \frac{u}{\sqrt{u^2+v^2+w^2}}\frac{du}{ds} + \frac{v}{\sqrt{u^2+v^2+w^2}}\frac{dv}{ds} + \frac{w}{\sqrt{u^2+v^2+w^2}}\frac{dw}{ds},$$

oder, was dasselbe sagt:

$$(3) \qquad \varepsilon' = \frac{du}{ds}\frac{dx}{ds} + \frac{dv}{ds}\frac{dy}{ds} + \frac{dw}{ds}\frac{dz}{ds},$$

Man braucht daher, um den Ausdehnungscoefficienten für die Wärmeerscheinungen zu finden, einfach in der Continuitätsgleichung nur udt, vdt, wdt resp. anstatt ξ, η, ζ zu setzen.

§ 35. Die während der Zeit dt stattfindende Condensation wird dem entsprechend ausgedrückt durch: $\frac{1}{\vartheta}\frac{d\vartheta}{dt}dt$, und man erhält durch dieselbe Betrachtung, wie im § 2, wenn man darin anstatt des ε den Werth § 34, (3) setzt:

$$(4) \qquad \frac{1}{\vartheta}\frac{d\vartheta}{dt} + \frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial v}{\partial y} + \frac{\partial w}{\partial z} = o.$$

Man muß hierbei bemerken, daß, während die Herleitung der Continuitätsgleichung im § 2 auf der Vernachlässigung sehr kleiner Größen zweiter Ordnung beruhte, dieselbe im jetzigen Falle vollkommen streng wird, da jetzt unendlich kleine Verschiebungen an die Stelle der sehr kleinen treten.

In der Gleichung (4) ist nun wegen (1):

$$(5) \qquad \frac{d\vartheta}{dt} = \frac{\partial\vartheta}{\partial t} + u\frac{\partial\vartheta}{\partial x} + v\frac{\partial\vartheta}{\partial y} + w\frac{\partial\vartheta}{\partial z}.$$

Man kann jene Gleichung also auch schreiben, wie folgt:

$$[1] \qquad \frac{\partial\vartheta}{\partial t} + \frac{\partial(\vartheta u)}{\partial x} + \frac{\partial(\vartheta v)}{\partial y} + \frac{\partial(\vartheta w)}{\partial z} = o,$$

welches die in der Hydrodynamik auftretende allgemeine Continuitätsgleichung ist.

§ 35. Die allgemeine Bewegungsgleichung der Wärme ergiebt sich nach dem Bisherigen aus der Gleichung [2] einfach dadurch, daß man an die Stelle von $\frac{\partial^2\xi}{\partial t^2}$, $\frac{\partial^2\eta}{\partial t^2}$, $\frac{\partial^2\zeta}{\partial t^2}$, σ, resp. $\frac{du}{dt}$, $\frac{dv}{dt}$, $\frac{dw}{dt}$, $\frac{1}{\vartheta}\frac{d\vartheta}{dt}$ und anstatt des ε den Ausdruck, (3) § 34 setzt. Die drei virtuellen Geschwindigkeiten werden demgemäß: $\delta u dt$, $\delta v dt$, $\delta w dt$, indem die Characteristik δ von der Zeit unabhängig ist. Die drei Seitengeschwindigkeiten u, v, w, sowie alle ihre nach x, y, z genommenen partiellen Derivirten, sind sämmtlich sehr kleine Größen;

vernachlässigt man folglich alle sehr kleinen Größen zweiter Ordnung gegen die erster Ordnung, so kann man: $\frac{\partial u}{\partial t}$, $\frac{\partial v}{\partial t}$, $\frac{\partial w}{\partial t}$ resp. anstatt $\frac{du}{dt}$, $\frac{dv}{dt}$, $\frac{dw}{dt}$ setzen. Ebenso sind die drei Derivirten von ϑ nach x, y, z sehr klein, so daß also auch $\frac{d\vartheta}{dt}$ auf $\frac{\partial\vartheta}{\partial t}$ reducirt werden darf. Der Ausdehnungsquotient ε' endlich nimmt, wenn man denselben auf dieselbe Art, **mutatis mutandis**, bestimmt, wie weiter oben das ε, folgende Form an:

$$[6] \quad \varepsilon' = \alpha\left(\alpha\frac{\partial u}{\partial x} + \beta\frac{\partial u}{\partial y} + \gamma\frac{\partial u}{\partial z}\right) + \beta\left(\alpha\frac{\partial v}{\partial x} + \beta\frac{\partial v}{\partial y} + \gamma\frac{\partial v}{\partial z}\right) + \gamma\left(\alpha\frac{\partial w}{\partial x} + \beta\frac{\partial w}{\partial y} + \gamma\frac{\partial w}{\partial z}\right).$$

Die allgemeine Bewegungsgleichung wird hiernach:

$$[7] \quad \left\{ \int\!\!\int\!\!\int \left[\vartheta\left(\frac{\partial u}{\partial t}\delta u + \frac{\partial v}{\partial t}\delta v + \frac{\partial w}{\partial t}\delta w\right) + \int\left(h\frac{\partial\vartheta}{\partial t} + k\vartheta\varepsilon'\right)\delta\varepsilon'\,\partial\omega\right] \partial x\,\partial y\,\partial z = o, \right.$$

indem man dt als constanten Factor fortlassen kann. Die Buchstaben α, β, γ bedeuten genau dieselben Größen, wie in den früheren Capiteln; ebenso h und k.

Bezeichnet endlich ϑ_0 den constanten Anfangswerth der Dichtigkeit und σ die nach Verlauf der Zeit t eingetretene Condensation, so hat man:

$$\vartheta = \vartheta_0(1 + \sigma),$$

und hierin wird σ, selbst wenn die Verschiebungen nach einiger Zeit beträchtlicher geworden sind, doch stets nur sehr klein sein. Nimmt man dieses an und vernachlässigt alle sehr kleinen Größen zweiter und höherer Ordnung gegen die erste, so reducirt sich die allgemeine Bewegungsgleichung [7] auf:

$$[8] \quad \left\{ \int\!\!\int\!\!\int \left[\frac{\partial u}{\partial t}\delta u + \frac{\partial v}{\partial t}\delta v + \frac{\partial w}{\partial t}\delta w + \int\left(h\frac{\partial\sigma}{\partial t} + k\frac{\partial\varepsilon}{\partial t}\right)\delta\varepsilon\,d\omega\right] \partial x\,\partial y\,\partial z = o, \right.$$

indem nach dem Bisherigen offenbar $\varepsilon' = \frac{\partial\varepsilon}{\partial t}$ ist.

Für $\frac{\partial\sigma}{\partial t}$ ergiebt sich aus [1'] der Werth:

$$[9] \quad \frac{\partial\sigma}{\partial t} + \frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial v}{\partial y} + \frac{\partial w}{\partial z} = o,$$

§ 36. Wir betrachten schließlich den Fall, wo der Körper ein constantes Leitungs- und Strahlungsvermögen besitzt und charakterisiren diese Eigenschaft durch die Annahme, daß bei solchen Körpern h und k von θ, φ unabhängig sind. In diesem Falle verwandelt sich die Gleichung [8] in:

$$\iiint\left(\frac{\partial u}{\partial t}\delta u + \frac{\partial v}{\partial t}\delta v + \frac{\partial w}{\partial t}\delta w\right)\partial x\partial y\partial z$$

$$= K\delta\iiint[\lambda'^2 + \mu'^2 + \nu'^2 + G(\lambda' + \mu' + \nu')^2]\partial x\partial y\partial z,$$

wo λ', μ', ν' die Größen bezeichnen, welche man aus λ, μ, ν [§ 28, (1) (2)] erhält, wenn man überall u, v, w resp. statt ξ, η, ζ schreibt.

In dem Falle, wo der Ausdruck:

$$udx + vdy + wdz$$

ein vollständiges Differential ist, ergiebt sich aus dieser Gleichung durch dieselben Schlüsse, welche im Capitel 4 gemacht wurden:

$$\frac{\partial^2\sigma}{\partial t^2} = c^2\left(\frac{\partial^3\sigma}{\partial x^2\partial t} + \frac{\partial^3\sigma}{\partial y^2\partial t} + \frac{\partial^3\sigma}{\partial z^2\partial t}\right),$$

oder wenn man:

$$\frac{\partial\sigma}{\partial t} = \tau$$

setzt:

$$\frac{\partial\tau}{\partial t} = c^2\left(\frac{\partial^2\tau}{\partial x^2} + \frac{\partial^2\tau}{\partial y^2} + \frac{\partial^2\tau}{\partial z^2}\right),$$

welches die bekannte Differentialgleichung der Wärmebewegung ist.

R. Krusemarck.

Nachträgliche Berichtigung: Auf Seite 21, Zeile 6 soll statt des dritten β ein γ stehn, auch müssen die „;" aus Zeile 5 und 6 fehlen.

Jahres-Bericht

über die Angelegenheiten der evangelischen Realschule zu Graudenz

für den Zeitraum von Michaelis 1857 bis dahin 1858.

I.

Da in dem Unterrichte, wie derselbe in unserem vorjährigen Programm übersichtlich dargestellt worden, in dem verwichenen Schuljahre keine wesentlichen Veränderungen eingetreten sind, so erscheint es, um eine bloße Wiederholung zu vermeiden, angemessen, hierdurch auf jene Uebersicht zu verweisen.

II. Verordnungen der vorgesetzten Behörden.

1) Die Königl. Regierung läßt der Realschule unter dem 18. Decbr. eine Verfügung des Königl. Provinzial-Schul-Collegii vom 5. December 1857 zugehen, worin angeordnet wird, daß statt 164 hinkünftig 185 Exemplare des jährlichen Programmes einzusenden seien.

2) Im Auftrage des Hohen Ministerii fordert die Königl. Regierung den Director in einer Verfügung vom 28. Januar c. auf, eine übersichtliche Nachweisung der zur Zeit in der hiesigen Schule geltenden Schulgeldsätze und sonstigen von den Schülern zu leistenden Zahlungen einzureichen und zu berichten, nach welchen Grundsätzen bei der Befreiung vom Schulgelde verfahren und in welchem Verhältnisse zur Gesammtzahl der Schüler solche gewährt wird; desgleichen, von wem die Beschlußnahme über den Erlaß des Schulgeldes ausgehe.

3) Im Auftrage des Herrn Ministers der geistlichen rc. Angelegenheiten erhält die Schule von der Königl. Regierung mit einem Erlaß vom 14. März c. ein Exemplar der „Geschichte der Königl. Real- und Elisabeth-Schule zu Berlin von J. H. Schulz" zur Kenntnißnahme und Asservation.

4) Auf Grund einer Verfügung des Herrn Ministers der geistlichen ꝛc. Angelegenheiten vom 8. Juni c. wird durch die Kgl. Regierung vom 17. Juni c. die Schule auf die von dem Seminar-Lehrer Fix in Soest herausgegebene Wandkarte des preußischen Staates, sowie auf die „Uebersichten zur äußeren Geschichte des Vaterlandes" als auf ein empfehlenswerthes Lehrmittel aufmerksam gemacht.

5) Die Königl. Regierung läßt unter dem 17. Juni c. dem Director der Schule Abschrift eines Erlasses an den Patron derselben des Inhaltes, daß der Herr Minister der geistlichen ꝛc. Angelegenheiten auf den betreffenden Antrag die provisorische Verwaltung der fünften ordentlichen Lehrerstelle an der hiesigen Schule durch den Schulamts-Candidaten Krusemarck genehmigt und mit dem Auftrage zugehen, zu berichten, welche Lehrerstellen an der hiesigen Schule gegenwärtig nicht definitiv besetzt seien und durch wen solche interimistisch verwaltet werden.

6) Der Patron der Schule fordert unter dem 18. Juni den Director auf, Local-Schulgesetze zu entwerfen und einzureichen.

7) Das Königl. Provinzial-Schul-Collegium übersendet der Schule unter dem 30. Juni c. ein Exemplar des zur dritten Säcularfeier des Gymnasiums zu Danzig herausgegenen Programmes.

8) Der Magistrat ersucht den Director unter dem 25. Juli um Einreichung eines Entwurfes zur anderweitigen Verwendung der aus der Schelske-Stiftung der Schule jährlich zu Gute kommenden Geldsumme.

9) Die Königl. Regierung läßt unter dem 31. Juli c. der Schule eine Verfügung des Königl. Provinzial-Schul-Collegii vom 16. Juli zugehen, durch welche angeordnet wird, daß statt 185 hinkünftig 203 Exemplare des jährlichen Schulprogrammes eingesendet werden sollen.

10) Der Magistrat läßt dem Director unter dem 13. August Abschrift eines Schreibens an den zum Lehrer an der hiesigen Mittel-Knabenschule erwählten Hülfslehrer Kuhne in Berlin mit dem Auftrage zugehen, demselben den Termin zu bezeichnen, an welchem er zum Antritt seines Amtes hier einzutreffen habe.

11) Die Königl. Regierung läßt der Schule unter dem 28. August eine Verfügung des Königl. Provinzial-Schul-Collegii vom 13. August zugehen, wodurch angeordnet wird, daß die Directoren der Realschulen jedesmal, wenn für die ihrer Leitung anvertrauten Schulen ein Programm nicht herausgegeben wird, eine motivirte Anzeige darüber zu machen haben.

III. Weitere Nachrichten.

Der Unterricht in dem nun vollendeten Jahres-Cursus nahm am 8. October seinen Anfang. Es wurden beim Beginn des neuen Cursus 43 Schüler, 31 einheimische und 12 auswärtige, geprüft, aufgenommen und von diesen 18 in die Octava, 11 in die Septima, 10 in die Sexta, 2 in die Quinta, 1 in die Secunda und 1 in die Prima eingeführt und den betreffenden Ordinarien überwiesen.

Leider wurde gleich im ersten Quartal dieses Cursus der Unterricht durch eingetretene Krankheiten erheblich gestört und aufgehalten. Nachdem seit der Mitte des November einige Cholerafälle vorgekommen, trat die Grippe so epidemisch auf, daß in einzelnen Classen ein reichliches Drittheil, zeitenweise die Hälfte der Schüler vom Schulbesuche abgehalten wurde. Im December erkrankten auch drei Lehrer, von denen der Eine 4 Wochen, zwei Andere kürzere Zeit an der Wahrnehmung ihrer Berufs-Geschäfte verhindert wurden. Fast gegen den Schluß des Quartals, im letzten Drittheil des December wich die Krankheit, — Gott sei Dank, — ohne ein Opfer von der Schule gefordert zu haben.

Die Feier des Geburtstages Sr. Majestät des Königs beging die Realschule auch im verwichenen Jahre mit sämmtlichen evangelischen Schulen in der Stadtkirche, wo ein festlicher Gottesdienst stattfand, welchem sich die Lehrer und Schüler unserer Anstalt auf den betreffenden Wunsch der Stadtbehörde bereitwillig anschlossen, da es der Realschule leider an einem Local gebricht, wo sie alle ihre Zöglinge zu solchem Zwecke zu vereinigen im Stande wäre.

Um einem längst gefühlten Bedürfnisse zu entsprechen, beabsichtigten die städtischen Behörden schon seit längerer Zeit, eine zwischen der Realschule und der bestehenden einklassigen Elementar-Knabenschule in der Mitte stehende dreiklassige evangelische Knaben-Mittelschule, welche hauptsächlich den Söhnen der Handwerker eine den zeitigen Bedürfnissen dieses Standes entsprechende Bildung zu gewähren geeignet wäre, in's Leben treten zu lassen. Diese schon im Sommer 1856 zum Beschlusse gediehene Absicht ist nun im Laufe des verflossenen Schuljahres wenigstens theilweise verwirklicht worden, indem im Januar d. J. in der untern und im Mai c. in der mittlern Classe der neu gegründeten Anstalt der Unterricht seinen Anfang genommen hat. Zwei junge Männer, die auf dem Seminar für Stadtschulen in Berlin ausgebildet sind, fungiren jetzt als Lehrer*) an diesen beiden Classen; ein dritter Lehrer,

*) Siehe unter Nr. IV.

aus derselben Bildungs-Anstalt hervorgegangen, ist bereits gewählt und wird mit dem Anfange des bevorstehenden neuen Cursus, zu welcher Zeit die dritte, den Schlußstein der Mittelschule bildende Classe eingerichtet werden wird, seine Amtsthätigkeit an dieser Anstalt beginnen.

Am 17. und 20. März c. erfreute der Herr Regierungs-Rath Conditt die Realschule mit einem Besuche, vorzüglich, um neben andern Dienstgeschäften, die ihn hierher nach Graudenz riefen, einige neu eingetretene Lehrer kennen zu lernen, deren Unterrichte er zu diesem Behufe in Prima, Secunda, Sexta und in den bestehenden Classen der Mittelschule beiwohnte.

Die Vertheilung der Prämien aus der Schelske-Stiftung hat im verwichenen Jahre nicht stattgefunden, weil die beabsichtigten Erfolge dieser Art von Aufmunterung zu Fleiß und guter Führung dem Sinne der Stiftung gar nicht oder doch zu wenig entsprachen. Da die Stiftungs-Urkunde die Vertheilung von Prämien nicht ausdrücklich bestimmt, mithin die Verwendung der angewiesenen Mittel frei läßt, so wird sich die Schule noch in diesem Herbste mit dem Magistrate zu einigen suchen, wie in anderer Weise als bisher, der beregte Zweck des edlen Gründers zu erreichen sein dürfte.

Das Wintersemester schloß vorschriftsmäßig am Mittwoch vor Grün-Donnerstag, am 31. März; der Unterricht für des Sommersemester nahm am 12. April seinen Anfang.

Am 5. Juli c. beehrten Se. Excellenz der Herr Ober-Präsident und wirkliche Geheime-Rath Eichmann und der Herr Regierungs-Chef-Präsident Graf zu Eulenburg unsere Schule mit einem Besuche. Die hohen Obern ließen sich die Lehrer der Schule, deren sämmtliche Classen sie besuchten, vorstellen und erklärten sich scheidend von dem Eindruck, den der innere und äußere Zustand der Anstalt, so weit sie denselben überblickt, auf sie gemacht habe, befriedigt.

Am 9. Juli c. wohnte eine Deputation des Magistrates und der städtischen Schulbehörde, an ihrer Spitze den Herrn Bürgermeister Haase, dem Unterrichte einiger neu angestellten Lehrer der Realschule und in den beiden Classen der Mittelschule bei.

IV. Veränderungen im Lehrerpersonal.

An die Stelle des im Herbste v. J. von hier an das Gymnasium zu Elbing versetzten Lehrers Sonnenburg trat am 8. October v. J. der Lehrer der neuern Sprachen Hermann Sieglerschmidt aus Remscheid. Auf dem Seminar zu Meurs zum Elementar-Schulfach vorgebildet, demnächst zwei und ein halbes Jahr an einer Töchterschule zu Düsseldorf thätig, wurde er im Jahre 1836 auf Empfehlung des Herrn Schulrathes Altgelt zum Lehrer Sr. Königl. Hoheit des Prinz Georg von Preußen berufen, bekleidete diese Stellung $4\frac{1}{4}$ Jahr bis zu dem im September 1840 erfolgten Uebergange Sr. Königl. Hoheit auf die Universität zu Bonn, ging dann nach Paris, wo er sich dem Studium der neuern Sprachen widmete, leitete hiernächst 6 Jahre hindurch eine Privatschule zu Wald, studirte hierauf im Jahre 1850 Geschichte, Geographie und neuere Sprachen in Bonn und stand schließlich, nachdem er 1855 die Prüfung pro Schola absolvirt, einer Privatschule in Ruhrort vor, von wo aus er dem Rufe an die hiesige Realschule folgte.

An die Stelle des Predigtamts-Candidaten Franz Mattha, der, nachdem er vom Januar 1856 ab als Religionslehrer in den untern Klassen und als Lehrer der lateinischen Sprache in der Sexta unserer Schule nach Kräften gewirkt hatte, im Januar d. J. eine Hauslehrer-Stelle annahm, trat zu dieser Zeit provisorisch der eigentlich für die zweite Klasse der Mittelschule bestimmte, bis dahin an der Herzsprung'schen Parochialschule zu Berlin angestellt gewesene Hülfslehrer Aug. Wilh. Hermann aus Klosterhaide bei Lindow in der Grafschaft Ruppin, vorgebildet auf dem Seminar für Stadtschulen zu Berlin. Er ertheilte den Religions-Unterricht in den untern Klassen der Realschule und den Schreib-Unterricht in der 3. Klasse der Mittelschule, während der zugleich mit ihm für die dritte Klasse der Mittelschule angestellte, bis dahin an einer h. Töchterschule zu Berlin $1\frac{1}{2}$ Jahr thätig gewesene Hülfslehrer Louis Loest aus Tecklenburg in Westphalen, ebenfalls vorgebildet auf dem Seminar für Stadtschulen zu Berlin, neben dem Unterrichte in der Mittelschule, noch den lateinischen Sprach-Unterricht in der Sexta der Realschule übernahm.*)

*) Die Zahl der die beiden bestehenden Classen der Mittelschule besuchenden Schüler beträgt jetzt im Ganzen 49, von denen 18 der zweiten und 31 der dritten Classe angehören.

Lehrplan der 3klassigen Mittelschule.

Dritte Classe, 26 Stunden wöchentlich.

1) **Religions-Unterricht 4 St. w.** Eine Anzahl bibl. Gesch. A. u. N. Testaments. Erlernung des 1. Hauptstückes und der dazu gehörigen Bibelsprüche, einer Anzahl Kirchenlieder, des Morgen- und Abendsegens und einiger Tischgebete.

2) **Der Lese- und Sprach-Unterricht 8 St. w.** Nach Absolvirung des mechanischen Lesens, sinngemäßes Lesen, Besprechung und Erklärung d. gelesenen Stücke in sachl. und sprachl. Hinsicht; bei der sprachl. Erörterung zunächst die Bekanntschaft mit den Redetheilen, dann die Zergliederung des einfachen Satzes nach seinen Bestandtheilen, Rechtschreibung. Declamation kleiner Gedichte und Erzählungen.

Diese provisorische Verwaltung der an der Realschule vacanten Stelle endete jedoch am 6. Mai c. wo der Candidat Adolph Mann aus Strausberg in der Mark, nach Vollendung seiner Studien auf der Universität zu Berlin, zunächst ein Jahr hindurch Lehrer an der Stadtschule zu Charlottenburg, dann mehrere Jahre als Hauslehrer thätig, die in unserem Lehrer-Collegio vorhandene Lücke ausfüllte.

---

3) **Der Rechnen-Unterricht 6 St. w.** Die 4 Species in ungenannten u. benannten Zahlen, Kopf- und Tafelrechnen.
4) **Der Schreibe-Unterricht 6 St. w.** Einübung deutscher Buchstaben einzeln, in Wörtern und Sätzen.
5) **Der Gesang-Unterricht 2 St. w.** Die Dur-Tonleiter, die ersten Treff- und Taktübungen, kleine Lieder.

Zweite Classe 28 Stunden wöchentlich.

1) **Religions-Unterricht 4 St. w.** Erweiterung des Unterrichts in den bibl. Geschichten, Bibellesen, Erlernung des 2. und 3. Hauptstückes und der dazu gehörigen Bibelsprüche und einer Anzahl Kirchenlieder.
2) **Der Lese- und Sprach-Unterricht 6 St. w.** Lesen und Grammatik, Erweiterung der Satzlehre, Interpunktion, Orthographie, schriftl. Wiedergeben durchgesprochener Erzählungen und Beschreibungen, Declamiren von Gedichten und Parabeln.
3) **Rechnen-Unterricht 6 St. w.** Die Bruchrechnung und nach vollständiger Einübung derselben die leichtern Verhältnißrechnungen.
4) **Der Unterricht in der Formenlehre, verbunden mit den ersten Uebungen im Zeichnen 2 St. w.** Zunächst Betrachtung der Linien und Winkel, sowie geradliniger Figuren an geometrischen Körpern, Anschauung und Erklärung planimetr. Figuren.
5) **Der Unterricht in der Erdbeschreibung und Geschichte 2 St. w.** Im 1. Jahre die ersten geographischen Begriffe, die Umgebungen der Vaterstadt, im Ganzen die Provinz Preußen nach Kawerau's Karte. Im 2. Jahre biographische Skizzen d. Geschichte des Alterthums. — Geschichte der Provinz Preußen.
6) **Unterricht in der Naturkunde 2 St. w.** Die wichtigsten vaterl. Thiere, Pflanzen, besonders die nutzbaren und die Giftpflanzen, sowie die einheimischen Mineralien nach ihren characteristischen Merkmalen.
7) **Schreibe-Unterricht 4 St. w.** Das deutsche und lateinische Alphabet, in Wörtern und Sätzen, Anfang im Taktschreiben.
8) **Gesang-Unterricht 2 St. w.** Leichte Choräle, vaterl. und Volkslieder.

Erste Classe 32 Stunden.

1) **Religions-Unterricht 4 St.** Abschließende Ergänzung des Unterrichts in den bibl. Geschichten. Erlernung des 4. und 5. Hauptstücks, des Zwischenstückes von der Gewalt der Schlüssel und der Beichte, des kirchlichen Beichtformulars, Bibellesen, Einprägung einer Anzahl Kirchenlieder, kurze Geschichte der Reformation.

Schließlich folgte zu Ostern d. J. der ordentl. Lehrer **Emil Blümel** einem Rufe an das Gymnasium zu Hohenstein, nachdem er 9 Jahre hindurch vornehmlich als Lehrer der Mathematik an unserer Realschule — einige Jahre auch an der hiesigen Provinzial-Gewerbschule — mit allseitig anerkanntem Erfolge gewirkt hatte. Die durch den Abgang dieses tüchtigen Lehrers vacant gewordene Stelle wurde von dem Patrone der Schule mit Genehmigung des hohen Ministerii der geistlichen, Unterrichts- und Medicinal-Angelegenheiten dem Candidaten des höhern Schulamtes **Reinhold Krusemarck** aus Hohenschlenzer bei Jüterbogk zur provisorischen Verwaltung übertragen. Auf dem Gymnasium zu Potsdam vorbereitet, widmete sich derselbe auf den Uni-

---

2) **Lese- und Sprach-Unterricht 6 St. w.** Lesen und Grammatik, Erweiterung der Satzlehre an dem Lesestoff, Interpunktion, Orthographie, Anleitung kl. Aufsätze und praktische Uebung darin, Declamiren von Gedichten und prosaischen Stücken. In jedem Jahre einige kurze Biographien der vornehmsten deutschen Dichter.

3) **Der Rechnen-Unterricht 4 St. w.** Die im geschäftlichen Leben am meisten vorkommenden zusammengesetzten Verhältnißrechnungen: die zusammengesetzte Regeldetri, die Gesellschafts-Rechnung, die Zins- und Disconto-Rechnung 2c.

4) **Der Unterricht in der Geometrie 2 St. w.** Die ebene Geometrie bis zum pythagoräischen Lehrsatz; Flächenberechnungen, überhaupt geometrische Aufgaben.

5) **Der Unterricht in der Erdbeschreibung 2 St. w.** Uebersicht der zum preußischen Staate gehörigen Provinzen, Uebersicht der Welttheile, besonders Europas; das Wesentlichste aus der mathemat. Geographie, als: Gestalt der Erde, Horizont, Weltgegenden (Compaß), Pole, Aequator, Parallelkreise, Zonen, Meridiane, Eintheilung der Kreislinien in Grade 2c. Die Erde als Planet, doppelte Bewegung derselben, Tageszeiten, Jahreszeiten, Tag- u. Nachtgleichen. Der Mond, Sonnen- und Mondfinsternisse u. dgl.

6) **Der Geschichts-Unterricht 2 St. w.** Im 1. Jahre: Wiederholung der Geschichte der Provinz Preußen mit Hinzufügung kurzer Biographien der bedeutendsten Regenten aus dem Hause Hohenzollern. — Im 2. Jahre: Die vornehmsten Begebenheiten aus der mittlern und neuern Geschichte.

7) **Unterricht in der Naturkunde 2 St. w.** Die im gewerblichen Leben am meisten benutzten Instrumente, Apparate und Maschinen, z. B. Pendel, Hebel, Rolle, Flaschenzug 2c. Wasserrad, Hebepumpe, Spritze, Barometer, sowie die wichtigsten von der Wärme, Electricität und dem Magnetismus bedingten Erscheinungen, sowie die im gewöhnl. Leben am meisten vorkommenden chemischen Processe.

8) **Schreib-Unterricht 4 St. w.** Deutsche und latein. Schrift. Taktschreiben, Dictata. Der Inhalt der dabei benutzten Vorschriften ist der Art, daß der Schüler beim Schreiben mit den gewöhnlichen im gewerblichen Betrieb und geschäftlichen Verkehr am meisten vorkommenden Formeln und Formen unter besonderer Mitwirkung des Lehrers bekannt gemacht wird. Diese Vorschriften enthalten sonach: Muster von Rechnungen, Quittungen, kl. Geschäftsbriefen, Attesten, An- und Abmeldungen 2c.

9) **Der Zeichnen-Unterricht 4 St. w,** Linearzeichnen, dessen Ziel und Zweck ist, die Schüler zur Fertigkeit in der Handhabung des Lineals und des Maaßes anzuleiten.

10) **Der Gesang-Unterricht 2 St. w.** Einübung der liturgischen Chöre, der gebräuchlichsten Kirchen-Melodien, vaterländ. Lieder.

versitäten zu Halle und Berlin dem Studium der Mathematik und der Naturwissenschaften, absolvirte hierauf seine Probejahre an der Realschule zu Potsdam und hat nun seit dem Beginn des gegenwärtigen Sommersemesters seine amtliche Thätigkeit an unserer Schule mit erfreulichem Eifer begonnen.

V. Statistisches.

Die Gesammtzahl der Zöglinge unserer Realschule betrug während des vorjährigen Cursus 318, während des gegenwärtigen Cursus betrug sie 376, davon waren in der I. Cl. 8, in der II. 24, in der III. 39, in der IV. 53, in der V. 58, in der VI. 69, in der VII. 77, in der VIII. 48. Die nachstehende Tabelle specialisirt diese Angaben.

Classen	Zahl b. Anfg. d. Schuljahres	Evangelische.	Katholische.	Jüdische.	Einheimische.	Auswärtige	Vom Schulgeld frei.	Abgang.	Zugang.	Jetzige Zahl.
Prima	8	8	—	—	4	4	2	5	—	3
Secunda	24	22	—	2	13	11	1	7	1	18
Tertia	39	35	3	1	27	12	1	10	1	30
Quarta	53	47	1	5	39	14	9	7	1	47
Quinta	58	47	6	5	51	7	1	10	1	49
Sexta	69	58	4	7	59	10	12	23	4	50
Septima	64	58	2	4	60	4	20	21	34	77
Octava	32	26	3	3	25	7	17	26	42	48
Summa	347	301	19	27	278	69	63	109	84	322

Von den 12 aus Prima und Secunda abgegangenen Schülern haben sich 7 dem Kaufmannsstande, 4 der Landwirthschaft, 1 dem Apothekerfache gewidmet. Die Wahl dieser Berufsarten, für deren keine die Abiturienten-Prüfung einen Vortheil gewährt und gewähren kann, dürfte zur Erläuterung dienen, warum sich so selten einzelne dieser Prüfung unterziehen.

Der zahlreiche Abgang von Schülern in der Sexta, Septima und Octava findet seine Erklärung in dem Umstande, daß die die beiden bestehenden Classen der Mittelschule jetzt besuchenden Schüler aus den drei genannten Classen der Realschule dort eingetreten sind.

Daß 63 Schüler kein Schulgeld zahlen, verursacht der Schulkasse einen Ausfall von monatlich 46 Thlr. 25 Sgr., jährlich 562 Thlr.

VI. Die Lehrmittel.

Angeschafft wurden in dem nun beendigten Cursus:

1) Für die Bibliothek der Schule: Weidinger, das Leben Friedrichs des Großen; Keil, Grammatici latini; Cölln, Lehrbuch der Religions-Wissenschaft; Klotz, Handwörterbuch der lateinischen Sprache 2 Bde.; Gröne, die unterirdische Welt; Ungewitter, die preußische Monarchie; Klinggräff, Flora von Preußen mit Nachtrag; Vilmar, Schulreden; Böhme, Rechenbücher nach dem neuen Gewichts-Systeme; Kreyssig, Vorlesungen über Shakespeare 1. Bd.; Bernhard, bibl. Concordanz; Braselmann, Bibel-Atlas und biblische Geschichte Scharf, geometrische Formenlehre; Wiese, Bildung des Willens; Tholuck, Gespräche über Glaubensfragen; Jost, Schule des freien Gedanken-Ausdruckes, Bormann, Erklärung der biblischen Geschichten; Giesebrecht, Geschichte der deutschen Kaiserzeit 1. u. 2. Bd. Rückert, Gedichte; Müller, Lehrbuch der kosmischen Physik mit Atlas; Wenk, Physik; Ule und Müller, die Natur; Monats-Berichte der Berliner Akademie.

Als Fortsetzungen: Findel, klassische Periode der deutschen National-Litteratur; Förster, die Befreiungskriege; Berghaus, was man der Erde weiß, Humboldt, Kosmos 4. Bd.; Euripides v. Fritze; Thiers, Geschichte des Consulats und des Kaiserreichs; Weißer, Bilder-Atlas zum Studium der Geschichte; Livius, ed. Weissenborn; Körner, die Natur im Dienst des Menschen; Gmelin, Handbuch der Chemie; Poggendorf, Annalen pro 1858; Liebig und Kopp, Jahres-Berichte; Jacob und Wilhelm Grimm, deutsches Wörterbuch, 2. Bd., Lief. 6; Muspratt, die Chemie in Anwendung auf Kunst und Gewerbe; die Geschichtschreiber der deutschen Vorzeit, Lief. 35, 36 und 37.

2) Für den Unterricht in der Erdbeschreibung, — ein größeres Tellurium.

3) Für den Unterricht im Zeichnen, — eine Anzahl Gyps-Abgüsse; diverse Hefte der Berliner Zeichnenschule und eine Anzahl Studien-Blätter nach Julien und Cogniet.

Als Geschenke erhielt die Schule im abgelaufenen Schuljahre:

I. Für die Bibliothek.

1) Von dem Hohen Unterrichts-Ministerio: die Geschichte der Königl. Real- und Elisabethschule zu Berlin.

2) Von der Enslin'schen Buchhandlung in Berlin: a) das Lehrbuch für den elementaren Unterricht in der engl. Sprache von Dr. J. Fölsing; b) das Rechenbuch von J. Fölsing, 1. u. 2. Thl.

3) Von der Verlagshandlung des Hrn. Peters in Berlin: den neuen Lehrgang der französischen Sprache von Dr. A. Bolz.

4) Von der Mohr'schen Buchhandlung in Berlin: die Raumlehre. — Lehrbuch der elementaren Geometrie von G. Weiland.

5) Von der Bornträger'schen Buchhandlung in Königsberg: a) Leitfaden beim Unterrichte in der Naturgeschichte von Dr. E. Ohlert; b) Materialien zum Uebersetzen aus dem Lateinischen in's Deutsche von J. E. Ellendt.

6) Von der Bädecker'schen Buchhandlung in Essen: a) Französisches Uebungsbuch von Friedr. Rempel; b) Lehrbuch der Chemie und chemischen Technologie von Dr. K. Stammer.

7) Von der Friese'schen Buchhandlung in Leipzig: a) Macaulays Essais von J. Morris; b) Zum Uebersetzen aus dem Deutschen in's Englische: Der Kaufmann. Schauspiel in 5 Aufzügen von R. Benedix, bearb. von Morris. c) Biblisches Historienbuch für Volksschulen von Dr. Ferd. Fiedler.

8) Von der Voigtländer'schen Buchhandlung in Kreuznach: Grundriß der Weltgeschichte von J. C. Andree.

9) Von der Carstens'schen Buchhandlung in Lübeck: Die vornehmsten Daten aus der Weltgeschichte von J. Wilhelmi.

10) Von der R. Gärtner'schen Buchhandlung zu Berlin: Leitfaden zur allgemeinen Geschichte von Dr. O. Lange.

Von dem Königl. Provinzial-Schul-Collegio zu Königsberg wurden der Schule die Programme der meisten preußischen Realschulen und Gymnasien übersendet.

II. Für die Naturalien-Sammlung:

1) Ein schönes Exemplar eines ausgestopften Dachses von dem Kaufmann Herrn Schwerdfeger auf der hiesigen Festung.

2) Eine See-Schildkröte und einige Pinien-Zapfen von dem Weinhändler Herrn Lentz hierselbst.

Für diese willkommenen Gaben und Geschenke sage ich den wohlwollenden Gebern Namens der Schule hiermit den ergebensten Dank.

Ordnung der öffentlichen Prüfung.

Dienstag, den 28. September 1858.

Vormittags von 8 Uhr ab:

Die Vorbereitungs-Klasse.	Der Lehrer Herrmann.
Septima:	Religion. Der Lehrer Stumpf.
	Rechnen. Der Lehrer Völkerling.
Sexta:	Latein. Der Predigtamts-Candidat Mann.
	Deutsch. Der Lehrer Stumpf.
Quinta:	Geschichte. Der ordentliche Lehrer Dr. Dulitz.
	Rechnen. Der Lehrer Stumpf.
Quarta:	Arithmetik. Der Lehrer Krusemarck.
	Religion. Der Predigtamts-Candidat Mann.

Nachmittags von 2 Uhr ab:

Tertia:	Physik. Der ordentliche Lehrer Röhl.
	Latein. Der Oberlehrer Dr. Lentz.
Secunda:	Französisch. Der Lehrer Sieglerschmidt.
	Geometrie. Der Lehrer Krusemarck.
Prima:	Englisch. Der Lehrer Sieglerschmidt.
	Geschichte. Der Director.

Mittwoch, den 29. September, Vormittags 9 Uhr, versammeln sich die Schüler, um ihre Censuren zu empfangen, in dem Klassenzimmer der Septima.

Die Ferien dauern vom 30. September bis 7. October, wo der Unterricht, nachdem die neu aufzunehmenden Schüler von Vormittags 9 Uhr ab geprüft worden sind, Nachmittags 2 Uhr in allen Klassen der Realschule wieder beginnt.

Graudenz, den 22. September 1858.

Jacobi,
Director.

Ordnung der öffentlichen Prüfung.

Dienstag, den 28. September 1858.

Vormittags von 8 Uhr ab:

Die Vorbereitungs-Klasse. Der Lehrer Herrmann.
Septima: Religion. Der Lehrer Stumpf.
Rechnen. Der Lehrer Wöllerling.
Sexta: Latein. Der Predigtamts-Candidat Mann.
Deutsch. Der Lehrer Stumpf.
Quinta: Geschichte. Der ordentliche Lehrer Dr. Dulig.
Rechnen. Der Lehrer Stumpf.
Quarta: Arithmetik. Der Lehrer Krusemarck.
Religion. Der Predigtamts-Candidat Mann.

Nachmittags von 2 Uhr ab:

Tertia: Physik. Der ordentliche Lehrer Röhl.
Latein. Der Oberlehrer Dr. Lenz.
Secunda: Französisch. Der Lehrer Zieglerschmidt.
Geometrie. Der Lehrer Krusemarck.
Prima: Englisch. Der Lehrer Zieglerschmidt.
Geschichte. Der Director.

Mittwoch, den 29. September, Vormittags 9 Uhr, versammeln sich die Schüler, um ihre Censuren zu empfangen, in dem Klassenzimmer der Septima.

Die Ferien dauern vom 30. September bis 7. October, wo der Unterricht, nachdem die neu aufzunehmenden Schüler von Vormittags 9 Uhr ab geprüft worden sind, Nachmittags 2 Uhr in allen Klassen der Realschule wieder beginnt.

Graudenz, den 22. September 1858.

Jacobi,
Director.