

WYBRANE ZAGADNIENIA Z MECHANIKI TECHNICZNEJ

Zbiór zadań z kinematyki i dynamiki

Konrad Cichocki ▪ Mariusz Koprowski

WYBRANE ZAGADNIENIA Z MECHANIKI TECHNICZNEJ

Zbiór zadań z kinematyki i dynamiki



PAŃSTWOWA AKADEMIA
NAUK STOSOWANYCH
WE WROCŁAWKU

Wydawca

Państwowa Akademia Nauk Stosowanych we Włocławku

Recenzent

dr inż. Robert Dzierżanowski
Politechnika Warszawska

Redakcja, skład i łamanie

Krzysztof Czarnecki

Projekt okładki

Krzysztof Galus

© Copyright by Państwowa Akademia Nauk Stosowanych we Włocławku
Włocławek 2024

Wszelkie prawa zastrzeżone. Książka, którą nabyłeś jest dziełem twórcy i wydawcy. Żadna jej część nie może być reprodukowana jakimkolwiek sposobem – mechanicznie, elektronicznie, drogą fotokopii itp. – bez pisemnego zezwolenia wydawcy. Jeśli cytujesz fragmenty tej książki, nie zmieniaj ich treści oraz wskaż autora dzieła.

Publikacje Wydawnictwa PANS we Włocławku dostępne są w sprzedaży w Bibliotece PANS we Włocławku przy ul. Mechaników 3, pok. 8. Zamówienia można również przesyłać drogą e-mailową na adres: biblioteka@pans.wloclawek.pl

ISBN 978-83-971943-2-8

Wydawnictwo Państwowej Akademii Nauk Stosowanych we Włocławku
ul. Mechaników 3, 87-800 Włocławek
tel. 600-255-358
e-mail: wydawnictwo@pans.wloclawek.pl
<https://wyd.edu.pl/>

Druk i oprawa:

EXDRUK Spółka Cywilna Wojciech Żuchowski Adam Filipiak
ul. Rysia 6, 87-800 Włocławek
tel. 501-335-617, 507-832-458, e-mail: biuroexdruk@gmail.com

Spis treści

Od autorów.....	7
Rozdział I. Kinematyka. Wstęp teoretyczny	9
1. Ruch prostoliniowy	9
1.1. Względność ruchu	9
1.2. Definicja ruchu prostoliniowego.....	9
1.3. Ruch jednostajny.....	10
1.4. Ruch jednostajnie przyspieszony.....	11
1.5. Rachunek wektorowy w kinematyce	14
2. Zadania rozwiązane.....	24
3. Zadania do samodzielnego rozwiązania	55
Rozdział II. Dynamika. Wstęp teoretyczny	61
1. Dynamika punktu materialnego	61
1.1. Dynamiczne równania punktu materialnego	62
1.2. Środek masy układu mechanicznego	63
1.3. Wypadkowa sił wewnętrznych	64
1.4. Równania ruchu środka masy układu mechanicznego	65
2. Momenty bezwładności.....	67
2.1. Momenty bezwładności względem płaszczyzny	67
2.2. Moment bezwładności względem osi.....	68
2.3. Twierdzenie Steinera.....	69
3. Zadania rozwiązane.....	71
4. Zadania do samodzielnego rozwiązania	96
Bibliografia	102

Od autorów

Niniejszy skrypt zawiera zbiór zadań z kinematyki i dynamiki. W założeniu autorów ma on stanowić pomoc dydaktyczną dla studentów I roku kierunków: Automatyka i Robotyka, Inżynieria Zarządzania oraz Mechanika i Budowa Maszyn. Dobór zadań został podyktowany potrzebą uzyskania przez studentów założonych efektów uczenia się niezbędnych do realizacji późniejszych zagadnień poruszanych na wytrzymałości materiałów, podstawach konstrukcji maszyn i innych kursach występujących w programie nauczania. Opracowanie dotyczy standardowych zagadnień z kinematyki i dynamiki będących w programie kierunków technicznych. Zaprezentowane w skrypcie zadania zostały zaczerpnięte z powszechnie dostępnej literatury m.in. z *Podstaw Fizyki* Halliday'a, Resnicka, Walkera, *Zbioru Zadań z Mechaniki Ogólnej* M. i T. Niezgodzińskich, *Zbioru Zadań z Mechaniki Ogólnej* J. Leyki i J. Szmeltera, jak i stanowią opracowania własne autorów. W opracowaniu znajduje się wstęp teoretyczny z przykładowymi rozwiązanymi zadaniami. Niniejsze opracowanie zawiera również zadania, które przeznaczone są do samodzielnego wykonania. Celem tych zadań jest ugruntowanie zdobytej wiedzy z części teoretycznej.

Rozdział 1

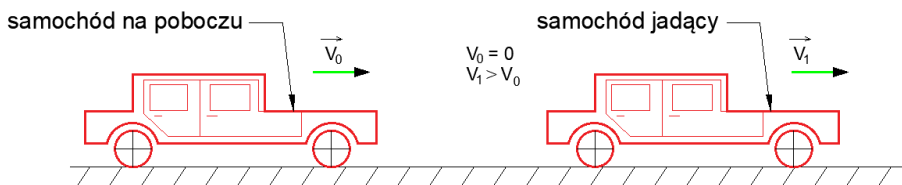
Kinematyka

Wstęp teoretyczny

1. Ruch prostoliniowy

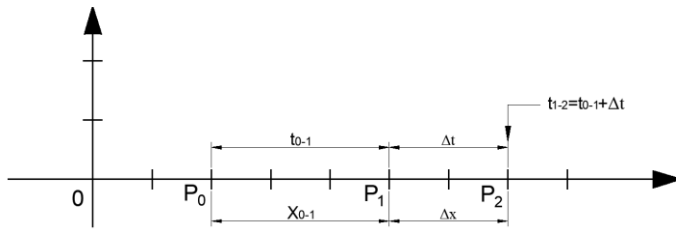
1.1. Względność ruchu

Jeżeli rozpatrywane ciało jest w ruchu, to zmianę położenia tego ciała możemy określić w stosunku do drugiego ciała, które nazywane jest układem odniesienia. Dla przykładu możemy posłużyć się jadącym z pewną prędkością samochodem. Dla przemieszczającego się samochodu układem odniesienia może być stojący na poboczu inny samochód.



1.2. Definicja ruchu prostoliniowego

Jeżeli punkt materialny porusza się wzdłuż linii prostej, to ruch taki nazywamy ruchem prostoliniowym. Położenie punktu możemy wówczas określić (zakładając stałą prędkość) za pomocą składowej czasu.



W celu wyznaczenia prędkości średniej na odcinku pomiędzy punktami P_1 i P_2 wykonać należy zgodnie z powyższym następujący iloraz:

$$V_{sr} = \frac{\Delta x}{\Delta t}$$

Jeżeli teraz przejdziemy do granicy tego wyrażenia (tak aby wyznaczyć prędkość w ściśle określonym punkcie) wyznaczmy prędkość w danym punkcie:

$$V = \lim_{\Delta t \rightarrow 0} \frac{\Delta x}{\Delta t} = \frac{dx}{dt} = \dot{x}$$

Zapis w powyższym wzorze (x z kropką nad symbolem) oznacza pochodną funkcji względem czasu.

1.3. Ruch jednostajny

W ruchu jednostajnym prędkość ciała w każdym punkcie drogi ma taką samą wartość. Wartość prędkości w ruchu jednostajnym jest równa prędkości średniej.

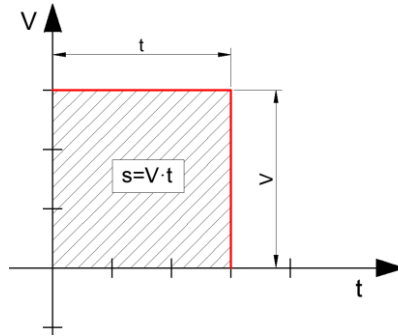
$$V = \frac{s}{t}, \quad s = v \cdot t$$

gdzie:

s – dowolny odcinek drogi,

t – czas w którym ciało przebyło odcinek s .

Dla ruchu jednostajnego wartość drogi przebytej w czasie oraz z określoną prędkością można przedstawić w układzie Kartezjańskim, gdzie na osi odciętych odkładamy czas (t), natomiast na osi rzędnych odkładamy prędkość V . Na rysunku droga przedstawiona jest w postaci pola powierzchni prostokąta o podstawie czasu t i wysokości V (prędkość).



1.4. Ruch jednostajnie przyspieszony

Jeżeli podczas ruchu punktu materialnego występuje przyspieszenie średnie, które mierzone w dowolnych odstępach czasu daje takie same wartości, to ruch taki nazywamy ruchem jednostajnie przyspieszonym. Rozpatrując ruch punktu materialnego stwierdziliśmy, że na przestrzeni odcinka czasu Δt nastąpił wzrost prędkości od V_0 do V_1 . W takim razie:

$$\Delta V = V_1 - V_0$$

$$p_{\text{sr}} = \frac{\Delta V}{\Delta t}$$

W celu wyznaczenia wartości przyspieszenia w danej chwili należy przejść do granicy, gdy $\Delta t \rightarrow 0$:

$$p = \lim_{\Delta t \rightarrow 0} \frac{\Delta V}{\Delta t}$$

w zapisie różniczkowym:

$$p = \frac{dV}{dt}$$

jednak jak pamiętamy:

$$V = \frac{ds}{dt} = \dot{x}$$

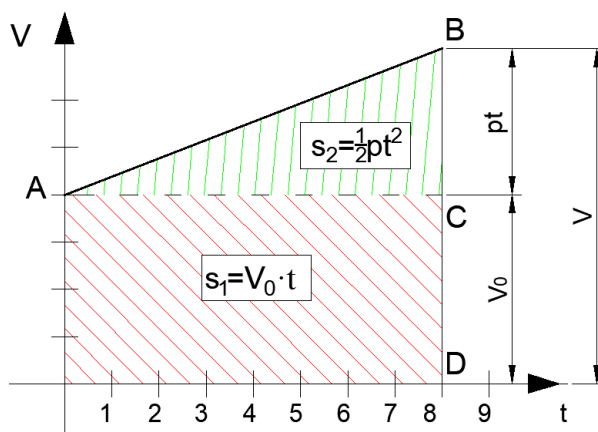
więc:

$$p = \frac{d}{dt} \cdot \frac{ds}{dt}$$

w symbolice rachunku różniczkowego:

$$p = \frac{d^2s}{dt^2} = \ddot{x}$$

Przyspieszenie to druga pochodna drogi względem czasu (oznaczana jest symbolem x z dwiema kropkami).



Powyższy wykres przedstawia przyrost prędkości w czasie:

$$p = \frac{\Delta V}{\Delta t}$$

gdzie:

$$\Delta V = V - V_0$$

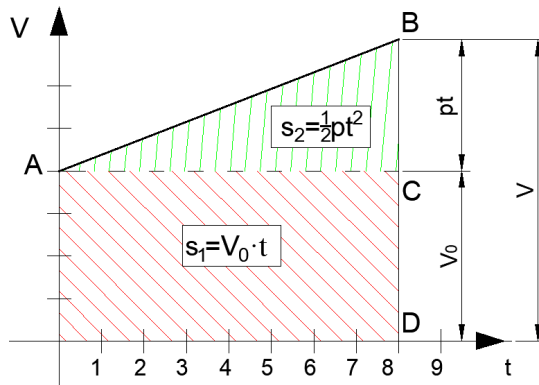
jeżeli przyjmiemy, że V_0 jest określoną prędkością początkową, która występuje w punkcie A, natomiast w punkcie B prędkość V , to dysponując czasem pomiędzy tymi punktami, zapisać możemy:

$$p = \frac{V - V_0}{t} \rightarrow V = V_0 + pt$$

Jest to równanie ruchu jednostajnie przyspieszonego:

Prędkość końcowa jest równa prędkości początkowej powiększonej o wszystkie przyrosty prędkości, jakie wystąpiły w rozpatrywanym czasie tego ruchu (p – uwzględnia przyrost prędkości w czasie 1 s, natomiast iloczyn pt – w czasie t sekund).

W celu wyznaczenia przebytej drogi posłużymy się ponownie tym samym wykresem:



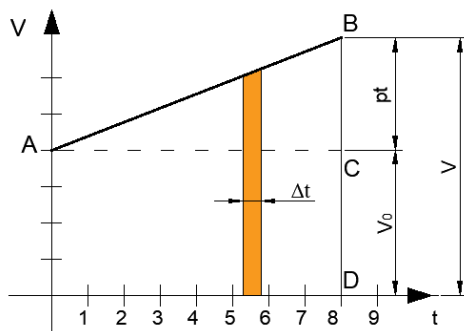
$$s = s_1 + s_2$$

$$s = V_0 t + \frac{1}{2} p t^2 = V_0 t + \frac{1}{2} \frac{V - V_0}{t} t^2 = V_0 t + \frac{Vt - V_0 t}{2} = \frac{Vt + V_0 t}{2} = \frac{(V + V_0)t}{2}$$

$$V = V_0 + pt$$

$$s = \frac{(V_0 + pt + V_0)t}{2} = \frac{(2V_0 + pt)t}{2} = \frac{2V_0 t}{2} + \frac{pt^2}{2} = V_0 t + \frac{pt^2}{2}$$

lub w zapisie całkowym:



$$s = \lim_{\Delta t \rightarrow 0} \sum_n V_n \Delta t$$

gdzie: n – liczba różnych prędkości na odcinku AB (nieskończona)

$$s = \int_0^t V dt$$

$$s = \int_0^t (V_0 + pt) dt = V_0 \int_0^t dt + p \int_0^t t dt = V_0 t + \frac{pt^2}{2}$$

1.5. Rachunek wektorowy w kinematyce

Aby jednoznacznie określić przemieszczenie dowolnego punktu, należy spełnić następujące warunki:

- podać punkt zaczepienia (wskazać punkt początkowy),
- podać wartość wielkości - przedstawić długość odcinka AB,
- podać kierunek – położenie odcinka AB na płaszczyźnie (jeżeli ruch rozpatrywany jest na płaszczyźnie) lub w przestrzeni,
- podać zwrot – na odcinku AB należy zaznaczyć strzałką odpowiedni zwrot.

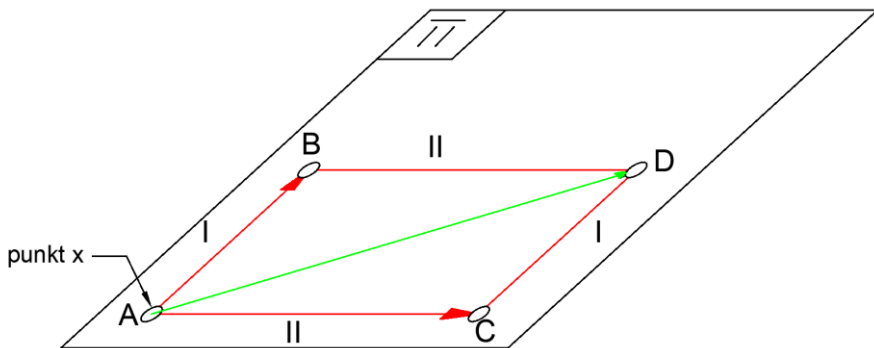
Powyższe warunki jednoznacznie wskazują, że do określenia przemieszczenia używać należy *wielkości wektorowych* lub po prostu *wektorów*.

ZASADA NIEZALEŻNOŚCI RUCHÓW

Przypadek I

Jeżeli na płaszczyźnie Π punkt materialny x dozna przemieszczenia od punktu A do punktu B, oraz przemieszczenia od B do punktu D. W takim razie punkt materialny przebył drogę łamaną ABD, której rezultatem jest przemieszczenia z punktu A do punktu D. Zatem przemieszczeniem ostatecznym jest wypadkowa AD (punkt materialny nie przebył drogi AD, lecz przebył drogę łamaną ABD).

Podsumowanie: kolejność przemieszczeń – przemieszczenie I, następnie II = wypadkowa AD.



Przypadek II

Następnie jeżeli zamienimy kolejność przemieszczeń. Punkt x dozna tym razem najpierw przemieszczenia II następnie przemieszczenia I, to w konsekwencji widzimy, że to ruchu jest inny jak w poprzednim przypadku, natomiast sam skutek, tzn. przemieszczenie wypadkowe nie zmieniło się i wynosi tak jak poprzednio AD.

Podsumowanie: kolejność przemieszczeń – przemieszczenie II, następnie I = wypadkowa AD.

Przypadek III

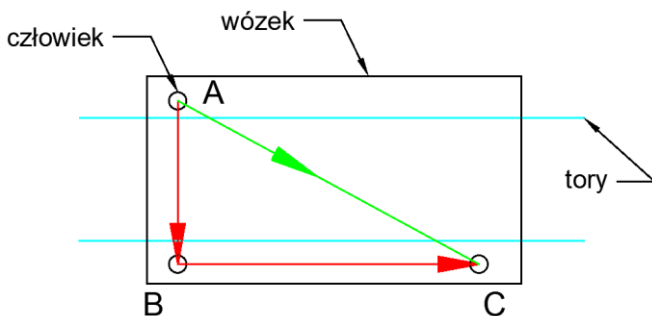
Rozpatrzmy zagadnienie na przykładzie platformy poruszającej się po torowisku oraz znajdującego się tam człowieka. Z punktu A człowiek porusza się w kierunku punktu B, następnie wagonik przesuwa się wzdłuż torowiska na odcinku BC. W wyniku tych przemieszczeń, człowiek znajduje się w punkcie C. Jeżeli rozpatrzmy inny przypadek, tzn. ruch człowieka odbywa się jednocześnie z ruchem wagonika to możemy zaobserwować, że człowiek tak jak poprzednio na końcu ruchu znajduje się w punkcie C.

Podsumowanie: dwa przemieszczenie zachodzą osobno – efektem jest przemieszczenie wypadkowe AC = dwa przemieszczenia zachodzą jednocześnie – efektem jest również takie samo przemieszczenie wypadkowe AC .

A zatem:

Przemieszczenie wypadkowe otrzymuje się jako przekątną równoległoboku zbudowanego na przemieszczeniach składowych.

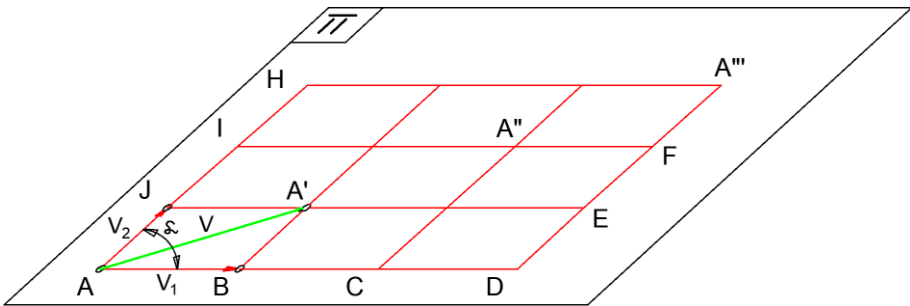
***Definicja:* Jeżeli punkt materialny odbywa jednocześnie kilka ruchów, to każdy z poszczególnych ruchów dokonuje się tak, jak gdyby inne ruchy nie miały miejsca, tzn. ruchy składowych nie przeszkadzają ani nie pomagają sobie wzajemnie.¹**



¹ A. Piekara, *Mechanika ogólna*, Państwowe Wydawnictwo Naukowe, Warszawa 1967.

DODAWANIE GEOMETRYCZNE PRĘDKOŚCI

Do naszych rozpatrywanych układów dołożymy następnie parametr czasu. Poszczególne przemieszczenia podzielone zostały na równe odcinki t . Każde z poszczególnych przemieszczeń tzn. AB, BC, CD, AJ, JI i tak dalej odbywało się w czasie 1s. Jeżeli teraz geometrycznie dodamy poszczególne przesunięcia AB do AJ, BC do BA' itd., to otrzymamy przemieszczenia wypadkowe: AA', A'A'' oraz A''A''', które są sobie równe. Kąt α , który występuje w przykładzie jest również jednakowy w każdym z rozpatrywanych równoległoboków.



Wobec powyższego dochodzimy do wniosku: ***przemieszczający się punkt porusza się ruchem prostoliniowym jednostajnym.***

Ponownie rozpatrzmy poszczególne wektory składowe tzn. **AJ**, **AB**, **JI**, **BC** i tak dalej. Dochodzimy wówczas do wniosku, że poszczególne przemieszczenia odbywają się w czasie, a więc np. wektor **AJ** wyraża prędkość V_2 , wektor V_1 wyraża prędkość na przemieszczeniu AB. Wektory V_1, V_2 , nazywamy **wektorami prędkości składowych**.

W takim razie wektory prędkości V_1, V_2 , na podobieństwo wektorów przemieszczeń **AJ**, **AB**, **JI**, **BC**, **dodają się geometrycznie.**

$$V = V_1 + V_2$$

Uwaga: W części teoretycznej wektory w równaniach zaznaczono czcionką pogrubioną. Wartości skalarne natomiast pisano kursywą.

W przypadku obliczeń analitycznych skorzystamy z twierdzenia Carnota.

$$v^2 = v_1^2 + v_2^2 - 2v_1v_2\cos(ABA')$$

Ponieważ nazwany kąt α pomiędzy wektorami $\mathbf{V}_1, \mathbf{V}_2$ wynosi $\alpha = 180^\circ - ABA'$, zatem $\cos\alpha = -\cos ABA'$. Wzór zatem na obliczenie v będzie miał postać:

$$v^2 = v_1^2 + v_2^2 + 2v_1v_2\cos\alpha$$

Jednocześnie gdyby oba wektory były do siebie prostopadłe, to $\cos\alpha = 0$ a wzór wygląda następująco:

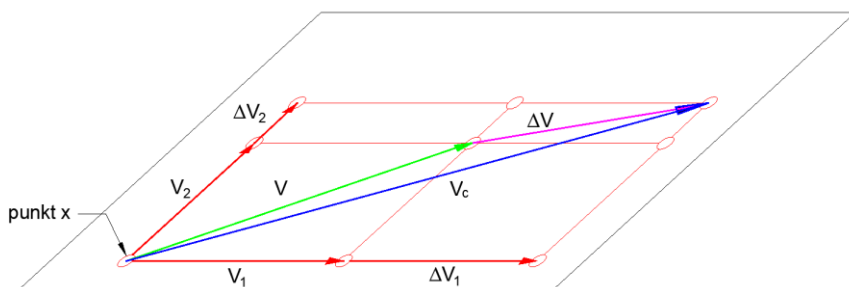
$$v^2 = v_1^2 + v_2^2$$

DODAWANIE GEOMETRYCZNE PRZYSPIESZEŃ

Tak jak w poprzednim przypadku, niech punkt materialny porusza się ruchem złożonym z dwóch ruchów prostoliniowych jednostajnych. W takim razie geometryczna prędkość punktu wynosi:

$$\mathbf{V} = \mathbf{V}_1 + \mathbf{V}_2$$

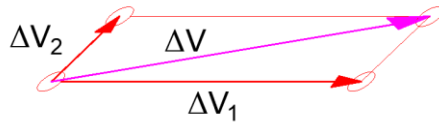
Następnie po czasie Δt prędkości w/w punktu, prędkości wynoszą odpowiednio $\Delta\mathbf{V}_1$ oraz $\Delta\mathbf{V}_2$.



A więc otrzymana prędkość wynosi:

$$\mathbf{V}_c = (\mathbf{V}_1 + \Delta\mathbf{V}_1) + (\mathbf{V}_2 + \Delta\mathbf{V}_2)$$

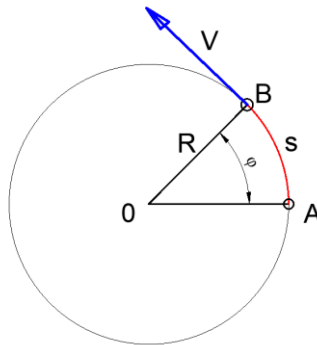
Jak możemy zaobserwować przyrosty prędkości $\Delta \mathbf{V}_1$ oraz $\Delta \mathbf{V}_2$ dodają się geometrycznie:



$$\Delta \mathbf{V} = \Delta \mathbf{V}_1 + \Delta \mathbf{V}_2$$

RUCH KOŁOWY JEDNOSTAJNY

Jeżeli dany punkt porusza się po okręgu to ruch taki nazywamy ruchem kołowym. Ruch punktu nazywamy jednostajnym jeżeli dane, jednakowe odcinki koła punkt pokonuje w jednakowych odstępach czasu. Jeżeli odcinek łuku s zostaje przebyty w czasie t , to wówczas:



$$V = \frac{s}{t}$$

Prędkość kątowna natomiast wyrazi się wzorem:

$$\omega = \frac{\varphi}{t}$$

jednak:

$$s = \varphi \cdot R, \quad \varphi = \frac{s}{R}$$

więc:

$$\omega = \frac{\varphi}{t} = \frac{\frac{s}{R}}{t} = \frac{V}{R}$$

Prędkość liniowa zatem, jest iloczynem promienia koła oraz prędkości kątowej:

$$V = R \cdot \omega$$

Prędkość liniowa (biorąc pod uwagę okres T) jest stosunkiem obwodu koła do okresu T .

$$V = \frac{2\pi R}{T}$$

Prędkość kątowa jest zatem:

$$\omega = \frac{2\pi}{T}$$

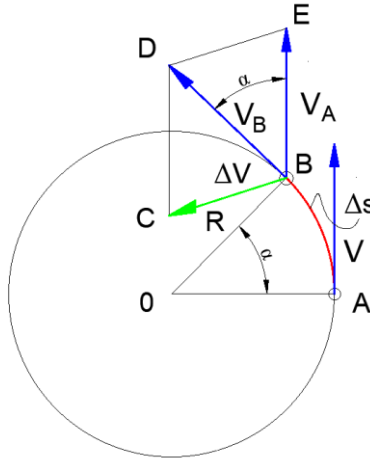
PRZYŚPIESZENIE DOŚRODKOWE

Niech punkt materialny porusza się po obwodzie koła ze stałą prędkością V . Punkt materialny znajduje się w punkcie A. następnie w ciągu bardzo małego czasu Δt punkt materialny pokonuje drogę Δs – punkt materialny znajduje się obecnie w punkcie B. W tym punkcie prędkość rozpatrywanego obiektu również wynosi V . A więc nie zmieniła się prędkość - zauważmy jednak, że kierunek wektora prędkość uległ zmianie (jest on zawsze styczny do toru, zmienił się natomiast kąt w stosunku do wektora zaczepionego w punkcie A).

Wektor prędkości w punkcie B oznaczono jako wektor $\mathbf{V}_B$, natomiast przesunięty wektor z punktu A (reprezentował on prędkość w punkcie A – która jak już wspomniano jest równa w punkcie B) do punktu B oznaczono jako $\mathbf{V}_A$.

Z powyższego zapisu wynika, że wektor $\mathbf{V}_A$ przekształcił się po czasie Δt w wektor $\mathbf{V}_B$. Przyrost wektora $\mathbf{V}_B$ w stosunku do wektora $\mathbf{V}_A$ oznaczono

jako wektor $\Delta \mathbf{V}$. Nasuwa się w takim razie pewna dygresja - skoro wektor $\mathbf{V}_A$ jest równy wektorowi $\mathbf{V}_B$ dlatego zatem mówimy o przyroście. Otóż przyrost $\Delta \mathbf{V}$ nie zmienia wartości liczbowej prędkości (v), lecz tylko jej kierunek.



Jeżeli przyjmiemy, że czas Δt jest bardzo krótki, to również przebyty łuk Δs posiada bardzo małą wartość, a więc możemy rozpatrywać przebyty łuk jako prostą.

Powstały trójkąt równoramienny AOB jest podobny do trójkąta EBD, gdyż mają takie same kąty.

Więc:

$$\frac{\Delta s}{R} = \frac{DE}{v_A}, \text{ ale } DE = \Delta v, \quad \text{a } v_A = v, \quad \text{zatem}$$

$$\frac{\Delta s}{R} = \frac{\Delta v}{v}$$

$$\frac{\frac{\Delta s}{\Delta t}}{R} = \frac{\frac{\Delta v}{\Delta t}}{v}$$

Skoro $\frac{\Delta s}{\Delta t}$ wyraża prędkość v , natomiast $\frac{\Delta v}{\Delta t}$ jest to stosunek przyrostu prędkości do czasu, w ciągu którego nastąpił ten przyrost – jest to zatem przyspieszenie. Jak obserwujemy występujące przyspieszenie nie zmienia wartości prędkości, lecz jej kierunek.

$$\frac{\Delta s}{\Delta t} = v \qquad i \qquad \frac{\Delta v}{\Delta t} = a$$

gdzie: a – wartość przyspieszenia,

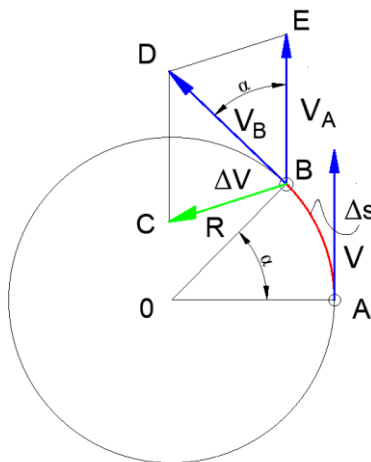
zatem:

$$\frac{\frac{\Delta s}{\Delta t}}{R} = \frac{\frac{\Delta v}{\Delta t}}{v}, \quad \frac{v}{R} = \frac{a}{v}$$

w konsekwencji przekształcenia:

$$a = \frac{v^2}{R}$$

W powyższym wzorze wyznaczyliśmy wartość przyspieszenia jakie występuje w ruchu jednostajnym po okręgu. Dalej wyznaczymy położenie naszego przyspieszenia – ściślej mówiąc – jego kierunek.



Jak możemy zaobserwować na powyższym rysunku, wektor $\Delta \mathbf{v} = \mathbf{BC}$ jest skierowany w kierunku odcinka $\mathbf{BO} = \mathbf{R}$. Zmniejszając wartość czasu Δt do zera, zmniejsza się również odcinek Δs , którego wartość dąży do zera. Rozpatrywane trójkąty $\mathbf{A0B}$, $\mathbf{EBD}$ stają się coraz bardziej smukłe, a kąty u ich podstaw dążą do kątów prostych. W związku z tym, położenie wektora $\Delta \mathbf{v}$ skierowane jest do środka koła. Widzimy zatem, że wcześniej wyznaczone przyspieszenie a ma taki sam kierunek jak $\Delta \mathbf{v}$.

Definicja:

Jeżeli punkt materialny porusza się po okręgu ruchem jednostajnym, to posiada on przyspieszenie dośrodkowe, które skierowane jest do środka okręgu, wartość tego przyspieszenia wynosi:

$$a = \frac{v^2}{R}$$

skoro:

$$V = R \cdot \omega \quad \rightarrow \quad a = \frac{R^2 \cdot \omega^2}{R} = \omega^2 \cdot R$$

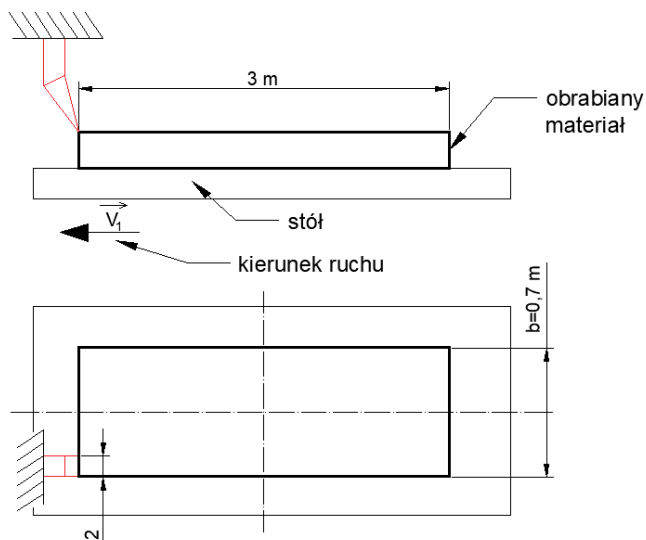
Podstawowe wzory

Lp.	Równanie	Brakująca wartość
1.	$V = V_0 + a \cdot t$	$x - x_0$ (s)
2.	$x - x_0 = V_0 \cdot t + \frac{1}{2} \cdot a \cdot t^2$	V
3.	$V^2 = V_0^2 + 2 \cdot a \cdot (x - x_0)$	t
4.	$x - x_0 = \frac{1}{2} \cdot (V_0 + V) \cdot t$	a
5.	$x - x_0 = V \cdot t - \frac{1}{2} \cdot a \cdot t^2$	V_0

2. Zadania rozwiązane

Zadanie 1

Na strugarce podłużnej obrabiana jest stalowa płyta o długości 3 m i szerokości 0,7 m. Średnia prędkość ruchu stołu roboczego strugarki, na której zamocowany jest obrabiany przedmiot wynosi $V_r=0.4$ m/s, zaś prędkość ruchu jałowego wynosi $V_j=0.6$ m/s. Oblicz czas strugania płyty, jeżeli posuw narzędzia na jeden suw stołu wynosi $p=2$ mm.



1. Obliczamy czas jednego przejścia t_p .

$$t_p = t_r + t_j,$$

gdzie:

t_p – czas przejścia,

t_r – czas ruchu roboczego,

t_j – czas ruchu jałowego.

$$t_p = \frac{S_r}{V_r} + \frac{S_j}{V_j}$$

$$t_p = \frac{3m}{0.4m/s} + \frac{3m}{0.6m/s} = 7.5s + 5s = 12.5s$$

S_r – droga przebyta w czasie ruchu roboczego,

S_j – droga przebyta w czasie ruchu jałowego,

2. Obliczamy liczbę przejść.

$$L_p = \frac{b}{c}$$

uwzględniając zamianę jednostek mamy:

$$L_p = \frac{700mm}{2mm} = 350$$

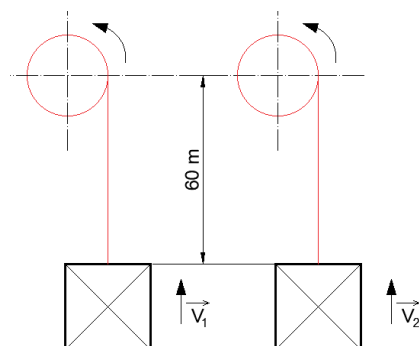
3. Obliczamy czas strugania

$$t_{str} = t_p \cdot L_p$$

$$t_{str} = 12.5s \cdot 350 = 4375s$$

Zadanie 2

Dwie wciągarki wciągają bloczki betonowe ze stałą prędkością równą odpowiednio: $V_1=20$ m/s i $V_2=32$ m/s. Jaka będzie różnica w czasie wciągnięcia t_r bloczków na wysokość $s=60$ m.



1. Obliczamy czas wciągnięcia bloczka przez pierwszą wciągarkę.

$$t_1 = \frac{s}{V_1}$$

gdzie:

t_1 – czas wciągnięcia bloczka przez pierwszą wciągarkę,

$$t_1 = \frac{60m}{20m/s} = 3s$$

2. Obliczamy czas wciągnięcia bloczka przez drugą wciągarkę.

$$t_2 = \frac{s}{V_2}$$

gdzie:

t_2 – czas wciągnięcia bloczka przez pierwszą wciągarkę,

$$t_2 = \frac{60m}{32m/s} = 1,87s$$

3. Obliczamy różnicę w czasie wciągnięcia

$$t_r = t_1 - t_2$$

$$t_r = 3s - 1,87s = 1,13s$$

Zadanie 3

Z jakim przyspieszeniem rusza z miejsca wciągarka, jeżeli w czasie $t=12$ s osiąga prędkość $V=7,3$ km/h?

$$a = \frac{\Delta V}{\Delta t} = \frac{V_k - V_p}{t_k - t_p}$$

gdzie:

ΔV – przyrost prędkości w czasie,

Δt – czas, w którym nastąpił przyrost prędkości,

V_k – prędkość końcowa,

V_p – prędkość początkowa,

t_k – czas końcowy,

t_p – czas początkowy.

$$a = \frac{2,03 \frac{m}{s} - 0}{12s - 0} = 0,17 m/s^2$$

Zadanie 4

Motocyklista jechał zabytkowym pojazdem, po prostej drodze z prędkością 70 km/h. Po przebyciu 8 km w motocyklu brakło paliwa i został on zmuszony, by dalej iść pieszo do stacji benzynowej odległej o 2 km. Droga zajęła mu 0,5 godziny. Oblicz: ile wynosiła całkowita droga przebyta przez motocyklistę, ile czasu minęło od rozpoczęcia podróży do dotarcia na stację benzynową i z jaką średnią prędkością poruszał się motocyklista?

1. Obliczenie całkowitej drogi przebytej przez motocyklistę

$$s_c = s_m + s_p$$

gdzie:

$$s_c = 8km + 2km = 10km$$

s_m – droga przebyta na motocyklu,

s_p – droga przebyta pieszo.

2. Obliczenie czasu trwania podróży,

$$t_m = \frac{s_m}{V_m}$$

gdzie:

t_m – czas jazdy motocyklem,

s_m – droga przebyta na motocyklu,

V_m – prędkość motocykla

$$t_m = \frac{8km}{70km/h} = 0,11h$$

$$t_c = t_m + t_p$$

gdzie:

$$t_c = 0.11h + 0.5h = 0.61h$$

t_c – czas podróży,

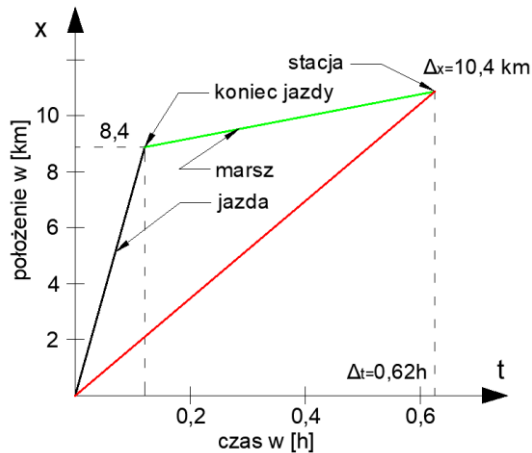
t_m – czas jazdy motocyklem,

t_p – czas podróży na pieszo.

3. Obliczenie prędkości średniej motocyklisty w czasie podróży

$$V_{sr} = \frac{s_c}{t_c}$$

$$V_{sr} = \frac{10km}{0.61h} = 16.39km/h$$



Zadanie 5

Wózek suwnicy wyrusza ze stałym przyspieszeniem i po czasie $t_1 = 3$ s osiąga prędkość $V_1 = 1$ m/s. Z tą prędkością jedzie przez $t_2 = 30$ s, a następnie zatrzymuje się na drodze hamowania $b = 3$ m. Wykonaj wykresy przyspieszeń, prędkości i wózka.

Zadanie rozwiązujemy w trzech zakresach:

- I – wózek przyspiesza,
- II – wózek jedzie ze stałą prędkością,
- III – wózek zwalnia do zatrzymania się.

I zakres

1. Obliczamy przyspieszenie a_1 w pierwszym zakresie korzystając z równania 1 z Tabeli 1:

$$V_1 = V_0 + a_1 \cdot t_1$$

przekształcając i podstawiając dane otrzymujemy:

$$a_1 = \frac{V_1}{t_1}$$
$$a_1 = \frac{1m/s}{3s} = \frac{1}{3}m/s^2$$

2. Obliczamy przebytą drogę s_1 korzystając z równania 2 z Tabeli 1

$$s_1 = V_0 \cdot t + \frac{1}{2} \cdot a \cdot t^2$$

podstawiając dane otrzymujemy:

$$s_1 = \frac{1}{2} \cdot a \cdot t^2 = \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{3}m/s^2 \cdot 9s^2 = 1.5m$$

II zakres

W zakresie drugim wartość prędkości jest stała z czego wynika, że przyspieszenie wynosi 0. Brakującą wartość drogi obliczamy stosując wzór na prędkość średnią, który po przekształceniu otrzymuje postać:

$$s_2 = V_2 \cdot t_2$$

po podstawieniu otrzymujemy:

$$s_2 = 1 \cdot \frac{m}{s} \cdot 30s = 30m$$

III zakres

1. Obliczamy przyspieszenie korzystając z równania 1 z Tabeli 1, gdzie prędkość końcowa $V_k = 0$, a prędkość początkowa $V_0 = V_1$.

$$V_k = V_0 + a \cdot t_3$$

po przekształceniu i uwzględnieniu danych:

$$a_3 = -\frac{V_0}{t_3}$$

po podstawieniu danych otrzymujemy:

$$a_3 = -\frac{1 \frac{m}{s}}{6s} = -\frac{1}{6} m/s^2$$

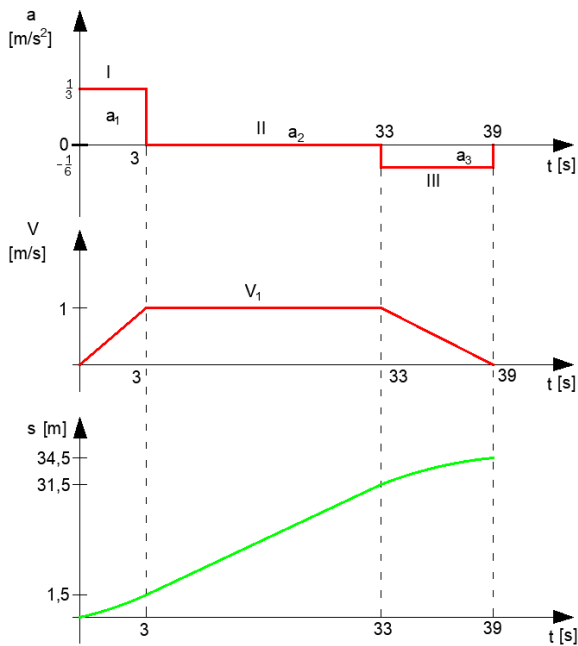
2. Obliczamy t_3 korzystając z równania 4 z Tabeli 1, gdzie prędkość końcowa $V_k = 0$, prędkość początkowa $V_0 = V_1$, a droga hamowania równa się $s_3 = b$.

$$b = \frac{1}{2} \cdot V_1 \cdot t_3$$

po przekształceniu i podstawieniu danych otrzymujemy:

$$t_3 = \frac{2 \cdot b}{V_1} = \frac{2 \cdot 3m}{1m/s} = 6s$$

Wykresy:



Zadanie 6

Samochód jadący z prędkością początkową $V_0=120$ km/h rozpoczyna hamowanie, w wyniku którego redukuje swą prędkość do $V=80$ km/h przejeżdżając w tym czasie drogę $s = 200$ m. Ile wynosiło przyspieszenie samochodu a oraz jak długo trwało hamowanie skoro wiemy, że pojazd hamował ze stałym przyspieszeniem?

Aby otrzymać żądane wyniki musimy rozwiązać układ dwóch równań z dwoma niewiadomymi, który stworzą równania 1) i 2) z Tabeli 1:

$$1) \quad V = V_0 + a \cdot t$$

$$2) \quad s = V_0 \cdot t + \frac{1}{2} \cdot a \cdot t^2$$

Przekształcając równanie 1) do postaci $t = \frac{V-V_0}{a}$ i podstawiając je do równania 2) otrzymujemy

$$s = V_0 \cdot \frac{V - V_0}{a} + \frac{1}{2} \cdot a \cdot \left(\frac{V - V_0}{a} \right)^2$$

Następnie mnożąc obustronnie powyższe równanie przez $2a$ oraz wykonując działania otrzymujemy

$$2 \cdot a \cdot s = 2 \cdot V_0 \cdot V - 2 \cdot V_0^2 + V^2 - 2 \cdot V_0 \cdot V + V_0^2$$

Po uporządkowaniu prawej strony równania możemy obliczyć a ze wzoru w postaci

$$a = \frac{v^2 - V_0^2}{2 \cdot s}$$

Podstawiając dane liczbowe w m/s oraz m otrzymujemy

$$a = \frac{(22,22\text{m/s})^2 - (33,33)^2}{2 \cdot 200\text{m}} = -1.54\text{m/s}^2$$

Wracając do równania 1) w postaci $t = \frac{V-V_0}{a}$ i podstawiając dane liczbowe mamy

$$t = \frac{22.22 \frac{m}{s} - 33.33 \frac{m}{s}}{-1.54 \frac{m}{s^2}} = -7.21s$$

Zadanie 7

Kierowca samochodu, jadącego z prędkością 60 km/h, po pokonaniu ostrego zakrętu zauważa w odległości 18 m leżące na drodze drzewo. Mimo trwającego 1,8 s hamowania samochód uderza w tą przeszkodę. Oblicz ile wynosiło stałe przyspieszenie pojazdu w czasie hamowania oraz ile wynosiła prędkość z jaką uderzył on w drzewo?

1. W celu obliczenia prędkości z jaką samochód uderzył w drzewo korzystamy ze wzoru 4) z Tabeli 1

$$s = \frac{1}{2} \cdot (V_0 + V) \cdot t$$

który po przekształceniu otrzymuje postać:

$$V = \frac{2 \cdot s}{t} - V_0$$

po wstawieniu wartości liczbowych mamy:

$$V = \frac{2 \cdot 18m}{1.8s} - 16.67 \frac{m}{s} = 3,33m/s$$

2. W celu obliczenia przyspieszenia korzystamy ze wzoru 1) z Tabeli 1

$$V = V_0 + at$$

który po przekształceniu otrzymuje postać:

$$a = \frac{V - V_0}{t}$$

po wstawieniu wartości liczbowych mamy:

$$a = \frac{3.33 \frac{m}{s} - 16.67 \frac{m}{s}}{2s} = -7.41 m/s^2$$

Zadanie 8

Lecący ptak porusza się ze stałym przyspieszeniem równym 2 m/s^2 . W pewnej chwili jego prędkość wynosiła 5 m/s . Wyznacz jego prędkość w chwili: a) o 2 s wcześniejszej, b) o 2 s późniejszej

Korzystamy ze wzoru 1 z Tabeli 1

$$V = V_0 + a \cdot t$$

gdzie:

V – prędkość chwilowa,

V_0 – prędkość początkowa,

a – przyspieszenie elektronu.

$$V_1 = V_0 + a \cdot (t_0 + t_1) = 5 \frac{m}{s} + 2 \frac{m}{s^2} \cdot (0 - 2s) = 1 \frac{m}{s}$$

$$V_2 = V_0 + a \cdot (t_0 + t_2) = 5 \frac{m}{s} + 2 \frac{m}{s^2} \cdot (0 + 2s) = 9 \frac{m}{s}$$

gdzie:

V_1 – prędkość ptaka w chwili wcześniejszej

V_2 – prędkość ptaka w chwili późniejszej

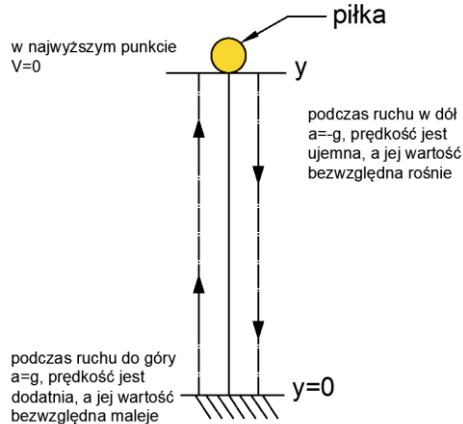
t_0 – czas w pewnej chwili, $t_0=0$

t_1 – czas w chwili wcześniejszej,

t_2 – czas w chwili późniejszej.

Zadanie 9

Zawodnik rzuca piłkę baseballową pionowo do góry, wzdłuż osi y , z prędkością początkową 12 m/s .



- a) Jak długo piłka będzie się wznosić, aż do osiągnięcia największej wysokości?

Korzystamy ze wzoru 1) z tabeli 1

$$V = V_0 + a \cdot t$$

po przekształceniu i następnym podstawieniu danych otrzymujemy:

$$t = \frac{V - V_0}{a} = \frac{0 - 12 \text{ m/s}}{-9.81 \text{ m/s}^2} = 1.2 \text{ s}$$

gdzie:

- V – prędkość w chwili osiągnięcia przez piłkę maksymalnej wysokości,
- V_0 – prędkość początkowa piłki,
- a – przyspieszenie piłki.

- b) Ile wynosi największa wysokość, na jaką wzniesie się piłka, w odniesieniu do punktu wyrzucenia?

Korzystamy ze wzoru 3) z tabeli 1

$$V^2 = V_0^2 + 2 \cdot a \cdot (x - x_0)$$

po przekształceniu i następnym podstawieniu danych otrzymujemy:

$$y = \frac{V^2 - V_0^2}{2 \cdot a} = \frac{0 - (12\text{m/s})^2}{2 \cdot (-9.8\text{m/s}^2)} = 7.3\text{m}$$

gdzie:

$y = x - x_0$ – wysokość na jaką wzniesie się piłka,

V – prędkość w chwili osiągnięcia przez piłkę maksymalnej wysokości,

V_0 – prędkość początkowa piłki,

a – przyspieszenie piłki.

- c) Jak długo będzie wznosić się piłka do punktu leżącego 5m nad punktem jej wyrzucenia?

Korzystamy ze wzoru 2) z tabeli 1

$$(x - x_0) = V_0 \cdot t + \frac{1}{2} \cdot a \cdot t^2$$

po przekształceniach i następnym podstawieniu danych otrzymujemy kolejno:

$$y = V_0 \cdot t - \frac{1}{2} \cdot a \cdot t^2$$

$$5\text{m} = (12\text{m/s}) \cdot t - \frac{1}{2} \cdot (9.8\text{m/s}^2) \cdot t^2$$

$$4.9 \cdot t^2 - 12 \cdot t + 5 = 0$$

rozwiązując otrzymane równanie kwadratowe mamy:

$$t_1 = 0.53\text{s} \text{ i } t_2 = 1.9\text{s}$$

Piłka osiąga wysokość 5m zarówno w czasie ruchu w górę, jak i w czasie ruchu w dół.

Zadanie 10

Wyznaczyć: a) tor punktu A, b) początek toru i jego koniec, c) kierunek ruchu, d) prędkość i przyspieszenie, e) równanie ruchu po torze

Równania opisujące ruch punktu:

$$x = 2 + 2 \cdot t \quad (*)$$

$$y = 3 + 6 \cdot t \quad (**)$$

1. Przebieg toru punktu

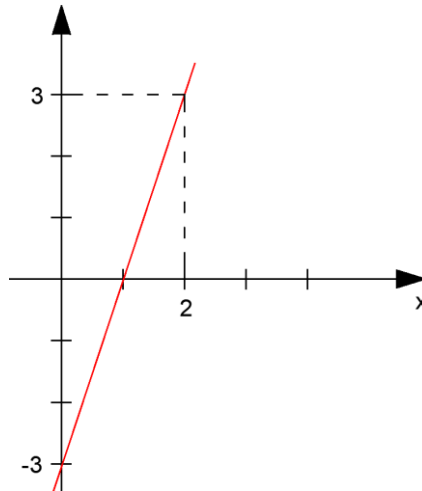
Z równania (*) wyznaczamy t i następnie wyliczono wartość wstawiamy do równania (**), otrzymujemy wówczas kolejno

$$t = \frac{x - 2}{2}$$

$$y = 3 + 6 \cdot \frac{x-2}{2} = 3 + 3 \cdot (x - 2) \text{ i w końcu}$$

$$y = 3 \cdot x - 3 \quad (***)$$

Równanie (***) opisuje tor ruchu punktu A



2. Początek toru – punkt A_0

Początek toru znajduje się w punkcie A_0 dla $t=0$. Wstawiając $t=0$ do równań (*) i (**) mamy

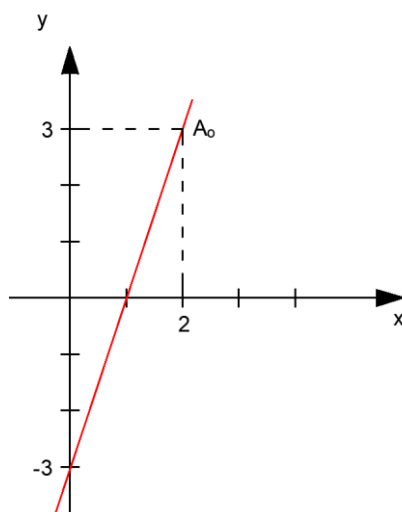
$$x_0 = 2 + 2 \cdot 0 = 2$$

$$y_0 = 3 + 3 \cdot 0 = 3$$

gdzie:

X_0 – współrzędna x punktu A_0 ,

y_0 – współrzędna y punktu A_0 .



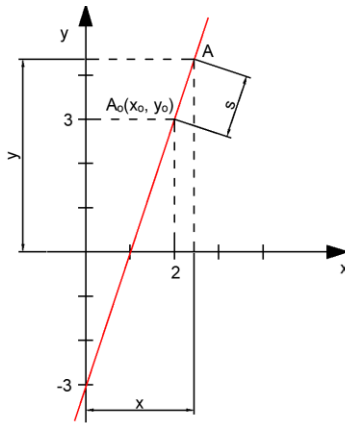
3. Punkt końcowy A – po upływie czasu t

Należy obliczyć drogę $s = \overline{A_0A}$

$$s = \sqrt{(x - x_0)^2 + (y - y_0)^2}$$

po podstawieniu równań (*), (**) i współrzędnych punktu A_0 otrzymujemy:

$$s = \sqrt{(2 + 2 \cdot t - 2)^2 + (3 + 6 \cdot t - 3)^2} = \sqrt{4 \cdot t^2 + 36 \cdot t^2} = 6.33 \cdot t$$



4. Prędkość punktu jest pierwszą pochodną przemieszczenia (drogi) po czasie

$$V = \dot{s} = 6.33$$

5. Przyspieszenie punktu jest pierwszą pochodną jego prędkości po czasie

$$p = \dot{V} = 0$$

Zadanie 11

Wyznaczyć: a) tor punktu A, b) początek toru i jego koniec, c) kierunek ruchu, d) prędkość i przyspieszenie, e) równanie ruchu po torze

Równania opisujące ruch punktu:

$$x = 4 + 5 \cdot t^2 \quad (*)$$

$$y = 2 + 6 \cdot t^2 \quad (**)$$

1. Przebieg toru punktu

Z równania (*) wyznaczamy t i następnie wyliczono wartość wstawiamy do równania (**), otrzymujemy wówczas kolejno

$$t^2 = \frac{x-4}{5}$$

$$y = 2 + 6 \cdot \frac{x-4}{5} = 2 + 1.2 \cdot x - 4.8 \text{ i w końcu}$$

$$y = 1.2 \cdot x - 2.8 \text{ (***)}$$

Równanie (***) opisuje tor ruchu punktu A

2. Początek toru – punkt A_0

Początek toru znajduje się w punkcie A_0 dla $t=0$. Wstawiając $t=0$ do równań (*) i (**) mamy

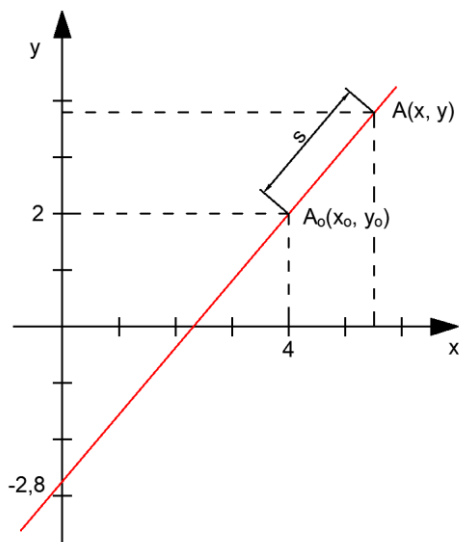
$$x_0 = 4 + 5 \cdot 0 = 4$$

$$y_0 = 2 + 6 \cdot 0 = 2$$

gdzie:

x_0 – współrzędna x punktu A_0 ,

y_0 – współrzędna y punktu A_0



2. Punkt końcowy A – po upływie czasu t

Należy obliczyć drogę $s = \overline{A_0A}$

$$s = \sqrt{(x - x_0)^2 + (y - y_0)^2}$$

po podstawieniu równań (*), (**) i współrzędnych punktu A_0 otrzymujemy:

$$s = \sqrt{(4 + 5 \cdot t^2 - 4)^2 + (2 + 6 \cdot t - 2)^2} = \sqrt{25 \cdot t^4 + 36 \cdot t^4} = \sqrt{61} \cdot t^2$$

3. Prędkość punktu jest pierwszą pochodną przemieszczenia (drogi) po czasie:

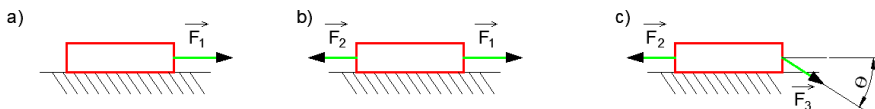
$$V = \dot{s} = 2 \cdot t \cdot \sqrt{61}$$

4. Przyspieszenie punktu jest pierwszą pochodną jego prędkości po czasie:

$$p = \dot{V} = 2 \cdot \sqrt{61}$$

Zadanie 12

Na poniższym rysunku przedstawiono trzy różne schematy obciążenia tego samego ciała, które może się poruszać bez tarcia w kierunku osi poziomej. Wyznacz przyspieszenie ciała w każdym z trzech przypadków jeśli: masa wynosi 1 kg, siła $F_1=15$ N, $F_2=12$ N, $F_3=5$ N. Siła F_3 działa pod kątem 60° do poziomu.



W każdym z przypadków korzystamy z II zasady dynamiki Newtona.

Przypadek 1

$$\overrightarrow{F_{wyp}} = m \cdot \vec{a}$$

po uwzględnieniu schematu obciążenia mamy:

$$F_1 = m \cdot a_x$$

następnie po przekształceniu równania i podstawieniu wartości liczbowych otrzymujemy:

$$a_x = \frac{F_1}{m} = \frac{15N}{1kg} = 15m/s^2$$

otrzymany wynik jest dodatni, co oznacza, że przyspieszenie krążka jest skierowane w dodatnim kierunku osi x:

Przypadek 2

$$\overrightarrow{F_{wyp}} = m \cdot \vec{a}$$

po uwzględnieniu schematu obciążenia mamy:

$$F_1 - F_2 = m \cdot a_x$$

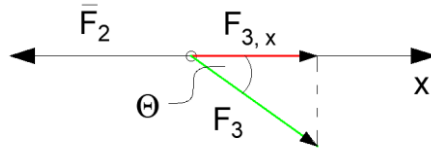
następnie po przekształceniu równania i podstawieniu wartości liczbowych otrzymujemy:

$$a_x = \frac{F_1 - F_2}{m} = \frac{15N - 12N}{1kg} = 3m/s^2$$

otrzymany wynik jest dodatni, co oznacza, że przyspieszenie krążka jest skierowane w dodatnim kierunku osi x:

Przypadek 3:

$$\overrightarrow{F_{wyp}} = m \cdot \vec{a}$$



po uwzględnieniu schematu obciążenia mamy:

$$F_{3,x} - F_2 = m \cdot a_x$$

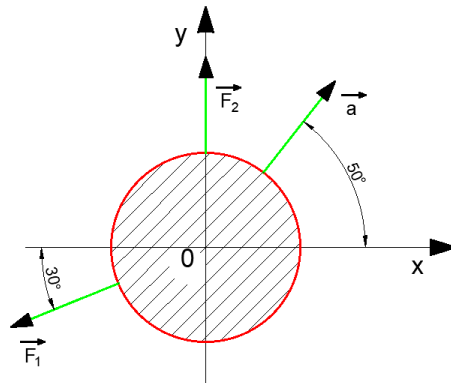
następnie po przekształceniu równania i podstawieniu wartości liczbowych otrzymujemy:

$$a_x = \frac{F_3 \cdot \cos \theta - F_2}{m} = \frac{5\text{ N} \cdot \cos 60^\circ - 12\text{ N}}{1\text{ kg}} = -9.5\text{ m/s}^2$$

otrzymany wynik jest ujemny, co oznacza, że przyspieszenie krążka jest skierowane w ujemnym kierunku osi x:

Zadanie 13

Rysunek przedstawia widok z góry walca o masie 10 kg, który porusza się bez tarcia po poziomej płaszczyźnie. Kierunek jego przyspieszenia, o wartości 4 m/s^2 , jest wyznaczony przez wektor $\vec{a}$. Przyspieszenie to jest efektem działania trzech sił poziomych $F_1=10\text{ N}$, $F_2=40\text{ N}$ i nieznanej siły F_3 . Wyznacz siłę F_3 .



Wypadkowa $\overrightarrow{F_{wyp}}$ sił działających na walec jest sumą trzech sił i jest związana z przyspieszeniem $\vec{a}$ walca. Zgodnie z II zasadą dynamiki Newtona mamy:

$$\overrightarrow{F_{wyp}} = m \cdot \vec{a}$$

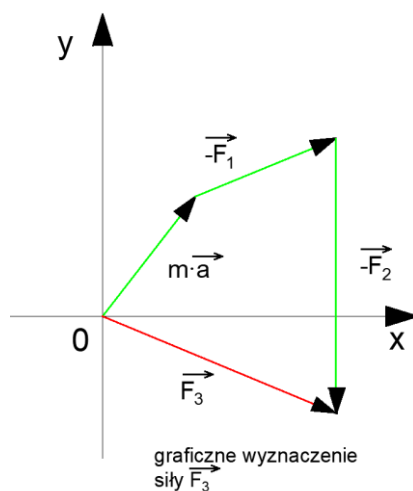
stąd wynika:

$$\vec{F}_1 + \vec{F}_2 + \vec{F}_3 = m \cdot \vec{a}$$

po przekształceniach mamy:

$$\vec{F}_3 = m \cdot \vec{a} - \vec{F}_1 - \vec{F}_2 \quad (*)$$

Diagram sił:



Dygresja:

Powyżej skorzystaliśmy z działań na wektorach wg poniższych zasad:

a) Dodawania

$$\vec{s} = \vec{a} + \vec{b}$$

- 1) Należy narysować wektor $\vec{a}$ w dogodnej skali i pod właściwym kątem,
- 2) W tej samej skali należy narysować wektor $\vec{b}$ tak, by jego początek był końcem wektora $\vec{a}$, oczywiście pod odpowiednim kątem,
- 3) Sumą tych wektorów jest wektor $\vec{s}$, którego początkiem jest początek wektora $\vec{a}$, a końcem koniec wektora $\vec{b}$.

b) Odejmowania

$$\vec{d} = \vec{a} - \vec{b} = \vec{a} + (-\vec{b})$$

- 1) Żeby znaleźć różnicę wektorów $\vec{d}$, należy dodać wektor $-\vec{b}$ do wektora $\vec{a}$

Wyznaczamy składowe prawej strony równania (*) wzdłuż osi x, a następnie wzdłuż osi y

a) Dla osi x mamy:

$$\vec{F}_{3,x} = m \cdot \vec{a}_x - \vec{F}_{1,x} - \vec{F}_{2,x} = m \cdot (a \cdot \cos 60^\circ) - F_1 \cdot \cos 30^\circ,$$

po podstawieniu wartości liczbowych mamy:

$$F_{3,x} = \frac{1}{2} \cdot 10kg \cdot 4 \frac{m}{s^2} - \frac{\sqrt{3}}{2} \cdot 10N = 11.34N$$

b) Dla osi y mamy:

$$\vec{F}_{3,y} = m \cdot \vec{a}_y - \vec{F}_{1,y} - \vec{F}_{2,y} = m \cdot (a \cdot \sin 60^\circ) - F_1 \cdot \sin 30^\circ - F_2 = 0$$

po podstawieniu wartości liczbowych mamy:

$$\vec{F}_{3,y} = \frac{\sqrt{3}}{2} \cdot 10kg \cdot 4 \frac{m}{s^2} - \frac{1}{2} \cdot 10N - 40N = -10.35N$$

Ostatecznie wartość F_3 wyliczamy z poniższej zależności:

$$F_3 = \sqrt{F_{3,x}^2 + F_{3,y}^2} = 15.32N$$

Zadanie 14

Człowiek o masie $m=80$ kg ciągnie wagon kolejowy ze stałą siłą, która jest większa 2.5 razy od jego ciężaru. Kierunek tej siły tworzy z poziomem kąt $\theta=30^\circ$. Ciężar wagonu, który porusza się bez tarcia wynosi $W=700$ kN, a został on przesunięty na odległość 1 m. Ile wynosiła prędkość wagonu w chwili, gdy człowiek przestał go ciągnąć? Zakładamy, że koła wagonu poruszały się po szynach bez tarcia.

Z treści zadania wynika, że:

- 1) Przyspieszenie $\vec{a}$ jest stałe, ponieważ wagon był ciągnięty ze stałą siłą,
- 2) Ruch zachodzi w jednym kierunku po szynach kolejowych,
- 3) Wagon przebył drogę $d=1$ m

Zadanie rozwiązujemy korzystając ze wzoru 3) z Tabeli 1

$$V^2 = V_0^2 + 2 \cdot a \cdot (x - x_0) (*)$$

możemy przyjąć, że:

$$V_0=0$$

$$d = x - x_0$$

nieznaną wartość przyspieszenia a korzystając z II zasady dynamiki Newtona

$$F_{wyp} = m_W \cdot a (**)$$

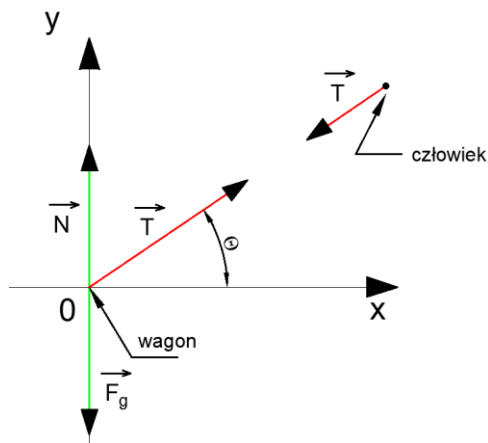
gdzie:

F_{wyp} – siła wypadkowa działająca na wagon,

m_w – masa wagonu,

a – przyspieszenie wagonu w kierunku x

Diagram sił:



jedyną siłą działającą na wagon w kierunku poziomym jest składowa $T_x = T \cdot \cos \theta$ naprężenia linii ciągniętej przez człowieka. Wobec tego równanie (**) przybiera postać:

$$T \cdot \cos \theta = m_w \cdot a \quad (***)$$

gdzie:

$$T = 2.5 \cdot m \cdot g,$$

gdzie:

T – napięcie w linie,

m – masa człowieka,

g – przyspieszenie ziemskie,

$$m_W = \frac{W}{g}$$

gdzie:

m_W – masa wagonu,

W – ciężar wagonu,

g – przyspieszenie ziemskie

Przekształcając równanie (***) oraz podstawiając powyższe dane otrzymujemy:

$$a = \frac{T \cdot \cos \theta}{m_W}$$

po podstawieniu danych liczbowych mamy:

$$a = \frac{2.5 \cdot 80 \text{ kg} \cdot 9.81 \text{ m/s}^2 \cdot \cos 30^\circ}{\frac{700 \text{ kN}}{9.81 \text{ m/s}^2}} = 0.023 \text{ m/s}^2$$

Podstawiając wartość a do równania (*) mamy

$$V^2 = 0 + 2 \cdot 0.02 \text{ m/s}^2 \cdot 1 \text{ m}$$

stąd:

$$V = 0.22 \text{ m/s}$$

Zadanie 15

Na rysunku przedstawiono układ składający się z dwóch ciał o masach odpowiednio $m_1=3 \text{ kg}$ i $m_2=2 \text{ kg}$. Masy liny i krążków pomijamy. Ciało wiszące W opada w dół, a ciało ślizgające się S porusza się ruchem przyspieszonym w prawo. Oblicz: a) przyspieszenie obu ciał, b) naprężenie w linie.

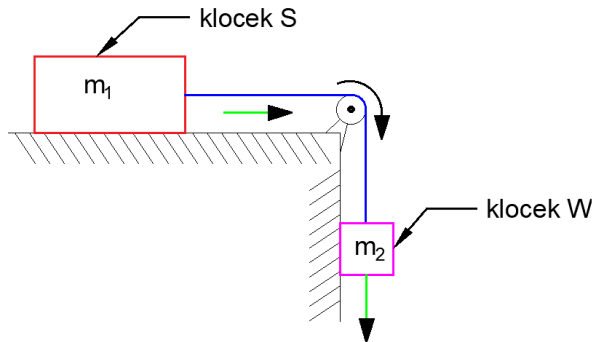
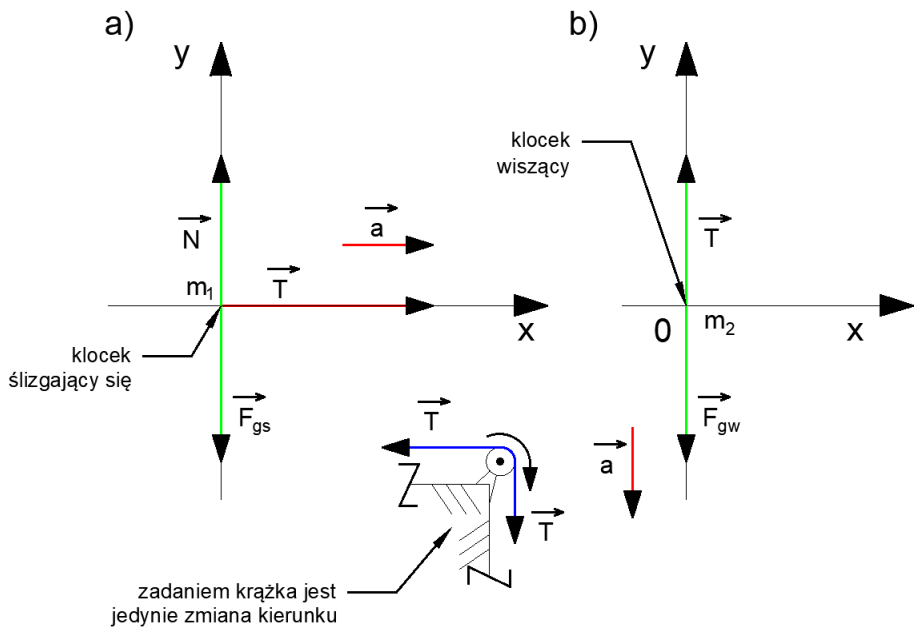


Diagram sił:



Dla rysunku a) w kierunku poziomym (kierunku ruchu ciała m_1) różna od zera jest jedynie siła $\vec{T}$

$$F_{wyp} = m_1 \cdot a_x$$

po podstawieniu danych otrzymujemy równanie z dwiema niewiadomymi:

$$T = m_1 \cdot a \quad (*)$$

Dla rysunku b) w kierunku pionowym (kierunku ruchu ciała m_2) działają siły $\vec{T}$ i $\vec{F}_{g,w}$

$$F_{wyp} = m_2 \cdot a_y$$

$$T - F_{g,w} = m_2 \cdot (-a)$$

po podstawieniu danych mamy:

$$T - m_2 \cdot g = -m_2 \cdot a \quad (**)$$

Równania (*) i (**) tworzą układ dwóch równań z dwiema niewiadomymi. Odejmując oba równania od siebie stronami otrzymujemy

$$m_2 \cdot g = m_1 \cdot a + m_2 \cdot a$$

po przekształceniu otrzymujemy:

$$a = \frac{m_2}{m_1 + m_2} \cdot g \quad (***)$$

Po podstawieniu równania (***) do równania (*) otrzymujemy:

$$T = m_1 \cdot \left(\frac{m_2}{m_1 + m_2} \right) \cdot g = \frac{m_1 \cdot m_2 \cdot g}{m_1 + m_2}$$

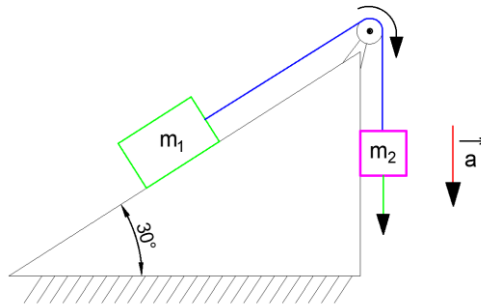
po podstawieniu danych liczbowych otrzymujemy:

$$a = \frac{2kg \cdot 9.81m/s^2}{3kg + 2kg} = 3.92m/s^2$$

$$T = \frac{2kg \cdot 3kg \cdot 9.81m/s^2}{2kg + 3kg} = 11.77N$$

Zadanie 16

Ciało o masie $m_1=4$ kg znajdujące się na równi pochyłej o kącie nachylenia 30° , po której może poruszać się bez tarcia, jest połączone liną z drugim ciałem o masie $m_2=2.5$ kg. Lina jest przełożona przez mogący się obracać bez tarcia krążek o znikomo małej masie. Wyznacz: a) przyspieszenie każdego krążka $\vec{a}$, b) kierunek przyspieszenia klocka wiszącego, c) naprężenie w linie $\vec{T}$



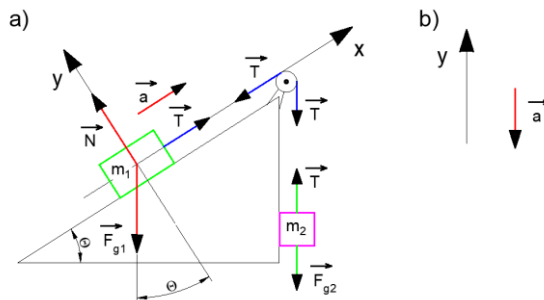
Dla rysunku a) w kierunku poziomym (oś x) różne od zera są siła T i składowa siły F_{g1} . Z drugiej zasady dynamiki Newtona mamy:

$$F_{wyp} = m_1 \cdot a_x$$

$$T - F_{g1} \cdot \sin \theta = m_1 \cdot a_1 (*)$$

w rezultacie otrzymaliśmy równanie (*) z dwoma niewiadomymi:

Diagram sił:



Dla rysunku b) w kierunku pionowym (oś y) mamy:

$$F_{wyp} = m_2 \cdot a_y$$

$$T - m_2 \cdot g = -m_2 \cdot a_1$$

stąd po przekształceniach mamy:

$$T = m_2 \cdot g - m_2 \cdot a_1 \quad (**)$$

otrzymaliśmy drugie równanie z dwiema niewiadomymi.

Równania (*) i (**) tworzą układ dwóch równań z dwiema niewiadomymi. Podstawiając T oraz dane do równania (*) mamy:

$$m_2 \cdot g - m_2 \cdot a_1 - m_1 \cdot g \cdot \sin 30^\circ = m_1 \cdot a_1$$

po uporządkowaniu otrzymujemy:

$$a_1 \cdot (m_1 + m_2) = g \cdot \left(m_2 - \frac{1}{2} \cdot m_1 \right)$$

i w końcu mamy

$$a_1 = g \cdot \frac{m_2 - \frac{1}{2} \cdot m_1}{m_1 + m_2}$$

podstawiając dane liczbowe otrzymujemy:

$$a_1 = \frac{9.81m}{s^2} \cdot \frac{2.5kg - 2kg}{2kg + 4kg} = 0.81m/s^2$$

Otrzymana wartość przyspieszenia jest dodatnia co oznacza, że drugie ciało porusza się w dół – zgodnie ze zwrotem przyspieszenia z rysunku b).

Podstawiając dane liczbowe do równania (**) otrzymujemy:

$$T = 2.3kg \cdot \left(9.81 \frac{m}{s^2} - 0.81 \frac{m}{s^2} \right) = 20.7N$$

Zadanie 17

Renifer ciągnie sanie ważące $m=100\text{ kg}$ ze stałą prędkością i po poziomej powierzchni. Pomiędzy saniami a śniegiem występuje tarcie kinetyczne o współczynniku $\mu_k=0.1$, a kąt który tworzy siła działająca na sanie z poziomem wynosi 30° . Wyznacz wartość siły działającej na sanie od strony liny.

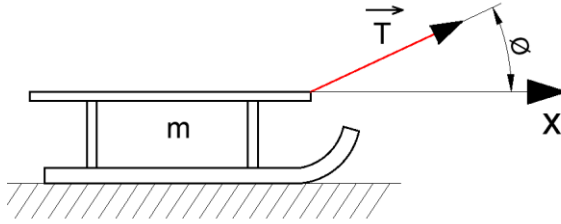
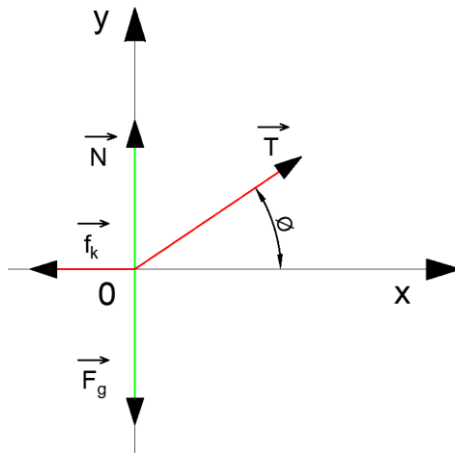


Diagram sił:



Z drugiej zasady dynamiki Newtona wynika:

$$\vec{T} + \vec{N} + \vec{F}_g + \vec{f}_k = 0 \quad (*)$$

Suma sił równa się zero gdyż, przyspieszenie z prawej strony równania (*), ze względu na stałą prędkość, wynosi zero.

W kolejnym kroku formułujemy równania równowagi będące rzutami sił na osie x i y :

$$T \cdot \cos \phi - \mu_k \cdot N = 0 \quad (*)$$

$$T \cdot \sin \phi + N - m \cdot g = 0 \quad (**)$$

Równania (*) i (**) tworzą układ dwóch równań z dwiema niewiadomymi. Wyznaczając N z równania (*) i wstawiając do równania (**) otrzymujemy

$$T = \frac{\mu_k \cdot m \cdot g}{\cos \phi + \mu_k \cdot \sin \phi}$$

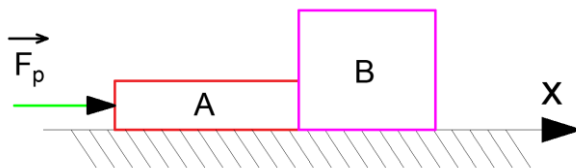
po podstawieniu wartości liczbowych otrzymujemy:

$$T = 91 \text{ N}$$

Zadanie 18

Rysunek przedstawia dwa stykające się ze sobą klocki: A o masie $m_A = 4 \text{ kg}$ i B o masie $m_B = 6 \text{ kg}$. Po przyłożeniu do klocka A stałej siły poziomej $\vec{F}_p$ o wartości 20 N klocki ślizgają się bez tarcia po podłożu wzdłuż osi x . a) ile wynosi przyspieszenie klocków? b) jaką siłą $\vec{F}_{A,B}$ klocek A działa na klocek B?

- a) Ze względu na kierunek działania siły $\vec{F}_p$ obydwa klocki stanowią układ ciał sztywno ze sobą związanych. Korzystamy z II zasady dynamiki Newtona:



$F_p = (m_A + m_B) \cdot a$, po przekształceniu i podstawieniu wartości liczbowych otrzymujemy wartość przyspieszenia klocków:

$$a = \frac{F_p}{m_A + m_B} = \frac{20N}{4kg + 6kg} = 2m/s^2$$

b) Korzystamy z III zasady dynamiki Newtona

$$F_{A,B} = m_B \cdot a$$

po podstawieniu wartości liczbowych mamy:

$$F_{A,B} = 6kg \cdot 2 \frac{m}{s^2} = 12N$$

Kłoczek A działa na klocek B siłą nadającą mu przyspieszenie $2m/s^2$.

3. Zadania do samodzielnego rozwiązania

Zadanie 1

Równania punktu określone za następującymi równaniami:

a) $x=6 + 6t$, $y=3 + 6t$,

b) $x=5 + 2t$, $y=4 + 4t$,

c) $x=3 + 2t^2$, $y=4 + 3t^2$,

Należy wykonać na podobieństwo zadań 10 oraz 11. Wyznaczyć prędkość, przyspieszenie, drogę tor ruchu.

Zadanie 2

Wózek żurawia wyrusza ze stałym przyspieszeniem i po czasie $t_1=12$ s osiąga prędkość $v_1=3$ m/s. Utrzymując tą prędkość jedzie $t_2=18$ s, a następnie zatrzymuje się na drodze hamowania $d=2$ m. Wykonaj wykres przyspieszeń, prędkości oraz drogi wózka.

Należy wykonać na podobieństwo zadania 5.

Zadanie 3

Dane są równania ruchu punktu:

$$\text{a) } x=2 + 4\cos 6t \qquad y=2 + 4\sin 6t$$

$$\text{b) } x=4 + 2\sin 4t \qquad y=3+2\cos 4t$$

Należy wykonać na podobieństwo zadań 10 oraz 11. Wyznaczyć prędkość, przyspieszenie, drogę tor ruchu.

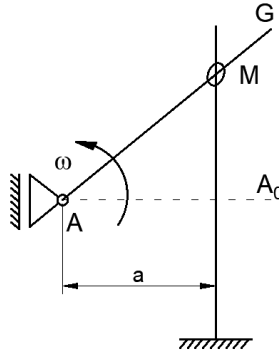
Zadanie 4

Wyznaczyć prędkość poszczególnych wskazówek zegara, tzn. godzinowa, minutowa, sekundowa. Długości poszczególnych wskazówek wynoszą: godzinowa 8 cm, minutowa 15 cm, sekundowa 12 cm.

Zadanie 5

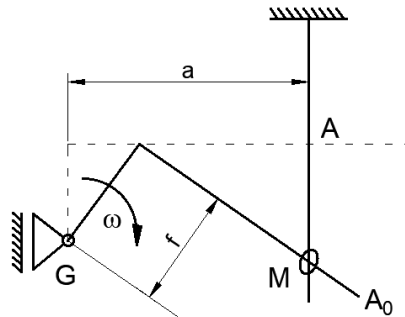
Wyznaczyć prędkość i przyspieszenie pierścienia M, który znajduje się na powierzchni poruszającego się pręta. Prędkość obracającego się pręta AG wynosi ω .²

² M. Niezgodziński, T. Niezgodziński, *Zbiór zadań z mechaniki ogólnej*, Wydawnictwo Naukowe PWN, Warszawa 1998, s. 176.



Zadanie 6

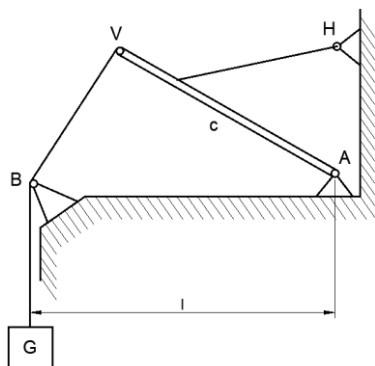
Wyznaczyć prędkość i przyspieszenie pierścienia M, który znajduje się na powierzchni poruszającego się pręta. Prędkość obracającego się pręta GA_0 wynosi ω .³



Zadanie. 7

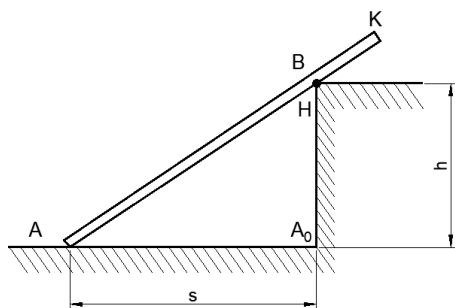
Korba AV wykonuje n obr./min. Korba zamocowana jest do podpory H. Po uwolnieniu z podpory H, korba w wyniku działania ciężaru G zacznie się obracać dookoła podpory A. Wyznaczyć równanie ruchu, prędkość i przyspieszenie ciała G. Długość korby wynosi r .

³ M. Niezgodziński, T. Niezgodziński, *Zbiór zadań z mechaniki ogólnej*, Wydawnictwo Naukowe PWN, Warszawa 1998, s. 176.



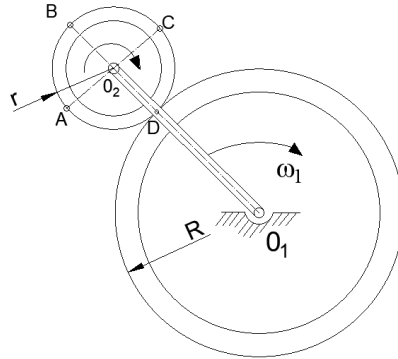
Zadanie 8

Pręt AK o długości r porusza się zsuwając z przewyższenia. Koniec pręta A oparty jest o podłogę i ślizga się po prostej, natomiast drugim końcem opiera się w punkcie H, położoną na wysokości h . Należy wyznaczyć prędkość, przyspieszenie końca pręta K oraz punktu podparcia pręta B. Dane: $r, h, \mu - \cos \alpha$.



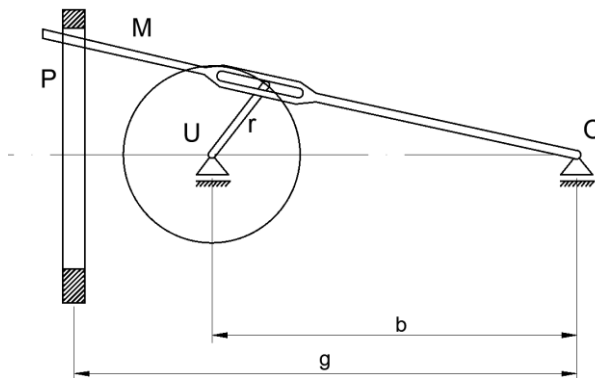
Zadanie 9

Tarcza o promieniu r zamocowana cięgnem do tarczy o promieniu R . W wyniku obrotu cięgna ze stałą prędkością kątową ω_1 , tarcza o promieniu r obraca się bez poślizgu dookoła tarczy o promieniu R . Wyznaczyć prędkość kątową tarczy o promieniu r oraz prędkości poszczególnych punktów A, B, C, D.



Zadanie 10

Suwak P porusza się w prowadnicy pionowej napędzanej jarzmem OM osadzonym przegubowo w punkcie O. Jarzmo napędzane jest korbą o długości r . Mając dane n , r , $OU=b$ oraz g – wyznaczyć równanie ruchu.



Rozdział 2

Dynamika

Wstęp teoretyczny

1. Dynamika punktu materialnego

Powszechnie stosowaną zasadą w dynamice jest *zasada niezależności działania sił*. Opiera się ona o zasadę równoległoboku, która stosowana jest w statyce. A zatem przypomnijmy sobie ze statyki trzy prawa Newtona:

1. Punkt materialny pozostaje w spoczynku lub porusza się ruchem jednostajnym prostoliniowym, gdy nie działają na niego żadne siły lub działające siły równoważą się.
2. Jeżeli na dany punkt materialny działa siła P , to udziela punktowi przyspieszenia odwrotnie proporcjonalnego do masy tego punktu:

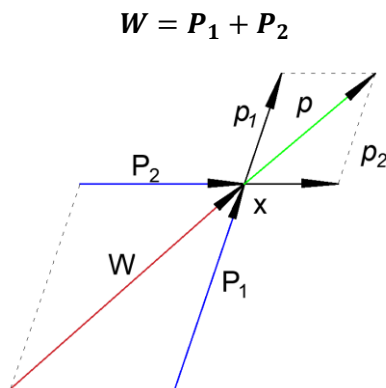
$$P = mp$$

gdzie: P – siła, m – masa, p – przyspieszenie.

3. Każdemu działaniu towarzyszy równe, skierowane przeciwnie przeciwdziałanie.

W oparciu o powyższe prawa sformułowano jak w/w *zasadę niezależności działania sił*, która brzmi:

Działanie dwóch sił na punkt materialny jest równoważne działaniu jednej siły wypadkowej, równej sumie geometrycznej sił składowych.⁴

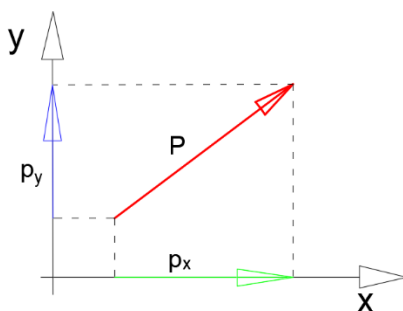


Po zastosowaniu wzoru $P=mp$ wypadkowe przyspieszenie p , jest równe sumie geometrycznej przyspieszeń składowych i wynosi:

$$p = p_1 + p_2$$

1.1. Dynamiczne równania ruchu punktu materialnego

Z zasady niezależności działania sił wynika, że po zrzutowaniu siły P , na układ płaski otrzymamy następujące zależności:



⁴ M. Niezgodziński, T. Niezgodziński, *Zbiór zadań z mechaniki ogólnej*, Wydawnictwo Naukowe PWN, Warszawa 1998, s. 156.

$$P_x = mp_x = m \frac{d^2x}{dt^2} = m\ddot{x},$$

$$P_y = mp_y = m \frac{d^2y}{dt^2} = m\ddot{y},$$

i odpowiednio na układ przestrzenny:

$$P_x = mp_x = m \frac{d^2x}{dt^2} = m\ddot{x},$$

$$P_y = mp_y = m \frac{d^2y}{dt^2} = m\ddot{y},$$

$$P_z = mp_z = m \frac{d^2z}{dt^2} = m\ddot{z},$$

Powyższe zależności noszą nazwę: **dynamiczne równania ruchu punktu materialnego**.

Siła P rozumiana jest jako wypadkowa, tj. suma geometryczna sił składowych. W rozwiązywaniu dynamiki punktu materialnego korzystamy zatem z równań:

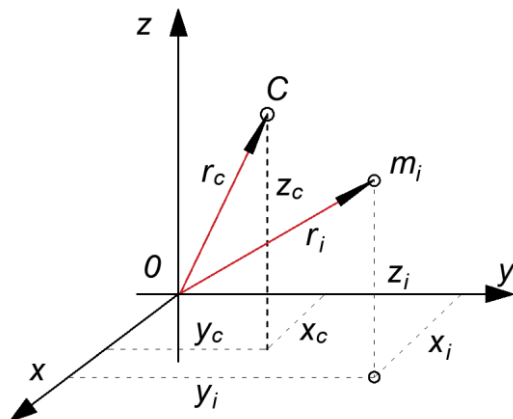
$$\sum P_{ix} = m \frac{d^2x}{dt^2}, \quad \sum P_{iy} = m \frac{d^2y}{dt^2}, \quad \sum P_{iz} = m \frac{d^2z}{dt^2},$$

1.2. Środek masy układu mechanicznego

Układ mechaniczny to zbiór punktów materialnych. Jeżeli rozpatrujemy pojedyncze ciało sztywne to punkty materialne, które tworzą to ciało nie zmieniają położenia względem siebie (ciało jest doskonale sztywne).

Dysponując dowolnym ciałem sztywnym możemy na jego powierzchni zaznaczyć dowolny punkt materialny m_i . Niech wspomniany punkt materialny oddalony będzie od początku układu współrzędnych o wartość r_i .

Położenie środka ciężkości wyznaczmy zatem z wcześniej poznanych wzorów dotyczących środków ciężkości ciał sztywnych.



$$r_c = \frac{\sum m_i r_i}{m_c}$$

$$m_c = \sum m_i$$

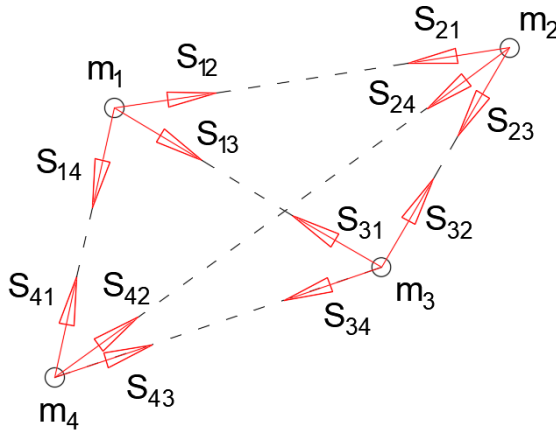
$$x_c = \frac{\sum m_i x_i}{m_c} \quad y_c = \frac{\sum m_i y_i}{m_c} \quad z_c = \frac{\sum m_i z_i}{m_c}$$

Wyrażenia $\sum m_i x_i$, $\sum m_i y_i$, $\sum m_i z_i$ nazywane są momentami statycznymi lub momentami pierwszego rzędu.

1.3. Wypadkowa sił wewnętrznych

Wypadkową sił wewnętrznych dowolnego układu mechanicznego możemy zapisać w postaci sumy sił działających kolejno na poszczególne punkty tego układu:

$$\begin{aligned}
 \sum S_i &= S_{12} + S_{13} + S_{14} + \dots \\
 &\dots + S_{21} + S_{23} + S_{24} + \dots \\
 &\dots + S_{31} + S_{32} + S_{34} + \dots \\
 &\dots + S_{41} + S_{42} + S_{43} + \dots \\
 &\dots \dots \dots \dots \dots \dots \dots \dots \dots \dots
 \end{aligned}$$

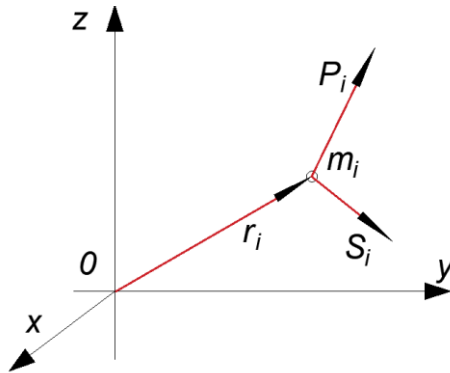


Możemy zauważyć, że siły występujące w powyższej sumie są sobie parami równe i przeciwnie skierowane, każda taka para stanowi więc układ zerowy, a zatem i suma tych układów jest równa zero.

$$\sum S_i = 0$$

1.4. Równania ruchu środka masy układu mechanicznego

Układ mechaniczny składa się z pewnej liczby punktów materialnych. Wyznamy zatem jeden z tych punktów i nazwijmy go m_i . Do naszego punktu przyłożono wypadkową sił zewnętrznych oraz wypadkową sił wewnętrznych odpowiednio P_i oraz S_i .



Równanie dynamiczne ruchu:

$$\mathbf{P}_i + \mathbf{S}_i = m_i \mathbf{p}_i$$

a zatem dla wszystkich punktów ciała:

$$\sum \mathbf{P}_i + \sum \mathbf{S}_i = \sum m_i \mathbf{p}_i$$

jednak z powyższych rozważań wiemy, że:

$$\sum \mathbf{S}_i = \mathbf{0}$$

dlatego:

$$\sum \mathbf{P}_i = \sum m_i \mathbf{p}_i$$

po rzutowaniu na oś x:

$$\begin{aligned} \sum P_{ix} &= \sum m_i \frac{d^2 x_i}{dt^2} \\ \sum P_{ix} &= \sum \frac{d^2}{dt^2} (m_i x_i) \equiv \frac{d^2}{dt^2} \sum m_i x_i = \frac{d^2}{dt^2} m_c x_c \\ \sum P_{ix} &= m_c p_{cx} \end{aligned}$$

Powyższa zależność przeprowadzona została dla osi x , jednak dla pozostałych osi jest analogiczna. Następnie trzy równania można zapisać w postaci wektorowej:

$$\sum P_i = m_c p_c$$

Środek masy układu materialnego porusza się tak, jak punkt materialny, w którym skupiona jest cała masa układu, gdy na punkt ten działa wypadkowa wszystkich sił zewnętrznych przyłożonych do tego układu.⁵

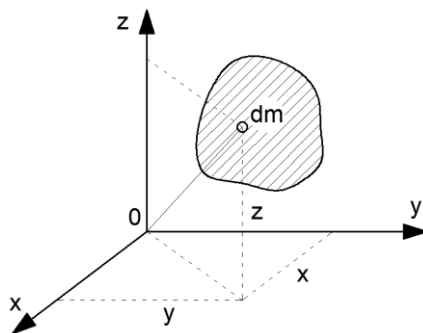
2. Momenty bezwładności

2.1. Moment bezwładności względem płaszczyzny

$$J_{(xy)} = \int_m z^2 dm$$

i analogicznie

$$J_{(yz)} = \int_m x^2 dm, \quad J_{(zx)} = \int_m y^2 dm$$



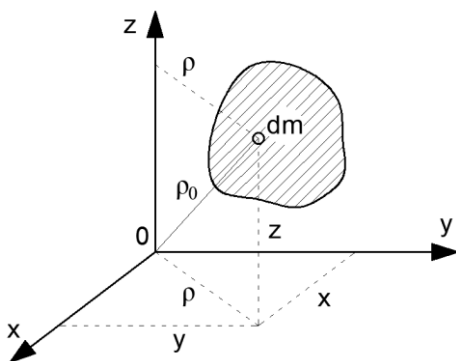
⁵ M. Niezgodziński, T. Niezgodziński, *Zbiór zadań z mechaniki ogólnej*, Wydawnictwo Naukowe PWN, Warszawa 1998, s. 174.

Momentem bezwładności ciała względem płaszczyzny nazywamy sumę iloczynów – zebranych dla całej masy ciała – elementów masy przez kwadraty odległości tych elementów od danej płaszczyzny. Momenty takie nazywamy momentami drugiego stopnia.⁶

2.2. Moment bezwładności względem osi

Moment bezwładności względem osi z obliczymy z zależności:

$$J_z = \int_m \rho^2 dm$$



Moment bezwładności względem osi jest równy sumie iloczynów elementów mas przez kwadrat ich odległości od rozpatrywanej osi.

$$\rho^2 = x^2 + y^2$$

a zatem:

$$J_z = \int_m (x^2 + y^2) dm = \int_m x^2 dm + \int_m y^2 dm$$

ale jak już wiemy:

$$J_{(yz)} = \int_m x^2 dm, \quad J_{(zx)} = \int_m y^2 dm, \quad J_{(xy)} = \int_m z^2 dm$$

⁶ M. Niezgodziński, T. Niezgodziński, *Zbiór zadań z mechaniki ogólnej*, Wydawnictwo Naukowe PWN, Warszawa 1998, s. 183.

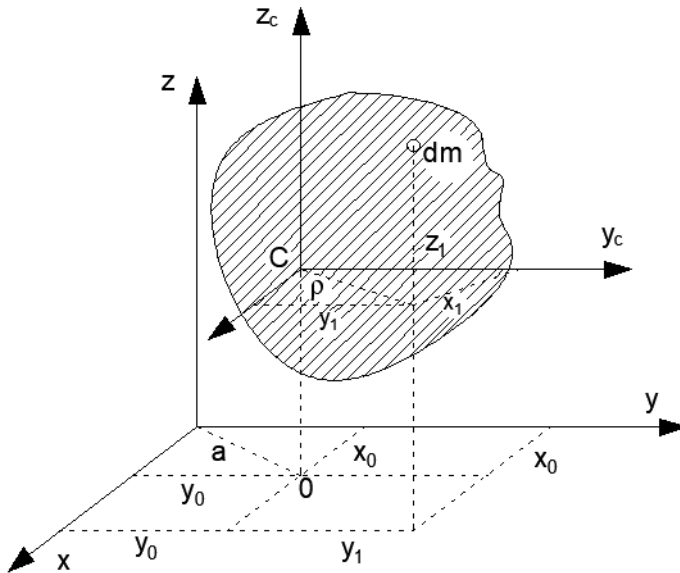
więc:

$$J_z = J_{(zx)} + J_{(zy)}$$

Moment bezwładności względem osi jest równy sumie algebraicznej momentów bezwładności względem dwóch wzajemnie prostopadłych płaszczyzn, których krawędzią przecięcia się jest dana oś.⁷

2.3. Twierdzenie Steinera

Jeżeli chcemy wyznaczyć moment bezwładności ciała względem osi równoległej do osi centralnej, oddalonej o pewną wartość – należy zastosować twierdzenie Steinera.



według oznaczeń – zależności:

$$a^2 = x_0^2 + y_0^2, \quad \rho^2 = x_1^2 + y_1^2, \quad x = x_1 + x_0, \quad y = y_1 + y_0$$

⁷ M. Niezgodziński, T. Niezgodziński, *Zbiór zadań z mechaniki ogólnej*, Wydawnictwo Naukowe PWN, Warszawa 1998, s. 183.

biorąc pod uwagę wzór:

$$J_{zC} = \int_m (x_1^2 + y_1^2) dm, \quad J_z = \int_m (x^2 + y^2) dm$$

$$\begin{aligned} J_z &= \int_m [(x_1 + x_0)^2 + (y_1 + y_0)^2] dm = \\ &= \int_m [(x_0^2 + y_0^2) + (x_1^2 + y_1^2) + 2x_0x_1 + 2y_0y_1] dm, \end{aligned}$$

Jednak wiemy, że współrzędne środka masy w zapisie całkowym wynoszą:

$$x_c = \frac{1}{m_c} \int_m x dm, \quad y_c = \frac{1}{m_c} \int_m y dm, \quad z_c = \frac{1}{m_c} \int_m z dm,$$

W naszym przypadku współrzędne x_c, y_c środka masy C w układzie x_c i y_c są równe zeru:

$$x_c = \frac{1}{m_c} \int_m x_1 dm = 0, \quad y_c = \frac{1}{m_c} \int_m y_1 dm = 0$$

w takim razie otrzymujemy:

$$J_z = J_{zC} + ma^2$$

Moment bezwładności względem dowolnej osi z jest równy sumie momentu bezwładności względem równoległej osi centralnej i iloczyny masy ciała przez kwadrat odległości między osiami.⁸

⁸ M. Niezgodziński, T. Niezgodziński, *Zbiór zadań z mechaniki ogólnej*, Wydawnictwo Naukowe PWN, Warszawa 1998, s. 186.

3. Zadania rozwiązane

Zadanie 1

Wyobraźmy sobie *crash test*, w czasie którego umieszczono w odległości 2 km dwa identyczne samochody osobowe o ciężarze 10^4 N. Z jaką łączną energią kinetyczną zderzyłyby się te samochody, gdyby poruszały się z tym samym przyspieszeniem równym 0.5 m/s^2 .

$$E_{ks} = \frac{1}{2} \cdot m_s \cdot V^2 (*)$$

gdzie:

E_{ks} – energia kinetyczna samochodu,

m_s – masa samochodu,

V – prędkość samochodu.

Do obliczenia E_{ks} samochodu z równania (*) brakuje nam jego masy i prędkości. Obie te wielkości wyliczamy poniżej.

$$1) \quad m_s = \frac{W_s}{g} (**)$$

gdzie:

W_s – ciężar samochodu,

g – przyspieszenie ziemskie,

Wstawiając dane liczbowe do równania (**) otrzymujemy

$$m_s = \frac{10^4 \text{ N}}{9,81 \text{ m/s}^2} = 1019 \text{ kg}$$

2) Prędkość samochodu w chwili zderzenia wyznaczamy korzystając z równania 3 z Tabeli 1.

$$V_s^2 = V_0^2 + 2 \cdot (x - x_0) (***)$$

gdzie:

$V_0 = 0$ – prędkość początkowa samochodu,

a – przyspieszenie samochodu,

$(x - x_0)$ – odległość, którą przebędzie samochód do chwili zderzenia.

Podstawiając dane liczbowe mamy.

$$V_s^2 = 0 + 2 \cdot \frac{0.5m}{s^2} \cdot 1000m = 1000 \frac{m^2}{s^2}$$

po spierwiastkowaniu mamy:

$$V_s = 31.6m/s$$

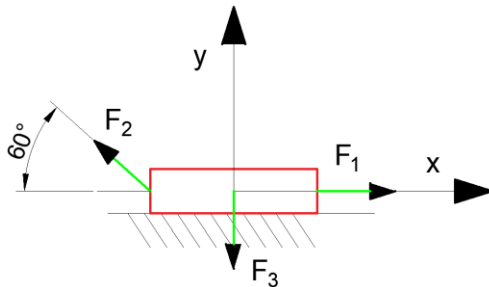
Podstawiając do równania (*) wartości masy i prędkości samochodu otrzymujemy

$$E_{ks} = \frac{1}{2} \cdot 10^4 \cdot 1000 \frac{m^2}{s^2} = 5 \cdot 10^6 J$$

Łączna energia kinetyczna dwóch samochodów będzie oczywiście dwa razy większa i wyniesie $10^7 J$.

Zadanie 2

Rysunek przedstawia trzy siły: $F_1=5$ N, $F_2=7$ N i $F_3=10$ N przyłożone do ciała poruszającego się bez tarcia po podłożu.



1. Ile wynosi praca całkowita wykonana przez te siły nad ciałem w czasie jego przemieszczenia w prawo o 2 m?

$$W_c = W_1 + W_2 + W_3$$

gdzie:

W_c – praca całkowita wykonana nad ciałem,

W_1 – praca wykonana nad ciałem przez siłę F_1 ,

W_2 – praca wykonana nad ciałem przez siłę F_2 ,

W_3 – praca wykonana nad ciałem przez siłę F_3 .

$$W_1 = F_1 \cdot r \cdot \cos 0^\circ = 5N \cdot 2m \cdot 1 = 10J$$

$$W_2 = -F_2 \cdot r \cdot \cos 60^\circ = -7N \cdot 2m \cdot \frac{1}{2} = -7J$$

$$W_3 = F_3 \cdot r \cdot \cos 90^\circ = 10N \cdot 2m \cdot 0 = 0J$$

$$W_c = 10Nm - 7Nm + 0Nm = 3J$$

2. Co dzieje się z energią kinetyczną (rośnie, nie zmienia się czy maleje) w czasie opisanego wyżej ruchu?

Na ciało działa stała siła, co zgodnie z II zasadą dynamiki Newtona powoduje, że ciało porusza się ze stałym przyspieszeniem ($a = \frac{F}{m}$). Skoro ciało porusza się ze stałym przyspieszeniem, to jego prędkość rośnie, a skoro prędkość rośnie, to i energia kinetyczna ciała rośnie ($E_k = \frac{1}{2} \cdot m \cdot V^2$).

Zadanie 3

Dwóch tragarzy przesuwa skrzynię ważącą 200 kg na odległość 10 m. Pierwszy z nich pcha ją siłą $F_1=15$ N skierowaną pod kątem 30° w dół od poziomu, a drugi ciągnie ją siłą $F_2=5$ N skierowaną pod kątem 60° w górę

od poziomu. Pomędzy skrzynią a podłożem nie ma tarcia, a wartości i kierunki siły podczas ruchu nie zmieniają się. Wyznacz:

1. całkowitą pracę jaką nad skrzynią wykonają siły F_1 i F_2 w czasie jej przemieszczania o wektor $\vec{d}$,
2. wyznacz pracę wykonaną nad skrzynią przez siłę ciężkości,
3. prędkość jaką ma skrzynia po przemieszczeniu jej o 10 m zakładając, że na początku była w spoczynku.

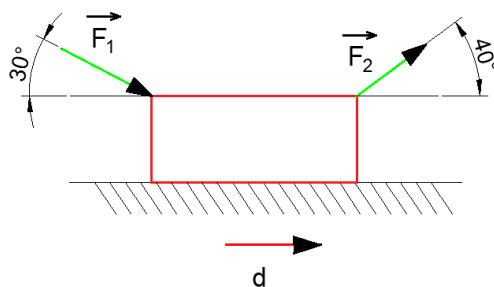
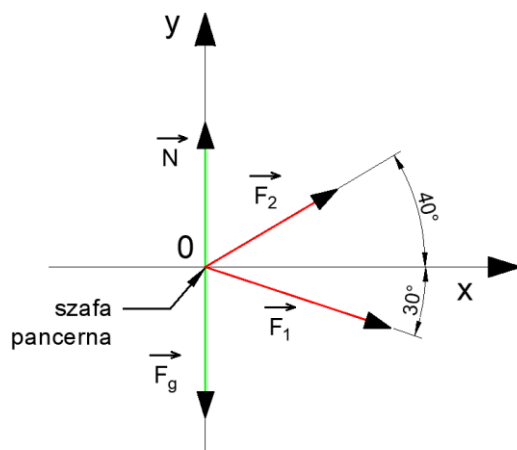


Diagram sił:



1. Wyznaczenie pracy całkowitej W_C

Praca całkowita wykonana nad skrzynią jest równa sumie prac wykonanych przez siły F_1 i F_2

$$W_C = W_1 + W_2,$$

gdzie:

W_1 – praca wykonana przez siłę F_1 ,

W_2 – praca wykonana przez siłę F_2

$$W_1 = F_1 \cdot d \cdot \cos \gamma$$

$$W_2 = F_2 \cdot d \cdot \cos \varepsilon$$

gdzie:

d – przemieszczenie skrzyni,

γ – kąt pomiędzy siłą F_1 a przemieszczeniem d ,

ε – kąt pomiędzy siłą F_2 a przemieszczeniem d .

Po podstawieniu wartości liczbowych mamy

$$W_C = 15N \cdot 10m \cdot \cos 30^\circ + 5N \cdot 10m \cdot \cos 60^\circ = 155 J$$

2. Wyznaczenie pracy wykonanej przez siłę ciężkości - W_g

$$W_g = F_g \cdot d \cdot \cos 90^\circ$$

gdzie:

F_g – siła ciężkości

Po podstawieniu wartości liczbowych otrzymujemy zero, ponieważ $\cos 90^\circ = 0$. Praca wykonana przez siłę będącą prostopadłą do przemieszczenia zawsze wynosi zero.

3. Wyznaczenie prędkości końcowej skrzyni – V_k

Prędkość skrzyni zmieniła się, ponieważ w wyniku działania sił F_1 i F_2 zmieniła się jej energia kinetyczna – E_k .

$$W_c = \Delta E_k = E_{kkoń} - E_{kpoc}$$

po przekształceniu, uwzględnieniu, że $E_{kpoc} = 0$ i podstawieniu danych liczbowych otrzymujemy:

$$W_c = \frac{1}{2} \cdot m \cdot V_{kkoń}^2,$$

$$V_{kkoń} = \sqrt{\frac{2 \cdot W_c}{m}} = 1.24 \text{ m/s}$$

Zadanie 4

Ciało o masie 10kg, które początkowo pozostawało w spoczynku, zostało wciągnięte za pomocą liny po równi pochyłej, po której poruszało się bez tarcia, na wysokość $h=3$ m i zatrzymane przebywając przy tym drogę $d=5$ m. Wyznacz:

1. jaka praca została wykonana nad ciałem przez siłę ciężkości $\vec{F}_g$,
2. jaka praca została wykonana nad ciałem przez siłę $\vec{T}$ działającą na ciało ze strony liny.

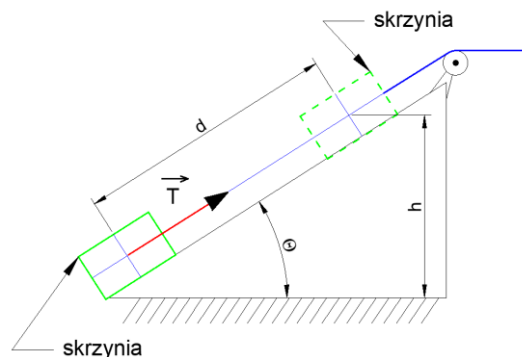
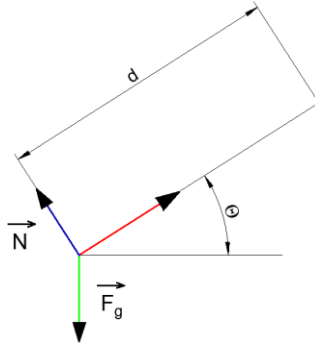


Diagram sił:



1. Wyznaczenie pracy wykonanej nad ciałem przez siłę ciężkości $\vec{F}_g$

$$W_g = F_g \cdot d \cdot \cos(\theta + 90^\circ) (*)$$

gdzie:

W_g – praca wykonana przez siłę ciężkości,

$(\theta + 90^\circ)$ – kąt pomiędzy siłą ciężkości $\vec{F}_g$ ciała a jego przemieszczeniem.

Uwzględniając, że $\cos(\theta + 90^\circ) = -\sin \theta$ oraz $\sin \theta = \frac{h}{d}$ otrzymujemy równanie (*) w postaci:

$$W_g = -m \cdot g \cdot d \cdot \sin \theta = -m \cdot g \cdot h$$

podstawiając dane liczbowe otrzymujemy:

$$W_g = -10 \text{ kg} \cdot 9.81 \frac{\text{m}}{\text{s}^2} \cdot 3 \text{ m} = -294.2 \text{ J}$$

2. Wyznaczenie pracy wykonanej nad ciałem przez siłę $\vec{T}$ działającą na ciało ze strony liny

Do obliczeń korzystamy z równości pracy i zmiany energii kinetycznej.

$$\Delta E_k = W_g + W_N + W_T = 0 (**)$$

gdzie:

$\Delta E_k = 0$, ponieważ zarówno na początku, jak i na końcu ruchu energia kinetyczna wynosiło zero, gdyż ciało pozostawało w spoczynku,
 $W_N=0$, ponieważ kierunek działania siły normalnej jest prostopadły do przemieszczenia ciała,

Po uwzględnieniu powyższego równanie (**) otrzymuje postać:

$$W_T - 294.2J = 0$$

Skąd:

$$W_T = 294.2J$$

Co oznacza, że praca wykonana przez siłę $\vec{T}$ musi zniwelować negatywną pracę wykonaną przez siłę $\vec{F}_g$.

Zadanie 5

Winda o masie $m=500$ kg jedzie w dół z prędkością $V_{poc}=4$ m/s, gdy nagle podtrzymująca ją lina zaczyna ześlizgiwać się z bębna w wyniku czego winda zaczyna spadać ze stałym przyspieszeniem $\vec{a} = \frac{\vec{g}}{5}$. Oblicz: 1) jaką praca została wykonana nad windą przez siłę ciężkości $\vec{F}_g$ podczas spadku windy na drodze $d=12$ m, 2) ile wynosi praca W_T wykonana nad windą podczas jej spadku na drodze 12 m, przez siłę $\vec{T}$, jaką lina ciągnie windę w górę, 3) ile wynosi całkowita praca W_c wykonana nad windą podczas jej spadku, 4) ile wynosi energia kinetyczna E_k windy pod koniec jej spadku z wysokości 12 m.

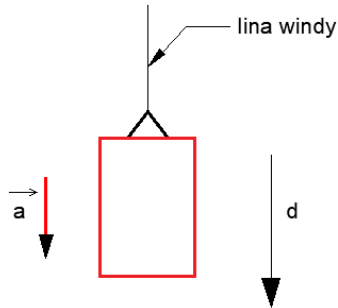
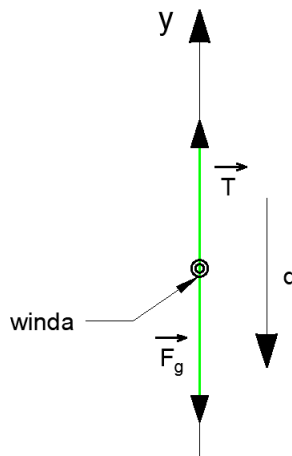


Diagram sił:



1. Wyliczenie pracy W_g wykonanej nad windą przez siłę ciężkości $\vec{F}_g$ podczas spadku windy na drodze d

$$W_g = F_g \cdot d \cdot \cos 0^\circ = m \cdot g \cdot d \cdot 1$$

po podstawieniu danych liczbowych:

$$W_g = 500kg \cdot 9.81 \frac{m}{s^2} \cdot 12m = 58.8kJ$$

2. Wyliczenie pracy W_T wykonanej nad windą przez siłę $\vec{T}$ podczas spadku windy na drodze d

Korzystając z II zasady dynamiki Newtona mamy

$$T - F_g = m \cdot a$$

po przekształceniu otrzymujemy:

$$T = m \cdot a + m \cdot g \quad (*)$$

$$W_T = T \cdot d \cdot \cos \phi \quad (**)$$

gdzie:

Φ – kąt pomiędzy siłą $\vec{T}$ a przemieszczeniem $\vec{d}$

Podstawiając równanie (*) do równania (**) dane otrzymujemy kolejno

$$W_T = m \cdot (a + g) \cdot d \cdot \cos \phi = m \cdot \left(-\frac{g}{5} + g\right) \cdot d \cdot \cos \phi = \frac{4}{5} \cdot m \cdot g \cdot d \cos \phi$$

po uwzględnieniu danych liczbowych mamy:

$$W_T = \frac{4}{5} \cdot 500kg \cdot 9.81 \frac{m}{s^2} \cdot 12m \cdot \cos 180^\circ = -4.7 \cdot 10^4 J$$

3. Wyliczenie całkowitej pracy całkowitej W_C wykonanej nad windą podczas jej spadku

$$W_C = W_g + W_T = 5.88 \cdot 10^4 - 4.7 \cdot 10^4 = 1.18 \cdot 10^4 J$$

4. Wyliczenie E_k pod koniec spadku windy

$\Delta E_k = W_C$, po podstawieniu wartości końcowej i początkowej energii kinetycznej oraz przekształceniu wzoru otrzymujemy

$$E_{kkoń} = W_C + E_{kpoc}$$

gdzie:

E_{kpoc} – energia kinetyczna początkowa,

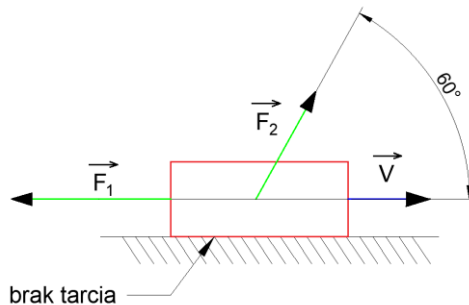
E_{kkon} – energia kinetyczna końcowa.

Po uwzględnieniu wzoru na energię kinetyczną i podstawieniu wartości liczbowych otrzymujemy kolejno

$$E_{kkon} = W_C + \frac{1}{2} \cdot m \cdot V_{poc}^2 = 11.8kJ + \frac{1}{2} \cdot 500kg \cdot 4 \frac{m}{s} = 12.8kJ$$

Zadanie 6

Na ciało, które ślizga się po powierzchni bez tarcia, działają dwie siły $F_1=3\text{ N}$ i $F_2=4\text{ N}$. W pewnej chwili prędkość ciała wynosi $V=2\text{ m/s}$. Oblicz: 1) moc chwilową pochodzącą od każdej z sił, 2) Oblicz moc całkowitą P_C .



1. Obliczenie mocy chwilowej P_1 i P_2

Moc chwilowa od siły P_1

$$P_1 = F_1 \cdot V \cdot \cos \phi_1$$

gdzie:

Φ_1 – kąt pomiędzy wektorami siły F_1 i prędkości V

Po wstawieniu wartości liczbowych otrzymujemy

$$P_1 = 3N \cdot 2 \frac{m}{s} \cdot \cos 180^\circ = -6W$$

Znak " - " w powyższym wyniku oznacza, że siła F_1 „odbiera” energię od ciała z szybkością 6 J/s

Moc chwilowa od siły P_2

$$P_2 = F_2 \cdot V \cdot \cos \phi_2$$

gdzie:

Φ_2 – kąt pomiędzy wektorami siły F_2 i prędkości V

Po wstawieniu wartości liczbowych otrzymujemy.

$$P_2 = 4N \cdot 2 \frac{m}{s} \cdot \cos 60^\circ = 4W$$

Znak " + " w powyższym wyniku oznacza, że siła F_2 „dostarcza” energię do ciała z szybkością 4 J/s

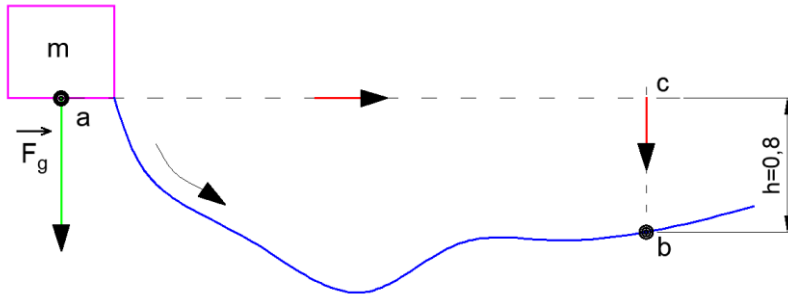
2. Obliczenie mocy całkowitej

$$P_C = P_1 + P_2 = -6W + 4W = -2W$$

Otrzymany wynik oznacza, że sumarycznie ciało traci energię, E_K maleje, zatem maleje v , zatem zmienia się również P_C .

Zadanie 7

Na rysunku pokazano ciało o masie 5 kg, które porusza się bez tarcia, po torze od punktu a) do punktu b). Sumaryczna zmiana położenia ciała w pionie wynosi 2 m. Jaką pracę wykonała nad ciałem siła ciężkości w czasie jego ruchu po torze?



Żeby rozwiązać powyższe zadanie należy uzmysłwić sobie następujące rzeczy:

- 1) Nie możemy zastosować wzoru $W_g = m \cdot g \cdot d \cdot \cos \phi$, bo kąt ϕ pomiędzy kierunkami siły $\vec{F}_g$ i przemieszczenia $\vec{d}$ zmienia się wzdłuż toru w sposób, którego nie znamy,
- 2) Siła $\vec{F}_g$ jest siłą zachowawczą tzn. zamienia energię kinetyczną na potencjalną,
- 3) Całkowita praca wykonana przez siłę zachowawczą nad cząstką poruszającą się po dowolnej drodze zamkniętej jest równa zero,
- 4) Praca wykonana przez siłę zachowawczą nad cząstką przez siłę zachowawczą, przemieszczającą się między dwoma punktami nie zależy od drogi, po jakiej porusza się cząstka

Stosując powyższe mamy

$$W_{ab} = W_{ac} + W_{cb} (*)$$

gdzie:

W_{ab} – praca wykonana nad ciałą pomiędzy punktami a i b,

W_{ac} – praca wykonana nad ciałą pomiędzy punktami a i c,

W_{cb} – praca wykonana nad ciałą pomiędzy punktami c i b.

$$W_{ac} = F_g \cdot d \cdot \cos \phi = m \cdot g \cdot \overline{ac} \cdot \cos \phi = 0, \text{ bo } \cos 90^\circ = 0 (**)$$

gdzie:

Φ – kąt pomiędzy siłą ciężkości $\vec{F}_g$ a przemieszczeniem $\vec{d}$ na odcinku $\overline{ac}$

$$W_{cb} = m \cdot g \cdot h \cdot \cos \theta = 5 \text{ kg} \cdot 9.81 \frac{\text{m}}{\text{s}^2} \cdot 2 \text{ m} \cdot 1 = 98.1 \text{ J} \text{ (***)}$$

gdzie:

Θ – kąt pomiędzy siłą ciężkości $\vec{F}_g$ a przemieszczeniem $\vec{d}$ na odcinku $\overline{cb}$

Podstawiając wyniki obliczeń dla równania (**) i równania (***) mamy

$$W_{ab} = 0 + 98.1 \text{ J} = 98.1 \text{ J}$$

Zadanie 8

Chłopiec o masie 35 kg jeździ na deskorolce po przeznaczonym do tego torze w kształcie półkuli o promieniu 4 m. w pewnej chwili stoi on nieruchomo na górnej krawędzi toru.

1. Jaką pracę wykona nad chłopcem siła ciężkości w czasie jego swobodnego zjazdu na dno toru? Pomijamy tarcie.

Korzystamy z zależności

$$W = -\Delta E_p$$

gdzie:

W – praca, jaką wykonają nad chłopcem obciążające go siły,

ΔE_p – zmiana energii potencjalnej

$$W_g = -(m \cdot g \cdot r)$$

gdzie:

W_g – praca wykonana nad chłopcem przez obciążające go siły, w tym przypadku siłę grawitacji,

m – masa chłopca,

r – wysokość nad punktem odniesienia (górną krawędzią toru),
w tym przypadku równa promieniowi toru

Po wprowadzeniu danych liczbowych i uwzględnieniu faktu, że wysokość nad punktem odniesienia **zmniejszyła się** o 4m mamy

$$W_g = - \left(35kg \cdot 9,81 \frac{m}{s^2} \cdot (-4m) \right) = 1,38 \cdot 10^3 J$$

2. Ile wyniesie zmiana energii potencjalnej układu chłopiec – Ziemia w czasie jego ruchu?

$$\Delta E_p = E_{pk} - E_{pp}$$

gdzie:

E_{pk} – energia potencjalna końcowa,

E_{pp} – energia potencjalna początkowa.

$$\Delta E_p = -m \cdot g \cdot r - m \cdot g \cdot 0 = -m \cdot g \cdot r$$

Po podstawieniu wartości liczbowych mamy

$$\Delta E_p = -35kg \cdot 9,81 \frac{m}{s^2} \cdot 4m = -1,38 \cdot 10^3 J$$

Zadanie 9

Kiść bananów o masie 20 kg wisi na pniu bananowca 5 m nad ziemią. Ile wynosi grawitacyjna energia potencjalna E_p układu kiść bananów – ziemia, gdy jako punkt odniesienia ($y=0$) przyjmujemy położenie:

- 1) Powierzchni ziemi,
- 2) najniższych liści bananowca znajdujących się 2 m nad ziemią,
- 3) pnia bananowca, na którym wisi kiść bananów,

- 4) najwyższych liści bananowca znajdujących się 2m nad pniem bananowca?

Zakładamy, że na powierzchni ziemi grawitacyjna energia potencjalna jest równa zero.

$$E_p = m \cdot g \cdot h$$

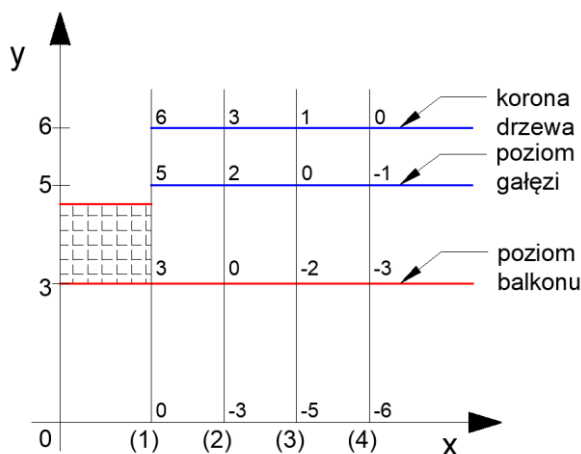
gdzie:

m – masa ciała,

g – przyspieszenie ziemskie,

h – wysokość, na której znajduje się ciało.

grawitacyjna energia potencjalna E_p układu ciało – Ziemia zależy jedynie od położenia $y(h)$ ciała w pionie, liczonego względem punktu odniesienia $y=0$.



Dla wyżej zdefiniowanych punktów odniesienia mamy odpowiednio:

- 1) $E_{p1} = m \cdot g \cdot h_1 = 20kg \cdot 9,81 \frac{m}{s^2} \cdot 5m = 981J,$
- 2) $E_{p2} = m \cdot g \cdot h_2 = 20kg \cdot 9,81 \frac{m}{s^2} \cdot 3m = 588,6J,$

$$3) E_{p3} = m \cdot g \cdot h_3 = 20kg \cdot 9,81 \frac{m}{s^2} \cdot 0m = 0J,$$

$$4) E_{p4} = m \cdot g \cdot h_4 = 20kg \cdot 9,81 \frac{m}{s^2} \cdot -(2m) = 392,4J$$

Kiść bananów zostaje ucięta i spada na ziemię. Jaka jest zmiana grawitacyjnej energii potencjalnej układu kiść bananów – Ziemia w każdym z czterech powyższych przypadków?

$$\Delta E_p = m \cdot g \cdot \Delta y$$

gdzie:

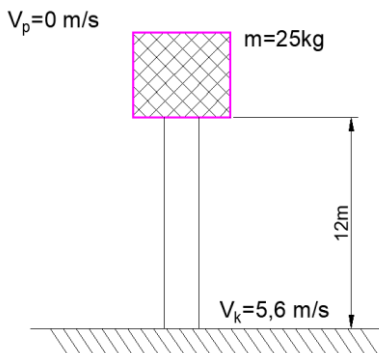
Δy – zmiana wysokości

Zmiana grawitacyjnej energii potencjalnej nie zależy od wyboru poziomu odniesienia $y=0$, zależy natomiast od zmiany wysokości Δy . We wszystkich czterech przypadkach zmiana wysokości ma wartość $\Delta y = -5m$.

$$\Delta E_p = m \cdot g \cdot \Delta y = 20kg \cdot 9,81 \frac{m}{s^2} \cdot (-5m) = -981J$$

Zadanie 10

Strażak ważący $m=75$ kg ruszając do akcji gaśniczej zjeżdża po słupie na dół. Jego prędkość początkowa 5 m nad ziemią wynosi zero, zaś prędkość w chwili dotarcia na ziemię wynosi 5 m/s.



1. Ile wynosi zmiana grawitacyjnej energii potencjalnej układu strażak – Ziemia (ΔE_p) w czasie jego zjazdu do ziemi?

$$\Delta E_p = E_{pk} - E_{pp}$$

gdzie:

E_{pp} – energia potencjalna początkowa,

E_{pk} – energia potencjalna końcowa

$$\Delta E_p = 0 - m \cdot g \cdot h = 0 - 75kg \cdot 9.81 \frac{m}{s^2} \cdot 5m = -3.67 \cdot 10^3 J$$

gdzie:

h – wysokość z jakiej zjeżdża strażak

2. Ile wynosi energia kinetyczna strażaka w chwili jego dotarcia do ziemi?

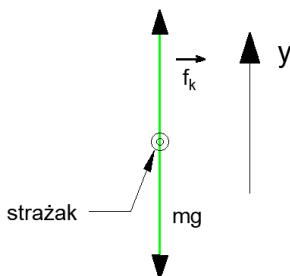
$$E_k = \frac{1}{2} \cdot m \cdot V_k^2 = \frac{1}{2} \cdot 75kg \cdot (5m/s)^2 = 937.5J$$

gdzie:

V_k – prędkość końcowa (w chwili dotarcia na ziemię) strażaka

3. Ile wynosi średnia siła tarcia działająca na strażaka w czasie jego zjazdu?

Diagram sił:



Korzystamy z II zasady dynamiki Newtona

$$f_k - m \cdot g = m \cdot a = m \cdot (g - a) (*)$$

gdzie:

f_k – średnia wartość tarcia działającego na strażaka

a – przyspieszenie strażaka

przyspieszenie a wyznaczamy z równania trzeciego (Tabela 1)

$$V_k^2 = V_p^2 + 2 \cdot a \cdot (x - x_0)$$

po którego przekształceniu otrzymujemy:

$$a = \frac{V_k^2 - V_p^2}{2 \cdot (x - x_0)} = \frac{(10 \text{ m/s})^2 - 0}{2 \cdot 5 \text{ m}} = 1 \frac{\text{m}}{\text{s}^2}$$

gdzie:

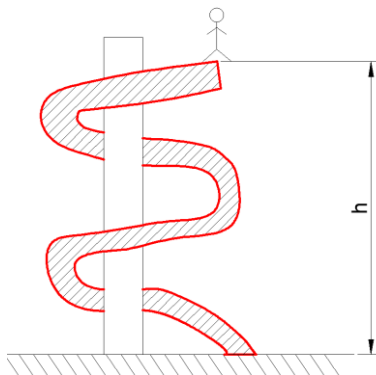
$$x - x_0 = h$$

Po wstawieniu obliczonej wartości przyspieszenia do równania (*) mamy

$$f_k = 75 \text{ kg} \cdot \left(9.81 \frac{\text{m}}{\text{s}^2} - 1 \frac{\text{m}}{\text{s}^2} \right) = 660.75 \text{ N}$$

Zadanie 11

Dziecko, siedzące nieruchomo w chwili początkowej, zaczyna ześlizgiwać się wzdłuż zjeżdżalni wodnej. Punkt startowy zjeżdżalni znajduje się na wysokości $h=10$ m nad dolnym jej końcem. Wyznacz prędkość dziecka na końcu zjeżdżalni. Pomiń wpływ tarcia.



Z treści zadania wynika, że:

- 1) Do wyznaczenia prędkości dziecka na końcu zjeżdżalni nie możemy zastosować przyspieszenia jego ruchu, bo nie znamy kąta nachylenia zjeżdżalni,
- 2) Możemy natomiast wykorzystać fakt, że prędkość związana jest z energią kinetyczną, do wyznaczenia której zastosujemy **zasadę zachowania energii mechanicznej**

W układzie izolowanym, w którym zmiana energii pochodzi jedynie od sił zachowawczych energia kinetyczna (E_k) i energia potencjalna (E_p) mogą się zmieniać, lecz ich suma czyli energia mechaniczna (E_m) nie może ulegać zmianie.

$$\Delta E_m = \Delta E_k + \Delta E_p = 0$$

$$E_{kg} - E_{kd} + E_{pg} - E_{pd} = 0$$

gdzie:

E_{kg} – energia kinetyczna na górze zjeżdżalni,

E_{kd} – energia kinetyczna na dole zjeżdżalni,

E_{pg} – energia potencjalna na górze zjeżdżalni,

E_{pd} – energia potencjalna na dole zjeżdżalni,

$$E_{kg} + E_{pg} = E_{kd} + E_{pd}$$

$$\frac{1}{2} \cdot m \cdot V_g^2 + m \cdot g \cdot y_g = \frac{1}{2} \cdot m \cdot V_d^2 + m \cdot g \cdot y_d, (*)$$

gdzie:

V_g – prędkość na górze zjeżdżalni,

Y_g – wysokość y na górze zjeżdżalni,

V_d – prędkość na dole zjeżdżalni,

Y_g – wysokość y na dole zjeżdżalni,

Równocześnie mnożąc przez 2 i dzieląc przez m równanie (*) otrzymujemy

$$V_g^2 + 2 \cdot g \cdot y_g = V_d^2 + 2 \cdot g \cdot y_d$$

a następnie:

$$V_d^2 = V_g^2 + 2 \cdot g \cdot (y_g - y_d)$$

po uwzględnieniu, że $V_g=0$ i $y_g-y_d=h$ mamy:

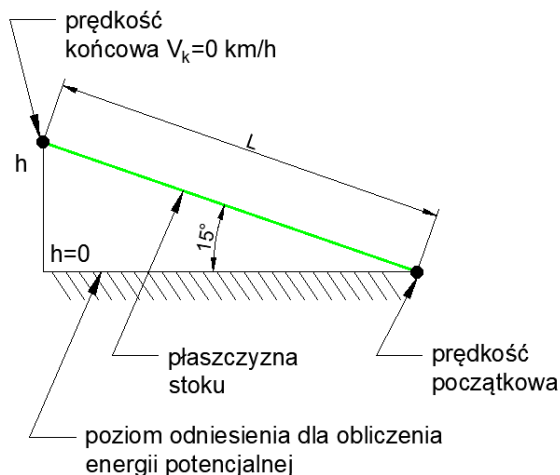
$$V_d = \sqrt{2 \cdot g \cdot h}$$

po podstawieniu danych liczbowych otrzymujemy:

$$V_d = \sqrt{2 \cdot 9,81 \frac{m}{s^2} \cdot 10m} = 14m/s$$

Zadanie 12

Jadący z prędkością 65 km/h narciarz o masie $m=80$ kg zaczyna się wznosić na stok o nachyleniu 15° . Pomijając wpływ oporów ruchu oblicz:



1. Jaką drogę L przebędzie narciarz aż do zatrzymania?

Korzystamy z zasady zachowania energii mechanicznej

$$E_{kp} + E_{pp} = E_{kk} + E_{pk} (*)$$

gdzie:

E_{kp} – energia kinetyczna początkowa,

E_{pp} – energia potencjalna początkowa, $E_{pp}=0$, bo wysokość ponad poziom odniesienia $h=0$,

E_{kk} – energia kinetyczna końcowa, $E_{kk}=0$, bo narciarz zatrzymuje się,

E_{pk} – energia potencjalna końcowa

Po uwzględnieniu powyższego równanie (*) przyjmuje postać

$E_{kp} = E_{pk}$, po kolejnych przekształceniach otrzymujemy wzór na h

$$\frac{1}{2} \cdot m \cdot V_p^2 = m \cdot g \cdot h$$

$$h = \frac{v_p^2}{2 \cdot g} (*)$$

gdzie:

h – wysokość względem poziomu odniesienia na jaką wjechał narciarz,

V_p – prędkość początkowa narciarza

Po uwzględnieniu danych liczbowych otrzymujemy

$$h = \frac{\left(18 \frac{m}{s}\right)^2}{9,81 \frac{m}{s^2}} = 33m$$

uwzględniając wzór na sinus kąta w trójkącie prostokątnym mamy

$$L = \frac{h}{\sin 15^\circ} = \frac{33m}{0.25} = 132m$$

2. Czy droga L zmieni się, gdy zmniejszymy masę narciarza?

Nie, ponieważ wartość h nie zależy od masy narciarza.

3. Czy droga L zmieni się, gdy zwiększymy prędkość narciarza?

Tak, zwiększy się, ponieważ wartość h zależy od prędkości narciarza w kwadracie.

Zadanie 13

Skoczek o masie 50 kg ma przy odbiciu z progu skoczni narciarskiej prędkość o wartości 25 m/s. Na skoczka działa siła oporu powietrza w wyniku czego w chwili lądowania w punkcie, leżącym w pionie o 20 m niżej od progu, ma on prędkość o wartości 20 m/s. O ile zmniejszyła się pod wpływem oporu powietrza energia mechaniczna układu skoczek – Ziemia w czasie jego lotu od wybiecia do lądowania na zeskoku?

Korzystamy z zasady zachowania energii mechanicznej

$$E_{kp} + E_{pp} = E_{kk} + E_{pk} + O_p$$

gdzie:

E_{kp} – energia kinetyczna początkowa,

E_{pp} – energia potencjalna początkowa,

E_{kk} – energia kinetyczna końcowa,

E_{pk} – energia potencjalna końcowa,

O_p – opory ruchu (energia rozproszona w czasie lotu)

Uwaga: za chwilę początkową przyjmujemy odbicie się skoczka z progu, a za chwilę końcową lądowanie na zeskoku. Za punkt odniesienia ($h=0$) przyjmujemy zeskok

$$E_{kp} = \frac{1}{2} \cdot m \cdot V_p^2 = \frac{1}{2} \cdot 50kg \cdot (25m/s)^2 = 15.6 \cdot 10^3 J$$

$$E_{pp} = m \cdot g \cdot h = 50kg \cdot 9.81 \frac{m}{s^2} \cdot 20m = 9.81 \cdot 10^3 J$$

$$E_{kk} = \frac{1}{2} \cdot m \cdot V_k^2 = \frac{1}{2} \cdot 50kg \cdot (20m/s)^2 = 10 \cdot 10^3 J$$

$$E_{pk} = m \cdot g \cdot h = 50kg \cdot 9.81 \frac{m}{s^2} \cdot 0m = 0 J$$

Po podstawieniu wartości liczbowych mamy

$$O_p = E_{kp} + E_{pp} - E_{kk} - E_{pk} = 15.41 \cdot 10^3 J$$

Zmiana energii mechanicznej układu skoczek – Ziemia spowodowana oporami powietrza wynosi $15.41 \cdot 10^3 J$.

Zadanie 14

Hokeista uderza krążek w kierunku bramki z prędkością początkową 150 km/h. W chwili, gdy przekracza on linię bramkową ma on prędkość 115 km/h. O ile zmniejszyła się energia mechaniczna układu krążek –

Ziemia, jeśli krążek ślizgał się cały czas po lodzie? Masa krążka hokejowego wynosi 160 g.

Do rozwiązania zadania korzystamy z zasady zachowania energii mechanicznej z tym zastrzeżeniem, że na zmianę energii mechanicznej (E_m) wpływ ma jedynie zmiana energii kinetycznej (E_k) – krążek cały czas porusza się po lodzie, więc jego energia potencjalna nie zmienia się.

$$\Delta E_m = \Delta E_k$$

$$E_{kp} = E_{kk} + O_r$$

gdzie:

E_{kp} – energia kinetyczna początkowa,

E_{kk} – energia kinetyczna końcowa,

O_r – opory ruchu (energia rozproszona w czasie ślizgania się krążka po lodzie)

$$E_{kp} = \frac{1}{2} \cdot m \cdot V_p^2 = \frac{1}{2} \cdot 0.160kg \cdot (41.67m/s)^2 = 138,91J$$

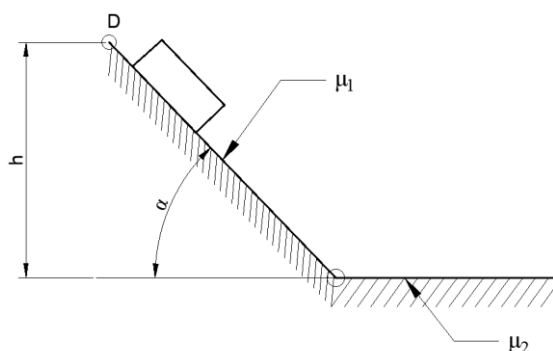
$$E_{kk} = \frac{1}{2} \cdot m \cdot V_k^2 = \frac{1}{2} \cdot 0.160kg \cdot (31.94m/s)^2 = 81.61J$$

$$\Delta E_m = O_r = 138.91J - 81.61J = 57,3J$$

4. Zadania do samodzielnego rozwiązania

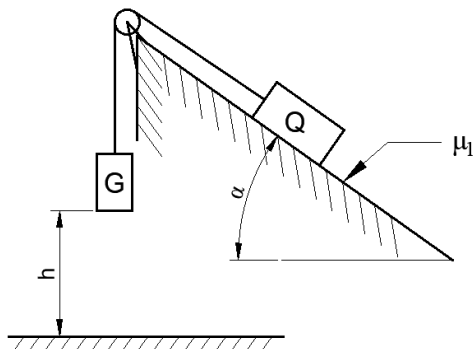
Zadanie 1

Punkt materialny o masie m zsuwa się z wysokości h wzdłuż równi pochyłej pod kątem α do poziomu, a następnie porusza się po prostej poziomej. Obliczyć jaką drogę przebędzie punkt do chwili zatrzymania, wiedząc, że ruch ciała rozpoczął się z punktu D bez prędkości początkowej. Współczynnik tarcia wynosi odpowiednio μ_1 , μ_2 .



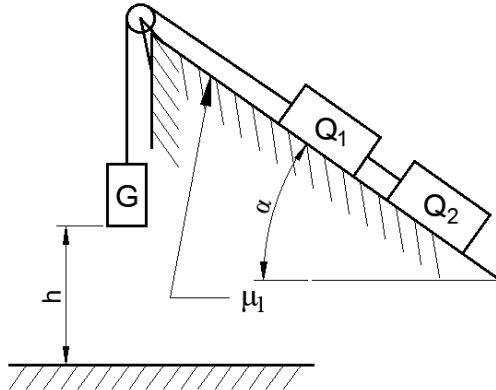
Zadanie 2

Dwa ciała o ciężarach G i Q połączono liną przerzuconą przez krążek. Wyznaczyć naciąg liny oraz prędkość ciała G po przebyciu drogi h . Tarcie w krążku pominać.

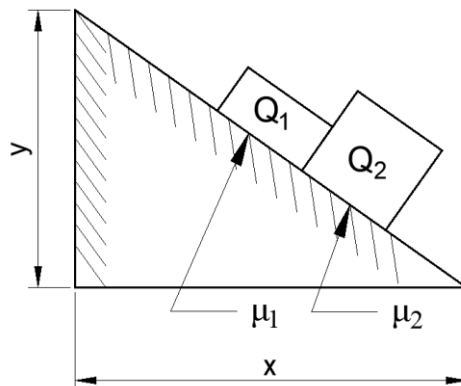


Zadanie 3

Trzy ciała o ciężarach G i Q_1, Q_2 połączono liną przerzuconą przez krążek. Wyznaczyć naciągi w linach oraz prędkość ciała G po przebyciu drogi h . Tarcie w krążku pominąć.

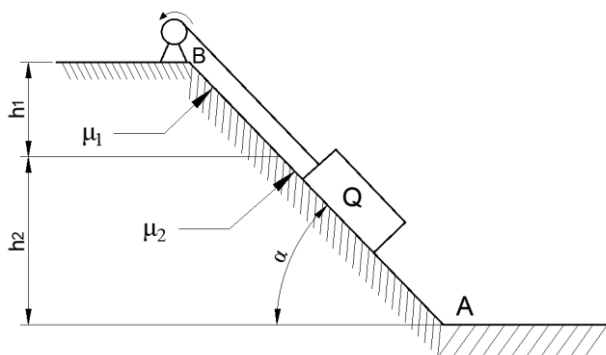
**Zadanie 4**

Dwa ciała o ciężarach Q_1 i Q_2 ustawione zostały na równi. Wysokość i szerokość równi podano na rysunku. Obliczyć przyspieszenie ciał oraz nacisk S , jaki wywiera ciało Q_1 na ciało Q_2 podczas zsuwania z równi. Dane: Q_1, Q_2 oraz współczynniki tarcia μ_1 i μ_2 . Uwaga: $\mu_2 > \mu_1$.



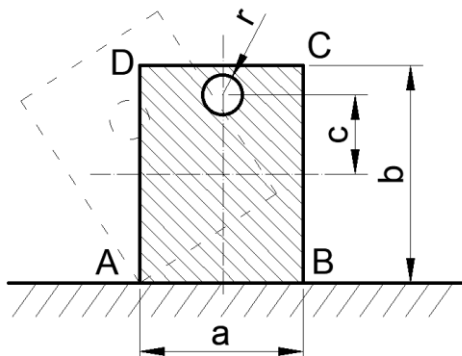
Zadanie 5

Wciągarka ustawiona jest na wysokości $h_1+h_2=8$ m i przeznaczona jest do wciągania skrzyń ładunkowych o masie Q . Wysokość h_1 wynosi 3 m. Wciągarka pracuje ze stałą prędkością na odcinku AB. Chropowatość odcinków należy traktować według rysunku. Równia nachylona jest pod kątem 45° do poziomu. Należy obliczyć pracę, jaka zostanie wykonana na odcinkach o różnej chropowatości oraz pracę całkowitą. Masa skrzyni wynosi 200 kg, a współczynnik tarcia $\mu_1=0,15$ oraz $\mu_2=0,25$.



Zadanie 6

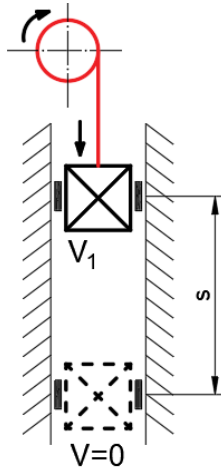
Należy wyznaczyć wartość włożonej pracy aby przewrócić figurę przedstawioną na rysunku. Jednorodny element należy przewrócić dookoła krawędzi A. Masa całkowita prostokąta (bez wycięcia) wynosi $m=3000$ kg, a długość boków $a=2$ m, $b=3,5$ m, $c=1,2$ m, $r=0,2$ m.



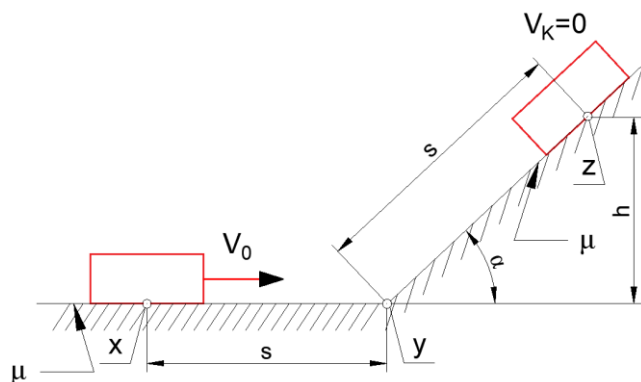
Zadanie 7

Winda towarowa opuszcza się ze stałą prędkością $V_1=0,8$ m/s. Masa windy wynosi $m=1200$ kg. Masa windy z pełnym ładunkiem wynosi 2800 kg. Na obu stronach klatki zastosowano hamulec cierny, którego zadaniem jest zahamowanie windy w chwili zerwania liny.

Obliczyć, jak wielką siłę tarcia o ściany szybu windy musi wykonać mechanizm hamulca tak aby zatrzymać spadającą windę na odcinku $s=8$ m. Siła hamowania ma wartość stałą na całej długości drogi hamowania. Obliczyć dla otrzymanej siły tarcia drogę hamowania dla windy załadowanej. Obliczyć siłę nacisku na ściany szybu wiedząc, że współczynnik tarcia $\mu=0,2$.

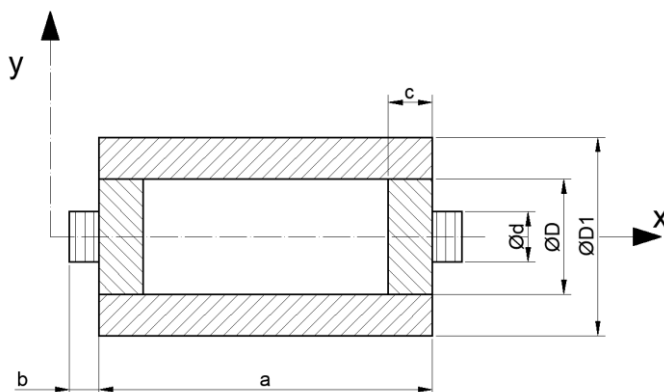
**Zadanie 8**

Na płaszczyźnie w punkcie x znajduje się ciało. Odległość punktów x i y wynosi s , kolejna odległość tzn. y i z również wynosi s . Rzutnia nachylna jest pod kątem α do poziomu. Jaką należy ciało nadać prędkość początkową V_0 aby ciało przemieściło się do punktu z. Współczynnik tarcia dla części poziomej oraz skośnej wynosi μ .



Zadanie 9

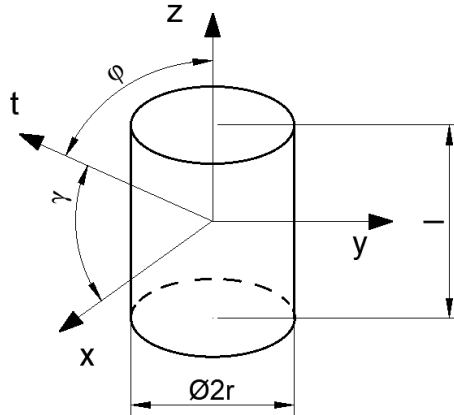
Obliczyć moment bezwładności elementu obrotowego przedstawionego na rysunku. Moment bezwładności wyznaczyć względem osi symetrii x . Wymiary elementu według rysunku. Masy elementów wynoszą odpowiednio: m_a – masa walca wydrążonego (średnica zewnętrzna $D1$), m_b – masa zaślepki o średnicy zewnętrznej D (jednej sztuki), m_c – masa części chwytowej o średnicy zewnętrznej d (jednej sztuki).⁹



⁹ M. Niezgodziński, T. Niezgodziński, *Zbiór zadań z mechaniki ogólnej*, Wydawnictwo Naukowe PWN, Warszawa 1998, s. 273.

Zadanie 10

Wyznaczyć moment bezwładności walca o masie m , promieniu r oraz wysokości l . Moment bezwładności należy wyznaczyć względem osi t przechodzącej przez środek ciężkości walca. Oś t tworzy z osią x kąt $\gamma=60^\circ$ natomiast oś t z osią z kąt $\varphi=45^\circ$.¹⁰



¹⁰ J. Leyko, J. Szmelter, *Zbiór zadań z mechaniki ogólnej*, Państwowe Wydawnictwo Naukowe, Warszawa 1976, s. 259.

Bibliografia

Cichocki K., Koprowski M., *Wybrane zagadnienia z mechaniki technicznej. Zbiór zadań ze statyki*, Wydawnictwo Państwowej Akademii Nauk Stosowanych we Włocławku, Włocławek 2022.

Leyko J., *Mechanika ogólna*, Wydawnictwo Naukowe PWN, Warszawa 2012.

Leyko J., Szmelter J., *Zbiór zadań z mechaniki ogólnej*, Państwowe Wydawnictwo Naukowe, Warszawa 1976.

Niezgodziński M., Niezgodziński T., *Zbiór zadań z mechaniki ogólnej*, Wydawnictwo Naukowe PWN, Warszawa 1998.

Piekara A., *Mechanika ogólna*, Państwowe Wydawnictwo Naukowe, Warszawa 1967.

